

N. 0205

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXXVI | Mar - Jun 25 | 4,20€

MATEMÁTICOS NA PRIMEIRA PESSOA

Uma Conversa com Volker Mehrmann: A Matemática Traz Felicidade

Sílvia Barbeiro,
Ana Mendes
e Martin Raussen

CANTO DÉLFICO

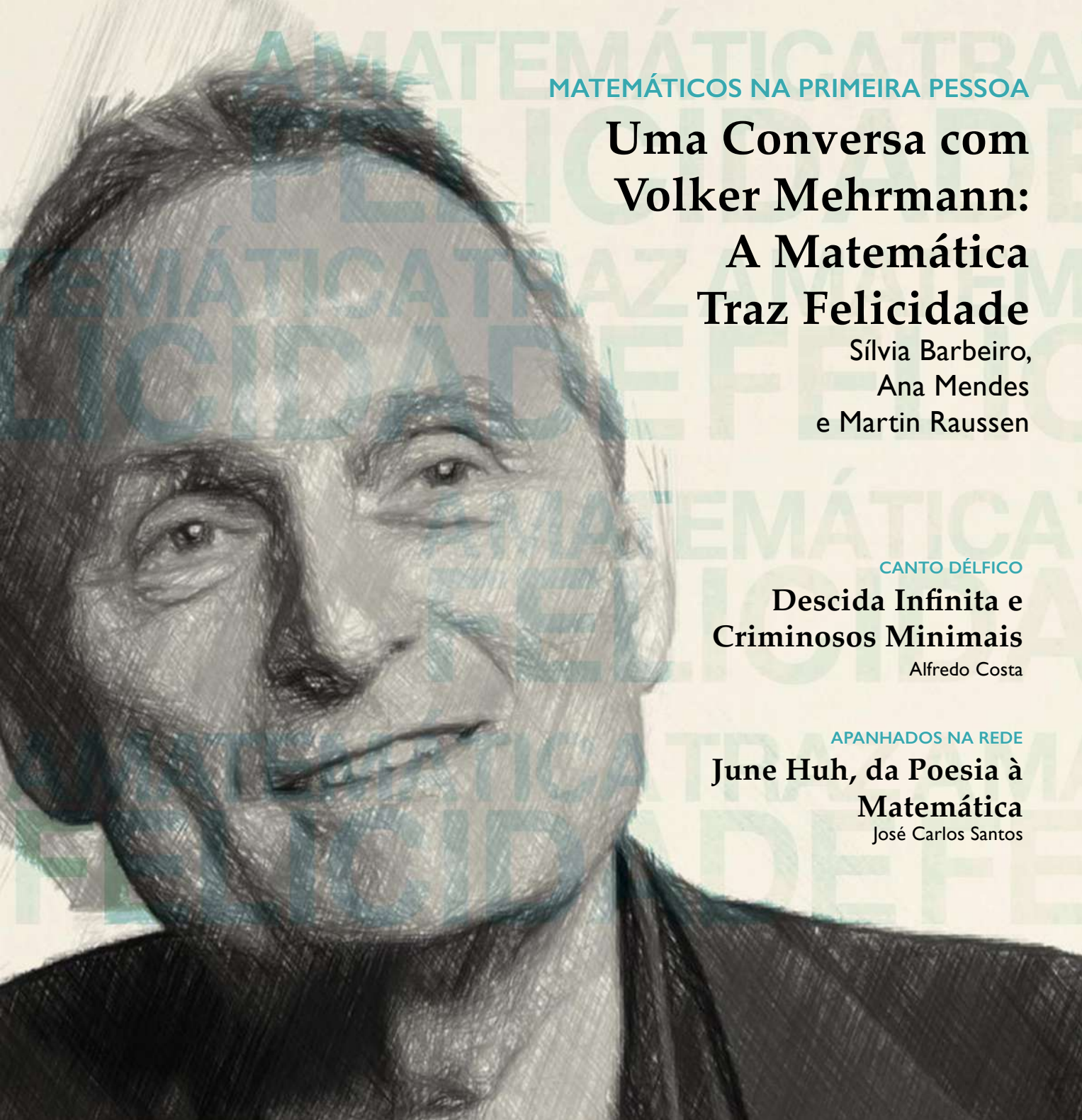
Descida Infinita e Criminosos Minimais

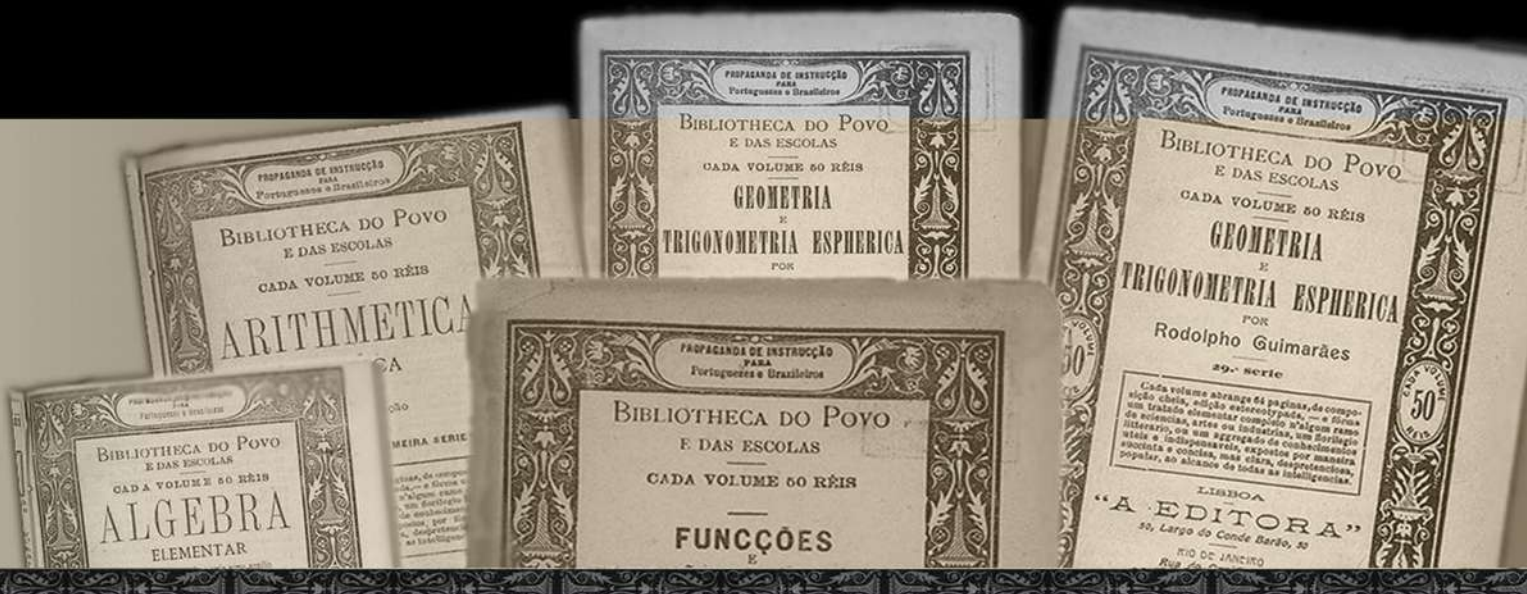
Alfredo Costa

APANHADOS NA REDE

June Huh, da Poesia à Matemática

José Carlos Santos

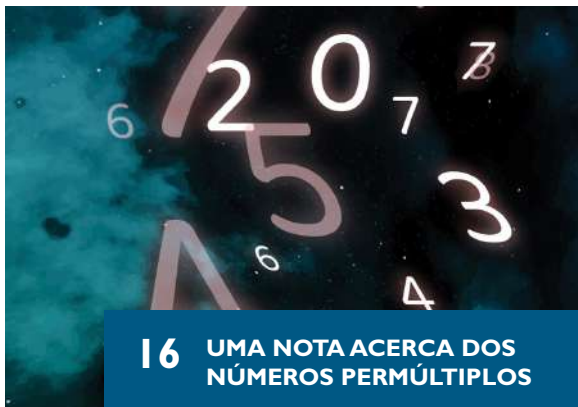




A MATEMÁTICA NA BIBLIOTHECA DO POVO E DAS ESCOLAS



<https://bpe.spm.pt/>



16 UMA NOTA ACERCA DOS NÚMEROS PERMÚLTIPLOS



23 ARTE E MATEMÁTICA



27 HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA



31 MATEMÁTICA PARA A INDÚSTRIA E INOVAÇÃO

- 02 EDITORIAL** | *Paulo Saraiva*
Sociedades Matemáticas: Contributos Coletivos para uma Missão Comum
- 04 RECREIO** | *Hélder Pinto*
Se a Matemática se Aplicasse ao Futebol
- 08 CANTO DÉLFICO** | *Alfredo Costa*
Descida Infinita e Criminosos Mínimos
- 14 APANHADOS NA REDE** | *José Carlos Santos*
June Huh, da Poesia à Matemática
- 16 UMA NOTA ACERCA DOS NÚMEROS PERMÚLTIPLOS**
Eudes Antonio Costa, Jaqueline Ribeiro Dias
- 23 ARTE E MATEMÁTICA** | *Pedro J. Freitas*
Max Bill e a Arte Concreta
- 27 HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA** | *Jorge Nuno Silva*
Dodecaedro Romano
- 31 MATEMÁTICA PARA A INDÚSTRIA E INOVAÇÃO** | *Luís L. Ferrás*
Matemática em Movimento: Prever o Escoamento de Fluidos para Revolucionar a Indústria dos Materiais
- 39 MATEMÁTICA E LITERATURA** | *Nuno Camarneiro*
Honras de Panteão
- 41 BARTOON** | *Luis Afonso*
- 42 MATEMÁTICOS NA PRIMEIRA PESSOA**
Sílvia Barbeiro, Ana Mendes e Martin Raussen
Uma Conversa com Volker Mehrmann:
A Matemática Traz Felicidade
- 57 NOTÍCIAS**
- 63 CARTAS DA DIREÇÃO** | *Eugénio Rocha*
Nova Direção da Sociedade Portuguesa de Matemática:
Um Compromisso com a Continuidade e a Inovação

SOCIEDADES MATEMÁTICAS: CONTRIBUTOS COLETIVOS PARA UMA MISSÃO COMUM

As sociedades matemáticas assumem um papel decisivo na promoção global do saber matemático



PAULO SARAIVA
Universidade
de Coimbra
psaraiva@fe.uc.pt

Em todo o mundo, são inúmeras as associações cujo propósito é a promoção do conhecimento matemático nas suas várias vertentes: ensino, divulgação e investigação. Algumas mantêm a sua atividade de modo ininterrupto desde o século XIX. A London Mathematical Society (LMS), por exemplo, é uma das mais antigas sociedades matemáticas do mundo, antecedendo em vários anos instituições similares na Europa e na América. Inspirada pela então crescente necessidade de canais científicos especializados, a LMS foi fundada em 1865 e o seu mérito é reconhecido por ter constituído um estímulo e um modelo para subseqüentes sociedades matemáticas em todo o mundo, servindo como um influente catalisador na comunicação e disseminação do conhecimento matemático. Cada uma em função dos seus propósitos, dos seus meios, do número e capacidade de intervenção dos seus associados, as sociedades matemáticas procuram manter e diversificar as suas formas de atuação. São responsáveis, entre outras, por reuniões científicas, palestras, competições de promoção do talento matemático, publicações várias (periódicas ou não) e, mesmo, pelo aconselhamento ou por tomadas de posição acerca de políticas relativas ao ensino da Matemática.

É igualmente com esta missão que atua a nossa Sociedade Portuguesa de Matemática (de que a *Gazeta de Matemática* é uma das publicações), cuja nova direção, presidida por Eugénio Rocha, foi eleita no passado dia 6 de janeiro. Na secção Cartas da Direção, pode ficar a conhecer, de forma

