

N. 0206

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXXVI | Jul - Out 25 | 4,20€

RECREIO

**Voltando a Dudeney:
a Recreação Matemática
como Motor para
Novos Avanços
Matemáticos**

Hélder Pinto

APANHADOS NA REDE

**Paul Wolfskehl
e o Último
Teorema
de Fermat**

José Carlos Santos

Reflexões sobre Uma Construção de Dudeney

Rui Duarte e António Guedes
de Oliveira



XII FEIRA DA MATEMÁTICA

21 a 22
NOV
2025

SEXTA FEIRA
21 NOVEMBRO

Dirigido ao público escolar

SÁBADO
22 NOVEMBRO

Dirigido a famílias, grupos
organizados e público geral

MARQUE JÁ NA
SUA AGENDA!
PARTICIPAÇÃO GRATUITA

Informações e marcações
geral@museus.ulisboa.pt



museus.ulisboa.pt



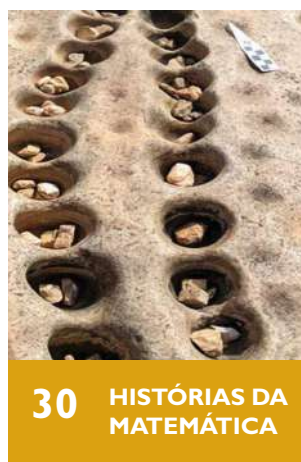
APM
Associação de Professores
de Matemática



SPE
Sociedade Portuguesa
de Estatística



12 AÇÕES DE GRUPOS FINITOS
NO TORO n -DIMENSIONAL:
O EXEMPLO DO QUOCIENTE
ESTENDIDO



- 02 EDITORIAL** | *Paulo Saraiva*
O Lugar do Autodidatismo na Matemática Contemporânea
- 04 RECREIO** | *Hélder Pinto*
Voltando a Dudeney: a Recreação Matemática como Motor para Novos Avanços Matemáticos
- 09 APANHADOS NA REDE** | *José Carlos Santos*
Paul Wolfskehl e o Último Teorema de Fermat
- 12 AÇÕES DE GRUPOS FINITOS NO TORO n -DIMENSIONAL:
O EXEMPLO DO QUOCIENTE ESTENDIDO**
Gastão Bettencourt e Sérgio Mendes
- 21 ARTE E MATEMÁTICA** | *Pedro J. Freitas*
Sobre Adília Lopes
- 24 REFLEXÕES SOBRE UMA CONSTRUÇÃO DE DUDENEY**
Rui Duarte e António Guedes de Oliveira
- 30 HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA** | *Jorge Nuno Silva*
Aritmética Etíope
- 35 MATEMÁTICA PARA A INDÚSTRIA
E INOVAÇÃO** | *Paula Amaral e Tiago Dias*
Uma Nuvem de Esferas – um Novo Modelo de Classificação Automática
- 41 MATEMÁTICA E LITERATURA** | *Nuno Camarneiro*
Habemus Papam
- 42 MATEMÁTICOS NA PRIMEIRA PESSOA**
Ana Mendes e Teresa Monteiro Fernandes
José Miguel Urbano: Um Matemático entre Culturas
- 52 BARTOON** | *Luis Afonso*
- 53 NOTÍCIAS**



PAULO SARAIVA
Universidade
de Coimbra
psaraiva@fe.uc.pt

O LUGAR DO AUTODIDATISMO NA MATEMÁTICA CONTEMPORÂNEA

Que novas possibilidades e que limitações se apresentam ao matemático autodidata dos nossos tempos?

Numa era marcada pela crescente especialização da matemática, com áreas que exigem anos de estudo formal e domínio técnico, será que ainda resta algum espaço para o autodidatismo?

Historicamente, figuras como Henry Dudeney e Srinivasa Ramanujan demonstraram que a curiosidade e a autodisciplina podem levar a contribuições notáveis. Dudeney, sem formação universitária, tornou-se um dos maiores nomes da matemática recreativa, criando quebra-cabeças que até hoje desafiam e encantam. Ramanujan, por sua vez, desenvolveu fórmulas profundas em teoria dos números com base em livros rudimentares, antes de o seu trabalho ser reconhecido por G. H. Hardy e este o ter levado para o Trinity College, Cambridge.

Hoje, o cenário é diferente. A matemática avançada tornou-se altamente técnica e fragmentada, com áreas como geometria algébrica, topologia diferencial e teoria dos números exigindo anos de formação estruturada. A linguagem formal, o rigor lógico e o acesso a redes académicas são barreiras reais e decisivas para quem procura contribuir de forma independente. Ainda assim, talvez o autodidatismo apenas tenha mudado de papel.

Em primeiro lugar, a matemática recreativa permanece um campo fértil para os autodidatas. Quebra-cabeças, lógica, jogos e visualizações matemáticas são áreas acessíveis e com grande potencial de impacto, especialmente na educação e na divulgação científica. Com a devida res-

salva de uma necessária chancela científica, as plataformas digitais permitem que entusiastas partilhem ideias e alcancem públicos amplos.

Além disso, o acesso a recursos de alta qualidade nunca foi tão amplo. Cursos gratuitos de universidades de prestígio, bibliotecas digitais e fóruns especializados (como *Stack Exchange* e *MathOverflow*) permitem que, hoje em dia, os autodidatas progridam em áreas antes restritas ao ambiente académico. Com disciplina e sentido crítico, é possível alcançar consideráveis níveis de compreensão, especialmente em campos aplicados como a estatística, a ciência de dados e a criptografia.

Outro papel relevante do autodidata moderno pode ser o de colaborador informal. Mesmo sem formação avançada, e desde que assumindo uma atitude de abertura ao diálogo e à crítica construtiva, é possível propor ideias, conjecturas ou abordagens alternativas e colaborar com matemáticos profissionais para as formalizar.

No entanto, é importante reconhecer os limites desta via. A matemática contemporânea exige validação pelos pares, domínio de linguagem técnica e inserção em redes de investigação. Contribuições significativas em áreas de fronteira são raras sem formação académica formal. O autodidata que, honestamente, procure avançar de maneira independente precisa de estar ciente das suas limitações, dos obstáculos que enfrenta e de estar disposto a procurar apoio institucional quando necessário.

Estas reflexões foram inspiradas no tema de capa da presente edição da *Gazeta*, assinado por Rui Duarte e António Guedes de Oliveira, bem como no texto de Hélder Pinto na secção Recreio, motivados pelo contributo de Dudeney a propósito de um problema por ele proposto, cuja solução foi recentemente encontrada, 120 anos após a sua formulação.

Igualmente em destaque está o artigo da secção Apanhados na Rede, na qual José Carlos Santos regressa ao

problema matemático que terá levado à publicação do maior número de demonstrações erradas – o Último Teorema de Fermat – a propósito da curiosa vida de Paul Wolfskehl e do prémio por este criado para quem conseguisse prová-lo.

Esperamos que os destaques aqui feitos lhe estimulem a curiosidade de ler tanto estes como os restantes textos da *Gazeta de Matemática* n.º 206.



LOJA
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em www.spm.pt



HÉLDER PINTO
Instituto Piaget,
Insight e CIDMA-UA
helder.pinto@ipiaget.pt

VOLTANDO A DUDENEY: A RECREAÇÃO MATEMÁTICA COMO MOTOR PARA NOVOS AVANÇOS MATEMÁTICOS

Um problema de Henry Dudeney que tem dado que pensar aos matemáticos: Qual é o número mínimo de peças necessárias para cortar um triângulo equilátero e reorganizá-las num quadrado?

O MISTÉRIO MATEMÁTICO DO PROBLEMA DE DUDENEY FOI FINALMENTE DECIFRADO APÓS 120 ANOS

“Em 1907, o matemático britânico Henry Ernest Dudeney propôs um quebra-cabeças agora famoso: Qual é o número mínimo de peças necessárias para cortar um triângulo equilátero e reorganizá-las num quadrado perfeito? [nota do autor: não são todos os quadrados perfeitos? O que é um quadrado imperfeito? Nada como adjetivar para reforçar que o quadrado terá mesmo de ser quadrado...] A solução do próprio Dudeney, revelada poucas semanas depois, exigia quatro peças. No entanto, apesar da elegância do seu método, os matemáticos debateram durante mais de um século sobre se poderia existir uma solução com menos peças. (...) A investigação prova de uma vez por todas que a solução de quatro peças de Dudeney é ótima. Utilizando uma nova abordagem matemática chamada diagramas de correspondência, a equipa excluiu sistematicamente a possibilidade de uma dissecação de duas ou três peças e demonstrou que nenhum arranjo de três ou menos peças poderia transformar com sucesso um triângulo equilátero num quadrado sem inverter as peças – uma restrição importante na solução original de Dudeney.” [1]

Por vezes, existem problemas que parecem muito simples na sua formulação, mas que conduzem a desenvol-

vimentos matemáticos que vão muito além do problema original. Quem não se lembra, por exemplo, do célebre Último Teorema de Fermat (1637), cuja demonstração durou vários séculos, sendo apenas resolvida no final do século XX, envolvendo conceitos matemáticos que eram completamente desconhecidos no tempo da sua formulação? Um outro exemplo é a Teoria de Grafos, que nasce dum problema recreativo colocado (e resolvido) por Euler em 1736; o mesmo aconteceu até com a própria Estatística, que nasce, em parte, com o estudo dos jogos de azar.

Na notícia reproduzida acima temos um destes casos, onde um problema de muito simples formulação tem conduzido a várias investigações, não no sentido de encontrar uma solução (pois o próprio Dudeney indicou uma solução correta), mas no sentido de determinar se não existe uma solução melhor, envolvendo a partição do triângulo equilátero em menos peças. Como é bem conhecido, problemas de otimização nem sempre são fáceis de atacar... Veja-se o exemplo do famoso Teorema das 4 cores (onde se mostra que é possível pintar um mapa plano com apenas quatro cores, de tal modo que nenhuns dois países vizinhos tenham a mesma cor), cuja demonstração também se mostrou muito difícil de completar (apenas em 1976, usando várias horas de trabalho computacional).

Agora que sabe que a solução ótima envolve quatro peças, consegue o leitor resolver o problema proposto por Dudeney?

Aproveitando que estamos a deter-nos sobre este fa-

moso autor, vejamos mais alguns problemas do seu célebre livro *Os Enigmas de Canterbury* [2]. Refira-se que todos os problemas de Dudeney possuem sempre uma história associada, algumas vezes, bastante elaborada e intrincada. Por exemplo, o problema anterior do triângulo equilátero é apresentado neste livro como um problema envolvendo um merceeiro e peregrinos ([2], pp. 56-57).

25. O ENIGMA DO MERCEEIRO

Fizeram-se muitas tentativas, por muito tempo infrutíferas, para convencer o Merceeiro que tinha de propor um enigma de qualquer tipo. Por fim, numa das paragens dos peregrinos, disse que lhes apresentaria algo que «lhes iria dar cabo da cabeça».

De facto, estava a pregar-lhes uma partida, pois ele ignorava se existia uma resposta para o enigma que lhes apresentava. Mostrou um pedaço de tecido em forma de triângulo equilátero perfeito, como se vê na ilustração, e disse: «Algun de vós é destre no corte de tecido? Estimo que não. Cada homem com o seu ofício, e o estudioso pode aprender do lacaio, e o sábio do néscio. Mostrem-me, pois, se conseguem, de que maneira se pode cortar este pedaço de tecido em quatro peças, para que se possam reunir e formar um quadrado perfeito.»

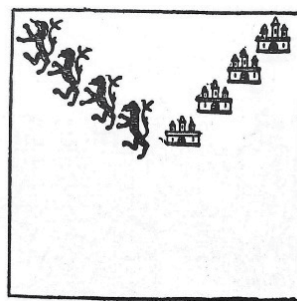


Neste enigma, Dudeney acrescenta ainda mais um parágrafo à história apresentada, onde relata que o merceeiro “salva-se por pouco de uma sova”, pois não sabia resolver o enigma que propôs aos peregrinos... Propor problemas de matemática pode ser perigoso! (Por isso, Dudeney avisou desde logo os seus leitores que ele sabia resolver o problema.)

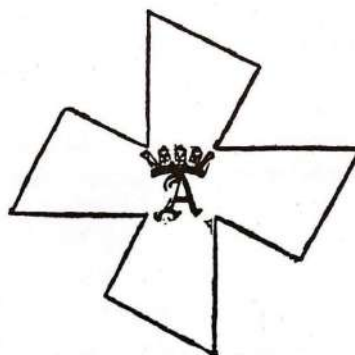
Propomos agora ao leitor alguns outros problemas do mesmo tipo (versão simplificada, sem a história associada):

- O Enigma do Tecelão ([2], p. 41): Como particionar a peça quadrada abaixo em quatro partes iguais de

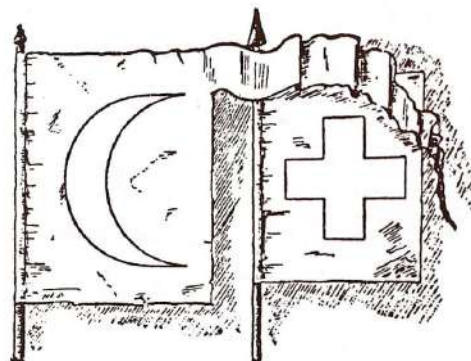
modo que cada uma delas contenha exatamente um leão e um castelo?



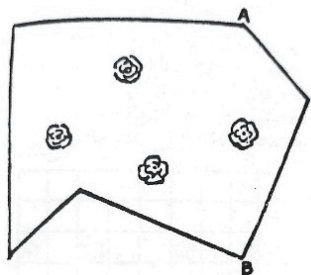
- O Enigma da Abadessa ([2], p. 48): Como particionar a peça abaixo em quatro partes, de modo que, reorganizando as peças, se construa um quadrado?



- A Meia-lua e a Cruz ([2], p. 74): Como particionar a lua da figura abaixo de modo a construir a cruz da bandeira à direita? (Nota: a bandeira é igual nas duas faces, pelo que as peças se podem reverter se necessário; como se depreende da figura, a história de Dudeney envolvia cavaleiros na Terra Santa, no tempo das cruzadas.)

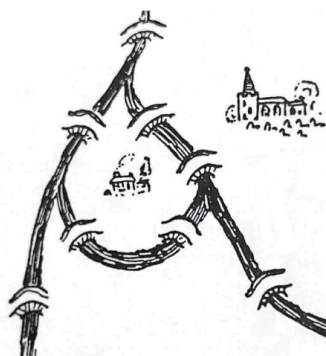


► **Fazer uma Bandeira** ([2], p. 147): Dividir o pedaço de tecido representado a seguir em duas peças, de modo a construir uma bandeira quadrada, onde as rosas sejam colocadas simetricamente. (Nota: não é possível cortar as rosas, nem usar o tecido do avesso; pode não parecer pela figura, mas todas as linhas são retas e o vértice superior esquerdo e o vértice B são retos.)



Deixo ainda uma nota pessoal para o facto de eu nunca ter gostado deste tipo de desafios de transformação de uma imagem noutra, pois tenho sempre muita dificuldade em perceber, sequer como fazer, alguma tentativa que faça sentido. Por exemplo, como particiono a meia-lua de modo a deixar de ter linhas curvas? De facto, Dudeney deixa a sugestão de se começar por transformar a meia-lua num quadrado (cortando-a em quatro peças), antes de se avançar para o problema da cruz.

Uma última nota para o facto de Dudeney, neste livro, também apresentar o seu próprio problema de pontes – o **Enigma do Pároco** ([2], pp. 54-55) – muito similar ao de Euler:



“Observem que na ramificação do rio há uma ilha. Sobre essa ilha ergue-se a minha pobre casa paroquial, e todos vocês podem ver os arredores da igreja da povoação. Vejam bem, também, que só existem oito pontes, e não mais, que atravessam o rio na minha paróquia. A caminho

da igreja, costumo visitar várias pessoas do meu rebanho, e ao fazer isso atravesso todas e cada uma das pontes, uma e uma só vez. Algum de vós consegue encontrar o caminho que desta maneira percorro, de casa para a igreja, sem sair da paróquia?”

E ainda se deixa um aviso aos potenciais engraçadinhos... : “Não, não, meus amigos. Nunca atravesso um rio num bote, nem a nado, não o passo a vau, não vou por baixo de terra como a toupeira, nem voou pelo ar como a águia; só atravesso as pontes.”

Qual a solução deste enigma das pontes?

A MATEMÁTICA NAS NOTÍCIAS:

1. O que eu me irrito com filmes que têm viagens no tempo!

“O paradoxo do avô é possível? Matemático italiano sugere solução para hipótese de viagem no tempo. (...) O paradoxo do avô, que foi popularizado em histórias de ficção científica no século XX, faz um ensaio sobre um viajante do tempo que altera eventos do passado que impediriam a sua própria existência. Um exemplo clássico é o de alguém que volta no tempo e impede o casamento de seus avós, gerando uma contradição lógica: se o viajante não nasceu, como poderia ter voltado no tempo? Gavassino explica que a solução para esse enigma está nas leis físicas que regem o comportamento da matéria e da energia. Assim, o matemático explora os chamados CTCs (closed timelike curves, ou curvas temporais fechadas), um conceito da física que admite a possibilidade de trajetórias que retornam ao ponto de partida no espaço-tempo. Segundo ele, a segunda lei da termodinâmica impede que contradições persistam, exigindo que todas as ações realizadas durante a viagem sejam revertidas. Isso inclui o apagamento completo de memórias do viajante ao final do loop.” [3]

Os negritos acima são meus; ora aqui está uma solução que dá cabo de todos os argumentos de filmes que envolvem viagens no tempo... Segundo este matemático, todas as ações realizadas numa viagem temporal são revertidas, isto é, no regresso ao presente, teríamos tudo exatamente como estava e nada seria alterado... (Não adianta voltarmos atrás no tempo e assassinar Hitler antes da sua subida ao poder!) E pior, numa viagem de ida e volta ao futuro, nem os números futuros do Euromilhões saberíamos depois da nossa viagem (se assim for, as viagens no tempo acabam

por ser completamente inúteis e mais vale gastar as nossas energias para melhorar o nosso presente!). O que se perde nos enredos cinematográficos ganho eu em não me enervar com as evidentes contradições deste tipo de filmes!

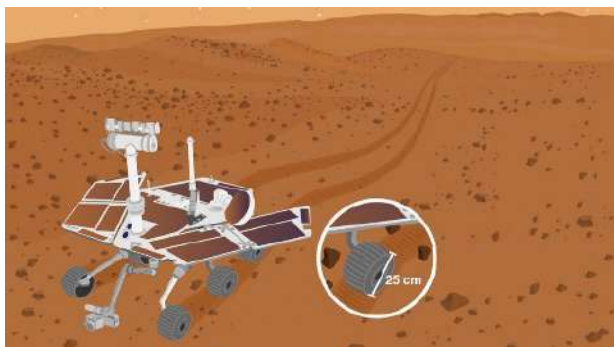
Uma observação ainda para o facto de a notícia acima ter sido escrita por IA e não por um jornalista real. De facto, temos de pensar muito bem, enquanto sociedade, no impacto que a IA está, e vai continuar, a ter nas nossas vidas e quais as consequências, por exemplo, éticas, que tudo isto irá ter na nossa sociedade.

2. O dia do Pi para a NASA

"You may already know all about the mathematical constant π and how it can be used to calculate things like the circumference of a circle or the volume of a sphere. But did you know π is also used all the time by NASA scientists and engineers to explore other planets? In this challenge, you can solve some of the same problems NASA scientists and engineers do using π !" [4]

Março é o Mês da Matemática, tendo havido eventos comemorativos em vários pontos do mundo (e em Portugal também). No site da NASA, a agência norte-americana para a investigação espacial, podem encontrar-se variadíssimos módulos / projetos matemáticos, muito interessantes, envolvendo o Pi sempre no contexto das atividades desta agência (estrelas, planetas, órbitas, naves, forças gravíticas, etc.). Um dos mais simples é o seguinte problema (traduzido do original):

A Maratona em Marte. O Mars Exploration Rover Opportunity está a conduzir no Planeta Vermelho há mais de 11 anos – nada mau para uma missão planeada para durar apenas três meses! O Opportunity já bateu o recorde de distância de condução fora da Terra, que era de 39 quilómetros, e está a aproximar-se da distância de uma maratona: 42,195 quilómetros.



Quando o Opportunity atingir a marca da maratona, quantas vezes terão rodado as suas rodas de 25 centímetros de diâmetro? (Nota nossa: está a partir-se do princípio, claro, de que não houve, em momento algum, derrapagem das rodas do pequeno veículo da NASA.)

3. Promoções no Dia do Pi

"March 14 is commonly referred to as Pi Day, a day that aims to celebrate the ratio of the circumference of a circle (...). While the day is popular in math circles, it is also a day for those looking to score great deals on actual pie, pizza pie and other circular treats." [5]

Pelos vistos, o Dia do Pi está a deixar a matemática para se tornar mais um dia especial temático para certas empresas, especialmente pizzarias, fazerem promoções (Dia do Pai, Dia da Mãe, Dia dos Namorados, Halloween, Black Friday... Já se torna difícil acompanhar tanto dia para comprarmos coisas!...). Será que esta moda comercial do Dia do Pi também já chegou a Portugal (eu, pelo menos, não encontrei nenhuma destas promoções "circulares")?



Em [6] pode ainda observar-se um curioso vídeo, usando as bordas externas de uma pizza, dispostas em linha reta nos diâmetros de outras quatro pizzas, "provando" que o perímetro é um pouco maior do que três diâmetros. E também se usa muitas vezes as pizzas para ensinar frações! Parece que, afinal, as pizzas e a matemática têm muito para partilhar entre si.



SOLUÇÕES DOS DESAFIOS PROPOSTOS NO NÚMERO ANTERIOR:

Considerem-se as seguintes duas jornadas.

Jornada 1				
Leça do Balio	2	-	4	New Team
Infesta	2	-	3	Padroense
Salgueiros	2	-	0	Coimbrões
Panther Force	3	-	0	Serzedo
Jornada 2				
New Team	2	-	4	Infesta
Padroense	0	-	4	Salgueiros
Coimbrões	0	-	0	Panther Force
Serzedo	10	-	1	Benfica VN Gaia

Se a transitividade fosse válida, teríamos o seguinte:

Salgueiros > Coimbrões = Panther Force > Serzedo > Benfica VNG;

Salgueiros > Padroense > Infesta > New Team > Leça do Balio.

Logo, conclui-se que o Salgueiros é melhor do que todas as outras oito equipas e, portanto, será o vencedor do campeonato. As restantes posições ainda não podem ser determinadas, pois, por exemplo, ainda não é possível comparar qualquer uma das equipas de cima com qualquer uma das equipas de baixo e vice-versa (exceto o Salgueiros, claro). Isto é, por exemplo, apenas conseguimos indicar que o Padroense estará entre o 2.º e o 6.º lugares, e não mais do que isso, pois este clube ainda pode ser pior, ou não, do que Coimbrões, Panther Force, Serzedo e Benfica VNG.

Em relação à questão de como podemos comparar equipas com número diferente de jogos, a solução que propomos é usar o número de pontos perdidos por cada equipa (pois esses nunca mais podem ser recuperados).

		P	J	V	E	D
1	 AD Grijó	33	11	11	0	0
2	 Valadares Gaia	30	11	10	0	1
3	 SC Arcozelo B	24	12	8	0	4
4	 Serzedo	23	11	7	2	2
5	 FC Pedroso	23	12	7	2	3
6	 Avintes	17	12	5	2	5
7	 CD Candal	15	11	5	0	6

Deste modo, a tabela anterior ficaria assim ordenada:

Posição	Clube	Pontos perdidos	Média de pontos
1	Grijó	0	3
2	Valadares	3	2,73
3	Serzedo	10	2,09
4	Arcozelo	12	2
5	Pedroso	13	1,92
6	Candal	18	1,36
7	Avintes	19	1,42

Poderia pensar-se que a média de pontos por jogo seria uma boa medida para ordenar os clubes, mas não é assim. Observem-se os casos do Avintes e do Candal: o Candal está em melhor situação, pois pode ainda ultrapassar o Avintes se ganhar o seu jogo em atraso, apesar de ainda ter pior média de pontos por jogo (ver coluna mais à direita da tabela acima).

Deixamos a seguir as soluções dos desafios de Mariano Mataix, propostos no último número:

1. O Quebrantahuesos ganhou 2-0 à Unión Deportiva.
2. O erro está no h dos golos sofridos pela equipa A, que devia ser r , cujo valor é 5.

Até ao próximo número do nosso Recreio!

[1] n.d., ZAP.aeiou, 14 de março de 2025; <https://zap.aeiou.pt/misterio-matematico-dudeney-decifrado-665568>

[2] Dudeney, H. (2008). *Os Enigmas de Canterbury*. RBA.

[3] nIA Bot (Ferramenta de inteligência artificial), *Exame*, 9 de janeiro de 2025; <https://exame.com/tecnologia/o-paradoxo-do-avo-e-possivel-matematico-italiano-sugere-solucao-para-teoria-de-viagem-no-tempo>

[4] NASA, fevereiro de 2025; <https://www.jpl.nasa.gov/edu/resources/project/the-nasa-pi-day-challenge>

[5] Gabe Hauari, *USA Today*, 13 de março de 2025; <https://eu.usatoday.com/story/money/food/2025/03/13/national-pi-day-2025-deals-freebies/82231034007>

[6] <https://www.facebook.com/reel/355773433000502>



JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

PAUL WOLFSKEHL E O ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT

O Prémio Wolfskehl foi criado para quem conseguisse demonstrar o último teorema de Fermat. Iremos ver a história de quem o criou e porquê.