resumida, as principais linhas de ação para 2024-2026. Dando continuidade a um legado que inclui iniciativas que já fazem parte da identidade da SPM, a direção aponta para novos desafios, entre os quais o aumento da eficiência na comunicação com os associados, o renovado contributo para a melhoria da qualidade do ensino da Matemática e, por fim, o apoio à investigação matemática.

Falar destas instituições e dos seus objetivos não pode ser feito sem mencionar quem esteve à frente dos seus destinos, matemáticos e matemáticas, mais ou menos ilustres, que deram o seu contributo para a disseminação do conhecimento matemático. Qualquer publicação histórica que se faça sobre uma sociedade matemática ficará incompleta se apenas se debruçar sobre o que conseguiu alcançar, mas deverá também retratar os percursos dos homens e mulheres que nela se empenharam: quem foram, quando viveram, que matemática fizeram, de que viviam, por que episódios merecem ser recordados.

Na presente edição, publicamos, em edição conjunta da *Gazeta de Matemática* e da *European Mathematical Society Magazine*, uma entrevista com Volker Mehrmann, presidente da European Mathematics Society (EMS) entre 2019 e 2022. A EMS foi fundada em 1990 em Madralin (Polónia), após um período de cerca de 12 anos, durante os quais foi ganhando corpo a ideia de constituição de uma sociedade que promovesse o desenvolvimento de todos os aspetos da matemática nos países da Europa, que procurasse desenvolver uma

relação mais ampla da matemática com a sociedade e, por fim, que visasse estabelecer um sentido de identidade entre os matemáticos europeus. Na entrevista feita por Sílvia Barbeiro, Ana Mendes e Martin Rousseau, ficará a conhecer um pouco da vida e do pensamento de um matemático completo: que matemática estudou, quais as suas preocupações com a comunicação matemática e com o ambiente de trabalho dos seus estudantes, e quais os desafios mais marcantes do seu mandato à frente da EMS. No final, ficará a perceber por que razão entende que a matemática traz felicidade.

Porque os percursos que conduzem à matemática são,

por vezes, pouco lineares, vai querer saber quem é o matemático sul-coreano June Huh, e que vicissitudes o levaram da poesia à matemática (e de altíssimo relevo!), pela escrita de José Carlos Santos.

Após um curto “ponto de descontinuidade”, regressa à *Gazeta* a secção Canto Déléfico, na qual Alfredo Costa o convida a perceber em que consiste o *método da descida infinita* e de que trata o *método do criminoso minimal*.

Como pode constatar, há motivos mais do que suficientes para lhe desejar uma excelente leitura da presente edição da *Gazeta*!



LOJA
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em www.spm.pt



SE A MATEMÁTICA SE APLICASSE AO FUTEBOL

A beleza do futebol está no facto de muitas vezes ser imprevisível e, por exemplo, não ser possível aplicar-lhe a regra da transitividade.



HÉLDER PINTO
Instituto Piaget,
Insight e CIDMA-UA
helder.pinto@piaget.pt

No último Natal, o meu filho dizia-me que se “o futebol tivesse lógica”, o AVS SAD (que luta para não descer de divisão em Portugal) perderia apenas por 1-0 contra o todo-poderoso Bayern de Munique (que luta para ser campeão na Alemanha e para vencer a Champions League). O raciocínio era simples e lógico: se o AVS SAD empatou 1-1 com o Benfica e se o Benfica perdeu 1-0 com o Bayern, então o AVS SAD e o Benfica estariam ao mesmo nível e conseguiriam o mesmo resultado com qualquer adversário comum... Como bem sabemos, poucos apostariam o seu dinheiro num resultado tão escasso para o Bayern, dada a diferença de realidades entre estes dois clubes.

Mas, e se a transitividade fosse válida? Quantos jogos seriam desnecessários por já se saberem os resultados à partida? Observe os resultados na tabela 1, extraídos da Divisão de Honra, Série 1, Sub 8, temporada 2018-19, da Associação de Futebol do Porto, a qual é disputada por nove clubes. Verifique se já é possível determinar o campeão com estas duas jornadas realizadas. E as restantes posições também já estariam igualmente determinadas? Note-se que nestes raciocínios se considera, além da transitividade habitual (se A ganhou a B e se B ganhou a C, então A ganhará a C e, de modo semelhante, com os empates), outra “transitividade” subentendida: se A ganhou a B e B empatou com C, então A também ganhará a C.

Continuando com a questão das tabelas classificativas, já há muito tempo que não tínhamos um campeonato de

Tabela 1.

Jornada 1				
Leça do Balio	2	-	4	New Team
Infesta	2	-	3	Padroense
Salgueiros	2	-	0	Coimbrões
Panther Force	3	-	0	Serzedo
Jornada 2				
New Team	2	-	4	Infesta
Padroense	0	-	4	Salgueiros
Coimbrões	0	-	0	Panther Force
Serzedo	10	-	1	Benfica VN Gaia

futebol em que os três grandes estivessem tão juntos no topo da tabela classificativa. No final do dia 22 de dezembro de 2024, a tabela classificativa era a seguinte:

Clubes	Jogos	Pontos
1. Sporting	15	37
2. FC Porto	15	37
3. Benfica	14	35

Qual o clube em melhor posição na tabela anterior? Como todo o adepto sabe, a melhor posição é a do Benfica, pois tem menos um jogo disputado e, por isso, poderá ainda fazer 38 pontos. Esta situação aqui é fácil de observar, mas há tabelas classificativas mais complicadas, principalmente quando há um número ímpar de equipas no campeonato. Nos campeonatos profissionais é raro acontecer, mas noutros escalões e no futebol juvenil acontece muitas vezes, como se pode observar na figura 1, onde há três equipas que ainda não “folgaram”: o Arcozelo, o Pedroso e o Avintes. Como podemos comparar equipas com número diferente de jogos? Que outros tipos de tabelas classificativas poderiam ser criados para resolver problemas deste género? Como ficariam os seguintes clubes classificados nestas novas tabelas?

		P	J	V	E	D
1	AD Grijó	33	11	11	0	0
2	Valadares Gaia	30	11	10	0	1
3	SC Arcozelo B	24	12	8	0	4
4	Serzedo	23	11	7	2	2
5	FC Pedroso	23	12	7	2	3
6	Avintes	17	12	5	2	5
7	CD Candal	15	11	5	0	6
8	SC Coimbrões	15	11	5	0	6
9	Vila FC	14	11	4	2	5
10	S. Félix Marinha	12	11	4	0	7
11	FC Gaia	12	11	4	0	7
12	Fut. Benfica V. N. Gaia	12	11	4	0	7
13	Sport Canidelo B	10	11	3	1	7
14	Perosinho	4	11	1	1	9
15	Gulpilhares FC	3	11	1	0	10

Figura 1.

Deixamos aqui ainda mais dois desafios, dos muitos que foram publicados sobre futebol por Mariano Mataix ([1], p. 28 e p. 37).

1. O Real, o Atlético, a Unión Deportiva e o Quebrantahuesos jogaram um troféu no qual cada equipa enfrentava cada uma das outras três numa única partida. Todos os encontros terminaram com resultados diferentes e a classificação foi a seguinte - ver tabela 2, (o torneio decidiu-se pela diferença de golos).

Tabela 2.

Clubes	Vit.	Emp.	Derr.	Golos marcados	Golos sofridos	Pontos
1. Real	1	1	1	4	2	4
2. Atlético	1	1	1	2	2	4
3. Unión Deportiva	1	1	1	3	4	4
4. Quebrantahuesos	1	1	1	2	3	4

Qual o resultado entre a Unión Deportiva e o Quebrantahuesos?

2. Quatro equipas participam num campeonato e jogam entre si uma única vez. Depois de se disputarem algumas partidas, a tabela 3 apresenta os resultados com os números substituídos por letras (os espaços em branco representam dados desconhecidos). Por outro lado, uma das letras está errada numa das vezes em que aparece (se é que esta letra errada aparece mais do que uma vez na tabela).

Tabela 3.

Clubes	Jogos	Vit.	Emp.	Derr.	Golos marcados	Golos sofridos	Pontos
A					d	h	t
B	x			t	t	d	
C	h	d		x	r	d	r
D				x	d	t	h

Qual a letra que está errada e qual deveria ser o seu valor? Note que neste problema se considera que a vitória vale dois pontos, como era antigamente, e que os clubes estão ordenados por ordem alfabética e não pelo número de pontos obtidos.

A MATEMÁTICA NAS NOTÍCIAS

1. Há séculos que não se assistia a nada assim

“Existem dois tipos de cigarras encontradas em grande número nos EUA: as cigarras anuais – surgem todos os anos – e as periódicas – surgem a cada 13 ou 17 anos. As cigarras periódicas têm um ciclo de vida longo. Após a eclosão, as cigarras periódicas imaturas, chamadas ninfas, passam 13 ou 17 anos no subsolo, alimentam-se de raízes, e depois emergem do solo e transformam-se em cigarras adultas.” [2]

A Natureza apresenta muitas vezes fenómenos com períodos bem definidos como, por exemplo, a aparição dos cometas. Nos animais e plantas, o ano costuma ser a medida mais recorrente (a maioria das árvores dá fruto uma vez por ano, etc.). Mas, como vemos na notícia acima, nem sempre é assim, existindo animais com ciclos mais longos, tal como acontece com estes dois tipos de cigarras. Dado que ambos os períodos são números primos, estes dois tipos de cigarras só se encontram a cada $13 \times 17 = 221$ anos, o que faz com que seja um fenómeno a que nem todas as gerações humanas têm possibilidades de assistir. Antes de 2024, como é referido na notícia, *“a última vez que foi documentada a emergência conjunta das duas ninhadas de cigarras periódicas nos EUA foi em 1803, durante a Presidência de Thomas Jefferson”*. E agora já nenhum de nós vai assistir novamente a este fenómeno... O que é capaz de ser bom, pois a eclosão conjunta, segundo os relatos, não é propriamente silenciosa!

2. É só mostrar as contas

*“O FC Porto divulgou esta semana o novo Portal da Transparência, uma promessa de André Villas-Boas, que mostrou, às claras e com uma comunicação simples, transferências, comissões e remunerações. Uma iniciativa de louvar, numa altura em que os adeptos se tornam cada vez mais exigentes em relação a contas. **Não por de repente todos gostarem de Matemática** ou serem especialistas em capitais próprios e resultados líquidos, mas porque já todos terão percebido que, sem uma gestão eficiente, não há resultados desportivos que resistam durante muito tempo – e o FC Porto que o diga.” [3]*

O negrito acima é meu e foi uma frase que me deixou a refletir. O mundo distópico em que viveríamos se todos passassem a gostar de matemática... Que implicações isto

teria? E se fôssemos ao extremo em que todos, não apenas gostassem, mas se dedicassem à matemática e “vissem” fórmulas matemáticas avançadas como Râmãnujan? Que avanços teóricos e tecnológicos seriam possíveis com tanta mão de obra a fazer matemática? Ora aqui está uma boa ideia para um filme de ficção científica! O problema é que muitas outras coisas práticas ficariam por fazer como, por exemplo, a agricultura, a pecuária, os transportes, a medicina, etc., o que nos levaria, com certeza, à extinção... Por isso, claro que queremos muito mais gente a gostar e a fazer matemática, mas, como em tudo, queremos-lo na medida certa!

3. Este cubo megalómano vai custar 46 mil milhões de euros, será a maior estrutura do mundo

“A ambição de criar construções colossais continua a ser uma marca da Arábia Saudita com o projeto do Mukaab, que promete ser a maior estrutura do mundo, se realizado conforme o planeado. Com impressionantes 400 metros de lado (sic), 396 metros de altura e 362 metros de largura, o Mukaab poderá abrigar até 20 edifícios Empire State.” [4]

Como os leitores concordarão comigo, e este parece-me ser o melhor local para fazer esta queixa, esta estrutura não é um cubo... 😊, pelo menos não na nossa definição matemática da coisa!