Em 1621, foi publicada a primeira tradução para latim da *Aritmética* de Diofanto, um matemático que viveu em Alexandria no séc. III a.C. Um problema que surge naquele livro é o seguinte: como é que se pode escrever um quadrado perfeito como soma de dois quadrados perfeitos? No caso no qual o quadrado é 16, a solução que Diofanto dá consiste em $16 = (16/5)^2 + (12/5)^2$. Como se pode ver, Diofanto não estava interessado somente em soluções inteiras.

Cerca de 15 anos após a publicação desta tradução, Pierre de Fermat escreveu (em latim) na margem do seu exemplar, ao lado do problema atrás mencionado, que “É impossível escrever um cubo como soma de dois cubos, uma quarta potência como soma de duas quartas potências ou, mais geralmente, uma potência de grau superior a dois como soma de duas potências do mesmo grau.” Acrescentou ainda que dispunha de uma demonstração maravilhosa deste facto e que a margem era demasiado pequena para a conter.

A fama de Fermat foi crescendo com o passar dos anos e, em meados do séc. XVIII, este era o único enunciado dele que não estava demonstrado nem refutado. Passou a ficar conhecido como “último teorema de Fermat”, embora, como é óbvio, não fosse um teorema, visto que não estava demonstrado.

Será que Fermat tinha realmente uma demonstração? O mais provável é que ele tenha acabado por se aperceber de que não. A favor desta ideia temos o facto de Fermat ter mencionado a diversos correspondentes, como desafio, o seu teorema nos casos específicos dos expoentes 3



Figura 1. Pierre de Fermat

e 4 (veja-se [5, pp. 13 e 24]), mas nunca o caso geral. Mas Fermat demonstrou que uma quarta potência nunca se pode escrever como a soma de uma quarta potência com um quadrado perfeito, de onde se deduz que uma quarta potência não pode ser escrita como soma de duas quartas potências. Resulta daqui que, para demonstrar o último teorema de Fermat, basta fazê-lo para expoentes primos. A partir de meados do séc. XVIII, diversos matemáticos (tais como Euler, Legendre ou Dirichlet) demonstraram o teorema para vários expoentes. A partir de meados do séc. XIX, surgem tentativas, por parte de Sophie Germain

e de Ernst Kummer, de demonstrar o teorema de uma só vez para conjuntos de expoentes, e não apenas para expoentes isolados. E também houve bastantes tentativas falhadas de demonstrar o teorema em toda a generalidade. É atribuída ao historiador Howard Eves a afirmação segundo a qual “O último teorema de Fermat distingue-se particularmente por ser o problema matemático que levou à publicação do maior número de demonstrações erradas” (veja-se [3, p. 591]).

Falemos agora de Paul Wolfskehl (veja-se [1]). Este nasceu em 1856 e era o mais novo dos dois filhos de um banqueiro. Licenciou-se em Medicina em 1880 (o retrato que se pode ver aqui foi tirado por esta altura), mas começou então a revelar sintomas de esclerose múltipla, o que o levou a mudar de carreira. Estudou Matemática (tendo tido Kummer como professor) até 1883 e tornou-se professor na Universidade Técnica de Darmstadt a partir de 1887, tendo parado de dar aulas em 1890, ao ficar totalmente paralisado. Faleceu em 1906 e deixou no seu testamento 100.000 marcos como prémio a ser atribuído a quem conseguisse demonstrar o último teorema de Fermat.¹

Porque é que Paul Wolfskehl criou este prémio? Ele não deixou nenhum documento a explicar a sua decisão. O que é certo é que a família o convenceu a casar-se, por precisar de apoio contínuo, coisa que ele fez em 1903. No entanto, o casamento correu muito mal e logo em 1905 Paul Wolfskehl alterou o seu testamento, acrescentando-lhe o prémio atrás descrito. Conjetura-se que isto foi feito para reduzir o dinheiro que seria herdado pela sua viúva.

Há uma hipótese alternativa, que foi divulgada por Philip J. Davis em [2, cap. 1]. Davis, por sua vez, ouviu-a do matemático ucraniano Alexander Ostrowski. Segundo esta teoria, Paul Wolfskehl teria querido suicidar-se por causa de uma paixão não correspondida. Tratou então de tudo de uma maneira sistemática. Colocou todos os seus assuntos em ordem e decidiu o método, o dia e a hora do suicídio. Naquele que deveria ser o seu último dia de vida, foi à sua biblioteca e começou a folhear um artigo de matemática. Aconteceu tratar-se de um trabalho de Kummer sobre o último teorema de Fermat e Wolfskehl ficou com a impressão de que havia um erro de lógica ali e ficou horas e examiná-lo. Quando finalmente se convenceu de que afinal não havia qualquer erro, a hora prevista para o suicídio já tinha passado. O resultado deste estudo do último teorema de Fermat foi um interesse renovado na matemática e a decisão de continuar



Figura 2. Paul Wolfskehl

a viver. Teria sido esta sequência de eventos que o teria levado a criar o prémio.²

A entidade encarregada de gerir o prémio foi a Academia de Ciências de Göttingen, a qual divulgou as regras relativas ao prémio em julho de 1908 (podem ser vistas em [4, §1.7]). O prémio só estaria em vigor até 13 de setembro de 2007 e, para ser atribuído, teria de ser publicado numa revista científica e a atribuição só teria lugar dois anos após a publicação.

O valor do prémio era muito elevado, o que atraiu um grande número de propostas de demonstração do teorema. Só no primeiro ano após a criação do prémio, a Academia de Ciências de Göttingen recebeu 621 dessas supostas soluções e estima-se que, no total, tenha recebido mais de 5000. As supostas soluções eram (desde que cumprissem os critérios fixados para o prémio) enviadas para o Instituto de Matemática da Universidade de Göttingen, onde eram examinadas por um assistente. Após isso, o autor do texto recebia um comentário, onde o erro ou os erros da suposta demonstração eram expostos.

Quando o matemático brasileiro Paulo Ribenboim estava a redigir o seu livro [4], escreveu ao doutor Schlichting, do instituto atrás referido, a pedir informações

sobre o prémio. Este respondeu-lhe dizendo, entre outras coisas, que³

“Chegam cerca de três a quatro cartas com propostas por mês que contêm muito material divertido e curioso tal como, por exemplo, uma enviando-me a primeira metade da solução e prometendo o resto caso eu lhe pagasse 1000 marcos adiantados. Ou outro que me prometeu 10% dos lucros que ele iria ter das publicações e das entrevistas que iria dar à rádio e à televisão após se ter tornado famoso, desde que eu o apoiasse agora; caso contrário, ele ameaçava enviar a solução a um departamento de matemática na Rússia, privando-nos assim da glória de o termos descoberto. Por vezes, alguém surge em Göttingen e faz questão de ter uma conversa pessoal. Quase todas as “soluções” estão escritas num nível muito elementar (usando noções de matemática do Ensino Secundário ou talvez alguns artigos mal digeridos de Teoria dos Números), mas podem, no entanto, ser muito difíceis de compreender. Socialmente, os autores são frequentemente pessoas com formação científica mas com uma carreira falhada, que tentam encontrar sucesso com uma resolução do problema de Fermat. Mostrei alguns dos manuscritos a médicos, os quais diagnosticaram esquizofrenia aguda.”

Em 1993, o matemático britânico Andrew Wiles anunciou ter demonstrado o último teorema de Fermat. Depois disso, foi descoberta uma afirmação não justificada na demonstração, mas o próprio Wiles, com a ajuda de um antigo aluno, acabou por provar o que faltava e, finalmente, a demonstração foi publicada em 1995 (veja-se [6]). Consequentemente, Wiles recebeu o prémio Wolfskehl dois anos depois, em 1997, ou seja, dez anos antes de o prémio deixar de poder ser atribuído.

De facto, pode dizer-se que Andrew Wiles ganhou todos os prémios que é de esperar que um matemático possa ganhar, exceto o mais famoso, que é a medalha Fields. O motivo pelo qual não recebeu este último foi porque, pelo respetivo regulamento, é preciso ter-se, no máximo, 40 anos de idade a 1 de janeiro do ano no qual a medalha é atribuída. Como Wiles nasceu a 11 de abril de 1953, só poderia, no máximo, receber a medalha na edição de 1994. Mas nessa altura o hiato na demonstração ainda não tinha sido colmatado e, na edição seguinte, que teve lugar em 1998, Wiles já ultrapassara o limite de idade.

E quanto ao valor monetário do prémio? Inicialmente era muito elevado, mas depois, com a hiperinflação que houve na Alemanha no período entre as duas guerras mundiais, o seu valor desceu bastante. Apesar disso, de todos os prémios monetários atribuídos a Andrew Wiles, houve somente um (curiosamente chamado Prémio Wolf) de valor mais elevado do que o montante recebido por ele no âmbito do Prémio Wolfskehl (aproximadamente 30 000 libras esterlinas).

Isto encerra a história do Prémio Wolfskehl. Poderia pensar-se que também encerraria a história das tentativas de demonstrar o último teorema de Fermat, mas não é esse o caso. Continua a haver amadores que propõem supostas demonstrações elementares do teorema, talvez convencidos de que redescobriram a demonstração perdida de Fermat. Mas é um facto que a demonstração de Wiles é muito complexa e é natural que se tente encontrar uma mais simples. É bem possível que um dia se consiga fazer isso.

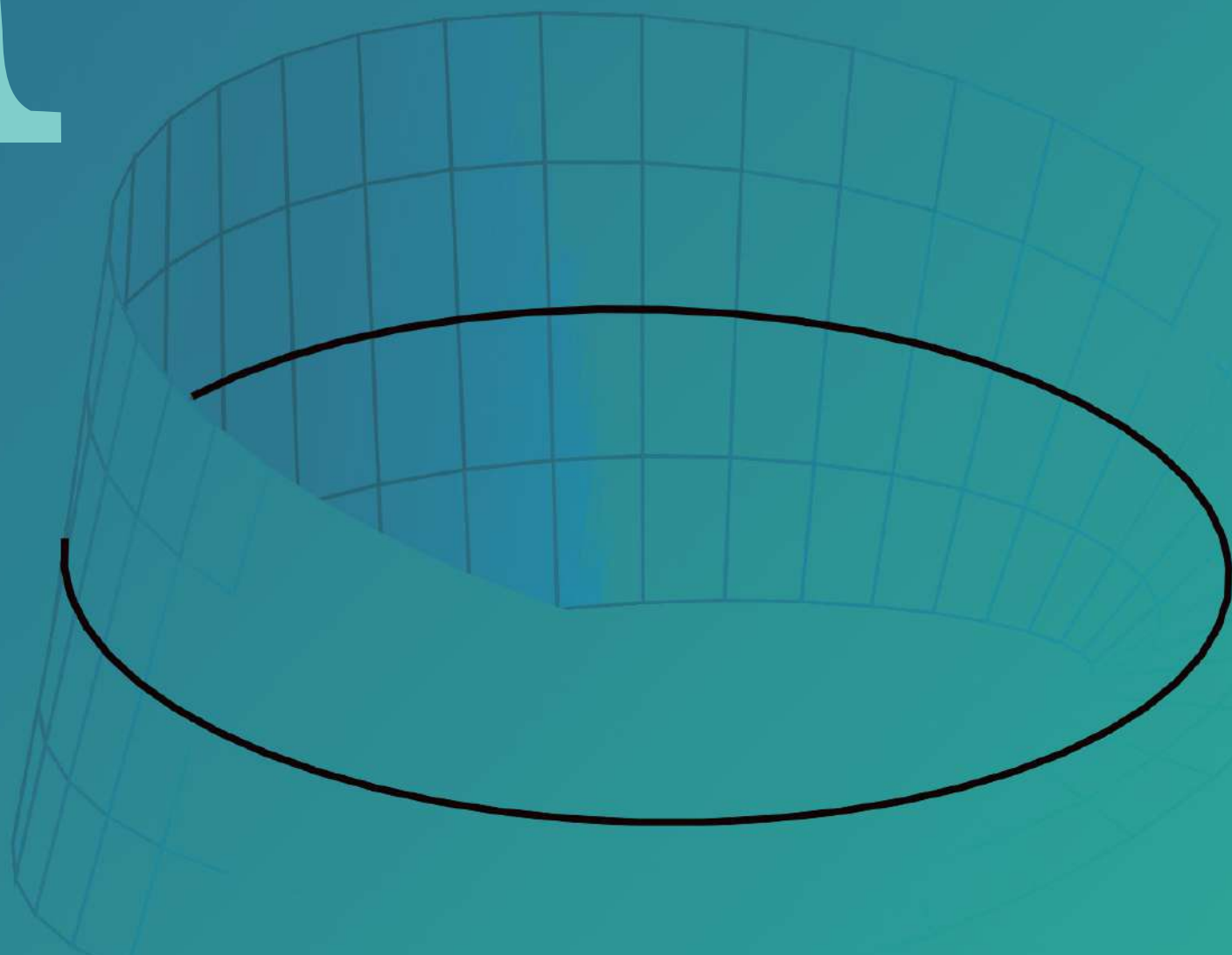
BIBLIOGRAFIA

- [1] Klaus Barner, “Paul Wolfskehl and the Wolfskehl Prize”, *Notices Amer. Math. Soc.* **44**(10), pp. 1294–1303, 1997
- [2] Philip J. Davis; William G. Chinn, *3.1416 and All That*, Birkhäuser, 1985
- [3] Thomas Koshy, *Elementary Number Theory with Applications*, 2nd edition, Academic Press, 2007
- [4] Paulo Ribenboim, *13 Lectures on Fermat’s Last Theorem*, Springer-Verlag, 1979
- [5] Paulo Ribenboim, *Fermat’s Last Theorem for amateurs*, Springer-Verlag, 1999
- [6] Simon Singh, *A solução do último teorema de Fermat*, Reclio de Água, 1997

¹ Simon Singh, *The Wolfskehl Prize: The History Behind the Most Famous Prize in Mathematics*, <https://simonsingh.net/media/articles/maths-and-science/the-wolfskehl-prize/>

² Veja-se também *Uma moça formosa, o último Teorema de Fermat e o Prémio Wolfskehl*, de Arnaldo Gunzi, <https://ideiasesquecidas.com/2021/11/15/uma-moca-formosa-o-ultimo-teorema-de-fermat-e-o-premio-wolfskehl/>

³ Convém levar em conta o facto de que esta carta foi escrita em 1974.



AÇÕES DE GRUPOS FINITOS NO TORO n -DIMENSIONAL: O EXEMPLO DO QUOCIENTE ESTENDIDO

GASTÃO BETTENCOURT^a e SÉRGIO MENDES^b

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR E CENTRO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES DA UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR^a,

ISCTE - IUL E CENTRO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES DA UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR^b,

gastao@ubi.pt^a e sergio.mendes@iscte-iul.pt^b

INTRODUÇÃO

Um matemático, um físico e um químico encontram-se e alguém pergunta qual a estrutura algébrica com mais aplicações nas respetivas áreas. Ao contrário das histórias habituais, é provável que a resposta seja a mesma: a teoria dos grupos.

Os grupos são uma representação abstrata da simetria de determinado objeto (estrutura algébrica, espaço métrico, figura geométrica, ou um objeto físico como um cristal). Cada elemento do grupo corresponde a um tipo de simetria desse objeto. Por exemplo, um quadrado no plano pode ser identificado pelos seus vértices, $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. O conjunto das simetrias do quadrado, que representamos por $\text{Sym}(X)$, corresponde ao grupo diedral com oito elementos, D_8 : quatro rotações ($0, \pi/2, \pi$ e $3\pi/2$ radianos) e quatro reflexões através dos quatro eixos de simetria (as duas diagonais, a horizontal e a vertical). Dizemos, então, que o grupo D_8 atua no quadrado e escrevemos $D_8 \curvearrowright X$ para indicar essa ação.

Genericamente, dado um objeto X , uma maneira natural de obter um grupo é precisamente considerar as simetrias de X , $G = \text{Sym}(X)$. Este grupo G vem naturalmente equipado com uma ação $G \curvearrowright X$ em X , ou seja, uma função

$$G \times X \rightarrow X,$$

que iremos denotar simplesmente por $(g, x) \mapsto g \cdot x$. Nesse sentido, uma simetria é um automorfismo de X , isto é, uma bijeção de X em si próprio, que preserva a estrutura de X (algébrica, topológica, geométrica, etc.).

O quociente estendido generaliza o espaço quociente para a ação de um grupo finito num espaço topológico localmente compacto X . São apresentados vários exemplos e calculados em detalhe os casos da ação dos grupos simétrico S_n e cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no toro n -dimensional $\mathbb{T}^n$.

Vejamos um outro exemplo: o conjunto $[n] = \{1, \dots, n\}$ de n elementos. Dado que $[n]$ não tem, *a priori*, nenhuma estrutura, as suas simetrias são dadas simplesmente pelo conjunto das bijeções $[n] \rightarrow [n]$, ou seja, as permutações dos elementos de $[n]$ que correspondem ao grupo simétrico $\text{Sym}([n]) = S_n$. A ação $S_n \curvearrowright [n]$ é dada por $\sigma \cdot k = \sigma(k)$, com $\sigma \in S_n$ e $k \in [n]$.

Há várias razões para estudarmos ações de grupos. Por exemplo, quando os objetos têm uma estrutura “complicada”, pode ser útil representá-los através de objetos mais simples ou mais conhecidos, como matrizes. Esta ideia serve de base à teoria das representações. Por outro lado, certos grupos podem ter eles próprios uma estrutura “complicada”, sendo útil conhecer a sua ação em certos conjuntos. Um exemplo da teoria dos números é o grupo de Galois absoluto $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, formado pelos automorfismos do fecho algébrico $\overline{\mathbb{Q}}$ do corpo dos racionais, que fixam $\mathbb{Q}$.

Por vezes, a ação do grupo num objeto não preserva qualquer informação sobre o grupo. Um exemplo desse fenómeno ocorre precisamente no caso mais simples, quando o objeto é o conjunto com um único ponto. Usando uma ideia de Alain Connes e de Paul Baum [3], é possível modificar o objeto e definir uma nova ação, de modo que alguma informação sobre o grupo seja sempre preservada. Ao objeto assim obtido chamamos quociente estendido (ver [2] para uma breve introdução).

Para simplificar a abordagem, vamos considerar ações de grupos finitos, nomeadamente o grupo simétrico S_n e o grupo cíclico com n elementos $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, no toro n -dimensional $\mathbb{T}^n$. Estas ações encontraram recentemente aplicação numa conjectura geométrica, conhecida por conjectura ABPS (acrónimo de Aubert-Baum-Plymen-Solleveld), cuja formulação necessita de alguma sofisticação matemática que não pretendemos neste artigo. O leitor interessado poderá consultar [1] para mais detalhes. No entanto, os autores acham o conceito de quociente estendido, que definiremos na secção 2, suficientemente simples e interessante para o darem a conhecer aos leitores da *Gazeta de Matemática*.

Este texto é inspirado em notas manuscritas do segundo autor, baseadas na palestra dada por Roger Plymen no seminário *K-theory Day* na Universidade de Manchester, em fevereiro de 2005. O *K-theory Day* foi um seminário regional de matemática no Reino Unido, apoiado pela London Mathematical Society durante quase uma década, e cujas atividades se deveram em grande parte ao empenho de Roger Plymen (Universidade de Manchester), Jazek

Brodzki (Universidade de Southampton) e Ulrike Tillmann (Universidade de Oxford).

1. O ESPAÇO COM UM ÚNICO PONTO

Antes de motivar e enunciar o problema, e para conveniência do leitor, relembremos a definição de ação de um grupo e de espaço das órbitas. Para evitar demasiado formalismo, as definições serão introduzidas ao longo do texto consoante sejam necessárias, e sem preocupação de grande generalidade, mas apenas o estritamente necessário para a exposição.

Seja X um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff. Seja G um grupo finito (naturalmente munido da topologia discreta). Uma *ação* (à esquerda) *contínua* de G em X é uma função contínua

$$\alpha : G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto \alpha(g, x)$$

que, para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in X$, verifica as propriedades

$$(i) \alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$$

$$(ii) \alpha(e, x) = x,$$

onde e denota a identidade do grupo G . Como habitualmente, usaremos a notação abreviada que já mencionámos na introdução, $\alpha(g, x) = g \cdot x$.

Exemplo 1.1. Um outro exemplo elementar é a ação do grupo multiplicativo $\mathbb{K}^\times$ de um corpo $\mathbb{K}$ no conjunto $\mathbb{K}^n$ ($n \geq 1$)

$$\mathbb{K}^\times \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, (\lambda, x) \mapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

com $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Esta ação está na génese da definição da estrutura de $\mathbb{K}^n$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

A *órbita* de um elemento $x \in X$ é o subconjunto de X definido por

$$G \cdot x = \{\gamma \cdot x : \gamma \in G\}.$$

O espaço quociente (ou espaço das órbitas) obtém-se fazendo colapsar cada órbita num ponto

$$X/G = \{G \cdot x : x \in X\}.$$

Exemplo 1.2. Como ilustração, vamos identificar o espaço das órbitas do exemplo 1.1, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $n = 2$. O espaço das órbitas é o conjunto

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^\times &= \{\mathbb{R}^\times \cdot (x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{ \{(\lambda x_1, \lambda x_2) : \lambda \in \mathbb{R}^\times\} : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \{(0, 0)\} \sqcup \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

onde $\sqcup$ representa a união disjunta e $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ o espaço projetivo real, cujos pontos (ou órbitas) são as retas no plano que passam na origem. Escolhendo como representante de cada reta o ponto do círculo unitário, concluímos que o espaço das órbitas é homeomorfo à união disjunta formada por um ponto e o círculo unitário, que denotamos por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$:

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^\times \cong \{(0, 0)\} \sqcup \mathbb{T}.$$

Consideremos o caso mais elementar de ação de um grupo: o espaço formado por um único ponto, $X = \{\text{pt}\}$, no qual atua um grupo discreto G . A questão fundamental, já colocada por Pierre Cartier no excelente artigo [5], é tentar perceber que informação podemos obter a partir do espaço das órbitas X/G . O quociente usual (ao longo do texto, usamos o adjetivo *usual* para distinguir de outros modelos de espaço quociente) é simplesmente

$$\{\text{pt}\}/G = \{g \cdot \text{pt} : g \in G\} = \{\text{pt}\},$$

ou seja, o grupo G , e a informação que ele contém, desaparece no espaço das órbitas.

Armand Borel sugeriu em [4] substituir $\{\text{pt}\}$ por um espaço contrátil EG (uma vez que todo o espaço contrátil é homotopicamente equivalente a um ponto), onde G atua livremente. O novo espaço das órbitas ou espaço quociente (usaremos a notação $//$ para distinguir do quociente usual), nesse caso, seria

$$\{\text{pt}\} // G = EG/G = BG, \quad (1)$$

onde BG é a base do espaço EG visto como fibrado principal de grupo G .

No caso geral em que G atua no espaço X , o espaço das órbitas é substituído pelo quociente

$$X // G = (X \times EG)/G, \quad (2)$$

com a ação diagonal. Claro que (2) se reduz a (1) quando $X = \{\text{pt}\}$. Um exemplo concreto é

$$\{\text{pt}\} // \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n,$$

onde $\mathbb{T}^n$ denota o toro n -dimensional (abreviadamente, n -toro) dado pelo produto direto de n cópias do círculo unitário $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

2. O QUOCIENTE ESTENDIDO

Vamos agora introduzir o quociente estendido, de acordo com [3], e analisar o caso do espaço com um único ponto. Suponhamos que existe uma ação $G \curvearrowright X$. Para cada $x \in X$, denotamos por G_x o estabilizador de x

$$G_x = \{\gamma \in G : \gamma \cdot x = x\}.$$

É sabido que G_x é um subgrupo de G , também conhecido em certos contextos como o subgrupo de isotopia de x .

Construa-se o seguinte espaço topológico para a topologia produto

$$\widetilde{X} = \{(x, \gamma) \in X \times G : \gamma \cdot x = x\},$$

no qual existe uma ação natural de G à esquerda, $G \times \widetilde{X} \rightarrow \widetilde{X}$, definida por

$$g \cdot (x, \gamma) = (g \cdot x, g \cdot \gamma) = (g \cdot x, g\gamma g^{-1}). \quad (3)$$

Ou seja, a ação de G em $\widetilde{X}$ na primeira coordenada é a ação $G \times X \rightarrow X$ original e na segunda coordenada é dada por automorfismos internos.

Para cada $\gamma \in G$, seja X^γ o conjunto de todos os pontos em X fixos pela ação de γ , dado por

$$X^\gamma = \{x \in X : \gamma \cdot x = x\},$$

e seja $Z(\gamma)$ o estabilizador de γ em G . O estabilizador é, neste caso, o centro de γ em G (daí a notação)

$$\begin{aligned} Z(\gamma) &= \{g \in G : g\gamma = \gamma g\} \\ &= \{g \in G : g\gamma g^{-1} = \gamma\} \\ &= \{g \in G : g \cdot \gamma = \gamma\}. \end{aligned}$$

Definição 2.1. O quociente estendido $X//G$ é o quociente usual $\widetilde{X}/G$ para a ação $G \times \widetilde{X} \rightarrow \widetilde{X}$ definida em (3).