4. Casal ganhou 26 milhões na lotaria graças a truque matemático de três minutos

“Jerry Selbee, um reformado com uma licenciatura em Matemática, descobriu uma anomalia num jogo de lotaria do Michigan chamado Winfall. Ao contrário das lotarias normais, em que os jackpots são acumulados até serem reclamados, o Winfall tinha um mecanismo diferente: se o jackpot excedesse os cinco milhões de dólares sem vencedor, o prémio em dinheiro seria transferido para os vencedores dos escalões inferiores. Num cálculo que demorou apenas três minutos, Jerry descobriu que, ao comprar grandes quantidades de bilhetes, poderia garantir estatisticamente um lucro.” [5]

Histórias como esta são fascinantes, não só pela matemática envolvida, mas também pelo grau de organização e trabalho de equipa para montar toda a logística deste tipo de operações. Para se perceber a ordem de grandeza

dos montantes investidos, refira-se que este casal gastava, muitas vezes, mais de 600 mil dólares por jogo... Ou seja, a matemática demorou três minutos a fazer-se, mas colocar o plano em prática exigiu um trabalho árduo por parte deste casal (1% de inspiração que exigiu posteriormente muita transpiração!). Note-se que esta atividade não violou nenhuma lei nem prejudicou ninguém: “Apesar de terem encerrado o jogo, as autoridades reconheceram que as ações dos participantes foram benéficas para o Estado, gerando receitas significativas de impostos.”

E, para terminar esta secção, uma adivinha que ouvi no rádio: “Quando é que 10 com mais 10 não são 20, mas com mais 50 são 11?”

SOLUÇÕES DOS DESAFIOS PROPOSTOS NO NÚMERO ANTERIOR

A probabilidade de um jogador de ténis, que ganha um terço dos pontos ao seu adversário, ganhar um jogo é de $\frac{35}{243} \sim 0,144$ (como referido no número anterior, aproximadamente $\frac{1}{7}$). A explicação completa de como obter este valor pode ser encontrada em [6], pp. 15-23, e advém da seguinte fórmula (onde p é a probabilidade de o jogador vencer um ponto e $q = 1 - p$):

$$p^4 + 4p^4q + \frac{10p^4q^2}{1 - 2pq}.$$

Usando esta fórmula, conclui-se, com um pouco de paciência, que a minha probabilidade de ganhar um jogo (relembrando que eu ganhava 40% de pontos) era de apenas $\frac{10736}{40625} \sim 0,2643$.

Ainda em [6], p. 28, é possível encontrar a tabela e o gráfico da figura 2, que mostram as probabilidades de um jogador ganhar uma partida de três sets, supondo diferentes probabilidades de ganhar cada ponto, e donde se conclui facilmente que, ganhando “apenas” 40% dos pontos, era quase impossível eu ter alguma vez ganhado uma partida de ténis ao meu colega...

probability of winning	
point	match
0	0
0-1	0
0-2	10^{-22}
0-3	4.5×10^{-11}
0-4	4.4×10^{-4}
0-5	0-5
0-6	0.9995
0-7	0.9999
0-8	0.9999
0-9	1
1-0	1

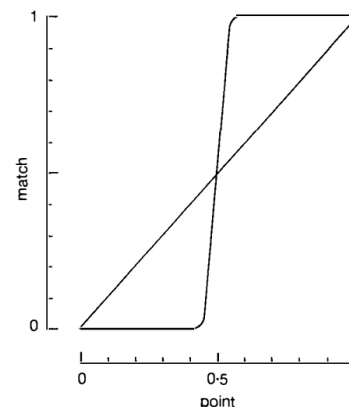


Figura 2.

Até ao próximo número do nosso Recreio!

REFERÊNCIAS

- [1] Mataix, M. (2008). *Em Busca da Solução*. RBA.
- [2] Câmara, I., *Visão Verde*, 18 de abril 2024; https://visao.pt/visao_verde/2024-04-18-ha-seculos-que-nao-se-assistia-a-nada-assim-biloes-de-cigarras-vao-emergir-nos-estados-unidos-este-ano
- [3] Pereira, C., *A Bola*, 13 de setembro 2024; <https://www.abola.pt/opinioes/noticias/e-so-mostrar-as-contas-fcporto-villas-boas-2024091210390198219>
- [4] n. d., *Executive Digest*, 3 de novembro 2024; <https://executivedigest.sapo.pt/noticias/este-cubo-megalomano-vai-custar-46-mil-milhoes-de-euros-sera-a-maior-estrutura-do-mundo-mas-ha-receios-que-seja-construido-com-sangue-saudita/>
- [5] n. d., *ZAP*, 25 de novembro 2024; <https://zap.aeiou.pt/casal-26-milhoes-lotaria-truque-matematico-643054>
- [6] Stewart, I. (1989). *Game, Set, and Math: Enigmas and Conundrums*. Basil Blackwell.

DESCIDA INFINITA E CRIMINOSOS MINIMAIS

Introduzimos brevemente o método da descida infinita, revestindo-o a certo ponto com as vestes do método do "criminoso minimal". Fazemo-lo na perspectiva da iniciação à resolução de problemas olímpicos de natureza técnica.

1. O MÉTODO DA DESCIDA INFINITA

A experiência pessoal do autor destas linhas leva-o a concordar com o *cliché* segundo o qual os iniciados no gosto pela matemática desenvolvem facilmente um especial fascínio pelas equações ditas *diofantinas*, isto é, equações no domínio dos números naturais, ou, mais geralmente, dos números inteiros. O método da *descida infinita* pode, com sucesso, ser aplicado na resolução de algumas de tais equações. De aprendizagem obrigatória num curso de formação olímpica, tem o duplo atrativo de ser acessível a iniciados e de ter bastante *pedigree*. Tal *pedigree* decorre não só da frequência com que é usado em problemas relevantes, mas também do facto de ter sido promovido por Pierre de Fermat (1607-1665), um dos poucos matemáticos que não surpreendem que um vulgar transeunte da rua os reconheça pelo nome.

Parafraseemos a explicação informal que Oysten Ore nos dá sobre o método, no seu livro sobre a História da Teoria dos Números [5]: assumimos que um problema pode ser resolvido no domínio dos números naturais, e de uma sua solução deduzimos uma nova solução no mesmo domínio, definida por números de menor valor; como os inteiros positivos não podem decrescer indefinidamente, chegamos a um absurdo, pelo que o problema não tem solução. Sucintamente: o método assenta na observação de que não podemos fazer uma "descida infinita" na "escada infinita dos números naturais". O nome do método, traduzido do original em francês *descente infinie*, deve-se a Fermat [5].



Figura 1. Pierre de Fermat (1607-1665).¹

A demonstração da seguinte proposição constitui um exemplo simples de aplicação do método da descida infinita na resolução de equações diofantinas. Neste texto estamos a considerar o conjunto \mathbb{N} dos números naturais como sendo o dos números inteiros positivos.

Proposição 1. A equação $x^2 + y^2 = 3z^2$ não tem soluções naturais.

Demonstração. Suponhamos que a equação tem soluções naturais. Podemos então tomar naturais x_0, y_0 e z_0 tais que

$$x_0^2 + y_0^2 = 3z_0^2. \quad (1)$$

Suponhamos que x_0 não é múltiplo de 3. Como $y_0^2 = 3z_0^2 - x_0^2$, então y_0 também não é múltiplo de 3. A divisão de x_0 por 3 dá resto 1 ou 2, isto é, temos $x_0 = 3k + 1$ ou $x_0 = 3k + 2$ para algum número inteiro k . Como $(3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ e $(3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$, em qualquer dos casos vemos que $x_0^2 = 3s + 1$ para algum inteiro s . Do mesmo modo, temos $y_0^2 = 3t + 1$ para algum inteiro t . Deduzimos então a igualdade $x_0^2 + y_0^2 = 3(s + t) + 2$, que nos diz que o inteiro $x_0^2 + y_0^2$ dá resto 2 quando dividido por 3. Mas a igualdade $x_0^2 + y_0^2 = 3z_0^2$ garante-nos que esse inteiro é múltiplo de 3. Logo, para evitarmos uma contradição, x_0 tem de ser múltiplo de 3. Pela mesma razão, y_0 tem de ser múltiplo de 3.

Portanto, existem números naturais x_1 e y_1 tais que $x_0 = 3x_1$ e $y_0 = 3y_1$. Substituindo na equação inicial, obtemos

$$9x_1^2 + 9y_1^2 = 3z_0^2$$

ou seja,

$$3(x_1^2 + y_1^2) = z_0^2.$$

Decorre desta última igualdade que podemos substituir z_0 por $3z_1$ para algum número natural z_1 , obtendo-se então

$$x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2.$$

Logo (x_1, y_1, z_1) também é uma solução da equação $x^2 + y^2 = 3z^2$ formada por números naturais, tendo-se $x_1 < x_0, y_1 < y_0$ e $z_1 < z_0$.

Repetindo o argumento, a partir da solução (x_1, y_1, z_1) obteremos uma outra solução (x_2, y_2, z_2) da mesma equação $x^2 + y^2 = 3z^2$, formada por números naturais x_2, y_2, z_2 tais que $x_2 < x_1, y_2 < y_1$ e $z_2 < z_1$. Continuando indefinidamente este processo, obtemos uma sequência

infinita

$$(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots$$

de soluções naturais da equação $x^2 + y^2 = 3z^2$ tais que

$$x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > \dots$$

Mas isto é impossível, visto que apenas existe um número finito de números naturais menores do que x_0 .

Chegamos assim a um absurdo. O absurdo surgiu de supormos que a equação $x^2 + y^2 = 3z^2$ tem soluções naturais. Portanto, no domínio dos números naturais, tal equação não tem soluções. \square

Os conhecedores da teoria elementar das congruências [4] poderão achar o segundo parágrafo desta demonstração particularmente entediante, mas é de esperar alguma tolerância se tiverem em conta o objetivo de tornar a prova imediatamente acessível a todos os leitores que são alunos do ensino secundário.

2. CRIMINOSOS MINIMAIS

O autor deste artigo fez a sua formação em Teoria dos Grupos recorrendo ao livro de Joseph Rotman [6]. Um comentário aí feito, que capta a atenção, é sobre o uso frequente do método do “criminoso minimal” em diversas demonstrações de teoremas sobre grupos finitos. Tomando de empréstimo a descrição feita por Rotman, quando se quer provar que uma estrutura finita de um certo tipo (e.g., um grupo finito) com a propriedade P tem de também ter a propriedade Q , frequentemente assume-se que existe uma estrutura G desse tipo que é de tamanho mínimo de entre todas as que têm a propriedade P e não têm a propriedade Q . Depois, explorando a minimalidade de G , deduz-se uma contradição. Nesta narrativa, a estrutura G é o nosso “criminoso minimal”, sendo o seu “crime” a violação de um teorema que queremos provar que é verdadeiro. O uso da sugestiva expressão “criminoso minimal” (tradução de *least criminal*) no contexto dos grupos finitos é atribuído por Rotman a Reinhold Baer; pode-se ver um exemplo do seu uso por Baer num artigo da nossa lista de referências [2].

Mais geralmente, para se provar que um determinado problema não tem soluções, o método consiste em: começar por verificar que se o conjunto de soluções é não vazio,

¹ Imagem do domínio público, via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre_de_Fermat3.jpg



Figura 2. Reinhold Baer (1902-1979).²

então é (parcialmente) pré-ordenado de alguma forma, e de tal modo que existem elementos minimais; e em seguida, explora-se a minimalidade de um tal elemento (o “criminoso minimal”) para se chegar a um absurdo.

Por exemplo, a demonstração da proposição 1 poderia ter sido adaptada ao método do criminoso minimal, atribuindo ao conjunto S das soluções (x_0, y_0, z_0) da equação $x^3 + y^3 = 3z^3$, no domínio dos números naturais, a pré-ordem \preceq definida por $(a, b, c) \preceq (a', b', c')$ se e só se $a \leq a'$. Como todo o subconjunto não vazio de \mathbb{N} tem um elemento mínimo, se S for não vazio, então tem elementos minimais. A prova de que S é vazio é feita assumindo que S não é vazio e extraindo uma contradição a partir de um elemento minimal de S , apelando de algum modo ao carácter minimal de tal elemento.

O método da descida infinita pode ser sempre revestido com as roupagens do princípio do “criminoso minimal”. Estas roupagens têm em geral a vantagem de permitirem um texto mais elegante, na opinião do autor.

Vejamus a aplicação do princípio do “criminoso minimal” na resolução do seguinte exercício, incluído num teste feito durante um estágio do Projeto Delfos.

Problema 1. Determine todos os ternos (x, y, z) de inteiros que satisfazem a igualdade

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 3xyz.$$

Resolução. Observemos que o terno $(0, 0, 0)$ é uma solução da equação $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 3xyz$. Provemos que é a única.

Suponhamos que $(0, 0, 0)$ não é a única solução da equação. De entre as soluções diferentes de $(0, 0, 0)$, tomemos uma solução (x_0, y_0, z_0) tal que o valor de $|x_0| + |y_0| + |z_0|$ é o menor possível. Uma vez que temos

$$x_0^3 = 3x_0y_0z_0 - 3y_0^3 - 9z_0^3,$$

sabemos que x_0^3 é múltiplo de 3. Sendo 3 um número primo, daqui decorre que existe um número inteiro x_1 tal que $x_0 = 3x_1$. Substituindo x_0 por $3x_1$, obtemos a igualdade

$$9x_1^3 + y_0^3 + 3z_0^3 = 3x_1y_0z_0,$$

pelo que y_0^3 é múltiplo de 3. Assim, temos $y_0 = 3y_1$ para algum inteiro y_1 , donde

$$3x_1^3 + 9y_1^3 + z_0^3 = 3x_1y_1z_0.$$

Continuando com este argumento, obtemos $z_0 = 3z_1$ para algum inteiro z_1 , e portanto

$$x_1^3 + 3y_1^3 + 9z_1^3 = 3x_1y_1z_1.$$

Logo (x_1, y_1, z_1) também é solução da equação em análise. Reparemos que

$$|x_0| \geq |x_1|, \quad |y_0| \geq |y_1|, \quad |z_0| \geq |z_1|,$$

e que

$$|x_0| = |x_1| \Leftrightarrow x_0 = 0, \quad |y_0| = |y_1| \Leftrightarrow y_0 = 0 \quad \text{e} \\ |z_0| = |z_1| \Leftrightarrow z_0 = 0.$$

Como, pelo menos, uma das componentes de (x_0, y_0, z_0) é não nula, daqui decorre que

$$0 < |x_1| + |y_1| + |z_1| < |x_0| + |y_0| + |z_0|.$$

Mas isto contradiz o carácter minimal da solução (x_0, y_0, z_0) .

Assim, por redução ao absurdo, concluímos que, no domínio dos inteiros, a única solução da equação $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 3xyz$ é $(0, 0, 0)$. \square

3. SOB OS AUSPÍCIOS DE PITÁGORAS E FERMAT

Um triângulo retângulo diz-se *pitagórico* se os comprimentos dos seus lados forem números inteiros. Recordemos

que um *quadrado perfeito* é um inteiro não negativo cuja raiz quadrada é um inteiro. O método da descida infinita foi introduzido por Pierre de Fermat para demonstrar que a área de um triângulo pitagórico nunca pode ser um quadrado perfeito [5]. Nesta secção revisitamos essa demonstração, revestindo-a com o princípio do “criminoso minimal”.