O quociente estendido $X//G$ é um espaço topológico. Uma vez que a projeção $\widetilde{X} \rightarrow X$, $(x, \gamma) \mapsto x$ é G -equivariante, i.e, comuta com a ação do grupo, a projeção

$$X \times G \rightarrow X, (x, \gamma) \mapsto x$$

induz a projeção do quociente estendido no quociente usual

$$\rho : X//G \rightarrow X/G, g \cdot (x, \gamma) \mapsto g \cdot \gamma,$$

a qual desempenha um papel fundamental na conjectura ABPS referida na introdução.

Como o conjunto das órbitas de uma ação define uma partição do espaço X indexada nas classes de conjugação $C\ell(G)$, se representarmos a união disjunta de dois conjun-

tos disjuntos A e B por $A \sqcup B$, conclui-se que o quociente estendido é dado pela união disjunta

$$X//G = \bigsqcup_{[\gamma] \in C\ell(G)} X^\gamma / Z(\gamma). \quad (4)$$

Esta caracterização do quociente estendido é particularmente útil nos cálculos. Tendo em conta a discussão na secção anterior, a questão natural é que informação sobre o grupo G é possível manter no caso trivial do quociente estendido $\{\text{pt}\} // G$? O próximo exemplo responde a esta questão.

Exemplo 2.2. Aplicando a definição 2.1, vem

$$\begin{aligned} \{\text{pt}\} // G &= \{g \cdot (\text{pt}, \gamma) : \gamma \cdot \text{pt} = \text{pt}\} \\ &= \{(g \cdot \text{pt}, g \cdot \gamma) : g \in G\} \\ &= \{(\text{pt}, g\gamma g^{-1}) : g \in G\} \\ &= C\ell(G). \end{aligned}$$

Portanto, o quociente estendido, $\{\text{pt}\} // G$, permite-nos obter as classes de conjugação de G .

Recordemos que uma ação é livre se apenas a identidade $e \in G$ fixa algum ponto de X , isto é,

$$\exists x \in X : \gamma \cdot x = x \Rightarrow \gamma = e.$$

Estamos em condições de enunciar e demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 2.3. Dado o quociente estendido $X//G$, tem-se:

(i) $X//G$ contém o quociente usual X/G ;

(ii) Se a ação de G em X é livre, então $X//G = X/G$.

A demonstração é elementar atendendo a que, para $\gamma = e$, $X^\gamma / Z(\gamma) = X/G$. Por outro lado, se a ação é livre, então

$$\widetilde{X} = \{(x, \gamma) \in X \times G : \gamma \cdot x = x\} = \{(x, e) \in X \times G\} \cong X.$$

Eis dois exemplos não elementares de quociente estendido. No primeiro exemplo, o grupo cíclico de ordem 2, $G = \mathbb{Z}_2 = \langle \gamma \rangle$, atua no círculo unitário $\mathbb{T}$ por conjugação. Para simplificar a notação, iremos representar o grupo cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de ordem n por $\mathbb{Z}_n$.

Exemplo 2.4. Seja $X = \mathbb{T}$, $G = \mathbb{Z}_2$ e considere-se a ação por conjugação, $\gamma \cdot z = \bar{z}$. Então, atendendo a (4), um cálculo simples permite concluir que

$\mathbb{T} // \mathbb{Z}_2 = \mathbb{T} / \mathbb{Z}_2 \sqcup \{\text{pt}_1, \text{pt}_2\} \cong [0, 1] \sqcup \{\text{pt}_1, \text{pt}_2\}$,
onde $\{\text{pt}_1, \text{pt}_2\}$ são dois pontos isolados.

No segundo exemplo, o grupo $\mathbb{Z}_2$ atua no 2-toro por permutação das coordenadas.

Exemplo 2.5. O grupo $\mathbb{Z}_2$ atua no 2-toro por permutação das coordenadas, $\gamma \cdot (z_1, z_2) = (z_2, z_1)$. Como há apenas duas classes de conjugação, $\{e\}$ e $\{\gamma\}$, e como $X^\gamma = \{(z, z) : z \in \mathbb{T}\} \cong \mathbb{T}$, tem-se:

$$\mathbb{T}^2 // \mathbb{Z}_2 = \mathbb{T}^2 / \mathbb{Z}_2 \sqcup \mathbb{T} = \mathbf{Mb} \sqcup \mathbb{T},$$

onde $\mathbf{Mb}$ é a banda de Möbius. Podemos visualizar o quociente estendido através da figura 1.

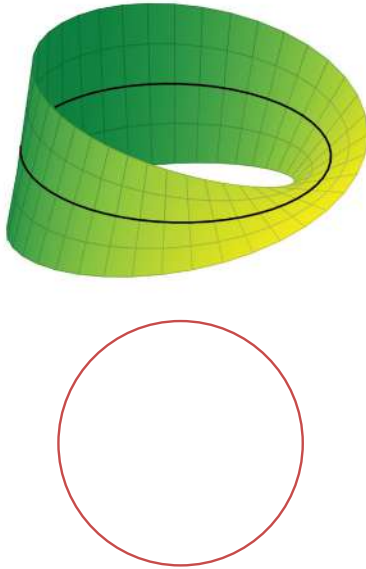


Figura 1. O quociente estendido $\mathbb{T}^2 // \mathbb{Z}_2$.

3. O QUOCIENTE ESTENDIDO $\mathbb{T}^n // S_n$

O resto do artigo é dedicado à generalização do exemplo 2.5. Começamos com o grupo simétrico S_n , que atua no n -toro $\mathbb{T}^n$ por permutação das coordenadas:

$$\gamma \cdot (z_1, \dots, z_n) = (z_{\gamma(1)}, \dots, z_{\gamma(n)}),$$

com $\gamma \in S_n$ e $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{T}^n$.

É conhecida a existência de uma bijeção entre o tipo de uma permutação γ de S_n , caracterizado pelo números de ciclos de um certo comprimento, e as partições de n

$$\{[\gamma] \in \mathcal{Cl}(S_n)\} \leftrightarrow \{\text{partições de } n\}.$$

Cada classe de conjugação é caracterizada por um tipo.

Exemplo 3.1. À partição

$$12 = 3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 2 \times 3 + 3 \times 2,$$

associamos a permutação

$$\gamma = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12) \in S_{12},$$

cujo tipo é caracterizado por dois ciclos de comprimento 3 e três ciclos de comprimento 2. Qualquer outra permutação de S_{12} com o mesmo tipo, ou seja, com dois ciclos de comprimento 3 e três ciclos de comprimento 2, pertence à mesma classe de conjugação.

Seja $\gamma \in S_n$ a permutação associada à partição

$$n = r_1 n_1 + r_2 n_2 + \dots + r_k n_k, \quad n \geq n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 1, \quad (5)$$

onde r_i é o número de ciclos de comprimento n_i no tipo de γ . O conjunto dos pontos fixos pela ação de γ é dado por

$$X^\gamma = \{(\underbrace{a_{11}, \dots, a_{11}}_{n_1}, \dots, \underbrace{a_{1r_1}, \dots, a_{1r_1}}_{n_1}, \underbrace{a_{21}, \dots, a_{21}}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_{2r_2}, \dots, a_{2r_2}}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_{k1}, \dots, a_{k1}}_{n_k}, \dots, \underbrace{a_{kr_k}, \dots, a_{kr_k}}_{n_k}), \quad a_{ij} \in \mathbb{T}\}.$$

O estabilizador do elemento γ associado à partição (5), que para esta ação é o mesmo que o centralizador, não é fácil de calcular. De acordo com [7, pp. 295-296], o estabilizador de γ é dado pelo produto entrelaçado (*wreath product*)

$$Z(\gamma) = \mathbb{Z}_{n_1} \wr S_{r_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_k} \wr S_{r_k}.$$

Pela definição de produto entrelaçado, cada $\mathbb{Z}_{n_i} \wr S_{r_i}$ é o produto semidireto $\mathbb{Z}_{n_i}^{r_i} \rtimes S_{r_i}$. O leitor interessado poderá consultar as páginas 66 e 269 de [7] para as definições, respetivamente, de produto semidireto e produto entrelaçado. Assim, o centralizador $Z(\gamma)$ é dado pelos produtos semidiretos

$$Z(\gamma) = \mathbb{Z}_{n_1}^{r_1} \rtimes S_{r_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_k}^{r_k} \rtimes S_{r_k}.$$

Vejamos como determinar $X^\gamma / Z(\gamma)$ a partir da discussão anterior. O elemento γ permuta os blocos com o mesmo tamanho n_i , que estão repetidos r_i vezes, o que corresponde ao grupo simétrico S_{r_i} . Por outro lado, os elementos de cada bloco são permutados ciclicamente, o que corresponde ao grupo cíclico $\mathbb{Z}_{n_i}$. Tendo em conta que os vários grupos cíclicos $\mathbb{Z}_{n_1}, \dots, \mathbb{Z}_{n_k}$ atuam trivialmente no conjunto dos pontos fixos X^γ , vem que

$$\begin{aligned}
X^\gamma/Z(\gamma) &= \{(a_{11}, \dots, a_{1r_1}) : a_{1i} \in \mathbb{T}\}/S_{r_1} \\
&\cdots \times \{(a_{21}, \dots, a_{2r_2}) : a_{2i} \in \mathbb{T}\}/S_{r_2} \\
&\cdots \times \{(a_{k1}, \dots, a_{kr_k}) : a_{ki} \in \mathbb{T}\}/S_{r_k} \\
&= \mathbb{T}^{r_1}/S_{r_1} \times \mathbb{T}^{r_2}/S_{r_2} \times \cdots \times \mathbb{T}^{r_k}/S_{r_k}.
\end{aligned}$$

Denotaremos o quociente $\mathbb{T}^n/S_n$, que corresponde aos n -uplos não ordenados do círculo unitário, por $\text{Sym}^n(\mathbb{T})$, ao qual damos o nome apropriado de n -ésimo *produto simétrico*. No exemplo 2.5, a banda de Möbius é o produto simétrico (note que $S_2 = \mathbb{Z}_2$)

$$\mathbf{Mb} = \mathbb{T}^2/S_2 = \text{Sym}^2(\mathbb{T}).$$

Assim, o quociente $X^\gamma/Z(\gamma)$ é precisamente um produto direto de produtos simétricos

$$X^\gamma/Z(\gamma) = \text{Sym}^{r_1}(\mathbb{T}) \times \text{Sym}^{r_2}(\mathbb{T}) \times \cdots \times \text{Sym}^{r_k}(\mathbb{T}).$$

Acabámos de provar a seguinte fórmula para o quociente estendido:

Proposição 3.2. *Seja $\mathbb{T}^n$ o n -toro onde o grupo simétrico S_n atua por permutação das coordenadas. Então, o quociente estendido para essa ação é dado por*

$$\mathbb{T}^n//S_n = \bigsqcup_{[\gamma] \in \mathcal{Cl}(S_n)} \text{Sym}^{r_1}(\mathbb{T}) \times \text{Sym}^{r_2}(\mathbb{T}) \times \cdots \times \text{Sym}^{r_k}(\mathbb{T}),$$

onde cada classe $[\gamma] \in \mathcal{Cl}(S_n)$ corresponde a uma partição $n = r_1 n_1 + r_2 n_2 + \cdots + r_k n_k$, com

$$n \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1.$$

Para ilustrar o resultado anterior, vamos calcular os quocientes estendidos $\mathbb{T}^n//S_n$ para $n = 3$ e $n = 6$.

Exemplo 3.3. *Há três partições de $n = 3$*

$$3 + 0, \quad 2 + 1, \quad 1 + 1 + 1,$$

cujos quocientes $X^\gamma/Z(\gamma)$ são, respetivamente,

$$\mathbb{T}, \quad \mathbb{T}^2, \quad \mathbb{T}^3/S_3 = \text{Sym}^3(\mathbb{T}).$$

Portanto, o quociente estendido é, neste caso,

$$\mathbb{T}^3//S_3 = \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T}^2 \sqcup \text{Sym}^3(\mathbb{T}).$$

Exemplo 3.4. *O inteiro $n = 6$ tem um total de 11 partições*

$$\begin{aligned}
&6 + 0, \quad 5 + 1, \quad 4 + 2, \quad 4 + 1 + 1, \quad 3 + 3, \quad 3 + 2 + 1, \quad 3 + 1 + 1 + 1, \\
&2 + 2 + 2, \quad 2 + 2 + 1 + 1, \quad 2 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,
\end{aligned}$$

onde se conclui que

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}^6//S_6 &= \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T}^2 \sqcup \mathbb{T}^2 \sqcup \mathbb{T} \times \text{Sym}^2(\mathbb{T}) \sqcup \text{Sym}^2(\mathbb{T}) \\
&\sqcup \mathbb{T}^3 \sqcup \mathbb{T} \times \text{Sym}^3(\mathbb{T}) \sqcup \text{Sym}^3(\mathbb{T}) \sqcup \text{Sym}^2(\mathbb{T}) \\
&\times \text{Sym}^2(\mathbb{T}) \sqcup \mathbb{T} \times \text{Sym}^4(\mathbb{T}) \sqcup \text{Sym}^6(\mathbb{T}).
\end{aligned}$$

Ao analisarmos os exemplos anteriores, verificamos que a primeira componente é o círculo unitário, $\mathbb{T}$, que corresponde à identidade $\gamma = e$, ou seja, à partição $n + 0$, enquanto a última componente é o produto simétrico máximo $\text{Sym}^n(\mathbb{T})$. Esta última componente corresponde à classe de conjugação representada por um ciclo de ordem n , $\gamma = (1 \ 2 \ \dots \ n) \in S_n$. O centralizador desse ciclo, $Z(\gamma) = \mathbb{Z}_n$, atua trivialmente no conjunto dos pontos fixos $X^\gamma = \{(a, a, \dots, a) \in \mathbb{T}^n\}$. Portanto,

$$X^\gamma/Z(\gamma) \cong \mathbb{T}/\mathbb{Z}_n = \mathbb{T}.$$

Em resumo, se a ordem pela qual escrevemos as partições for a dos exemplos anteriores, qualquer quociente estendido $\mathbb{T}^n//S_n$ tem primeira e última componentes $\mathbb{T}$ e $\text{Sym}^n(\mathbb{T})$, i.e.,

$$\mathbb{T}^n//S_n = \mathbb{T} \sqcup \cdots \sqcup \text{Sym}^n(\mathbb{T}).$$

4. O QUOCIENTE ESTENDIDO $\mathbb{T}^n//\mathbb{Z}_n$

Nesta secção consideramos a ação de $G = \mathbb{Z}_n$ em $X = \mathbb{T}^n$ por permutação cíclica das coordenadas. Sendo $\mathbb{Z}_n$ um grupo abeliano, cada elemento $\gamma \in \mathbb{Z}_n$ é uma classe de conjugação, isto é, $\mathcal{Cl}(\mathbb{Z}_n) = \{[\gamma] = \{\gamma\} : \gamma \in \mathbb{Z}_n\}$. Além disso, o centralizador de qualquer elemento γ é todo o grupo, $Z(\gamma) = \mathbb{Z}_n$. Naturalmente, tal como acontecia com $G = S_n$, $X^e/Z(e) = \mathbb{T}^n/\mathbb{Z}_n$.

Para calcular o quociente estendido, precisamos de determinar o conjunto dos pontos fixos X^γ , com $\gamma \neq 1$. Como a ação é a mesma de S_n em $\mathbb{T}^n$, a estratégia é ver $\mathbb{Z}_n$ como um subgrupo de S_n .

Para facilitar a análise, usaremos nesta secção a notação multiplicativa para o grupo cíclico de ordem n (naturalmente isomorfo ao grupo cíclico aditivo, e que se costuma representar por C_n , mas que, por comodidade, continuamos a representar por $\mathbb{Z}_n$):

$$\mathbb{Z}_n \cong \langle \gamma \rangle = \langle (1 \ 2 \ \dots \ n) \rangle = \{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}\}.$$

Deve notar-se que cada elemento γ^i atua em $\mathbb{T}^n$ movendo cada coordenada para a direita i posições (*right shift*). Esta abordagem traduz-se em considerar como gerador de $\mathbb{Z}_n$ o ciclo de ordem n , $\gamma = (1 \ 2 \ \dots \ n)$, que desloca cada coordenada de $\mathbb{T}^n$ uma posição para a direita.

Começamos por estudar a estrutura de $\mathbb{T}^n//\mathbb{Z}_n$ no

caso em que $n = p$ é um número primo. Cada elemento $\gamma_i \neq e$ do grupo $\mathbb{Z}_p$ é um ciclo de comprimento p . Portanto, o conjunto dos pontos fixos X^{γ_i} é igual para todo $\gamma_i \neq e$, sendo dado por:

$$X^{\gamma_i} = \{(a, a, \dots, a) : a \in \mathbb{T}\} \cong \mathbb{T}.$$

Naturalmente, a ação de $Z(\gamma_i) = \mathbb{Z}_n$ em X^{γ_i} é trivial, pelo que $X^{\gamma_i}/Z(\gamma_i) \cong \mathbb{T}$, para qualquer $0 < i < p$. Conclui-se que os $p - 1$ elementos $\gamma_i \neq e$ em $\mathbb{Z}_p$ contribuem com $p - 1$ cópias de $\mathbb{T}$ para o quociente estendido.

Proposição 4.1. *Seja $n = p$ um número primo e $\mathbb{T}^p$ o p -toro onde o grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$ atua por permutação das coordenadas. Então, o quociente estendido para essa ação é dado por*

$$\mathbb{T}^p // \mathbb{Z}_p = \mathbb{T}^p / \mathbb{Z}_p \sqcup \underbrace{\mathbb{T} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}}_{p-1}.$$

É de notar que a ordem das várias componentes do quociente estendido neste caso, com $G = \mathbb{Z}_n$, é diferente do caso $G = S_n$, uma vez que as classes de conjugação são agora os n elementos de $\mathbb{Z}_n$.

Exemplo 4.2. Para $n = 3$,

$$\mathbb{T}^3 // \mathbb{Z}_3 = \mathbb{T}^3 / \mathbb{Z}_3 \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T}.$$

Geometricamente, o quociente usual $\mathbb{T}^3 / \mathbb{Z}_3$ é homeomorfo ao produto de um círculo unitário $\mathbb{T}$ com uma 2-esfera (isto é, a fronteira de uma esfera em $\mathbb{R}^3$), ou seja, $\mathbb{T}^3 / \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{T} \times S^2$, pelo que o quociente estendido pode ser visualizado através da figura 2.

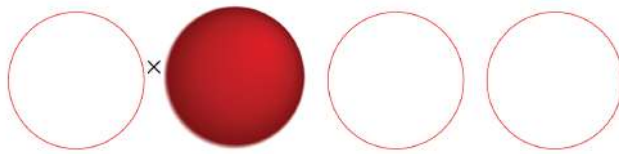


Figura 2. O quociente estendido $\mathbb{T}^3 // \mathbb{Z}_3$.

Exemplo 4.3. No caso $n = 7$, o quociente estendido é dado por

$$\mathbb{T}^7 // \mathbb{Z}_7 = \mathbb{T}^7 / \mathbb{Z}_7 \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T}.$$

Antes de considerarmos o caso geral $G = \mathbb{Z}_n$, é elucidativo analisar um número composto. Vejamos o caso $n = 6$.

Exemplo 4.4. Podemos representar o grupo cíclico $\mathbb{Z}_6$

como o subgrupo de S_6 gerado pelo ciclo $\gamma = (123456)$:

$$\mathbb{Z}_6 = \{e, (123456), (135)(246), (14)(25)(36), (153)(264), (165432)\}.$$

A contribuição de cada elemento (neste caso, cada elemento corresponde a uma classe de conjugação) é a seguinte:

► Naturalmente, $\gamma^0 = e$ contribui com o quociente usual $\mathbb{T}^6 / \mathbb{Z}_6$.

Por outro lado, para cada $0 < i \leq 5$, os elementos γ^i com ciclo do mesmo tipo têm o mesmo comportamento.

► Os elementos γ^1 e γ^5 são do mesmo tipo, $6 = 6 + 0 = 1 \times 6$, correspondendo a um ciclo de comprimento 6. Note que as potências, que podemos ver como índices, $i = 1, 5$, são primos relativos com 6. Ambos contribuem com duas cópias de $\mathbb{T}$.

► γ^2 e γ^4 são do mesmo tipo, $6 = 3 + 3 = 2 \times 3$, estando associados a dois ciclos de comprimento 3. Os índices não são primos relativos com 6, uma vez que $\text{m.d.c.}(2, 6) = \text{m.d.c.}(4, 6) = 2$. Um simples cálculo mostra que os pontos fixos são dados por

$$X^{\gamma^2} = X^{\gamma^4} = \{(a, b, a, b, a, b) : a, b \in \mathbb{T}\}.$$

Portanto, contribuem cada um com uma cópia de $\mathbf{Mb} = \mathbb{T}^2 / \mathbb{Z}_2$ (a banda de Möbius) para o quociente estendido

$$\begin{aligned} X^{\gamma^2} / Z(\gamma^2) &= X^{\gamma^4} / Z(\gamma^4) = \{(a, b, a, b, a, b) : a, b \in \mathbb{T}\} / \mathbb{Z}_6 \\ &\cong \{(a, b) : a, b \in \mathbb{T}\} / \mathbb{Z}_2 = \mathbb{T}^2 / \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

► γ^3 é o único elemento com ciclo do tipo $6 = 2 + 2 + 2 = 3 \times 2$, isto é, três ciclos de comprimento 2, contribuindo com

$$\begin{aligned} X^{\gamma^3} / Z(\gamma^3) &= \{(a, b, c, a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{T}\} / \mathbb{Z}_6 \\ &\cong \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{T}\} / \mathbb{Z}_3 = \mathbb{T}^3 / \mathbb{Z}_3. \end{aligned}$$

Assim, o quociente estendido para $n = 6$ é dado por

$$\mathbb{T}^6 // \mathbb{Z}_6 = \mathbb{T}^6 / \mathbb{Z}_6 \sqcup \mathbb{T}^3 / \mathbb{Z}_3 \sqcup \mathbb{T}^2 / \mathbb{Z}_2 \sqcup \mathbb{T}^2 / \mathbb{Z}_2 \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T}.$$

Impõe-se um comentário sobre o exemplo anterior. Quando i varia nos divisores de $n = 6$, os quocientes usuais $\mathbb{T}^i / \mathbb{Z}_i$ surgem no quociente estendido $\mathbb{T}^6 // \mathbb{Z}_6$. Além disso, cada quociente $\mathbb{T}^i / \mathbb{Z}_i$ aparece repetido k vezes, onde k é tal que $1 < k \leq n - 1$ e $i = \text{m.d.c.}(k, n)$. Dito de outra forma, os quocientes $\mathbb{T}^i / \mathbb{Z}_i$ correspondem aos elementos que têm o mesmo ciclo $n = i \times c$, onde c é o

comprimento dos ciclos disjuntos que aparecem no tipo do elemento (todos com ciclo de igual comprimento).

A análise anterior leva-nos a considerar a seguinte questão: dado o subgrupo cíclico $\langle (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r) \rangle$ de $\mathbb{Z}_n$, qual a estrutura cíclica dos seus elementos, isto é, qual a estrutura cíclica de uma potência

$$(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r)^m \in \langle (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r) \rangle?$$

A resposta é dada pelo seguinte resultado.

Lema 4.5. ([6]) *Para cada número natural m , à potência $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r)^m$ correspondem exatamente m.d.c. (r, m) fatores cíclicos disjuntos, todos eles de comprimento $\frac{r}{\text{m.d.c.}(r, m)}$.*

Antes de enunciar o resultado principal desta secção, recordemos a *função totiente de Euler*, denotada por ϕ . Dado um inteiro positivo n , o valor $\phi(n)$ corresponde ao número de inteiros entre 1 e n que são primos relativos com o inteiro n :

$$\phi(n) = |\{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq n, \text{m.d.c.}(k, n) = 1\}|.$$

Numa interpretação mais algébrica, a função ϕ conta o número de elementos invertíveis no anel $\mathbb{Z}_n$, ou seja, a ordem do grupo das unidades $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$ do anel $\mathbb{Z}_n$

$$\phi(n) = |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)|.$$

Por exemplo, considerando os representantes 1, 2, 3, 4, 5, 6 de $\mathbb{Z}_6$, com $6 \equiv 0 \pmod{6}$, apenas 1 e 5 são primos relativos com 6. Portanto $\phi(6) = 2$.

Estamos em condições de enunciar e demonstrar o resultado que dá a estrutura do quociente estendido $\mathbb{T}^n // \mathbb{Z}_n$.

Proposição 4.6. *Seja $\mathbb{T}^n$ o n -toro onde o grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$ atua por permutações cíclicas das coordenadas. Então, o quociente estendido para essa ação é dado por*

$$\mathbb{T}^n // \mathbb{Z}_n = \mathbb{T}^n / \mathbb{Z}_n \sqcup \bigsqcup_{1 < k < n} \mathbb{T}^i / \mathbb{Z}_i \sqcup \underbrace{\mathbb{T} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}}_{\phi(n)}$$

onde ϕ é a função totiente de Euler e $i = \text{m.d.c.}(k, n) \neq 1$, com $1 < k < n$.