Dizemos que um terno (a, b, c) de inteiros positivos é um *terno pitagórico* se a, b, c forem os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo em que c é o comprimento da hipotenusa. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras e pelo seu recíproco, um terno (a, b, c) de inteiros positivos é um terno pitagórico se e só se é uma solução da equação diofantina $x^2 + y^2 = z^2$.

Um terno pitagórico (a, b, c) diz-se *primitivo* quando os inteiros a, b, c são dois a dois primos entre si; o que, em virtude da igualdade $a^2 + b^2 = c^2$, facilmente se vê ser equivalente a que não exista um número primo simultaneamente dividindo a, b e c . Naturalmente, um triângulo retângulo cujos comprimentos dos lados formam um terno pitagórico primitivo diz-se um *triângulo pitagórico primitivo*.

O teorema seguinte é a bem conhecida caracterização dos ternos pitagóricos primitivos, cuja demonstração apareceu nesta coluna num número recente da *Gazeta de Matemática* [3]. Nessa caracterização usa-se o seguinte facto, fácil de estabelecer usando restos da divisão por 4: num triângulo pitagórico, pelo menos, um dos catetos tem comprimento par; portanto, num triângulo pitagórico primitivo, exatamente um dos catetos é par.

Teorema 1. *Seja (a, b, c) um terno de inteiros positivos em que a é par. O terno (a, b, c) é um terno pitagórico primitivo se e só se $a = 2mn, b = m^2 - n^2$ e $c = m^2 + n^2$, para alguns inteiros positivos m, n primos entre si e tais que $m - n$ é ímpar.*

O Teorema Fundamental da Aritmética, que afirma a existência e a unicidade da fatorização de um inteiro em números primos, permite-nos provar facilmente o seguinte facto.

Lema 1. *Seja n um quadrado perfeito. Se u e v são inteiros positivos primos entre si tais que $n = uv$, então u e v são quadrados perfeitos.*

Este lema tem um papel importante na demonstração do teorema sobre o qual esta secção se ocupa, que agora formalmente enunciamos.



Figura 3. Busto de Pitágoras no Museu do Vaticano.³

Teorema 2. *A área de um triângulo pitagórico não pode ser um quadrado perfeito.*

Demonstração. Suponhamos que existe um triângulo pitagórico cuja área é um quadrado perfeito. Então existe um tal triângulo T de área mínima, de entre todos os triângulos pitagóricos cuja área é um quadrado perfeito. Seja k o inteiro positivo tal que a área de T é k^2 . Seja λ o máximo divisor comum dos comprimentos dos lados de T , e sejam a, b, c os inteiros tais que λa e λb são os comprimentos dos catetos de T , e λc é o comprimento da sua hipotenusa. Observemos que

$$k^2 = \frac{\lambda^2 ab}{2}.$$

Consideremos agora o triângulo pitagórico T' , seme-

² George M. Bergman, CC BY-SA 4.0 [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Reinhold_Baer_1972_\(headshot_enlarged,_as-is\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Reinhold_Baer_1972_(headshot_enlarged,_as-is).jpg), via Wikimedia Commons.

³ Andargor at English Wikipedia, Public domain, via Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c1/Pythagoras_Bust_Vatican_Museum.jpg

lhante a T , cujos catetos e hipotenusa medem a, b, c , respetivamente. Note-se que (a, b, c) é um terno pitagórico primitivo. A sua área é $\frac{ab}{2}$, que é um inteiro, uma vez que a ou b é par. Sem perda de generalidade, vamos supor que a é par. Ora, temos

$$\frac{ab}{2} = \frac{k^2}{\lambda^2} = \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2.$$

Como $\frac{k}{\lambda}$ é racional, o inteiro $\frac{ab}{2}$ é um quadrado perfeito. Pela minimalidade de T , temos então de ter $\lambda = 1$. Ou seja, T é um triângulo pitagórico primitivo.

Pelo teorema 1, existem inteiros positivos m e n , primos entre si, com $m - n$ ímpar, tais que

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2.$$

Portanto, temos

$$k^2 = mn(m^2 - n^2) = mn(m - n)(m + n). \quad (2)$$

Verifiquemos que os números $m, n, m - n$ e $m + n$ são dois a dois primos entre si. Já sabemos que m e n são primos entre si. Suponhamos que existe um número primo r que divide os números $m + n$ e $m - n$. Como $m - n$ é ímpar, temos $r \neq 2$. Além disso, r divide a soma $(m + n) + (m - n) = 2m$ e a diferença $(m + n) - (m - n) = 2n$. Portanto, o primo r é um divisor comum de m e n , o que contradiz o facto de m e n serem primos entre si. Verifica-se, pois, que $m + n$ e $m - n$ são de facto primos entre si. Como $\text{mdc}(x, y) = \text{mdc}(x - y, y)$ para quaisquer inteiros x, y , vemos que os pares $(m + n, n)$, $(m + n, m)$, $(m - n, m)$ e $(m + n, n)$ também são pares de números primos entre si.

Pela igualdade (2) e pelo lema 1, existem inteiros positivos u, v tais que

$$m = u^2, \quad n = v^2 \quad (3)$$

e inteiros positivos p e q tais que

$$u^2 - v^2 = p^2, \quad u^2 + v^2 = q^2. \quad (4)$$

O facto de $m, n, m - n$ e $m + n$ serem dois a dois primos entre si também implica que u, v, p, q são dois a dois primos entre si, como facilmente se verifica. Como m e n têm paridades distintas, também u e v têm paridades distintas, e portanto p e q têm de ser números ímpares. Somando e subtraindo as igualdades (4), obtemos respetivamente

$$2u^2 = p^2 + q^2, \quad (5)$$

e

$$2v^2 = q^2 - p^2 = (q - p)(q + p). \quad (6)$$

Como p, q são ímpares, sabemos que $q - p$ e $q + p$ são pa-

res. Portanto, de (6) deduzimos que $2v^2$ é múltiplo de 4, pelo que v é par. Seja $v_1 = \frac{v}{2}$. Substituindo v por $2v_1$ em (6), somos levados à igualdade

$$2v_1^2 = \frac{q - p}{2} \cdot \frac{q + p}{2}. \quad (7)$$

Se algum número primo dividisse ambos os inteiros $\frac{q+p}{2}$ e $\frac{q-p}{2}$, então dividiria a sua soma, que é q , e a sua diferença, que é p , contradizendo o facto de que p e q são primos entre si. Portanto, os inteiros $\frac{q-p}{2}$ e $\frac{q+p}{2}$ são primos entre si, decorrendo então da igualdade (7) que exatamente um deles é par.

Comecemos por supor que $\frac{q-p}{2}$ é par. Então, $q - p$ e $\frac{q+p}{2}$ também são primos entre si, e uma vez que

$$(2v_1)^2 = (q - p) \cdot \frac{q + p}{2}$$

resulta do lema 1 que $q - p = (2d)^2$ e $\frac{q+p}{2} = s^2$ para alguns inteiros positivos d e s . Logo, temos

$$q = \frac{q - p}{2} + \frac{q + p}{2} = 2d^2 + s^2$$

e

$$p = \frac{q + p}{2} - \frac{q - p}{2} = s^2 - 2d^2.$$

Substituindo em (5) obtemos

$$u^2 = (s^2)^2 + (2d^2)^2.$$

Pelo recíproco do Teorema de Pitágoras, existe um triângulo retângulo T_1 com catetos de comprimento s^2 e $2d^2$, e hipotenusa de comprimento u . A área do triângulo T_1 é

$$s^2 d^2 = \frac{q + p}{2} \cdot \frac{q - p}{4} = v_1^2.$$

De modo análogo, prova-se que se $\frac{q+p}{2}$ é par então obtemos também um triângulo pitagórico T_1 cuja área é v_1^2 .

Portanto, em qualquer dos casos, T_1 é um triângulo pitagórico cuja área é um quadrado perfeito. Reparemos ainda que essa área é

$$v_1^2 = \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{n}{4}.$$

Logo, T_1 tem área menor do que a área de T :

$$\frac{n}{4} < n^2 < n(m + n) \leq k^2.$$

Mas isto contradiz a hipótese de que T é o triângulo pitagórico de área mínima de entre todos aqueles cuja área é um quadrado perfeito.