A demonstração segue, de certo modo, os passos do exemplo 4.4.

Demonstração. Começamos por notar que os elementos de

$$\mathbb{Z}_n = \{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}\}$$

aparecem com ciclo correspondente às partições do tipo

$$n = n_k + n_k + \dots + n_k = r_k n_k,$$

onde n_k é o tamanho do ciclo e r_k o número de repetições desse ciclo. Há a considerar três casos distintos.

► O caso $n_k = 1$ e $r_k = n$ corresponde a $\gamma^0 = e$. Neste caso, obtemos o quociente usual $\mathbb{T}^n / \mathbb{Z}_n$.

► O caso $n_k = n$ e $r_k = 1$, que corresponde aos elementos γ^k onde k é primo relativo com n , isto é, $\text{m.d.c.}(k, n) = 1$. Os pontos fixos são

$$X^{\gamma^k} = \{(a, a, \dots, a) \in \mathbb{T}^n : a \in \mathbb{T}\} \cong \mathbb{T}.$$

Existem exatamente $\phi(n)$ elementos γ^k deste tipo. O centralizador destes elementos, $Z(\gamma^k) = \mathbb{Z}_n$, atua trivialmente no conjunto dos pontos fixos X^{γ^k} , o que significa que obtemos exatamente $\phi(n)$ cópias de $\mathbb{T}$.

► O último caso está entre os dois casos extremos anteriores, ou seja, corresponde aos elementos γ^k com o mesmo ciclo de tipo $n = r_k n_k$, com $r_k \neq 1$ e $n_k \neq 1$. O conjunto dos pontos fixos nesse caso é

$$X^{\gamma^k} = \{ \underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_{r_k}, \dots, a_1, a_2, \dots, a_{r_k})}_{n_k} \in \mathbb{T}^n : a_i \in \mathbb{T} \}$$

e portanto

$$X^{\gamma^k} / Z(\gamma^k) \cong \{(a_1, a_2, \dots, a_{r_k}) \in \mathbb{T}^{r_k} : a_i \in \mathbb{T}\} / \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{T}^{r_k} / \mathbb{Z}_{r_k}.$$

De acordo com o lema 4.5, o número de repetições deste quociente no quociente estendido corresponde ao número de elementos γ^k com ciclo $n = r_k n_k$ e $r_k = \text{m.d.c.}(k, n)$. Escrevendo $r_k = i_k = i$, o resultado segue. $\square$

Exemplo 4.7. Calculemos o quociente estendido $\mathbb{T}^{12} // \mathbb{Z}_{12}$. Dos representantes de $\mathbb{Z}_{12}$,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,$$

apenas 1, 5, 7, 11 são primos relativos com 12. Assim, $\phi(12) = 4$. Aplicando a proposição 4.6 anterior, concluímos que

$$\mathbb{T}^{12} // \mathbb{Z}_{12} = \mathbb{T}^{12} / \mathbb{Z}_{12} \sqcup \mathbb{T}^2 / \mathbb{Z}_2 \sqcup \mathbb{T}^3 / \mathbb{Z}_3 \sqcup \mathbb{T}^4 / \mathbb{Z}_4 \sqcup \mathbb{T}^6 / \mathbb{Z}_6 \sqcup \mathbb{T}^4 / \mathbb{Z}_4 \sqcup \mathbb{T}^3 / \mathbb{Z}_3 \sqcup \mathbb{T}^2 / \mathbb{Z}_2 \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T}.$$

Para terminar, observe-se que a proposição 4.1 é um corolário imediato da proposição 4.6. Efetivamente, se $n = p$ é primo, então não existe $i = \text{m.d.c.}(k, p) \neq 1$, com $1 < k < p$. Além disso, $\phi(p) = p - 1$ ($\mathbb{Z}_p$ tem a estrutura

algébrica de corpo, pelo que o único elemento não invertível de $\mathbb{Z}_p$ é a classe do p .

Agradecimentos

Os autores foram parcialmente apoiados pela FCT através do centro CMA-UBI (project UIDB/00212/2020).

REFERÊNCIAS

- [1] A.-M. Aubert, P. Baum, R. J. Plymen, M. Solleveld, "Conjectures About P -Adic Groups and Their Noncommutative Geometry", in: *Around Langlands Correspondences*, Contemp. Math. 691, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2017), 15-51.
- [2] P. Baum, "The Extended Quocient", *L'Enseign. Math.* (2) 54 (2008), 23-26.
- [3] P. Baum, A. Connes, *Chern Character for Discrete Groups, A Fête of Topology*, Academic Press, Boston, (1988), 163-232.
- [4] A. Borel, Sur La Cohomologie des Espaces fibrés Principaux et des Espaces Homogènes de Groupes de Lie Compacts, *Ann. Math.* (2) 57 (1953), 115-207.

[5] P. Cartier, "A Mad Day's Work: From Grothendieck to Connes and Kontsevich. The Evolution of Concepts of Space and Symmetry", *Bull. (New Series) of the Amer. Math. Soc.*, Volume 38, Number 4 (2001), 389-408.

[6] A. Kerber, *Algebraic Combinatorics Via Finite Group Actions*, Wissenschafts-verlag, Zurich, 1991.

[7] M. Suzuki, *Group Theory I*, Springer-Verlag, New York, 1982.

SOBRE OS AUTORES

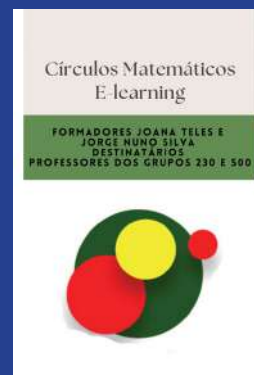
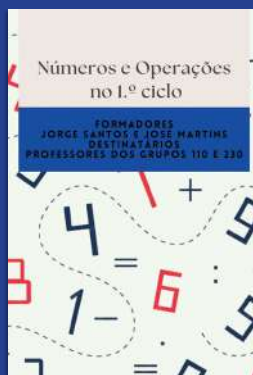
Gastão Bettencourt é professor auxiliar da UBI – Universidade da Beira Interior e membro do CMA – UBI – Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior. Licenciado em Física pela FCUL e mestre em Matemática Aplicada pelo IST, doutorou-se em Matemática na UBI. As suas áreas de interesse em investigação incluem sistemas dinâmicos, teoria ergódica e compactificação de espaços métricos.

Sérgio Mendes é professor associado do Iscte – Instituto Universitário de Lisboa e membro do CMA – UBI – Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior. Licenciado pela FCUL e mestre em Matemática Aplicada pelo IST, doutorou-se na Universidade de Manchester, Reino Unido. As suas áreas de interesse em investigação incluem a teoria dos números, representações de grupos e a teoria dos operadores.

CENTRO DE FORMAÇÃO 2025/2026 | SPM

www.spm.pt

*Novas datas
em breve!*





PEDRO J. FREITAS
Universidade de
Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

SOBRE ADÍLIA LOPES

Notas inesperadas sobre uma poetisa singular – que unia o erudito ao quotidiano e a literatura à matemática.

A poetisa Adília Lopes (pseudónimo de Maria José da Silva Viana Fidalgo de Oliveira), recentemente falecida, é um dos nomes mais acarinhados das letras portuguesas recentes. Isto dever-se-á, muito provavelmente, ao seu estilo pouco ortodoxo, direto, desarmante e muitas vezes sarcástico, com associações livres inesperadas, inspiradas tanto na vida quotidiana como em referências culturais.

A sua vida literária iniciou-se em 1983, quando concorreu a um Prémio de Prosa da Associação Portuguesa de Escritores e enviou poemas para a editora Assírio & Alvim, que remeteu dois deles para o seu *Anuário de Poetas não Publicados* de 1984. Publicou o seu primeiro livro de poemas em edição de autor, *Um Jogo Bastante Perigoso*, em 1985. Desde então, tem tido uma atividade de publicação constante, materializada em pequenos livros e coligida nas várias edições de *Dobra*, a sua poesia reunida, pela editora Assírio & Alvim.

Há, porém, um aspeto da escrita de Adília Lopes que será menos conhecido, que é a sua proximidade a temas científicos e matemáticos. Este gosto terá sido fomentado em vários momentos da sua própria história de vida: sendo filha de uma bióloga assistente de Botânica na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e de um professor do Ensino Secundário, Adília Lopes frequentou a licenciatura de Física da Universidade de Lisboa, tendo abandonado este curso quase no final.



Adília Lopes (1960-2024)

Cursou mais tarde Literatura e Linguística Portuguesa e Francesa (1983-1988) e trabalhou depois no Centro de Linguística da Faculdade de Letras da Universidade de Lisboa, com uma bolsa do Instituto Nacional de Investigação Científica (1989-1992). E note-se que a linguística é um dos assuntos de natureza mais científica dentro das humanidades.

Talvez então por causa dessa história pessoal se terá desenvolvido em Adília Lopes esta proximidade à ciência e à matemática, que se reflete em vários dos seus textos. E há diversas formas de proximidade a estes assuntos na escrita de Adília Lopes. Numa recolha breve, tendo como base uma das últimas edições de *Dobra*, encontrámos referências à matemática e às ciências (especialmente física e informática) em cerca de 20 textos. Sem a pretensão de sermos exaustivos, podemos dizer que, dentre os vários tipos de proximidade aos temas matemáticos, encontrámos simples referências a conceitos matemáticos, com ou sem interpretações, bem como contas ou outro tipo de matemática operativa ou ainda observações sobre o seu próprio percurso académico. Em comum a todas estas referências está uma proximidade verdadeiramente pessoal a estes tópicos, como veremos nos exemplos que vamos apresentar.

Adília Lopes tem vários poemas em que faz referência ao famoso poema de Álvaro de Campos sobre o binómio de Newton e a Vénus de Milo. Apresentamos a seguir um exemplo¹.

*Não gosto de vírgulas. Vírgulas são contas de dividir.
Gosto de pontos de exclamação. Pontos de exclamação
são os factoriais.*

$$4711! = 4711 \times 4710 \times 4709 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$



$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} a^{n-p} b^p$$

Sou o binómio de Newton de Fernando Pessoa.

2015

Vemos no texto um exemplo de fatorial com uma referência inesperada a uma água-de-colónia famosa, bem como um sinal da tal proximidade, verdadeiramente pessoal, de Adília com um conceito matemático (aqui, o binómio de Newton). A última frase, naturalmente, carece de

interpretação, que deixamos a cargo do leitor.

No próximo exemplo, Adília Lopes relata, no texto 54-45 um episódio passado na sua festa de aniversário dos 54 anos. Diz que uma amiga trocou a posição das velas, “talvez para me chamar velha”, e que nessa altura reparou que 54-45 é igual a 9. Daqui, faz uma extrapolação para outros números de dois algarismos, acabando por fazer uma demonstração de um pequeno resultado.

Sempre sem raciocinar, tive o palpite: para todos os números entre 12 e 98, excepto as capicuas e os múltiplos de 10 (20, 30, 40...) se fizermos a subtracção entre o número e o número que se obtém trocando os algarismos com que é escrito, obtemos um múltiplo de 9.

Demonstrei assim:

$$54 = 5 \times 10 + 4$$

$$45 = 4 \times 10 + 5$$

Estes números de 12 a 98 podem sempre escrever-se, se designarmos o da esquerda por a e o da direita por b:

$$10 \times a + b$$

E o número escrito ao contrário:

$$10 \times b + a$$

A subtracção é:

$$10 \times a + b - (10 \times b + a)$$

Que é igual a:

$$10 \times a + b - 10 \times b - a$$

Ou seja:

$$9 \times a - 9 \times b$$

Ou:

$$9 \times (a - b)$$

*Se b for maior que a, devemos pensar em a - b.²
O que interessa aqui é o par de números com os mesmos algarismos.*

Alguns exemplos:

$$14 \text{ e } 41$$

$$41 - 14 = 27 = 3 \times 9$$

$$53 \text{ e } 35$$

$$53 - 35 = 18 = 2 \times 9$$

$$28 \text{ e } 82$$

$$82 - 28 = 54 = 6 \times 9$$

$$72 \text{ e } 27$$

$$72 - 27 = 45 = 5 \times 9$$

Sei que não sou Pascal! A net deve estar cheia de coisas destas. O que acho engraçado é ter descoberto isto como descobri: por acaso, por uma brincadeira com o bolo de aniversário.

3/7/2016

Há várias observações interessantes a fazer a este texto. Talvez a mais central seja a referência à alegria de descobrir por si mesma uma demonstração de um resultado – sentimento que, estamos seguros, os leitores conhecerão. Mas é igualmente digno de nota o facto de Adília Lopes ter considerado que uma demonstração matemática, e o entusiasmo de a ter descoberto, é um tema absolutamente razoável para um texto literário. Tanto assim que a demonstração está absolutamente correta (sendo, aliás, aplicável também às capicuas e aos múltiplos de 10).

Para terminar, apresentamos, sem mais comentários, um texto em que Adília reflete sobre a sua própria formação na Faculdade de Ciências.

Estudos – Professores de Ciências

Na Faculdade, tive uma professora de matemática que me disse no fim de uma oral: «Está a fazer tudo bem mas não percebe o que está a fazer.» Um professor de física da Faculdade disse-me: «Não foi muito longe mas percebeu tudo o que fez.» Ambos me deram 17. Para que estou eu a perder tempo com piadas de caserna?

19/5/2015

Esperamos que estes três textos sirvam de aperitivo para que os leitores possam descobrir por si próprios outros textos de Adília Lopes, com ou sem referências à matemática e às ciências.

BIBLIOGRAFIA

Lopes, Adília (2024). *Dobra – Poesia Reunida 1983-2023*, Assírio & Alvim.

¹Deixámos inalterada a ortografia dos textos de Adília Lopes tal como estão publicados em *Dobra*, que não segue o acordo ortográfico de 1990.

²Aqui há uma gralha no texto original, deveria ser $b - a$. Em todo o caso, é de notar o cuidado de Adília Lopes em considerar ambos os casos.



Exposições (ma)temáticas da SPM.

Disponíveis para exibição nas escolas, bibliotecas ou instituições similares*.

Mais Informações em
www.spm.pt/exposicoes

*A requisição das exposições tem custos de manutenção.



REFLEXÕES SOBRE UMA CONSTRUÇÃO DE DUDENEY

RUI DUARTE^a e ANTÓNIO GUEDES DE OLIVEIRA^b

^aCIDMA e DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE AVEIRO

^bCMUP e DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FACULDADE DE CIÊNCIAS, UNIVERSIDADE DO PORTO

rduarte@ua.pt^a e agoliv@fc.up.pt^b

A que triângulos se pode estender a decomposição de Dudeney, de um triângulo equilátero em quatro polígonos que também formam um quadrado?

Num artigo recente da *Gazeta*¹, considerou-se uma construção de Henry Dudeney, onde se divide um triângulo equilátero em quatro partes que, reorganizadas através de translações e meias-voltas, formam um quadrado. Dudeney afirmava que este é o número mínimo de partes (polígonos) em que se pode dividir um triângulo equilátero de modo a poder reconstruir-se um quadrado nestas condições. Já depois de publicado o referido artigo e passados mais de cem anos sobre a afirmação de Dudeney, foi agora, finalmente, anunciada uma prova de que não é possível fazer o mesmo com menos de quatro elementos.²

Refletindo sobre a construção, facilmente se conclui (como cremos que fez o próprio Dudeney) que o facto de o triângulo ser equilátero não é essencial. Apresentamos um exemplo na figura 1.

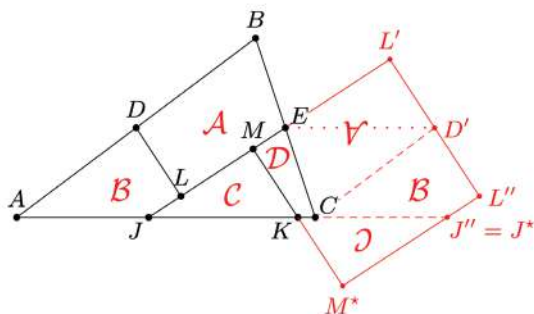


Figura 1. Decomposição de Dudeney.

Como se lembrará logo adiante, esta construção é baseada num lado, $\overline{AC}$, que tomamos por base, e no ponto médio E do lado oposto a A .³

É natural perguntarmo-nos se, num triângulo sem a simetria do triângulo equilátero, se tomássemos outra base e o ponto médio de outro lado obteríamos ou não uma decomposição do mesmo tipo, do mesmo modo. Por exemplo, no triângulo da figura 1, qualquer lado e qualquer ponto médio de um lado adjacente conduzem a uma decomposição deste tipo. Há alguma maneira fácil de saber isto sem fazer as construções, por exemplo, através de um simples programa de computador?

A resposta, afirmativa, decorre de condições que podemos obter *analiticamente* do modo que aqui descrevemos (analiticamente, mas sem coordenadas, como se vai ver). A possibilidade de fazer a construção é caracterizada pela posição de um determinado ponto num certo quadrado, posição que é depois controlada pelas distâncias a determinados pontos. Note-se que o fazemos menos pelos resultados obtidos do que pela descrição, em si, do método utilizado.

Sejam α a área do triângulo, $\alpha = \text{área}(\triangle ABC)$, $a = |BC|$, $b = |AC|$ e $c = |AB|$, D e E os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respetivamente, e, caso exista, $J \in \overline{AC}$ tal que $|EJ| = \sqrt{\alpha}$.⁴ Sejam ainda, caso existam, $K \in \overline{AC}$ tal que $|JK| = |DE| = |AC|/2$, e L e M os pés da perpendicular de D e K sobre $\overleftrightarrow{EJ}$, respetivamente, sendo ambos pertencentes a $\overleftrightarrow{EJ}$. Temos então o triângulo decomposto nos polígonos *convexos* $\square BELD$, $\square ADLJ$, $\triangle JMK$ e $\square CKME$.⁵ Diremos assim que $\triangle ABC$ admite uma decomposição de Dudeney de base $\overline{AC}$ em torno de C .

Uma primeira condição necessária para a existência de um ponto J nestas condições é que $\sqrt{\alpha}$ seja maior do que a distância do ponto E a $\overleftrightarrow{AC}$, que é metade da altura h rela-

¹A. Guedes de Oliveira e M. Rosário Pinto, "Dudeney e os seus 'puzzles'", *Gazeta de Matemática* 204 pp. 204-210.

²E.D. Demaine, T. Kamata e R. Uehara, "Dudeney's Dissection is Optimal", *arXiv:2412.03865*.

³No que se segue, denotamos por $\overline{AB}$, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ e $|AB|$, respetivamente, o segmento que une os pontos A e B , a semirreta com origem em A que passa por B , a reta por A e B e o comprimento do segmento que une A e B .

⁴À partida, poderão ser dois os pontos $J \in \overline{AC}$ tais que $|EJ| = \sqrt{\alpha}$. Consideramos só o mais próximo de A , porque para o outro, no lado oposto a A relativamente à mediatriz destes dois pontos, o pé da perpendicular por D à reta por E e por este ponto J não está em $\overleftrightarrow{EJ}$.

⁵Poderá ser $K = C$, por exemplo, sendo então $\square CKME$ um triângulo e não um quadrilátero.

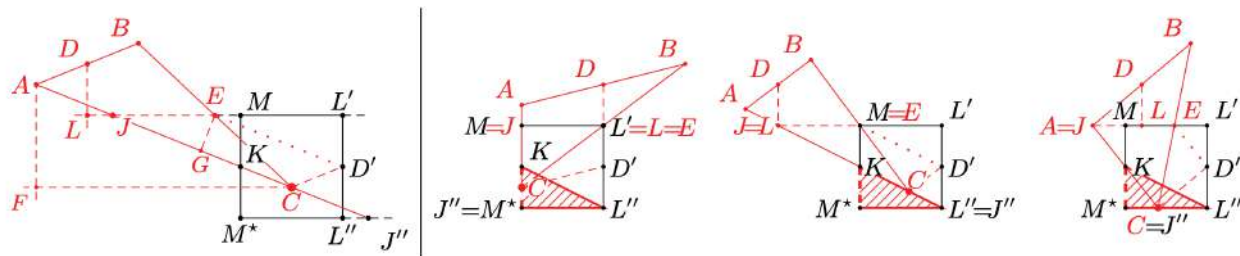


Figura 2. Impossibilidade e situações-limite da decomposição.

tiva à base $\overline{AC}$.⁶ Isto é, tem de ser $\sqrt{\alpha} > \frac{h}{2}$, ou seja, $b > \sqrt{\alpha}$. Por esta razão, no que segue consideramos que $b^2 > \alpha$. Do mesmo modo que no artigo referido, rodando $\square BELD$ 180° em torno de E e $\triangle JMK$ 180° em torno de K , e trasladando $\square ADLJ$ pelo vetor $\overrightarrow{AC}$, obtemos com $\square CKME$ a decomposição de um quadrado, $\square ML'L''M^*$, onde L' é o rodado de L pela primeira rotação, L'' é o trasladado do mesmo ponto, e M^* é o rodado de M pela segunda rotação.

Construção Inversa

Para simplificar a nossa análise, vamos considerar a construção inversa desta, onde começamos por tomar um quadrado, $\mathcal{Q} = \square ML'L''M^*$, e um ponto C no quadrado, no semiplano definido por $\overleftrightarrow{KD'}$ a que pertencem M^* e L'' ($C \notin \overleftrightarrow{KD'}$), onde K e D' são os pontos médios de $\overline{MM^*}$ e $\overline{L'L''}$, respetivamente. A partir destes dados, determinamos os pontos A e B de tal modo que é $\mathcal{Q}$ o quadrado construído como atrás a partir de $\triangle ABC$.

O caminho é bastante claro: Por construção, sendo K e D' os pontos médios de $\overline{MM^*}$ e $\overline{L'L''}$, respetivamente, e J'' o ponto de interseção de $\overleftrightarrow{KC}$ com $\overline{M^*L''}$, determinamos $E \in \overline{ML'}$ sabendo que $|EM| = |JL| = |J''L''|$. Então, $\overleftrightarrow{ED'}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são paralelas, assim como $\overleftrightarrow{CD'}$ e $\overleftrightarrow{AD}$. Na verdade, se O é o ponto de $\overline{EC}$ tal que $|OC| = 2|EC|$ e h é a homotetia de centro O e razão $-\frac{1}{2}$, então $D' = h(A)$, porque $h(B) = C$ e $h(C) = E$. A homotetia inversa determina $\triangle ABC$.

No entanto, $\alpha = \text{área}(\triangle ABC)$ é, ainda, a área do quadrado $\mathcal{Q}$ inicial, e o mesmo acontece para qualquer triângulo assim construído. De facto (ver figura 2, à esquerda), se F é o pé da perpendicular por A à reta paralela a $\overline{L'M}$ por C , e G é o pé da perpendicular de E sobre $\overline{AC}$, os triângulos retângulos $\triangle EGJ$ e $\triangle AFC$ são semelhantes e então

$$\frac{|AF|}{|AC|} = \frac{|EG|}{|EJ|},$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{área}(\triangle ABC) \\ &= |AC||EG| \\ &= |AF||EJ| \\ &= |MM^*||M^*L''| \\ &= \text{área}(\square ML'L''M^*) \end{aligned}$$

Consequências métricas

Note-se que $E \in \overline{ML'}$ (ou, equivalentemente, $L \in \overline{JE}$) se, e só se, $J'' \in \overline{M^*L''}$. Como $b = |AC| = |JJ''| = 2|KJ''|$ e $C \in \overline{KJ''}$, também $J \in \overline{AC}$ neste caso, e $J'' \neq M^*$ porque $b > \sqrt{\alpha}$. Portanto, o triângulo $\triangle ABC$ admite uma decomposição de Dudeney de base $\overline{AC}$ em torno de C se, e só se, $C \in \triangle KJ''M^*$ (excluindo $\overline{KM^*}$). Acima, na figura 2, está um exemplo em que isto não se passa (à esquerda), bem como as três situações-limite, notando que na primeira situação a decomposição (em três polígonos) não é do mesmo tipo.

O ponto C fica então caracterizado pela posição de $J'' \in \overline{M^*L''}$ e pelos limites às suas distâncias a E a seguir estudados, $|CE| = |BC|/2$, a K , $|CK| = |AC|/2$, e a D' , $|CD'| = |AB|/2$. Primeiro, é claro que $\sqrt{\alpha}/2 = |KM^*| < |KJ''| \leq |KL''| = \sqrt{5\alpha}/2$, como simples aplicação do Teorema de Pitágoras.

Se X é o centro de $\mathcal{Q}$, então $|XJ''| \geq |XK|$, pelo que o pé P da perpendicular a $\overleftrightarrow{AJ''}$ por E pertence a $\overline{AK}$, uma vez que K está no círculo da circunferência centrada em X por J'' e por E , a que P pertence. Portanto, $|EK| \leq |EC| \leq |EJ''|$, e se $|EK| \leq d \leq |EJ''|$, então só existe um ponto $Q \in \overline{KJ''}$ tal que $|EQ| = d$. Finalmente, se $Q \in \overline{JJ''}$, então $Q \in \overline{KJ''}$ se, e só se, $|D'Q| \leq |D'K| = \sqrt{\alpha}$.

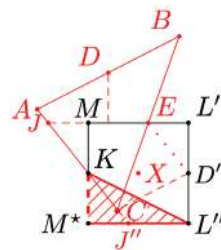


Figura 3. Posição de C .

Agora, aplicações sucessivas do Teorema de Pitágoras dão-nos os valores dos limites em falta, nomeadamente o de $|EK|$ e o de $|EJ''|$.⁷

Suponhamos então que é dado $\triangle ABC$ de lados $a = |BC|$, $b = |AC|$ e $c = |AB|$, e que queremos saber se admite determinada decomposição de Dudeney. A sua área, pela fórmula de Herão, é dada por

$$\alpha = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

O triângulo admite uma tal decomposição se, e só se,

$$\begin{cases} |KM^*| < |KJ''| \leq |KL''|, \\ |EK| \leq |EC| \leq |EJ''| \\ |D'C| \leq |D'K|. \end{cases}$$

Utilizámos estes critérios para estudar brevemente os 9291 triângulos de lados inteiros a, b, c com $1 \leq a \leq b \leq c \leq \min(50, a+b)$ e $\text{MDC}(a, b, c) = 1$. Pudemos constatar que em cerca de 45% dos triângulos testados há uma decomposição de Dudeney quaisquer que sejam a base e o ponto médio de um lado adjacente, e que em cerca de 33% não há nenhuma decomposição deste tipo.

Mais interessante, talvez, é o facto de termos constatado também que em cerca de 5% dos casos há *um único* lado e *um único* vértice para os quais existe uma decomposição deste tipo. Damos exemplo de um destes triângulos na figura 4, em que é unicamente possível construir uma tal decomposição com base no lado $\overline{AC}$ e em torno de A .

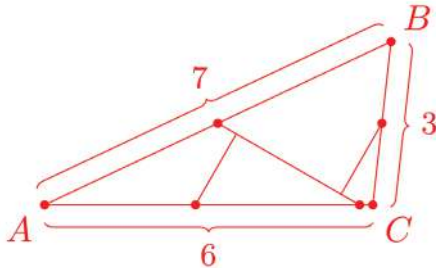


Figura 4. Decomposição única.

Nota

Poderá o leitor perguntar-se agora se, nos casos em que o triângulo não admite uma decomposição de Dudeney, admite uma decomposição “parecida”. Veja-se a figura 5, obtida repetindo indefinidamente o triângulo e os quadra-

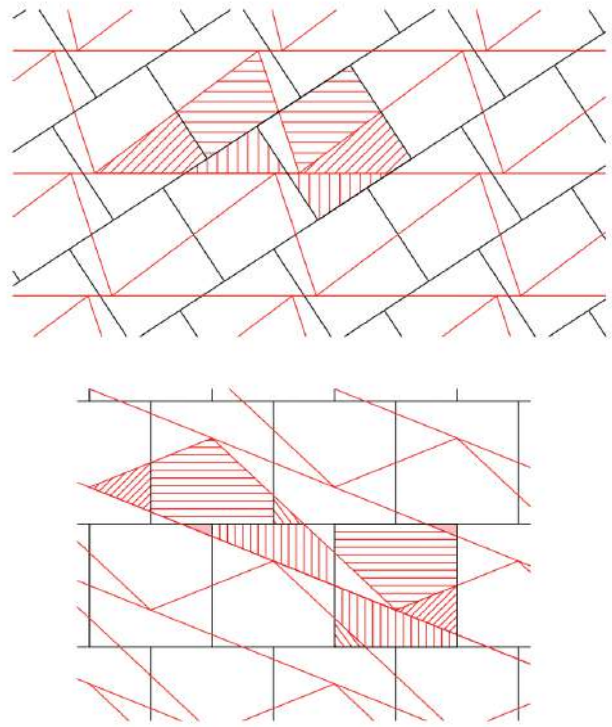


Figura 5. Pavimentações.

dos de modo a obter duas pavimentações do plano, que, por si só, determinam a decomposição. Note-se, no entanto, que, por exemplo, as mesmas pavimentações numa outra posição relativa já não determinam, em geral, uma decomposição.

Chama-se *dissecção* de um polígono noutra à decomposição de ambos os polígonos num mesmo conjunto (finito) de polígonos mais pequenos. Os dois polígonos iniciais dizem-se *equidissectíveis*. As dissecções que apresentamos na figura 6, em cada caso em cinco polígonos e de um triângulo num hexágono, assemelham-se um pouco à dissecção de Dudeney. Tem sobre esta dois defeitos fundamentais: o hexágono não é regular (embora tenha lados iguais, os ângulos internos não o são) e depende (quanto ao lado e quanto aos ângulos internos) da base e da altura

⁶ Se $\sqrt{\alpha}$ é a distância do ponto E a $\overleftrightarrow{AC}$, isto é, se $b = \frac{1}{2}$, então $\overline{EJ} \perp \overline{AC}$, $M = E$, $L = J$ e a decomposição é feita em três polígonos só.

⁷ Note-se que

$$\begin{aligned} |M^*J''| &= \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \alpha} \quad ; \quad |ME| = \sqrt{\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \alpha} \quad ; \quad \text{portanto,} \\ |EK| &= \sqrt{\frac{a}{4} + \left(\sqrt{\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \alpha}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha + b^2 - 4\sqrt{\alpha}\sqrt{b^2 - \alpha}}; \\ |EJ''| &= \sqrt{\alpha + \left(\sqrt{b^2 - \alpha} - \sqrt{\alpha}\right)^2} = \sqrt{\alpha + b^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{b^2 - \alpha}}. \end{aligned}$$

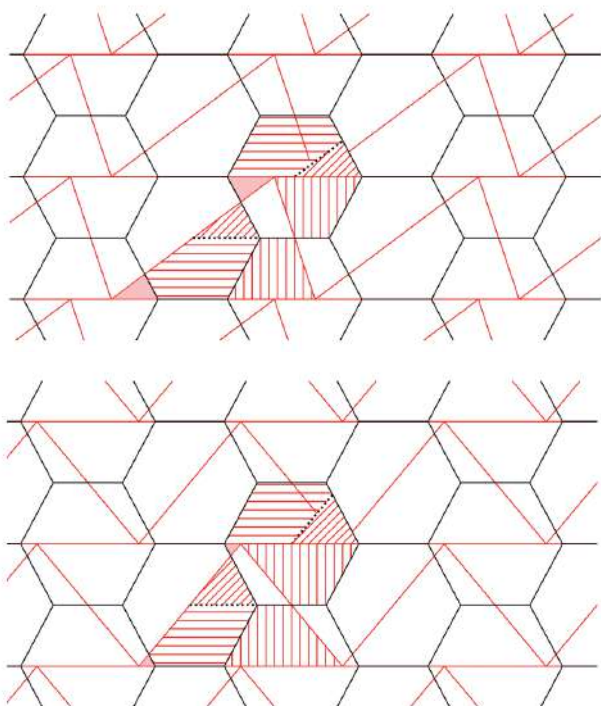


Figura 6. Dissecções com hexágonos.

ra do triângulo, e não só da sua área. Representamos na figura 6 estas dissecções, uma a partir do triângulo inicial e outra a partir de outro triângulo com a mesma área e

a mesma altura, bem como as pavimentações associadas, que se pode ver que não determinam completamente a decomposição.⁸

Se o leitor estiver interessado em conhecer melhor este assunto, aconselhamos-lhe dois livros sobre ele, muito interessantes e recheados de exemplos, de Frederickson.⁹

Breve nota histórica

Sabe-se desde o início do século XIX que *quaisquer* dois polígonos com a mesma área são *equidissectáveis* (Teorema de Wallace – Farkas Bolyai – Gerwien). Este resultado é importante na validação rigorosa da função-área na Geometria Euclidiana.¹⁰

Um passo importante na prova habitual deste teorema é a constatação de que a relação de equidissectibilidade é *transitiva*: se dois polígonos são equidissectáveis a um terceiro polígono então são equidissectáveis entre si. A figura 7, a seguir, sugere a justificação deste passo.

Este exemplo mostra bem como o número de elementos de uma dissecção é variável e como pode crescer neste processo. No entanto, encontrar um pequeno número de elementos, como propôs Dudeney, pode ser essencial e é motivo de investigação contemporânea, na análise de ADN, por exemplo, ou na compressão de dados.

Há um teorema análogo na Geometria Esférica e outro no Plano Hiperbólico (Teorema de [János] Bolyai). Este último está na origem da fundação da Geometria Hiperbó-

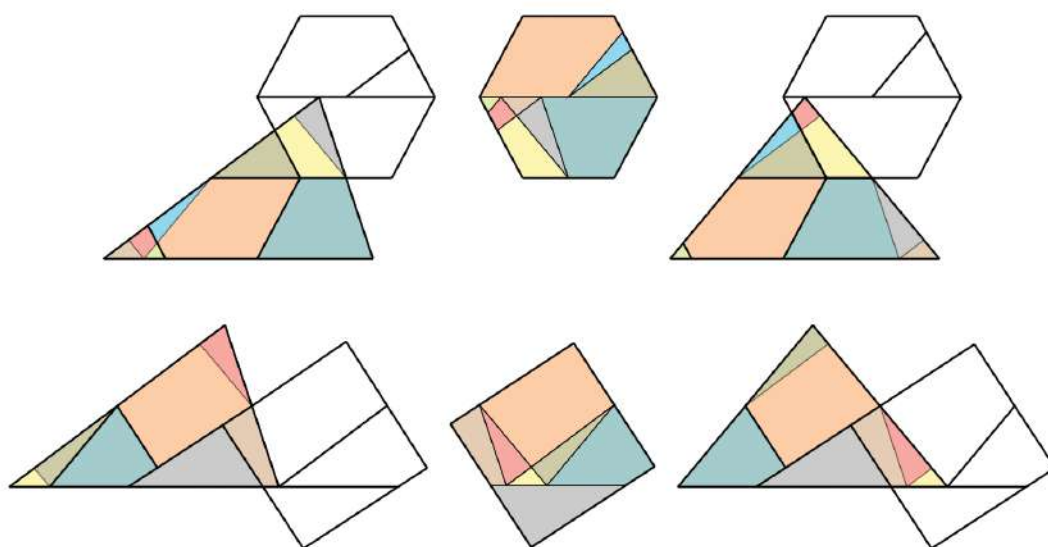


Figura 7. Transitividade da relação de equidissectibilidade.

lica por este autor.¹¹

Note-se ainda que o teorema não é válido se substituírmos polígonos por poliedros e triângulos por tetraedros.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente suportado pelo CIDMA (Ref. UIDB/04106) e pelo CMUP (Ref. UIDB/00144), ao abrigo do Programa de Financiamento Plurianual de Unidades de I&D da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, <https://ror.org/00snfqm58>.

SOBRE OS AUTORES

Rui Duarte é Professor Auxiliar na Universidade de Aveiro. Doutorou-se em Matemática na mesma Universidade.

António Guedes de Oliveira é Professor Catedrático aposentado da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Doutorou-se em Matemática na Universidade Técnica de Darmstadt (Alemanha), tendo-se especializado em Combinatória.

TABELA DE PUBLICIDADE 2025

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1250

Nº de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

CONTACTOS

Tel.: 21 793 97 85

imprensa@spm.pt

ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)

Margem de corte: 4 mm

LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

					
	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

⁸ Pode o leitor ver que a construção também é iniciada marcando-se a partir do ponto médio E de $\overline{BC}$ um segmento, no caso paralelo à base e de comprimento $\frac{\ell^2+h^2}{8\ell}$, onde ℓ é a base e h a altura de $\triangle ABC$.

⁹ G.N. Frederickson, *Dissections: Plane & Fancy* Cambridge University Press (1997), e G.N. Frederickson, *Hinged Dissections: Swinging and Twisting* Cambridge University Press (2002).

¹⁰ Ver E.G. Moise, *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, Addison-Wesley Pub. Co (1974).

¹¹ Curiosamente, János Bolyai era filho de Farkas Bolyai.



JORGE NUNO SILVA
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

ARITMÉTICA ETÍOPE

O relatório de Leo Bond Roberts, da companhia de construção naval Merritt-Chapman & Scott, de Nova Iorque, relativo aos anos 1929-1931, contém uma descrição pormenorizada de um algoritmo multiplicativo que aprendeu num mercado etíope. O autor nota, há cem anos, que o método se baseia na manipulação de pedrinhas em covas no chão. Já tínhamos encontrado um procedimento conceptualmente semelhante, no Egito Antigo. Em ambos, o recurso à tabuada é desnecessário. Neste texto, analisamos o procedimento e mostramos como se adapta facilmente também à divisão.

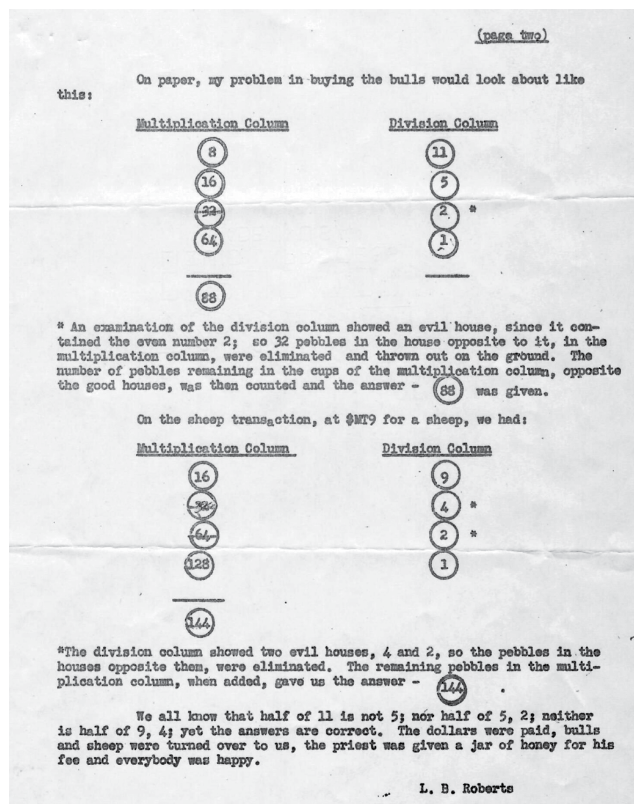
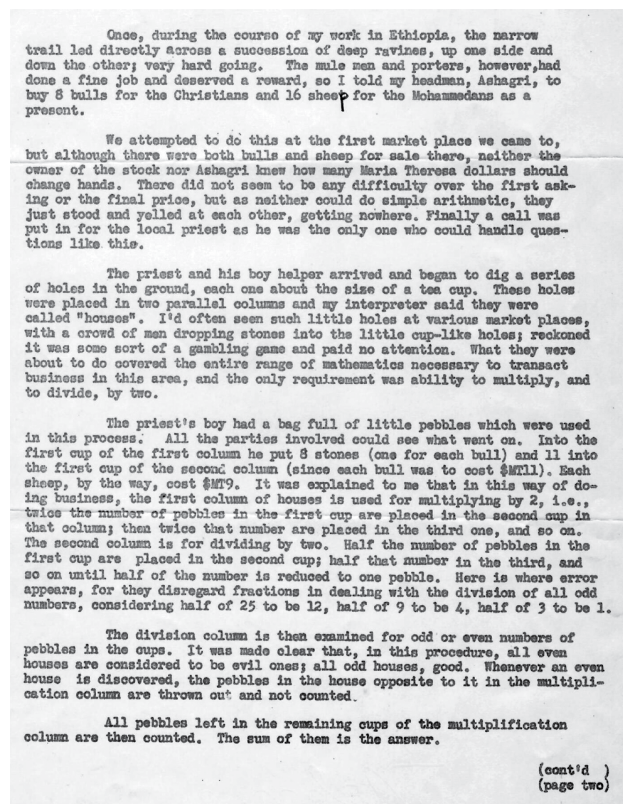


Figura 1. Relatório de L. B. Roberts: testemunho de multiplicação com pedrinhas.

Esta descrição mostra-nos um processo para efectuar multiplicações de números inteiros praticado por um padre na Etiópia de há cem anos. Em linguagem simples, substituindo as covinhas e os seixos por numerais, o algoritmo pode ser descrito da seguinte forma: Cria-se duas colunas, uma encabeçada pelo multiplicando, outra pelo multiplicador. Numa segunda linha coloca-se o dobro do multiplicando e a parte inteira da metade do multiplicador. Estas operações repetem-se até se obter 1 na coluna do multiplicador.

Roberts chama às colunas Multiplicação e Divisão. Nós vamos usar os termos Coluna do Multiplicando e Coluna do Multiplicador, respectivamente.

Agora, seleccionam-se os números ímpares da coluna do multiplicador. A soma dos correspondentes números da coluna do multiplicando dá-nos o produto pretendido.

Eis o primeiro exemplo de Roberts, na nossa notação:

8	11
16	5
32	2
64	1

O processo de duplicações e de “divisões por 2” está terminado. Podemos agora eliminar (ou ignorar) os números da coluna do multiplicando que se opõem a números pares:

8	11
16	5
	2
64	1

Hora de somar os números da coluna do multiplicando, obtendo o produto, 88:

8	11
16	5
	2
64	1
88	

Em vez de apagarmos números do nosso esquema, optemos por assinalar com asteriscos as linhas relevantes, isto é, as que contêm números ímpares na coluna do multiplicador:

8	11	*
16	5	*
32	2	
64	1	*
88		

Nesta notação, o segundo exemplo de Roberts toma o aspecto seguinte.

16	9	*
32	4	
64	2	
128	1	*
144		

Para compreender bem este algoritmo de multiplicação, devemos notar, antes de mais, que se usa a propriedade distributiva. Os números que se somam na coluna da esquerda correspondem aos produtos do multiplicando pelas potências de 2 que ocorrem na representação do multiplicador como soma de potências de 2:

$$8 \times 11 = 8 \times (1 + 2 + 8) = 8 + 16 + 64 = 88$$

$$16 \times 9 = 16 \times (1 + 8) = 16 + 128 = 144$$

O método etíope engloba um mecanismo que permite apurar quais produtos parcelares devem considerar-se para obter o resultado. Na coluna da esquerda, surgem todos os produtos do multiplicando por potências de 2 que podem, potencialmente, fazer parte da decomposição binária do multiplicador. Mas o processo das divisões sucessivas por 2 permite identificar quais as potências relevantes.

Quando representamos o multiplicador em base 2, os coeficientes que forem não nulos (isto é, iguais a 1) assinalam as respectivas potências de 2 que temos de considerar. Ora o processo, a que chamamos *shift*, que move todos os coeficientes para a direita uma casa binária, desprezando o coeficiente da extremidade direita, permite apurar os coeficientes significativos. De cada vez que o resultado do *shift* dê origem a um número ímpar, o número à sua esquerda é o produto da correspondente potência de 2 pelo multiplicando. O facto de se proceder a duplicações sucessivas, na coluna do multiplicando, mantém os operadores das duas colunas sincronizados.

Note-se que o *shift*, em notação binária, corresponde a passar de um número à parte inteira da sua metade.

Trata-se de um método engenhoso, mas maravilhosa-

mente simples de implementar.

A tabela seguinte pretende tornar esta análise mais clara, usando ainda o produto de 8 por 11.

Multiplicando	Multiplicador	Multiplicador em binário
$n \mapsto n \times 2$	$m \mapsto \lfloor m \div 2 \rfloor$	<i>shift</i>
8	11	1011
16	5	101
32	2	10
64	1	1

Não é difícil concluir, pela análise binária do processo, que o algoritmo para a multiplicação $a \times b$ vai ter $\lfloor \log_2 b \rfloor + 1$ linhas. Note-se que a é o multiplicando e b é o multiplicador.

Os egípcios antigos utilizavam um método semelhante de multiplicação, que também fazia apelo à multiplicação por 2 e evitava qualquer outra tabuada. Pode encontrar-se a descrição desse processo em [1, 3] e, nas páginas desta *Gazeta*, em [5].

Nas referências citadas, pode também apreciar-se a forma engenhosa como os egípcios de há 4000 anos efectuavam divisões, essencialmente procedendo como no algoritmo da multiplicação (de novo, sem tabuada!).

Também o método etíope que acabámos de descrever pode ser utilizado na criação de um processo para efectuar divisões, recorrendo a covinhas e pedrinhas.

Ilustremos com um exemplo. Suponhamos que procuramos o resultado da divisão de 105 por 3. Procuramos, portanto, um número x que, multiplicado por 3, nos dê 105. Ora a multiplicação $3 \times x = 105$ tem um algoritmo nas covinhas que podemos representar assim:

3	
6	
12	
24	
48	
96	1
105	

Construímos este esquema duplicando sucessivamente o multiplicando e terminando quando o dobro do número obtido ultrapassasse o objectivo, 105. Claro que, no algoritmo da multiplicação, ao último número obtido na colu-

na da esquerda opõe-se o 1 na coluna da direita.

A tarefa resume-se agora a operar na coluna da direita, de baixo para cima, começando no 1. Pela descrição do processo multiplicativo, na linha precedente deve surgir um 2 ou um 3. Como saber qual?...

Ora, na coluna da esquerda, os números que somam 105 são 96, 6 e 3. Portanto, são exactamente estes que têm números ímpares nos lugares correspondentes da coluna da direita. Assim, sabemos que o número à frente do 48 deve ser par, só pode ser 2. O mesmo sucede com 24 e 12, o que permite determinar inequivocamente as entradas nesta tabela:

3	
6	
12	8
24	4
48	2
96	1
105	

Ao 6 deve opor-se um número ímpar, que só poderá ser 17. Ao 3 deve opor-se também um ímpar, que necessariamente será 35. E este é o resultado pretendido: $105 \div 3 = 35$.

3	35
6	17
12	8
24	4
48	2
96	1
105	

Usemos asteriscos, do lado esquerdo, para assinalar as parcelas que, na coluna da esquerda, se devem somar para obter o dividendo:

*	3	35
*	6	17
	12	8
	24	4
	48	2
*	96	1
	105	

Os asteriscos marcam, assim, as linhas em que ocorrem números ímpares na coluna da direita.

Vejamos um último exemplo, agora com esta representação, $147 \div 7$. De novo, “armamos a conta” $7 \times x = 147$:

7	
14	
28	
56	
112	1
147	

Determinar os números da coluna da esquerda que somam 147 faz-se de baixo para cima, começando com 112 e juntando sucessivamente as parcelas que gerem um total que não exceda 147:

*	7	
	14	
*	28	
	56	
*	112	1
	147	

Finalmente, na coluna da direita, trabalhamos de baixo para cima, a partir do 1, duplicando as entradas e adicionando uma unidade nas linhas com asteriscos, onde queremos obter números ímpares. O número final, que encabeçará a coluna da direita, é o quociente pretendido.

*	7	21
	14	10
*	28	5
	56	2
*	112	1
	147	

O número de linhas deste algoritmo para $a \div b$ será, à semelhança do anterior, dado por $\lfloor \log_2 a - \log_2 b \rfloor + 1$.

O padre que surge, no relato de L. B. Roberts, como única pessoa da comunidade capaz de determinar o preço de oito bois, se cada boi custar 11 unidades monetárias, ganhou um pote de mel pelo serviço. Estamos em crer que o mesmo religioso ganharia mais uma dose de mel se lhe pedissem para determinar o preço de cada boi, sabendo que pagaram 88 unidades monetárias por oito bois.

À semelhança dos processos do Egipto Antigo, o método etíope das covinhas viabiliza um tratamento unificado para a multiplicação e para a divisão.

As covinhas no chão, só por si, já são misteriosas. Isto por causa do mancala.

Mancala é uma família de jogos tradicionais de estratégia que se praticam em tabuleiros ou linhas de covinhas no solo, usando sementes ou pequenas pedras. Trata-se de jogos muito antigos, difíceis de datar dada a forma da sua prática. Contudo, é certo que se praticam há vários milénios. Há muitas variantes de mancala em África e na Ásia, algumas usam disposições de quatro filas de covinhas, outras três ou duas filas. Ver [6]. A sua prática contemporânea ainda recorre, muitas vezes, a implementações ancestrais. Na figura 2 vemos um exemplo actual da prática do mancala em covinhas no solo.



Figura 2. Jogando uma variante de quatro filas, no Sudão.
Foto De Voogt.

Uma variante, o ouri, é popular também em Portugal, tendo integrado a selecção do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos por vários anos.¹ O ouri é originário de Cabo Verde e usa disposição de duas filas de covinhas.

Na figura 3, retirada de [2], vemos duas linhas de covinhas cavadas no solo, perto de um monumento fúnebre com 5000 anos. O terreno em que foram implementadas leva a crer que se pretendeu que a obra não desaparecesse rapidamente. O autor do relatório citado também refere aparatos semelhantes. Em tradução nossa:

“Tinha visto com frequência tais pequenas cavidades em vários mercados, com uma multidão de homens lançando pedrinhas para dentro das cavidades em forma de taça; pensei tratar-se de um jogo de apostas e não lhes prestei atenção.”

¹Ver <https://ludicum.org/cnjm/>

É natural supor que as duas filas de covinhas, quando implementadas em local de comércio, teriam a dupla função de terreno de jogo e “máquina de calcular”. Esta utilização dupla não foi considerada, de início, por L. B. Roberts, naturalmente.