Tendo a contradição nascido da hipótese de que existia algum triângulo pitagórico cuja área é um quadrado perfeito, fica assim demonstrado o teorema. \square

4. UM CASO ESPECIAL DO GRANDE TEOREMA DE FERMAT

Há o Pequeno e o Grande Teorema de Fermat, do mesmo Pierre de Fermat do qual temos falado. O “Pequeno Teorema de Fermat” [4] diz-nos que se p é um número primo, então $a^p - a$ é um múltiplo de p , qualquer seja o inteiro a . A sua demonstração é feita nas aulas do Projeto Delfos. O “Grande Teorema de Fermat”, também conhecido como “Último Teorema de Fermat”, diz-nos que, no domínio dos números naturais, a equação $x^n + y^n = z^n$ é impossível se n for um inteiro maior do que 2. A sua demonstração não é feita nas aulas do Projeto Delfos... De facto, a sua prova, extremamente difícil, só foi alcançada na última década do século XX. Isto após árduo labor de muitos matemáticos, ao longo de séculos, culminando no trabalho épico de Andrew Wiles [1]. No entanto, para o caso especial $n = 4$, a demonstração decorre do teorema 2 de forma simples, como vemos de seguida.



Figura 4. Andrew Wiles (1953-).⁴

Começemos por observar que se (u, v, w) é uma solução da equação $x^4 + y^4 = z^4$, então (w, v, u^2) é uma solução da equação $x^4 - y^4 = z^2$. Assim, para provar a impossibilidade de soluções naturais para a equação $x^4 + y^4 = z^4$, basta provar o teorema seguinte.

Teorema 3. *A equação $x^4 - y^4 = z^2$ não tem soluções naturais.*

Demonstração. Para quaisquer números naturais x, y, z , sejam

$$a = 2x^2y^2, \quad b = x^4 - y^4, \quad c = x^4 + y^4.$$

Observemos que $a^2 + b^2 = c^2$. Portanto, pelo recíproco do Teorema de Pitágoras, existe um triângulo retângulo com catetos de comprimentos a, b e hipotenusa de comprimento c . A sua área é $x^2y^2(x^4 - y^4)$. Logo, se existirem números naturais x, y, z tais que $x^4 - y^4 = z^2$, então existe um triângulo pitagórico cuja área é o quadrado perfeito $(xyz)^2$. Mas isso é impossível, pelo teorema 2. \square

REFERÊNCIAS

- [1] Amir D. Aczel. *O Último Teorema de Fermat*. Ciência Aberta. Gradiva, 1997. Traduzido do original em inglês.
- [2] Reinhold Baer. "The Hypercenter of Functorially Defined Subgroups". *Illinois J. Math.*, 8:177-230, 1964.
- [3] Alfredo Costa. "Ternos Pitagóricos e Tijolos de Euler". *Gazeta de Matemática*, (200):13-17, 2023.
- [4] José Plínio Oliveira Santos. *Introdução à Teoria dos Números*. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 4ª edição, 2024.
- [5] Oystein Ore. *Number Theory and Its History*. Dover Publications, Inc., New York, 1988. Reprint of the 1948 original, With a supplement.
- [6] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Number 148 in Grad. Texts in Math. Springer, New York, 4th edition, 1995.

⁴ Foto retirada da página webdo prémio Abel, <https://abelprize.no/abel-prize-laureates/2016> Photo: Peter Badge. Copyright holder: Peter Badge/Typos1



JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

JUNE HUH, DA POESIA À MATEMÁTICA

A carreira matemática de June Huh, um dos grandes matemáticos da atualidade, é muito incomum. Iremos ver um breve resumo dela.

Às 16 anos, o sul-coreano June Huh abandonou os estudos secundários. Vinte e dois anos mais tarde, foi-lhe atribuída a Medalha Fields, que é o prémio mais prestigioso em matemática. Isto, juntamente com o facto de a desistência dos estudos se ter devido à vontade de se dedicar à poesia, mostra que estamos na presença de uma carreira fora do comum, que merece ser conhecida.

June Huh nasceu na Califórnia a 9 de junho de 1983 e é filho de um casal de sul-coreanos. Os pais regressaram à Coreia do Sul quando o filho tinha dois anos de idade e tornaram-se professores universitários (de Estatística no caso do pai e de Literatura Russa no da mãe).

Huh convenceu-se de que não era dotado para matemática após ter tido uma nota fraca num teste que fez no Ensino Básico. Na adolescência, resolveu dedicar-se à poesia, tendo escrito bastantes poemas e até algumas novelas (nada disto foi publicado).¹ Naquela fase da sua vida, gostava de fazer passeios por uma montanha perto do apartamento onde vivia e de ler sobre a Natureza (leu uma enciclopédia em dez volumes sobre seres vivos).² Também pela mesma altura, o pai tentou ensinar-lhe matemática através de um livro de exercícios. Durante algum tempo, Huh fingiu que os resolvia, mas, de facto, limitava-se a copiar as soluções da secção do livro que as continha. Quando o pai descobriu isso, arrancou do livro as páginas com as soluções e então o filho foi a uma livraria e copiou de um exemplar que lá havia a secção em questão. O pai também acabou por descobrir isto e chegou à conclusão de que o filho era um caso perdido.

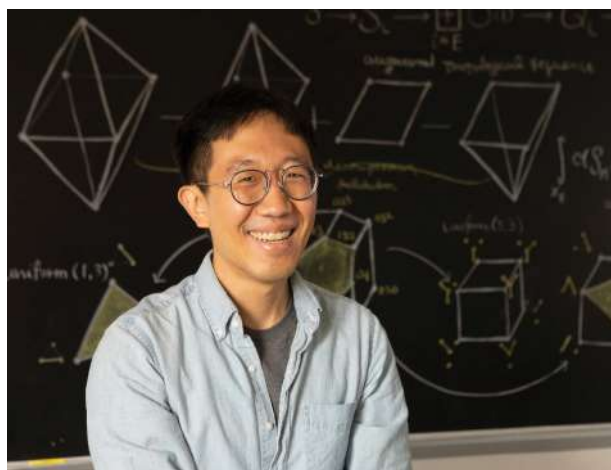


Figura 1. June Huh

Quando Huh percebeu que não iria conseguir viver à custa da poesia, decidiu tornar-se jornalista científico e, para tal, inscreveu-se num curso de Física e Astronomia da Universidade de Seul. Fez o curso com dificuldade: levou seis anos a concluí-lo e teve de repetir várias disciplinas. Segundo Huh afirmou mais tarde, “Geralmente, estava perdido. Não sabia nem o que queria fazer nem a que é que era bom.”³

No último ano do curso, Huh passou por uma experiência que transformou a sua vida. Inscreveu-se numa disciplina lecionada pelo matemático japonês Heisuke Hironaka, que recebera a Medalha Fields em 1970. Não era, de forma alguma, uma disciplina totalmente organizada

desde a primeira aula (pelo menos, na cabeça de quem a dava). Huh descreveu-a da seguinte maneira “Basicamente, ele falava daquilo em que tinha pensado na véspera”. E, pela primeira vez, Huh viu matemática a desenvolver-se à sua frente em tempo real, em vez de ser exposta em aulas polidas por séculos de experiência acumulada. Huh também teve a oportunidade de ver em primeira mão como lidar com problemas para os quais não há nenhuma solução conhecida e aperceber-se de como, por vezes, se chega a conclusões surpreendentes. Como ele observou, os cursos tradicionais “são muito diferentes de observar Matemática em estado bruto à frente dos nossos olhos”.

Como é natural, esta maneira de dar aulas não é do agrado de todos. Inscreveram-se 200 alunos na disciplina lecionada por Hironaka, mas ao fim de algumas semanas só restavam cinco. Um deles era Huh. Este tentou tanto quanto pôde esconder do seu professor até que ponto não estava preparado. Teve sucesso: ao perguntarem-lhe, anos mais tarde, com que recordação ficou da preparação de Huh enquanto aluno, Hironaka respondeu: “Não é nada que me tenha ficado na memória. Já então ele me impressionou bastante.”