Figura 3. Mancala, calculadora, ou ambos? Foto Veronica Waweru.

As práticas de cálculo numérico e os jogos de tabuleiro não são mundos totalmente separados. Nomeadamente, surgiram vários métodos, ao longo dos tempos, para usar o tabuleiro quadrado 8×8 como calculadora, atribuindo valores às respectivas casas. Contudo, o *Ábaco de Neper* destaca-se por dar uma utilização aritmética muito sofisticada ao vulgar tabuleiro de Damas. A ele voltaremos em breve.

REFERÊNCIAS

- [1] Clagett, Marshall (1999). *Ancient Egyptian Science: A Source Book. Volume III: Ancient Egyptian Mathematics*. Philadelphia: American Philosophical Society. isbn: 0871692325.
- [2] Cummings, Mike (fev. de 2024). “A Local Tip Helps Reveal An Ancient ‘Arcade’ in Kenya’s Highlands”. Em: *YaleNews*. Accessed: 2025-04-20. <https://news.yale.edu/2024/02/01/local-tip-helps-reveal-ancient-arcade-kenyas-highlands>.
- [3] Gillings, Richard J. (1982). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover Publications. isbn: 9780486243153.

- [4] Roberts, Leo Bond (dez. de 1948). “Report of Leo Bond Roberts”. Em: *Monthly Newsletter from the Office of the Assistant to the President, Merritt-Chapman & Scott*. Smithsonian Institution Archives: Record Unit 7006, Alexander Wetmore Papers, Box 56, Folder 7.

- [5] Silva, Jorge Nuno (mar. de 2024). “Contas Egípcias”. Em: *Gazeta de Matemática* 202, pp. 23–27. <https://gazeta.spm.pt/fichagazeta?id=202>.

- [6] Voogt, Alexander J. de (1997). *Mancala Board Games*. London: British Museum Press. isbn: 9780714125367.



PAULA AMARAL
Nova SST|FCT Nova
e NovaMath CMA,
Universidade Nova
de Lisboa
email@email

TIAGO DIAS
Nova SST|FCT Nova
e NovaMath CMA,
Universidade Nova
de Lisboa
email@email

UMA NUVEM DE ESFERAS – UM NOVO MODELO DE CLASSIFICAÇÃO AUTOMÁTICA

O modelo aqui apresentado foi proposto no artigo "A Classification Method Based on a Cloud of Spheres", publicado na revista *Euro Journal on Computational Optimization* e foi-lhe atribuído o Prémio Marguerite Frank para o melhor artigo de 2023 desta revista. Este modelo constitui uma nova proposta na classificação automática, com vantagens em termos de transparência face a outros métodos, que, apesar de produzirem bons resultados, funcionam como uma caixa preta. A ideia principal consiste na definição da superfície de separação entre duas classes, através de uma nuvem de esferas conectadas.

INTRODUÇÃO

A Classificação Automática Discreta Determinística (CADD) refere-se, de forma geral, à tarefa de atribuir uma classe k de um conjunto K a um objeto i representado por um vetor x de características ou atributos num espaço n -dimensional. Exemplos de CADD incluem a classificação de imagens (por exemplo, determinar se uma imagem contém um gato ou um cão) e a deteção de fraudes (por exemplo, classificar uma transação como fraudulenta ou não). Esta classe de modelos de classificação supervisionada pressupõe a existência de um histórico de dados, contendo registos/objetos/exemplos para os quais se conhece não só as características (*features*) mas também a etiqueta da correspondente categoria/classe (*label*). Estes dados são usados para treinar o modelo (*training phase*) e para testar o modelo (*testing phase*). A arquitetura de um algoritmo de classificação supervisionada pode variar, mas geralmente procura ajustar-se bem aos dados de treino, evitando o ajuste excessivo (*overfitting*) que compromete a capacidade de generalização para dados novos. Modelos de classificação, de maneira implícita ou explícita, minimizam uma função de erro que mede o quão bem o modelo classifica os dados de treino. Em tarefas de classificação

supervisionada, assume-se a existência de separação entre as classes, sendo o objetivo identificar uma estrutura que represente da melhor forma essa separação. Essa estrutura pode estar embutida numa rede neuronal (*Neural Networks*) ou ser descrita por meio de regras (*Random Forest*) ou, implicitamente, pela definição de um modelo matemático cujos parâmetros são obtidos pela solução de um problema de otimização.

MODELOS CLÁSSICOS DE APRENDIZAGEM AUTOMÁTICA

A literatura sobre classificação é vasta. A título de exemplo, citam-se três referências sobre o tema [1, 2, 3]. De entre os métodos clássicos de classificação supervisionada, destacam-se: regressão logística, máquinas com vetores de suporte (SVM), k -vizinhos mais próximos (k -NN), árvores de decisão e redes neurais. Esses métodos variam em complexidade computacional, capacidade de interpretar a regra subjacente à separação das classes (interpretabilidade) e capacidade de generalização. Recentemente, tem havido grande interesse no uso de técnicas baseadas na otimização de modelos de programação matemática, para

construção de classificadores com propriedades desejáveis, como margens máximas de separação ou minimização de funções de perda específicas. Veja-se, por exemplo, [4, 5, 6, 7]. Modelos baseados em programação inteira mista (MIP) e programação não linear inteira mista (MINLP) têm-se mostrado promissores, especialmente em contextos nos quais se pretende promover a interpretabilidade e o controlo sobre as características na fronteira da decisão, que permitem explicar por que um novo objeto é classificado numa classe e não noutra (*counterfactual analysis*). Esses modelos, embora mais pesados computacionalmente, permitem incorporar restrições explícitas ao processo de classificação, o que é útil em aplicações críticas, como diagnóstico médico e análise financeira.

ÉTICA E APRENDIZAGEM AUTOMÁTICA

É sabido que alguns algoritmos de aprendizagem automática (AA), em particular as redes neuronais artificiais (ANN), as redes neuronais profundas (DNN) e as florestas aleatórias (RF), têm a capacidade de representar associações não lineares complexas nos dados. No entanto, as ANN e as DNN são algoritmos de tipo “caixa preta”, o que significa que não é possível compreender explicitamente o que é realmente aprendido nem como é aprendido, veja-se a este propósito a referência [7]. As falhas das ANN e das DNN têm sido reconhecidas e investigadas [8, 9]. A ausência de reflexão sobre estes algoritmos, bem como a sua aplicação indiscriminada e acrítica em situações do mundo real, pode conduzir a resultados muito indesejáveis, não éticos, injustos, sensíveis e até perigosos. Os modelos e algoritmos de AA evidenciam mesmo uma tendência para amplificar a discriminação com base no género [10] ou na raça [11], pelo que diversos autores têm alertado para esta problemática [12, 13, 14].

Além destas questões, as ANN e as DNN são difíceis de treinar [15]. A otimização dos parâmetros é demasiado complexa para se alcançar um ótimo global. Ainda assim, têm sido apresentados argumentos a favor da subotimização dos parâmetros, aludindo ao facto de que evitar o sobreajustamento pode até ser desejável. Além da otimização dos parâmetros, o próprio desenho da rede tem de ser avaliado. Com a complexidade das estruturas das redes neuronais, há demasiados componentes a considerar (regularização, taxa de aprendizagem, funções de ativação, número de camadas, unidades ocultas, nós intermédios). Dada a impossibilidade de analisar todas as combinações possíveis de estruturas e parâmetros, apenas uma parte dessas combinações é avaliada. O critério de escolha é

muitas vezes sustentado por argumentos frágeis e demasiado dependentes dos dados de treino e teste, levantando questões quanto à sua adequação para novos dados.

Em SVM, são introduzidas funções (*kernels*) para lidar com a não linearidade. Embora os SVM com *kernel* sejam mais transparentes do que as DNN e tenham menos combinações de aspetos do modelo a estudar e a avaliar, ainda assim apresentam algum esforço de natureza combinatoria no treino. A escolha correta da função *kernel*, juntamente com os parâmetros e metaparâmetros no caso de margens suaves (*soft margins*), pode ser complexa. Além disso, o tipo de linearidade que pode ser descrito é limitado, apresentando grandes dificuldades em aprender a não convexidade das curvas de separação das classes.

UM MODELO DE CLASSIFICAÇÃO BASEADO NUMA NUVEM DE ESFERAS CONECTADAS

As críticas às redes neuronais (ANN e DNN) e aos métodos de *kernel* de SVM motivaram a procura de métodos de classificação mais transparentes e simples. Com inspiração nos aspetos positivos do SVM, procurou-se um método baseado num modelo matemático, onde a relação entre o modelo e a solução pudesse ser claramente identificada, com apenas um número razoável de parâmetros a estimar, mas que fosse capaz de capturar estruturas de separação complexas nos dados.

Se considerarmos um problema de classificação com duas classes, encontrar uma superfície de separação pode ser difícil num espaço de alta dimensão, como $\mathbb{R}^n$ para valores elevados de n , dependendo da geometria dos objetos ou pontos. Se os pontos das duas classes forem linearmente separáveis, a maioria dos métodos clássicos propostos na literatura funcionará bem, como é o caso do SVM. No entanto, se os pontos não forem linearmente separáveis, encontrar uma superfície de separação pode tornar-se uma tarefa complexa. Normalmente, assume-se algum tipo de comportamento regular na distribuição espacial dos pontos (esférico, poliedral) para justificar a aplicação de um determinado método, mas especular sobre a geometria dos dados em espaços de alta dimensão pode ser enganador.

Nesse sentido, considerou-se que quanto mais flexível fosse a superfície de separação, melhor seria, permitindo assim a definição de formas diferentes e complexas. Se considerarmos, por exemplo, o caso bidimensional ilustrado na figura 1, a superfície de separação definida na figura 2 procura encapsular uma estrutura não linear e não convexa.

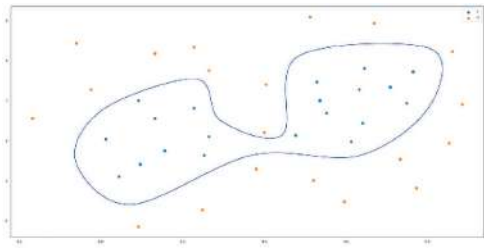


Figura 1. Separação de duas classes de pontos.

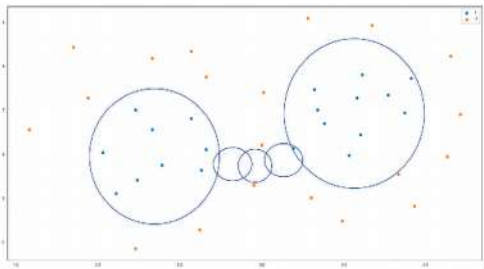


Figura 2. Nuvem de esferas.

O modelo proposto como uma nuvem de esferas conectadas (NEC) insere-se na linha de modelos que utiliza formulações de MINLP para gerar classificadores. Os parâmetros do modelo são obtidos obtendo a solução ótima deste problema. Nas secções seguintes, apresentamos alguns elementos sobre a formulação matemática, bem como um exemplo de aplicação.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA NEC

A formulação matemática da NEC tem como objetivo encontrar uma superfície baseada num conjunto de esferas para separar dois conjuntos de pontos de dados. Especificamente, pretende-se construir um conjunto conectado de esferas que cubra todos os pontos do primeiro conjunto, impedindo qualquer interseção com os pontos do segundo conjunto. O objetivo é alcançar esta separação com o menor número de esferas possível. O modelo tem diversas particularidades que não serão aqui descritas. O que se apresenta de seguida são apenas algumas das características do modelo. Como não se sabe à partida quantas esferas serão utilizadas para construir a nuvem, considera-se no modelo um limite superior para o número de esferas.

Como restrições, consideram-se, entre outros, os seguintes conjuntos:

1. **Cobertura do primeiro conjunto:** Cada ponto do primeiro grupo deve estar contido, pelo menos, numa das esferas.
2. **Não cobertura do segundo conjunto:** Nenhum

ponto do segundo grupo pode estar contido em qualquer uma das esferas utilizadas na solução.

3. Conectividade das esferas: As esferas ativas devem formar uma estrutura conectada – ou seja, cada esfera deve intercepar, pelo menos, uma outra esfera e não podem existir subconjuntos de esferas desconectados dos restantes.

EXEMPLO

Vamos considerar três exemplos *Parallels* (figura 3), *Separation* (figura 4) e *Butterfly* (figura 5), onde os pontos da classe 1 (estrelas azuis) estão rodeados por pontos da classe 2 (cruzes vermelhas).

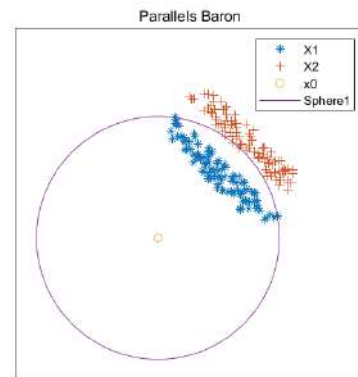


Figura 3. *Parallels*.

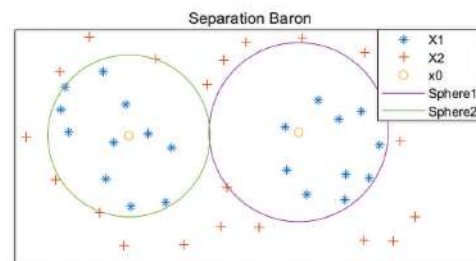


Figura 4. *Separation*.

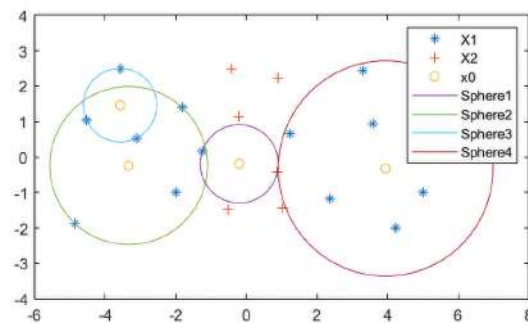


Figura 5. *Butterfly*.

O exemplo da figura 3 ilustra que este método pode ser aplicado mesmo em casos onde um separador linear funcionaria. Aqui uma única esfera é suficiente para definir a separação das duas classes. No exemplo da figura 5, os pontos da classe 1 estão mais afastados entre si do que no exemplo da figura 4. Ao resolver o modelo matemático, obtiveram-se soluções com nuvem definida por quatro e duas esferas, respetivamente. Serve o exemplo da figura 5 para ilustrar que para manter a conectividade das esferas pode ser necessário considerar esferas que não cobrem nenhum ponto da classe 1, as quais são designadas por esferas vazias.

Para determinar a solução ótima do modelo matemático utilizou-se um *solver* de otimização global [16]. No entanto, uma vez que estes problemas de otimização são, em geral, muito difíceis de resolver, para problemas de maior dimensão foram desenvolvidos métodos heurísticos. De seguida, é apresentada uma descrição geral de uma destas heurísticas.

HEURÍSTICA – MAIOR COBERTURA

Estrutura geral do algoritmo

Entrada: Conjunto de pontos de ambas as classes:

$$\text{Classe 1: } C_1 = \{x_{1i}, i = 1, \dots, N_1\}$$

$$\text{Classe 2: } C_2 = \{x_{2j}, j = 1, \dots, N_2\}$$

Saída: Conjunto de esferas S

Procedimento:

1. Inicializar o contador de iterações: $t \leftarrow 1$
2. Definir $I = C_1$ (ou seja, inicialmente todos os pontos da classe 1 estão por cobrir)
3. Enquanto I não estiver vazio, repetir os seguintes passos:
 - a. Definir uma esfera candidata S_k para a iteração atual
 - b. Garantir que S_k está conectada às esferas já definidas em S , por introdução, se necessário, de esferas vazias (sem pontos da classe C_1)
 - c. Atualizar o conjunto S com S_k e atualizar I , removendo os pontos agora cobertos

Foi, de seguida, desenvolvido um estudo comparativo desta proposta com alguns dos métodos clássicos de AA.

COMPARAÇÃO COM MÉTODOS CLÁSSICOS PARA CONJUNTOS DE DADOS REAIS

Para este estudo comparativo foram utilizados oito conjuntos de dados reais provenientes do *UCI Machine Learning Repository* [17]. O objetivo foi comparar a abordagem heurística com algoritmos de classificação amplamente consolidados, tais como regressão logística (LR), SVM linear (L-SVM), SVM gaussiano fino (FG-SVM) e florestas aleatórias (RF). O protocolo experimental utilizou uma validação cruzada em dez subconjuntos (*10-fold cross validation*). Esta é uma técnica de avaliação de modelos de aprendizagem automática, onde os dados são divididos em dez partes (*folds*). Em cada iteração, nove partes são usadas para treino e uma para teste. O processo repete-se dez vezes, mudando o *fold* de teste de cada vez. No final, calcula-se a média dos resultados obtidos, proporcionando uma estimativa mais robusta do desempenho do modelo.

Tabela 1. Informação dos conjuntos de dados reais

Conjunto de dados	Número de features	Número de dados	% da classe 1
<i>Banknotes</i>	4	1372	44,46%
<i>BCW Original</i>	9	683	34,99%
<i>BCW Diagnostic</i>	30	569	37,26%
<i>Ionosphere</i>	34	351	64,10%
<i>Mushrooms</i>	22	8124	48,20%
<i>Pima Diabetes</i>	8	768	34,90%
<i>Sonar</i>	60	208	53,37%
<i>Voting (US)</i>	31	435	38,62%

O desempenho dos modelos é aferido com base na matriz de confusão (*confusion matrix*) que cruza as classes reais dos dados com as classes estimada pelo modelo.

Matriz de confusão	Classe estimada: Positiva	Classe estimada: Negativa
Classe real: Positiva	VP – Verdadeiro positivo	FN – Falso negativo
Classe real: Negativa	FP – Falso positivo	VN – Verdadeiro negativo

As métricas usadas para comparação do desempenho dos modelos foram:

Tabela 2. Resultados de classificação nos conjuntos de dados reais

Conjunto de dados	LR	L-SVM	FG-SVM	RF	Heurística	Precision	Recall	F1 score
Banknotes	98,91	98,40	99,93	94,97	94,66	91,87	96,65	94,16
BCW Original	96,63	96,78	97,07	97,51	93,64	91,64	90,14	90,82
BCW Diagnostic	95,25	99,65	97,89	95,96	90,18	88,09	85,85	86,69
Ionosphere	86,89	87,18	94,59	93,45	84,27	87,08	88,79	87,83
Mushrooms	100	99,90	100	100	99,12	98,38	99,81	99,09
Pima Diabetes	77,60	77,21	73,31	76,82	65,31	50,38	42,66	45,62
Sonar	75,96	77,40	83,65	84,62	62,88	68,37	57,96	62,07
Voting (US)	94,25	95,63	96,09	95,86	87,79	89,02	78,38	82,85

► **Acurácia (Accuracy):** mede a proporção de previsões corretas em relação ao total de previsões realizadas.

$$Accuracy = (VP + VN) / (VP + VN + FP + FN)$$

► **Precisão (Precision):** mede a proporção de estimativas positivas corretas em relação ao total de estimativas positivas feitas.

$$Precision = VP / (VP + FP)$$

► **Revocação (Recall):** mede a proporção de estimativas positivas corretas em relação ao total de instâncias positivas reais.

$$Recall = VP / (VP + FN)$$

► **F1-Score:** média harmônica entre a precisão e a revocação.

$$F1 = 2 * (Precision * recall) / (Precision + Recall)$$

A tabela 2 apresenta o resultado da comparação em termos de *Accuracy* da heurística proposta (coluna Heurística) com os métodos já referidos, nas colunas LR, L-SVM, FG-SVM e RF para os oito conjuntos de dados descritos na tabela 1. As colunas *Precision*, *Recall* e *F1 Score*, indicam os valores destas métricas apenas para a heurística.

CONCLUSÃO

O modelo da nuvem de esferas conectadas (NEC) apresenta potencial para se tornar uma metodologia viável e interessante para tarefas de classificação supervisionada no contexto da aprendizagem automática. Destaca-se pelo seu processo de classificação simples e transparente, bem como pelo reduzido número de parâmetros a estimar. Contudo, ainda existem desafios importantes a superar.

A resolução exata do problema é difícil e, embora os métodos heurísticos consigam soluções interessantes, tendem a apresentar, em geral, um desempenho ligeiramente inferior quando comparadas com algoritmos de classificação consolidados na área de aprendizagem automática. Como perspectiva de trabalho futuro, pretende-se, entre outros, investigar formas de explorar melhor a formulação matemática deste modelo para desenvolver métodos exatos mais eficientes.

REFERÊNCIAS

- [1] El Mrabet, M. A., El Makkaoui, K., & Faize, A. "Supervised Machine Learning: A Survey". In: *2021 4th International Conference on Advanced Communication Technologies and Networking (CommNet)*, pp. 1-10, IEEE, 2021.
- [2] Deng, L. & Yu, D. "Deep Learning: Methods and Applications. *Foundations and Trends® in Signal Processing*", 7(3-4), pp. 197-387, 2014. Now Publishers.
- [3] Somvanshi, M., Chavan, P., Tambade, S., & Shinde, S. V. "A Review of Machine Learning techniques Using Decision tree and Support Vector Machine". In: *Proceedings of the 2016 International Conference on Computing Communication Control and Automation (ICCUBEA)*, pp. 1-7, IEEE, 2016.
- [4] Carrizosa, E. & Romero Morales, D. "Supervised Classification and Mathematical Optimization. *Computers & Operations Research*", 40(1), pp. 150-165, 2013.
- [5] Carrizosa, E., Molero-Río, C., & Romero Morales, D. "Mathematical Optimization in Classification and Regression Trees". *TOP*, 29(1), pp. 5-33, 2021.

- [6] Astorino, A., Fuduli, A., & Gaudioso, M. (2016). "Non-linear Programming for Classification Problems in Machine Learning". In *AIP Conference Proceedings*, 1776(1), 040004. AIP Publishing LLC.
- [7] Malha, R., & Amaral, P. (2021). "A Maximal Margin Hypersphere SVM". In *International Conference on Computational Science and Its Applications* (pp. 304-319). Springer.
- [8] Calado, M. C. A. *Explaining Incorrect Feature Learning in the Training of Deep Neural Networks*. Tese de mestrado, NOVA School of Science and Technology, NOVA University Lisbon, 2022.
- [9] Goodfellow, I. J., Shlens, J., & Szegedy, C. *Explaining and Harnessing Adversarial Examples*. arXiv preprint arXiv:1412.6572, 2014.
- [10] Szegedy, C., Zaremba, W., Sutskever, I., Bruna, J., Erhan, D., Goodfellow, I., & Fergus, R. *Intriguing Properties of Neural Networks*. arXiv preprint arXiv:1312.6199, 2013.
- [11] Bolukbasi, T., Chang, K.-W., Zou, J. Y., Saligrama, V., & Kalai, A. T. *Man is to Computer Programmer as Woman is to Homemaker? Debiasing Word Embeddings*. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 29, 2016.
- [12] Angwin, J., Larson, J., Mattu, S., & Kirchner, L. *Machine Bias: There's Software Used Across the Country to Predict Future Criminals, and it's Biased Against Blacks*. ProPublica, 2016. (Disponível em: <https://www.propublica.org/article/machine-bias-risk-assessments-in-criminal-sentencing>)
- [13] Wang, S. & Gupta, M. "Deontological Ethics by Monotonicity Shape Constraints". In: *Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS)*, pp. 2043-2054, PMLR, 2020.
- [14] Bellamy, R. K. E., Dey, K., Hind, M., Hoffman, S. C., Houde, S., Kannan, K., Lohia, P., Mehta, S., Mojsilovic, A., Nagar, S., et al. "Think Your Artificial Intelligence Software is Fair? Think Again." *IEEE Software*, 36(4), pp. 76-80, 2019.
- [15] Livni, R., Shalev-Shwartz, S., & Shamir, O. *On the Computational Efficiency of Training Neural Networks*. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 27, 2014.
- [16] Sahinidis, N. V. BARON: "A General-Purpose Global Optimization Software Package". *Journal of Global Optimization*, 8, pp. 201-205, 1996.
- [17] Dua, D. & Graff, C. *UCI Machine Learning Repository*. University of California, Irvine, School of Information and Computer Sciences, 2017. <http://archive.ics.uci.edu/ml>.

SOBRE OS AUTORES

Paula Amaral é professora associada na FCT UNL, licenciada em Estatística e Investigação Operacional pela Universidade de Lisboa e com doutoramento em Matemática pela Universidade Nova de Lisboa. Os seus interesses de investigação incluem otimização, aprendizagem automática, rotas de veículos e planeamento de horários. Supervisionou diversas dissertações em ambiente empresarial (CTT, GALP, entre outras), incluindo o vencedor do Prémio de Melhor Tese de Mestrado da APDIO em 2009. As orientações de alunos de doutoramento focaram-se em Otimização para Aprendizagem Automática. Foi membro da direção da PT-MATHS-IN e da comissão executiva do centro de I&D NovaMath CMA. Atualmente, é membro da direção do EUROPT e coordenadora do Mestrado em Análise e Engenharia de Big Data.

Tiago Dias é aluno do Programa Doutoral em Matemática na FCT UNL, mestre em Gestão pela NOVA SBE. Os seus interesses de investigação incluem tópicos ligados com data science, em especial na interpretação matemática de modelos de machine learning. Atualmente, é economista na Comissão do Mercado de Valores Mobiliários (CMVM). Em 2023, juntamente com a sua orientadora, Paula Amaral, recebeu o Prémio Marguerite Frank pelo melhor artigo publicado na EJCO.

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação pt-maths-in@spm.pt

NOTA DOS EDITORES

O presente trabalho é o primeiro que conta com a coordenação dos colegas Rui Borges Lopes (Universidade de Aveiro) e Lúcia Henriques-Rodrigues (Universidade de Évora), a quem desejamos um bom trabalho. Agradecemos ainda o labor dos coordenadores cessantes, Filipe J. Marques e Ana Jacinta Soares.



NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfc@ua.pt

HABEMUS PAPAM

Entre a fé e a razão: reflexões a propósito de um Papa com formação matemática.

Nos dias que correm, sedentos de novidade e caracterizados por uma mediatização extrema, a eleição de um novo Papa, antecipada por um filme muito recomendável, *Conclave*, de Edward Berger, foi escrutinada ao mais ínfimo detalhe. Analisaram-se uma vez mais os rituais próprios da função, os possíveis candidatos, a orientação política e doutrinária do sucessor de Francisco e muito se foi especulando sobre o futuro da Igreja Católica. Já anunciado o nome do norte-americano Robert Francis Prevost, que escolheu o nome pontifício de Leão XIV, voltaram-se as televisões e as rádios para o seu passado. Nascido e crescido em Chicago, numa família com origens africanas, espanholas, italianas e francesas, estudou inicialmente Matemática, tendo concluído a licenciatura em 1977 na Universidade de Wisconsin-Madison. Mais tarde, aprofundou a sua formação com um curso superior em Teologia, que o conduziu ao sacerdócio e a várias funções no Vaticano.

A pergunta que muitos fizeram, e entre eles me incluo, é o que levará a mesma mente a interessar-se tanto pela matemática, a ponto de completar uma licenciatura, para depois se dedicar a Deus e aos seus insondáveis mistérios. A ciência e a religião passaram muitos séculos de candeias às avessas e, embora todos conheçamos cientistas crentes e sacerdotes interessados nas questões científicas, não é comum que as duas áreas se entrecruzem de forma tão profunda.

Começemos então pela Bíblia, que, sendo um livro (ou livros) de muitas palavras, contém também muitos números – alguns simbólicos, místicos até. A trindade, a ressurreição ao terceiro dia, os quatro evangelistas, as quatro bestas do Apocalipse, os sete pecados mortais e as sete virtudes, os doze apóstolos, os 40 dias de jejum. Estes números não são simples quantidades; são símbolos que estruturam a narrativa sagrada e apontam para dimensões transcendentais, convidando a uma leitura em que o número integra e aprofunda a linguagem do

divino.

A contraposição, ou o acerto entre fé e razão, é exemplarmente ilustrada por alguns dos doutores da Igreja. Santo Agostinho, na *Cidade de Deus*, vê na criação em seis dias não uma necessidade temporal de Deus, mas um sinal de perfeição, pois o número seis é o primeiro número perfeito – aquele que é igual à soma dos seus divisores (1, 2 e 3). A escolha deste número, afirma, ilustra a harmonia e a completude da criação, e revela que “não devemos desprezar a ciência dos números”, pois ela auxilia o intérprete atento das Escrituras. João Damasceno, em *A Fé Ortodoxa*, reafirma a importância da razão humana, argumentando: “A razão humana não é contrária à fé, mas deve ser utilizada para aprofundar a nossa compreensão dos mistérios divinos. A matemática, pela sua capacidade de revelar a ordem e a harmonia do mundo, ajuda a iluminar a nossa percepção da criação.” Já São Tomás de Aquino vai mais longe ao afirmar, na *Súmula Contra os Gentios*, que os princípios de ciências, como a aritmética ou a geometria, derivam das formas essenciais das coisas – formas essas que Deus não pode contradizer. Vemos assim que, mesmo no seio da Igreja, através de algumas das suas maiores autoridades, a matemática, longe de ser uma ferramenta desvinculada da fé, é uma chave que permite entender melhor a ordem divina do cosmos.

Voltemos ao Papa Leão XIV e também ao mistério. A matemática e a religião não se sobrepõem nem se confundem, mas partilham o espanto e a busca pelo entendimento. Enquanto a matemática busca ordenar o mundo pela razão, a religião faz o mesmo pela fé. Que mundo é este em que vivemos? Como foi construído e como se rege? São perguntas que nos colocam perante um abismo de hipóteses e limites. Do meu lado, de um não crente que não hostiliza a religião, dou graças a Pitágoras, a Euler e a Descartes por termos um Papa que sabe resolver uma equação.



JOSÉ MIGUEL URBANO: UM MATEMÁTICO ENTRE CULTURAS

ANA MENDES
Escola Superior de
Tecnologia e Gestão
do Politécnico de
Leiria
aimendes@ipleiria.pt

TERESA MONTEIRO
FERNANDES
Faculdade de
Ciências da
Universidade de
Lisboa
mtfernandes@fc.ul.pt

José Miguel Urbano, natural de Coimbra, nasceu em fevereiro de 1970 e é uma referência na matemática portuguesa e internacional. É professor catedrático no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra (DMUC) desde 2009 e, desde 2022, professor de Matemática Aplicada e Ciências Computacionais na King Abdullah University of Science and Technology (KAUST), na Arábia Saudita.

Licenciado em Matemática Pura pela Universidade de Coimbra (1992), com 19 valores, e doutorado em Análise Matemática pela Universidade de Lisboa (1999), conta com experiências internacionais relevantes, como a École Polytechnique (Paris) e a Northwestern University (Chicago). É autor de cerca de 70 artigos científicos e dos livros *The Method of Intrinsic Scaling* e *The Infinity-Laplacian: from AMLEs to Machine Learning*, com contributos significativos para as equações diferenciais parciais não lineares.

Foi presidente do Centro de Matemática da

Universidade de Coimbra (CMUC), vice-presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática e é editor-chefe da *Portugaliae Mathematica*. Com vasta experiência pedagógica, lecionou cursos avançados em instituições prestigiadas, como o IMPA (Rio de Janeiro), a Aalto University (Helsínquia) e a Seoul National University, além de orientar vários estudantes de doutoramento e pós-doutoramento. Distinguido com prémios como o José Anastácio da Cunha (2002) e a Medalha de Ouro nas Olimpíadas Nacionais de Matemática (1988), é reconhecido pela sua excelência académica e pelo seu impacto na matemática internacional. É académico correspondente da Academia das Ciências de Lisboa.

Na entrevista, optámos pelo tratamento por tu, apesar do tom mais formal na transcrição que se segue. Começámos por ouvir o comentário de que “Houve alguns exageros da parte das entrevistadoras neste texto introdutório”...

GAZETA DE MATEMÁTICA [GAZETA] O que o levou a seguir uma carreira em matemática? Como é que a matemática se impôs na sua vida? Houve algum momento ou alguma pessoa que inspirou a sua escolha? Algo na infância? Pais ou avós?

(Interrupção pela filha Teresa e diálogo risonho).

JOSÉ MIGUEL URBANO [JM] Sempre gostei de matemática, mas sem planos de carreira antes dos 18 anos. Foi uma decisão ingénua, ditada exclusivamente pela minha vontade de aprender mais matemática. Não me preocupei com uma carreira. As disciplinas do curso de Matemática na Universidade de Coimbra atraíram-me muito. E eu sabia que queria estudar aquilo.

GAZETA Na verdade, foi medalha de ouro nas olimpíadas...

JM Sim e esse talvez tenha sido o impulso definitivo. Era bom aluno e, naquela época, estudar Medicina era a escolha por defeito, mas o apelo da Matemática foi mais forte...

GAZETA Como foi o primeiro ano na universidade?

JM Tive um grande choque quando comecei a licenciatura. A primeira fase foi dura, cheguei a repetir aulas por não perceber nada, mas depois foi uma epifania. Foi muito melhor do que eu pensava, muito intensa a descoberta de que estava a fazer aquilo de que gostava. Lembro-me perfeitamente de quando isso aconteceu. Foi muito intenso para mim.

GAZETA É uma fase em que tudo parece possível, o fim da licenciatura é fascinante.

JM Sim. Uma fase em que tudo é possível. Tive vários professores que me marcaram muito na faculdade. Com quem aprendi muito e que me marcaram para a vida.

GAZETA Começou como monitor. E o mestrado?

JM No ano em que acabei a licenciatura não havia mestrado em Coimbra. Fiz as chamadas provas de aptidão pedagógica e científica. O sistema científico português não estava ainda amadurecido. Teria sido melhor para mim ter ido para um programa de doutoramento onde tives-



se a oportunidade de interagir intensamente com outros estudantes.

Sempre preferi Análise, era claro que queria fazer Análise. Não tenho muita visão espacial e a minha forma de pensar é mais algébrica, mas não fazia ideia do que era a investigação. As coisas avançaram um pouco ao acaso, e acabei por ser encaminhado para Lisboa, com a sugestão de três nomes, João Paulo Carvalho Dias, Luís Sanchez e José Francisco Rodrigues. Acabei por ser orientado pelo José Francisco, com quem fiz também o doutoramento e que me abriu muitas portas no estrangeiro, fruto da sua experiência e do seu reconhecimento internacional.

GAZETA É dessa experiência no estrangeiro que vamos então falar. O seu percurso inclui experiências em instituições de renome como a École Polytechnique e a Northwestern University. Que impacto tiveram na sua formação científica?

JM Na minha ida para Paris em 1995, por seis meses, aprendi imenso nos cursos que frequentei e fiz contactos com outros estudantes nas mesmas condições. Compensou muito a falta de oportunidades em Portugal.

GAZETA Faltava liderança científica em Portugal. E como foi a experiência em Northwestern?

JM Foi um ano muito intenso em Chicago, trabalhei com matemáticos de primeira água. Foi o verdadeiro arranque da investigação independente para mim.

GAZETA Encontrou a autonomia?

JM Eu andava a trabalhar num problema há já algum tempo, e o José Francisco disse-me que devia falar com o Emmanuele DiBenedetto, que era o líder na área, e escreveu-lhe uma mensagem a perguntar se estaria disposto a receber-me. Os dias foram passando sem uma resposta e, quando já havia perdido a esperança, recebemos um *e-mail* muito simpático. Passados três meses encontrei-me com ele em Roma e, ao fim de duas ou três conversas, já sabia o caminho para a resolução do meu problema. No ano seguinte, fiz o pós-doutoramento em Chicago e mantive uma forte ligação com o Emmanuele até ao fim da sua vida. Abriu-me muitas portas.

GAZETA Vamos falar do porquê de estar tanto tempo fora do País. Será que é daquelas pessoas que não se conformam e sentem, como uma chama interior, a necessidade de conhecer outros mundos, seja pela investigação, seja pelo ensino? O que o levou a sair?

JM Sempre tive muitas oportunidades de viajar para fazer investigação. A razão para sair não teve relação com isso. Honestamente, as minhas razões para procurar sair foram puramente de ordem financeira. Se não fosse isso teria ficado cá, mas a partir de 2012 as condições degradaram-se imenso. O corte de 30% foi catastrófico. Não apenas em termos práticos, mas, talvez mesmo especialmente, em termos, digamos, anímicos. Foi uma decisão familiar, facilitada pelo facto de os meus dois filhos mais velhos já serem independentes e poderem ficar em Portugal.

GAZETA Como descreve a sua experiência como professor e investigador na KAUST?

JM A KAUST é uma pequena vila com cerca de 8000 habitantes e 120 nacionalidades. Vive-se, portanto, um ambiente muito internacional e descontraído. Há cerca de 70 portugueses que são com quem costumamos estar socialmente. Aqui a vida é muito estruturada e organizada. As condições para fazer investigação são excelentes e só temos ensino pós-graduado.

GAZETA Uma espécie de bolha?

JM Temos praia, ginásio, piscina, campos de golfe, ténis e futebol, na verdade, 95% do nosso tempo é passado aqui.

GAZETA Temos curiosidade em saber se, se quiser passear pelo país, o pode fazer livremente...

JM Totalmente livremente... Vamos para todo o lado. A sociedade mudou muito nos últimos dez anos. As mulheres já não têm de se cobrir quando saem, é uma vida normal.

GAZETA Na mesma ordem de ideias, queríamos perceber melhor a presença de mulheres na KAUST, por exemplo, como investigadoras.

JM Na KAUST trabalham muitas mulheres, professoras e alunas. Entre estas, várias são sauditas; eu tenho duas estudantes de doutoramento sauditas. De resto, não é só na KAUST, é em toda a sociedade, por exemplo, nos *shoppings*. Como digo, a sociedade mudou muito.

GAZETA Sente-se o fundamentalismo?

JM Não. Mas é uma sociedade estruturada de forma diferente da nossa.

GAZETA Voltando à investigação, sabemos que em países emergentes se manifesta o esforço por publicar muito como forma de afirmação, como na China, por exemplo.

JM A KAUST segue o modelo americano e compete com as melhores universidades do mundo. Tem grandes cientistas em diversas áreas. Não sinto essa pressão de publicar muito, o que importa é a qualidade.

GAZETA Já ocupa um espaço próprio internacional. E os alunos são bons?

JM Alguns são muito bons, mas temos alunos de níveis muito diversos. E alunos de várias proveniências: 40% da Arábia Saudita, 20% da China, 10% da Europa, 10% da América, outros de vários países asiáticos. Note-se que é uma universidade exclusivamente de pós-graduação.

GAZETA E como estudam os filhos dos professores? Por exemplo, a sua filha?



Durante um seminário na KAUST, 2024.

JM Há uma escola internacional na KAUST que segue o sistema IB (International Baccalaureate); o ensino é em inglês. Está cheia de crianças! Tinha de haver.

GAZETA Como é o ensino na KAUST? Nota diferenças em comparação com Portugal?

JM Repito que só há mestrados e doutoramentos. Eu, por exemplo, tenho cinco alunos de doutoramento, três sauditas, um do Barém e um do Tajiquistão.

GAZETA Os que acedem à KAUST que estudos fizeram antes?

JM Varia muito. Mas os sauditas, em geral, estudaram nos Estados Unidos. As minhas duas alunas vêm de Urbana-Champaign e o aluno de Rice.

GAZETA E de que estratos sociais?

JM Francamente, não sei!

GAZETA Perguntamos isso porque, por exemplo, na Índia, é sabido que há camadas sociais que não têm acesso a estudos, e, portanto, a qualquer forma de melhoria de vida. A desigualdade no mundo é muito inquietante e sabemos que só é superável pela educação.

JM Aqui esse problema não se põe de forma tão vincada, o país é muito rico.

GAZETA O seu trabalho em equações com derivadas parciais é amplamente reconhecido. Pode explicar, de forma acessível, em que consiste este campo e a sua relevância prática?

JM Trata-se de procurar compreender as propriedades das soluções de equações que modelam diversos fenómenos físicos ou biológicos (como transições de fase, quimiota-

xia, propagação de frentes). As equações são tão complexas que a única possibilidade é procurar encontrar padrões de comportamento e classificar as soluções.

GAZETA Fale-nos mais do que o apaixona enquanto professor, investigador...

JM Gosto muito de ensinar; só percebemos realmente um assunto quando conseguimos explicá-lo aos outros sem esforço. Há um problema que me apaixona há muito tempo: provar a regularidade ótima das funções infinito-harmónicas. Este problema, apesar de já ter alguns avanços, permanece em aberto há mais de 30 anos e encontrou recentemente aplicações muito relevantes em *machine learning*.

GAZETA Quer dizer que na KAUST foi empurrado para as aplicações?

JM Aqui há a preocupação de fazer coisas com impacto, com aplicações e, portanto, tentamos direcionar o nosso

trabalho. Claro que um matemático mais puro não comercializa logo os seus resultados...

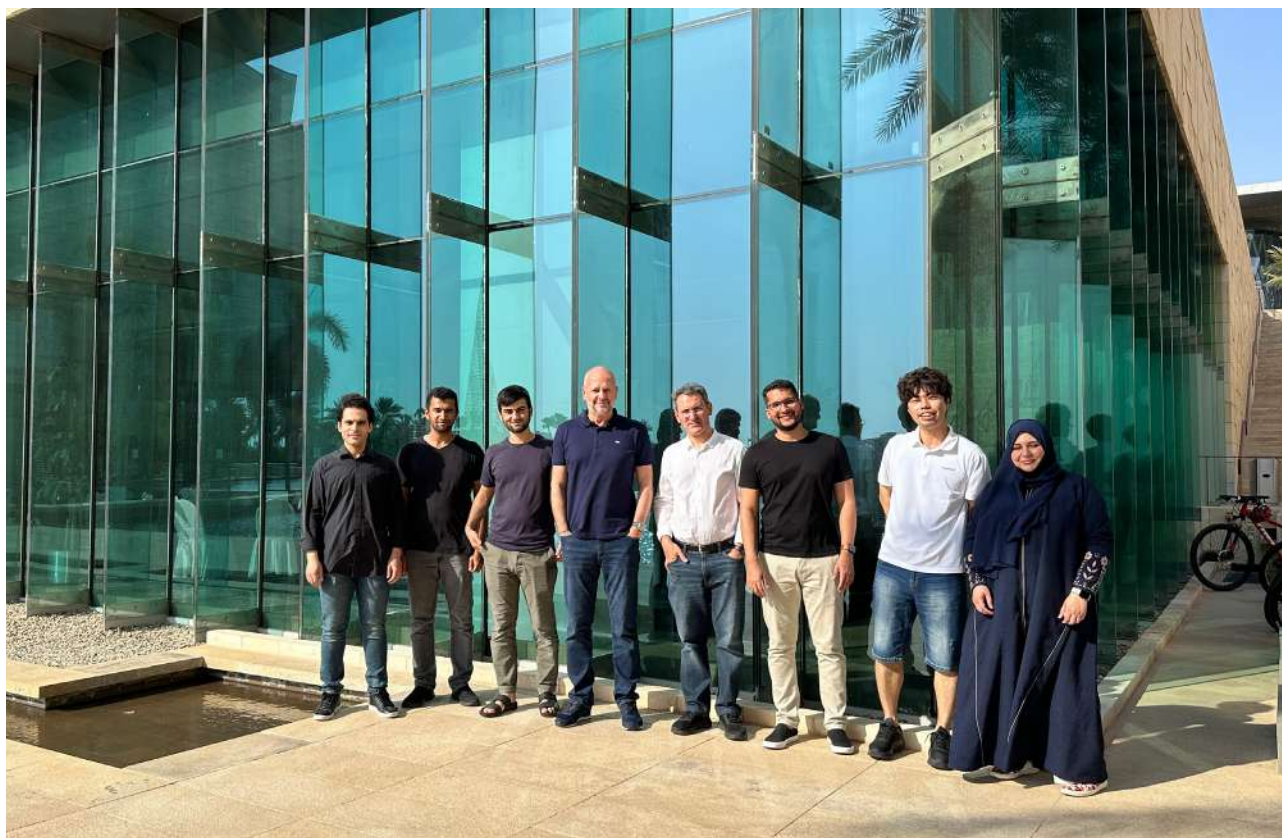
GAZETA É possível viajar muito? Tem muitas aulas?

JM Sim, viajo muito. Tenho um horário letivo muito suave, concentrado num semestre. No semestre livre posso viajar e convidar pessoas.

GAZETA Foi investigador principal de vários projetos financiados pela FCT. Como avalia o panorama atual do financiamento para a investigação em matemática em Portugal?

JM De há anos para cá, que se observa um descalabro no financiamento. Não melhorou nada, só piorou, sobretudo para a matemática pura. Aqui tenho condições incomparáveis.

GAZETA O que o levou a tomar a decisão de partir... Falemos agora dos seus dois livros. Publicou dois livros impor-



Com o seu grupo de investigação na KAUST, 2024.

tantes na área. Como surgiu a ideia de os escrever e qual foi o maior desafio nesse processo?

JM O primeiro, *The Method of Intrinsic Scaling*, resultou de um curso avançado que dei no Programa de Verão do IMPA em 2005. Surgiu depois a oportunidade de o publicar nas *Lecture Notes in Mathematics*, graças ao professor Francisco Craveiro, uma das referências da UC que mencionei anteriormente, que tinha um contacto na Springer. Gosto muito deste livro porque vários estudantes de diversas partes do mundo me disseram que lhes foi muito útil.

Quanto ao outro, é sobre a relação entre o Laplaciano-infinito e *machine learning*. Por detrás do *machine learning*, agora muito em voga, há a matemática.

GAZETA Pois, os matemáticos são os reguladores do conhecimento...

JM Para mim foi muito importante perceber que o que estava a fazer tinha aplicação em *machine learning*. Durante a pandemia, assisti a muitos seminários *online* e apercebi-me de que a comunidade de *machine learning* falava de coisas que nós, matemáticos, conhecemos há muito tempo, como se estivessem a descobri-las. Ora, a matemática já estava feita, era só preciso juntar as peças e falar a mesma linguagem. Bom, eu achei isso interessante e foi por essa razão que decidi escrever o livro.

GAZETA Que tal o *feedback*?

JM Tem sido bom. Vale a pena ler a recensão nas *Mathematical Reviews*...

GAZETA Que conselhos daria a jovens matemáticos que pretendem iniciar uma carreira académica?

JM Eu diria que em Portugal estamos bem até ao final da licenciatura. Na pós-graduação há uma falha. Diria que baixa o grau de exigência e que os alunos tendem a seguir a lei do menor esforço.

GAZETA Será que é por haver alunos com formações de diferentes níveis, portanto, vai-se nivelar pelo mais baixo? Há falta de alunos de pós-graduação, os licenciados querem construir as suas vidas, ganhar dinheiro, construir família... Os melhores vão para fora.

JM E fazem bem, o meu conselho a um bom aluno seria: vá

para fora e esforce-se ao máximo!

GAZETA A propósito, é um *workaholic*?

JM Já fui mais... Mas sim, acho que sou...

GAZETA Voltando à questão, não se respeita a carga horária dos docentes do Ensino Superior, daí também não se fazer melhor. E a falta de alunos de pós-graduação é um grande problema da academia.

JM Em Portugal temos programas de doutoramento em vários sítios, só em Lisboa há quatro ou cinco, e, de facto, para ter um programa de doutoramento bom, é preciso uma certa massa crítica e concentrar essa massa crítica. Esta dispersão acaba por não ser boa.

GAZETA Outra razão é a falta de perspectivas de carreira. As bolsas para investigação não são muito avultadas e há quem passe de financiamento de projeto em projeto e esteja já há mais de 20 anos precário. Foi diretor do CMUC. Qual é a sua experiência?

JM Fui diretor do CMUC há muitos anos, por aí entre 2007 e 2011, talvez. Para mim foi uma experiência muito boa, particularmente na fase em que tivemos a avaliação internacional do centro, em que senti aquele espírito de entreajuda e solidariedade que nos torna mais fortes. Foi um período bom, acho que na altura ainda havia talvez a ilusão de que o País conseguiria dar o salto em termos de investigação científica. Daí para a frente, pessoalmente, foi desilusão atrás de desilusão. Perceber que não havia uma estratégia, as coisas mudavam constantemente, num ano os centros deviam ser muito grandes, no ano a seguir deviam ser centros muito pequenos. As bolsas eram dadas aos centros, depois voltava-se ao sistema centralizado com base na FCT, com o financiamento assente em projetos, depois já não havia projetos, enfim... As coisas perderam um bocadinho a direção. Acho que as pessoas depois também começaram a desligar-se, houve muitas pessoas que saíram, pessoas que se desiludiram e que deixaram de... de se empenhar.

Eu fui-me desiludindo ao longo da vida com o País, com a universidade... Por exemplo, no que respeita à pergunta do *workaholic*, lembro-me, nessa altura em particular, de passar muitos fins de semana a trabalhar na faculdade. Muito para lá daquilo que seria expectável. E depois...



José Miguel Urbano com José Francisco Rodrigues e alguns dos seus irmãos académicos, em João Pessoa (Brasil), 2024.

GAZETA Mudando um pouco de tema, sente-se um bairrista de Coimbra?

JM Não, não, não! Não sou nada bairrista! Posso estar em Coimbra como estar noutra qualquer. Gostei imenso de viver em Lisboa, por exemplo. E quero acabar a viver no Porto. E passar um ano em Inglaterra, a ir ao *pub* ao fim da tarde, ao futebol ao sábado e a levar com aquele tempo miserável e o sarcasmo dos nativos todos os dias.

GAZETA Como é que se compagina tanta dedicação ao trabalho, de que é exemplo a carreira que desenvolveu, com uma família numerosa?

JM Os meus filhos sempre foram a minha prioridade. Tive quatro, mas num espaço de 20 e tal anos. A minha filha Teresinha já veio numa fase tardia, o mais velho já tem quase 30 anos. Ainda não sou avô, mas já podia ser.

GAZETA Regressando à linha da formação, e antes de irmos para o tema da Academia de Ciências, que diferença encontra na formação em Matemática entre Portugal e noutras nações que conhece? Embora nos pareça que já deu a resposta... Talvez caiba perguntar-lhe se pensa que a matemática é suficientemente valorizada pela sociedade portuguesa. O que sugere para mudar a perceção pública?

JM Como disse antes, eu acho que até ao nível da licenciatura não há diferença nenhuma, mas em termos de pós-

-graduação, o nível de exigência não é tão elevado, não é? Sobre como mudar a perceção pública, não sei muito bem...

Eu diria que sim, por um lado, acho que as pessoas têm a noção de que a matemática é uma coisa importante. Sim. Mas não é tão valorizada como é, por exemplo, na sociedade francesa. Em que um bom matemático é uma pessoa muitíssimo considerada. Acho que em Portugal é-se considerado mais como um doido qualquer. Que faz umas coisas esquisitas que ninguém percebe. Ainda assim, há uma consciência na sociedade portuguesa de que a matemática é importante.

GAZETA Relacionado com isso, acha que é importante saber comunicar matemática?

JM Acho que é muito importante. Eu faço isso, mas mais ao nível do meu trabalho de investigação. Eu procuro, sempre que dou um seminário ou que dou uma conferência num congresso, falar de maneira que as pessoas entendam. E sempre achei isso importante. Sempre me irritou um bocadinho, quando vou assistir a um seminário, o facto de ao fim de cinco minutos a pessoa já estar a falar sozinha. Está só a falar para ela e, enfim, aquilo transforma-se numa perda de tempo. Eu acho que é importante fazer esse esforço. Fazer um esforço de divulgação para o público em geral é algo que eu nunca fiz de forma, digamos, intensa, porque acho que é uma coisa que é muitíssimo difícil, que exige tempo, exige dedicação, e eu simplesmente

não consigo fazer tudo. É algo que eu até gostaria de fazer e fi-lo uma ou outra vez, mas, enfim, a certa altura é preciso fazer opções, não é?

Respeito muito alguns colegas que temos em Portugal, em particular o Jorge Picado e o Jorge Buescu, entre outros, que fazem um trabalho notável a esse nível, mas seguramente com um grande investimento em termos de tempo e de dedicação, porque não é só pensar que se vai contar uma história qualquer para as pessoas entenderem. O que se apresenta tem de ser preparado e feito de forma séria e isso também exige tempo e muita dedicação, sem dúvida.

GAZETA O que significa para si ser membro da Academia das Ciências?

JM Bom, foi algo que eu não procurei, obviamente, acho que estas coisas não se procuram, mas não nego que fiquei muito contente quando me convidaram. Acho que é um reconhecimento importante e acho que a Academia vai começando a ter um papel mais importante na sociedade portuguesa e no desenvolvimento da ciência, e mesmo em termos de política científica acho que pode começar a desempenhar um papel muito relevante.

GAZETA Na KAUST sente-se apreciado de forma semelhante?

JM Sim, sinto-me apreciado. Recentemente foi-me atribuída pela KAUST uma bolsa de investigação muito generosa para os próximos três anos num processo muito competitivo com avaliação internacional. O meu processo de recrutamento aqui também foi muitíssimo longo e com muitas fases e, portanto, o facto de ter terminado bem, para mim, foi um sinal de grande reconhecimento.

GAZETA Quantos meses, só por curiosidade? O processo é igual para todos os recrutamentos?

JM Isto terá demorado quase um ano e meio. Sim, é. Muito rigoroso, nós somos muito poucos, somos só 200 professores, mais ou menos, de várias nacionalidades. Portugueses há dois: o Diogo Gomes e eu.

GAZETA Tenciona continuar durante muito tempo? Ou já tem saudades de Portugal?

JM Tenho muitas saudades de Portugal, claro que sim, es-

pecialmente da família. Não sei quanto tempo vou continuar. O meu contrato em Coimbra está, digamos, suspenso, o que não se pode prolongar por muito tempo. Se eu regressar nos próximos dois anos, voltarei certamente à Universidade de Coimbra.

GAZETA Neste contexto, que medidas aconselharia para evitar a fuga de talentos em Portugal?

JM Não tenho nenhuma solução milagrosa. Aquilo que é óbvio, não é? Dar melhores condições às pessoas, valorizar mais a profissão. Criar um ambiente onde as pessoas se sintam valorizadas e dar-lhes condições para poderem ser competitivas internacionalmente. Acho que é isso que uma pessoa jovem, com futuro, quer. Há coisas que são relativamente fáceis de fazer, por exemplo, não sobrecarregar as pessoas com aulas. Termos uma FCT que permita que as pessoas tenham acesso a projetos de investigação e que a taxa de aprovação não seja de 3%.

GAZETA Focando um lado mais pessoal, esperando nós que o Zé Miguel não se importe, recordamos que era carinhosamente conhecido como “Zé dos vintes”!

JM Essa história do “Zé dos vintes” vem do final do liceu. Quando eu fiz o 12.º ano, ainda não havia a PGA (Prova Geral de Acesso), havia aquele sistema de três exames. Nós fazíamos três exames e depois contavam as duas melhores notas naquela época. O que aconteceu é que eu fiz os exames, Matemática, Biologia e Química, e tive 20 nos três. E foi a partir daí que me começaram a chamar “Zé dos vintes”. Claro que eu não liguei nada a isso, porque fui para Matemática e os vintes não me serviram de nada, já que a nota de entrada era 12 valores ou qualquer coisa do género. Sobre isso tenho uma história engraçada. Eu tenho a felicidade de ter tido, desde pequeno, o mesmo grupo de amigos. Ora, quando entrei na universidade, a minha primeira nota, numa frequência, foi 13. Depois, no exame, subi para 18, mas a primeira nota foi 13. E nesse grupo de amigos passei a ser o “Zé dos trezes”. Ainda hoje me chamam isso.

Comparando com os dias de hoje, eu acho que tivemos uma infância muito feliz, porque passávamos o dia na rua, os verões tinham quatro meses. Os nossos pais, de facto, não precisavam de se preocupar, eu lembro-me de quando era miúdo, nessa altura saía de casa às dez da manhã e voltava às dez da noite. E passávamos a vida a brincar com berlindes, piões, caricas, a andar de bicicleta

para trás e para frente na Coimbra dos anos 70. Foi uma infância muito descontraída, muito fora de casa e que eu tenho muita pena que atualmente não seja possível. A minha filha tem um bocadinho disso aqui, porque a KAUST é um sítio muito seguro.

GAZETA Ter ganhado a medalha de ouro nas Olimpíadas de Matemática teve um impacto na sua vida...

JM Teve. Teve e foi muito importante na altura. Foi, digamos, o último empurrão para eu ter escolhido matemática. Mas volto a dizer, foi uma escolha totalmente ingénua de um miúdo de 18 anos que não pensou em mais nada. Que só queria aprender matemática. Eu não fazia a mínima ideia, por exemplo, do que era uma carreira em matemática, do que era ser matemático profissional. Eu não fazia a mínima ideia do que isso era. A minha escolha foi puramente baseada nesta coisa de eu querer aprender isto.

GAZETA Há algum momento na sua vida que considere muito marcante, do qual se orgulhe muito? Ambicionava ser Medalha Fields?

JM Temos de ter a noção das coisas. Acho que sei muito bem aquilo que sou, mas também sei muito bem aquilo que não sou. Acho muito importante uma pessoa ter a noção das suas limitações e perceber que obviamente há coisas que não são para nós, não é? E eu vivo muito bem com isso. Enfim, sei aquilo que consegui, mas também sou uma pessoa que nunca se deu demasiada importância e acho isso saudável. Acho que é bom sabermos exatamente onde é que estamos e reconhecermos que há pessoas muito melhores do que nós.

Momentos marcantes na minha vida profissional: houve vários, mas é mais um contínuo. Se tivesse de distinguir um, talvez o dia da minha agregação. Foi algo que preparei com muita intensidade durante um período, praticamente fechei-me em casa durante dez dias a preparar aquilo. E acho que as provas correram muitíssimo bem. Lembro-me de ter sido uma sensação muito boa. Em 100 tentativas, aquela teria sido a melhor. Depois, o resto da nossa vida profissional é feito de, enfim, 90% de frustração e alguns momentos de realização. Ainda ontem tive um desses momentos de felicidade ao concluir um artigo.

GAZETA Se voltasse ao início da sua carreira, o que é que faria diferente? Se é que o faria?

JM Como disse, a única coisa que eu acho que talvez fizesse diferente era, naquele período a seguir à licenciatura, ter procurado entrar numa escola de pós-graduação fora. Ir estudar para um sítio muito bom traz outras oportunidades, conhecem-se outras pessoas que depois têm posições de influência e isso também depois abre muitas portas. Acho que fiquei muito cedo um bocadinho isolado num sítio periférico e tive de fazer um esforço muito maior, sozinho, para aprender certas coisas. Se eu soubesse o que sei hoje, provavelmente teria saído de Coimbra para os Estados Unidos, por exemplo.

GAZETA Que livros ou pessoas ou cientistas o influenciaram?

JM Há dois livros que me marcaram imenso. Acima de todos, o *Curso de Análise*, do Elon Lages Lima. Esse é o livro da minha vida. Foi o livro que, de facto, me fez gostar da matemática como ela é, e não como eu achava que era. E depois há um segundo livro que foi o livro de Análise Funcional do Brezis, já numa fase posterior, que também me marcou muito.

Pessoas que me influenciaram: muita gente, muitos professores em Coimbra, o José Francisco seguramente, o Emmanuele DiBenedetto e outros colegas, pois continuo a procurar aprender com pessoas que admiro. Se me dissessem, na altura em que comecei, que ia publicar artigos com algumas das pessoas que eu mais admirava na altura, eu diria que não era possível, não é? E vim a ser coautor de várias pessoas que admiro imenso.

GAZETA Tem a primeira edição do livro do Elon Lages Lima?

JM Não, não tenho a primeira edição, mas tenho várias edições. Fui comprando várias, tenho uma data delas, umas dez, com capas de cores diferentes. Mas do que eu gosto mais é do primeiro que adquiri, o azul, não sei que edição é, está todo riscado, com uma série de anotações e que eu guardo com muito carinho.

GAZETA As nossas entrevistas tentam sempre conhecer o lado pessoal do entrevistado, sem ser muito intrusivas. Assim, fora do mundo da matemática, quais são as coisas que mais lhe dão prazer?

JM Eu diria três coisas. Gosto muito de ler desde pequeno, e tenho conseguido ler muito mais desde que vim para



No Rio de Janeiro, a cidade favorita de José Miguel Urbano, em 2023.

a Arábia Saudita. Também gosto muito de futebol, especialmente dos jogos da liga inglesa, e sou, como diria o Elon, *um torcedor (moderamente) fanático* do Futebol Clube do Porto. A terceira coisa que eu gosto muito de fazer hoje em dia é ver séries de televisão. Nós aqui não vemos canais de televisão, não vejo televisão nenhuma, portanto só vemos séries. Muito mais do que filmes. Já não consigo ver um filme até ao fim sem adormecer. Só no cinema... [Risos]

GAZETA Qual é a disciplina do fim do dia de trabalho? Faz desporto?

JM Sim, treino muito cedo, três vezes por semana. Nos restantes dias, faço algum tipo de alongamentos em casa, porque tenho muitos problemas nas costas e tenho de manter essa disciplina. Hoje em dia sou uma pessoa muito mais das manhãs. O *filet mignon* do dia são aquelas horas entre as 6h e as 9h. E é a altura em que gosto mais de trabalhar. Não há barulho, e não há *e-mails*...

GAZETA Além da literatura como forma de arte, tem acesso aí a outras formas de arte, como, por exemplo, exposições ou tem de viajar para poder apreciar a pintura, concertos, etc.?

JM Ainda noutro dia fui a Jeddah a uma interessantíssima bienal de arte islâmica. Mas sim, isso faço normalmente quando viajo. Há cá uma comunidade de pessoas que alimentam a vida cultural, mas concertos de grande envergadura não há. Tento aproveitar as viagens para isso.

GAZETA Ler é uma forma de viajar... Há alguma obra que o tenha marcado?

JM Tantas, por exemplo, a *Conversa na Catedral* ou *Os Sete Pilares da Sabedoria* (de T.E. Lawrence, o Lawrence da Arábia). Gosto muito do Mario Vargas Llosa, do Javier Marías, do Saramago. Li há pouco tempo um livro da Leila Slimani (*Canção de Embalar*) que ganhou o Prémio Goncourt e que achei fora de série, um murro no estômago.

GAZETA Nós gostamos muito de fazer esta última pergunta: de que é que se orgulha mais?

JM Isso é muito fácil, essa pergunta tem uma resposta muito fácil. Do que eu me orgulho mais é dos meus filhos, de longe!

SOBRE AS AUTORAS

Ana Mendes é professora na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Politécnico de Leiria (Portugal). Tem um doutoramento em matemática pura e, atualmente, investiga problemas de classificação de lesões cutâneas. É investigadora convidada no LABI – Laboratório de Aplicações Bioinformáticas da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil.

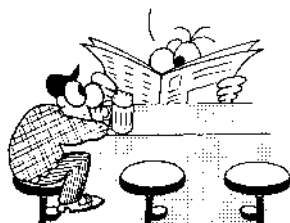
Teresa Monteiro Fernandes é professora catedrática aposentada da Universidade de Lisboa (Portugal) e membro do CEMS/CMAFclO – Centro de estudos matemáticos da Universidade de Lisboa/Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É investigadora em teoria de D-módulos e áreas afins.



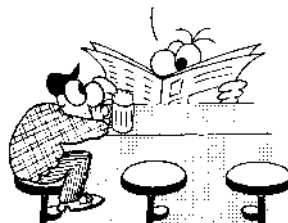
BARTOON

LUIS AFONSO

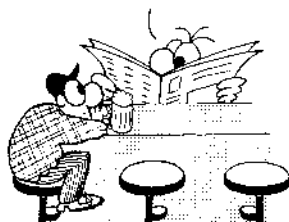
"OS NÚMEROS SÃO ENGANADORES".



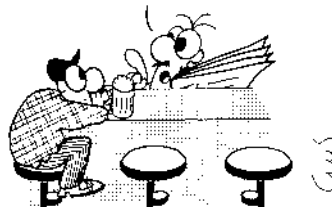
"HÁ QUE DESCONFIAR DESTES NÚMEROS".



"AS CONTAS NÃO SÃO BEM ASSIM".



JÁ ESTIVE MAIS CONVENCIDO DE QUE
A MATEMÁTICA É UMA CIÊNCIA EXACTA.



Publicado originalmente no jornal Público, em 06/11/2024. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

Paulo Saraiva Universidade de Coimbra

EDITORES:

Patrícia Beites Universidade da Beira Interior

Rui Santos Politécnico de Leiria

Sandra Bento Universidade da Beira Interior

CONSELHO EDITORIAL:

Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Camões, Lisboa • **Carlos Farias** E. S. Campos Melo, Covilhã • **Helder Vilarinho** Universidade da Beira Interior • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Maria de Natividade** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Sílvia Barbeiro** Universidade de Coimbra • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

Turbilhão de Cores - Soluções de Produção

Rua Almirante Gago Coutinho, N° 19, Traseiras, Gar. 19, 2620-204 Ramada

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO

Sociedade Portuguesa de Matemática

SEDE: Av. República 45, 3ª Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: <http://gazeta.spm.pt/politica>

TIRAGEM **1350 Exemplares**

ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

**TERESA MONTEIRO FERNANDES PREMIADA COM O FRONTIERS OF SCIENCE AWARD**

A matemática portuguesa Teresa Monteiro Fernandes foi distinguida, em conjunto com Luisa Fiorot e Claude Sabbah, com o Frontiers of Science Award, pelo seu trabalho “Relative Regular Riemann-Hilbert Correspondence II”, publicado em 2023 pelo *Compositio Mathematica* (volume 159, nº 7, 1413-1465), da London Mathematical Society. O Frontiers of Science Award distingue trabalhos científicos de investigação básica e aplicada em três áreas científicas – Matemática, Física e Ciências Teóricas da Computação e da Informação –, com valor académico excecional e reconhecidos pelos grandes avanços nestas áreas. O prémio é promovido pelo Congresso Internacional de Ciências Básicas (ICBS) e patrocinado pela cidade de Pequim e pelo Instituto de Ciências Matemáticas e Aplicações do Lago Yanqi de Pequim. A cerimónia de entrega dos prémios teve lugar no dia 13 de

julho, o dia de abertura do ICBS 2025, que decorreu em Pequim, entre 13 e 25 de julho.

Doutorada em Matemática pela Universidade de Paris (XIII), colaboradora frequente da *Gazeta de Matemática* e também membro do seu Conselho Editorial, Teresa Monteiro Fernandes é professora catedrática aposentada da Universidade de Lisboa e membro do CEMS/CMA-FcIO – Centro de Estudos Matemáticos da Universidade de Lisboa/Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. A sua investigação situa-se na intersecção entre a Álgebra, a Geometria e a Análise, tendo como tema dominante a Teoria dos D-Modulos e áreas afins. Colaborou com os matemáticos Pierre Schapira e Masaki Kashiwara, galardoado com o Prémio Abel 2025, considerando-os os seus mestres.

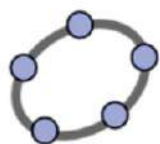
9.º WORKSHOP NEW TRENDS IN QUATERNIONS AND OCTONIONS – NTQO 2025

Nos dias 12 e 13 de setembro irá realizar-se o 9.º *workshop* New Trends in Quaternions and Octonions – NTQO 2025, no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro. Trata-se de um evento científico que tem como objetivo apresentar e discutir desenvolvimentos recentes na área dos quatérnios e dos octoníons, reunindo cientistas de Matemática Pura e Aplicada, Física, Computação Científica, Engenharia e outras disciplinas relacionadas. A edição de 2025 do NTQO é especial por comemorar o 75.º aniversário do professor Helmuth Malonek, um dos fundadores destes *workshops*. Nesta edição ainda se celebrará o 145.º aniversário do nascimento e o 75.º aniversário do falecimento de Rudolf Fueter, uma figura histórica na área dos quatérnios. O encontro será realizado em formato híbrido, con-

tando com palestras com oradores convidados e com comunicações curtas. Vladimir V. Kisil (University of Leeds, UK), Sören Kraußhar (University of Erfurt, Germany), Anna Kit Ian Kou (University of Macau, MSAR) e Cristina Diogo (ISCTE, Portugal) são os oradores convidados deste *workshop*.

O NTQO 2025 é organizado conjuntamente pelo Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática da Universidade de Aveiro (CIDMA-UA), pelo Centro de Matemática da Universidade do Minho (CMAT-UMinho) e pelo Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior (CMA-UBI), e conta com o apoio do Centro Internacional de Matemática (CIM). Mais informações em <https://sites.google.com/view/ntqo-2025>

II CONGRESSO INTERNACIONAL GEOGEBRA



**II CONGRESSO INTERNACIONAL
GEOGEBRA**

Coimbra, 23 a 25 de Outubro de 2025

Entre os dias 23 e 25 de outubro de 2025 decorrerá o II Congresso Internacional GeoGebra no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Usado por milhões de utilizadores em todo o mundo, que desenvolvem e partilham materiais através de plataformas digitais, o GeoGebra tem-se afirmado como uma ferramenta transformadora no contexto educativo.

Este evento visa promover o intercâmbio de experiências inovadoras, materiais pedagógicos e investigações relacionadas com a utilização do GeoGebra como recurso educativo em diferentes níveis de ensino e contextos internacionais. O congresso reunirá professores e investigadores de todo o mundo para partilharem conhecimentos através de conferências, comunicações e pósteres.

Nesta segunda edição, os organizadores pretendem consolidar o impacto do GeoGebra na educação, incentivando uma mudança metodológica significativa que contribua para práticas educativas mais dinâmicas, inclusivas e eficazes. A primeira edição deste congresso internacional realizou-se em 2023 na cidade de Córdoba (Espanha).

Mais informações poderão ser consultadas em <https://congresogeogebra.org/index.php/pt/pagina-inicial>

9.º ENCONTRO BRASIL-PORTUGAL | IST-IME

A 9.ª edição do IME-USP terá lugar de 4 a 8 de agosto em São Paulo. O evento resulta da colaboração entre o Instituto Superior Técnico (IST), em Lisboa, o Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP) e as sociedades brasileira e portuguesa de Matemática (SBM e SPM). Esta conferência tem como objetivo fortalecer a colaboração entre investigadores do Brasil e de Portugal. Saiba mais em: <https://sites.google.com/usp.br/9-ist-imeenglish/home?authuser=0ME9>

AUSTRÁLIA RECEBEU AS 66.^{as} OLIMPIÁDAS INTERNACIONAIS DE MATEMÁTICA



A 66.^a edição das Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO), a maior competição matemática internacional, decorreu na Sunshine Coast, Queensland, Austrália, de 10 a 20 de julho. A delegação portuguesa partiu a 5 de julho, de Lisboa, mas fez uma paragem na Nova Zelândia para um estágio de preparação antes do arranque das Olimpíadas Internacionais. Portugal foi representado por Henri Campagnolo (12.º ano, Lycée Français Charles Lepierre), Miguel Domingos (12.º ano, Escola Secundária

Rainha D. Leonor), Pedro Silva (12.º ano, Escola Secundária Emídio Navarro), Rafael Marques (10.º ano, Escola Secundária Camões), Tomás Faria (12.º ano, Colégio Moderno) e Tomás Prata Vidal (11.º ano, Grande Colégio Universal). Da comitiva faziam ainda parte Joana Teles, capitã de equipa, professora do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, e Nuno Arala, tutor da equipa e ex-olímpico.

IMPA DISPONIBILIZA DUAS VAGAS EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

O Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) tem inscrições abertas para duas vagas académicas. O instituto procura um investigador especializado em matemática pura, aplicada ou industrial – com especial ênfase nas subáreas da Matemática Aplicada e da Matemática Industrial – e oferece ainda uma bolsa de pós-doutoramento aberta a todas as áreas da matemática. A data-limite para o envio de candidaturas para a posição de investigador é 16 de novembro e para a bolsa de pós-doutoramento é 30 de novembro. Ambos os resultados serão anunciados em dezembro de 2025 e em ambas as vagas os trabalhos deverão ter início entre janeiro e setembro de 2026. Saiba mais em: <https://impa.br/notices/impa-abre-processo-seletivo-para-pesquisador-e-oferece-bolsa-de-pos-doutorado>

BOLSAS GULBENKIAN NOVOS TALENTOS

O período de candidatura às Bolsas Gulbenkian Novos Talentos abrirá no dia 1 de setembro e terminará no dia 30 do mesmo mês. Estas bolsas pretendem identificar e apoiar o talento de estudantes excecionais e estimular a iniciação à investigação nas áreas de ciência básica, sendo a matemática uma delas. Podem candidatar-se estudantes inscritos nos 2.º, 3.º e 4.º anos de licenciatura ou mestrado integrado, ou no 1.º ano de mestrado, no ano letivo 2025/2026, numa instituição de Ensino Superior em Portugal. Os candidatos devem ter média igual ou superior a 16,5 valores nas unidades curriculares já realizadas.

Candidate-se através da página oficial: <https://gulbenkian.pt/bolsas-lista/novos-talentos>

10TH EUROPEAN SUMMER UNIVERSITY ON HISTORY AND EPISTEMOLOGY IN MATHEMATICS EDUCATION – ESU-10



A 10th European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education (ESU-10) irá decorrer entre os dias 20 e 24 de julho de 2026, no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro. A submissão de resumos de propostas de atividades está aberta até 31 de outubro de 2025. Os principais objetivos da ESU são proporcionar um fórum para a apresentação de pesquisas em educação matemática e métodos de ensino inovadores baseados numa abordagem histórica, epistemológica e cultural da matemática e do seu ensino, com ênfase na implementação prática, oferecer uma oportunidade para professores, educadores e investigadores de matemática partilharem o seu conhecimento histórico, as suas ideias de ensino e as experiências em sala de aula relacionadas com essa perspetiva e motivar novas colaborações entre os membros da comunidade de educação matemática na Europa e noutros lugares. Todas as informações poderão ser encontradas em <https://esu10.sciencesconf.org>

FCUP DISPONIBILIZA NOVO ESPAÇO DE MATEMÁTICA INTERATIVA

O novo Espaço de MATemática Interativa (eMATi), da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP), abriu oficialmente as portas no dia 13 de junho. Criado para promover o ensino e a divulgação da matemática, o eMATi reúne quase duas dezenas de atividades interativas destinadas a miúdos e graúdos.

Um bilhar elíptico, uma gaiola prismástica, minicaledoscópios e a atividade “Estou no π ?” são apenas alguns exemplos de módulos interativos do eMATi.

A iniciativa tem como promotor António Machiavelo, no entanto os módulos – virtuais e físicos – em exposição foram concebidos e cedidos pela Associação Atractor. O acesso ao espaço é gratuito e todas as visitas poderão ser agendadas através do e-mail aalves@fc.up.pt.



FOTO: SIC.FCUP

XII FEIRA DA MATEMÁTICA

A Feira da Matemática está de regresso ao Museu Nacional de História Natural e da Ciência nos dias 21 e 22 de novembro. A XII edição da Feira será um evento repleto de atividades científicas, culturais e educativas e, tal como nos anos anteriores, o primeiro dia terá um programa dirigido ao público escolar e o segundo dia, ao público em geral e famílias. A entrada é gratuita, mas as escolas necessitam de se inscrever.



POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: gazeta@spm.pt.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2025

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para imprensa@spm.pt

VISITE O SITE DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

www.spm.pt

E O DA GAZETA DE MATEMÁTICA

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