Após se licenciar, Huh fez um mestrado em Seul (durante o qual conheceu a futura mulher) e passou bastante tempo com Hironaka, ao ponto de o acompanhar ao Japão durante as férias. Após ter o mestrado, candidatou-se a uma dúzia de programas doutorais nos Estados Unidos, mas só foi aceite por um, na Universidade de Urbana-Champaign, no estado do Illinois. Enquanto começava a fazer o seu doutoramento, resolveu um problema em aberto de Teoria dos Grafos, a conjectura de Reeds... sem saber que esta existia.⁴ De facto, Huh resolveu o problema primeiro e só depois é que descobriu que estava em aberto há várias décadas. Por esta altura, o talento dele começava a dar nas vistas. Foi convidado para expor a sua resolução da conjectura de Reeds na Universidade do Michigan e um outro aluno de pós-graduação que estava lá nessa altura, Jesse Kass, contou mais tarde que foi encorajado por um professor daquela universidade a ir assistir à palestra para poder gabar-se aos seus netos, daí a 30 anos, de ter conhecido Huh antes de este se ter tornado famoso.

Huh concluiu o seu doutoramento em 2014 na Universidade do Michigan.⁵ O seu orientador, Mircea Mustață, afirmou que Huh praticamente não precisava de ser orientado, acrescentando que ele “era mais como um colega, que já então tinha a sua própria maneira de ver as coisas”. Quanto ao trabalho que desenvolveu na tese, este consistiu em resolver outro problema em aberto. A tese recebeu

um prémio (o Prémio Sumner B. Myers) destinado a teses de doutoramento da Universidade do Michigan.

Em 2018, Huh fez uma palestra como convidado no Congresso Internacional de Matemáticos. Este congresso tem lugar de quatro em quatro anos e é nele que são atribuídas as Medalhas Fields. E, quatro anos mais tarde, em 2022, em Helsínquia, June Huh recebeu finalmente aquela medalha (juntamente com Hugo Duminil-Copin, James Maynard e Maryna Viazovska).

Como se pode ver, a trajetória de Huh esteve longe de ser normal para um matemático de topo. Mas há outros casos assim e, curiosamente, Huh parece ter tendência para colaborar com outros matemáticos cujos percursos académicos também estão fora do que normalmente ocorre. Nos últimos anos, ele tem colaborado com Karim Adiprasito (da Universidade Hebraica de Jerusalém) e com Eric Katz (da Universidade Estatal do Ohio). Acontece que Adiprasito inicialmente quis ser cozinheiro e passou algum tempo a pintar na Índia e que Katz foi DJ na rádio quando era estudante e tem um conhecimento enciclopédico sobre grupos de *indie rock*.

O hábito que Huh tinha na adolescência de passear pela Natureza não o abandonou. Continua regularmente a dar passeios pelos bosques junto a Princeton (Huh é membro do Instituto de Estudos Avançados de Princeton) e é frequente que nesses passeios encontre animais interessantes. “Sou muito bom a descobrir coisas; é uma das minhas capacidades especiais”, diz Huh. Com efeito, parece ser esse o caso.

Agradecimentos

O autor agradece ao professor Carlos Florentino pelo estímulo para escrever este artigo e ao professor June Huh pelo retrato que lhe enviou (tirado por Denise Applewhite).

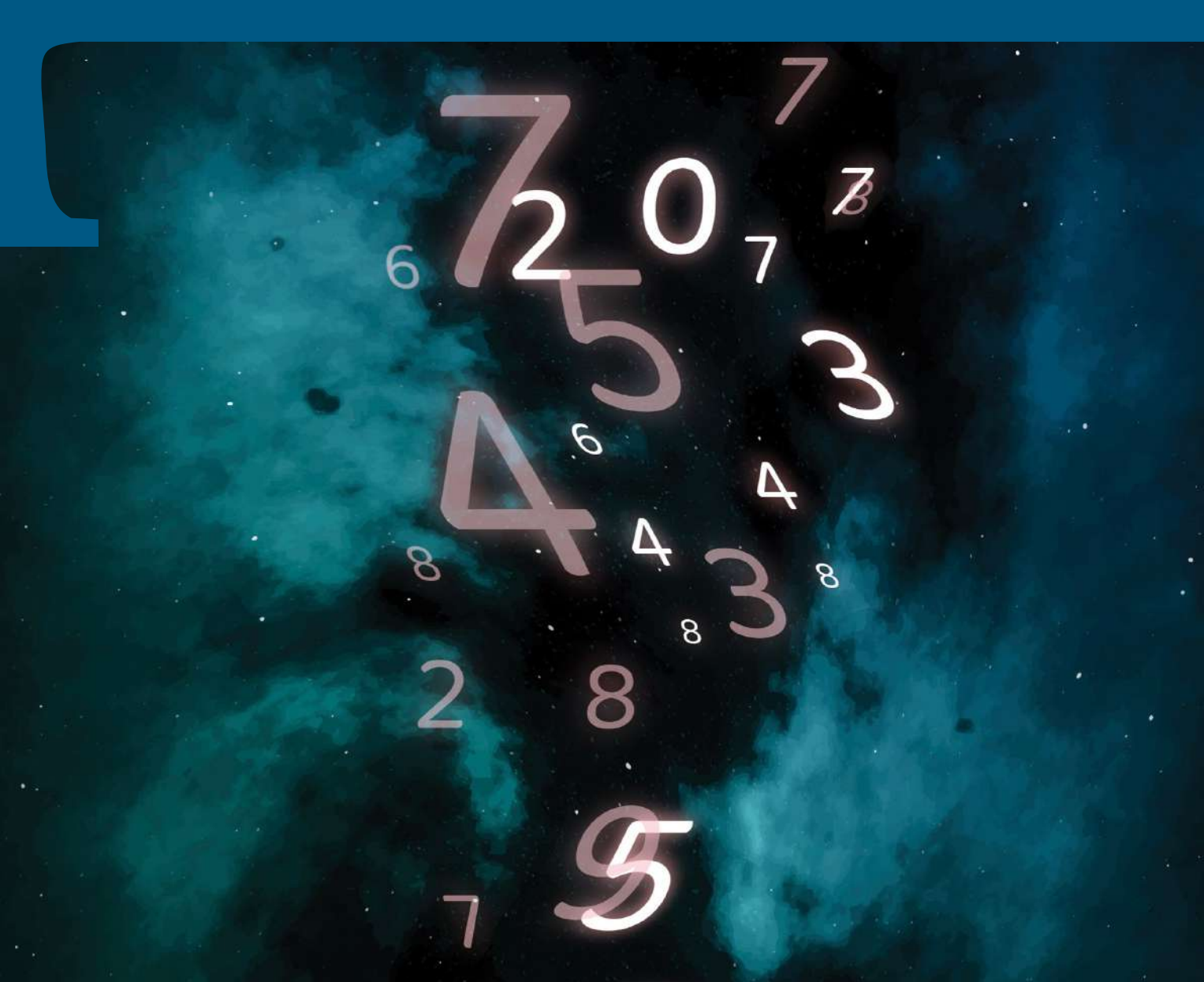
¹ Kevin Hartnett, “A Path Less Taken to the Peak of the Math World”, *Quanta Magazine*, <https://www.quantamagazine.org/a-path-less-taken-to-the-peak-of-the-math-world-20170627/>

² Jordana Cepelewicz, “He Dropped Out to Become a Poet. Now He’s Won a Fields Medal”, *Quanta Magazine*, <https://www.quantamagazine.org/june-huh-high-school-dropout-wins-the-fields-medal-20220705/>

³ Todas as citações deste texto são retiradas dos artigos das duas primeiras notas de rodapé.

⁴ Para mais detalhes sobre os trabalhos matemáticos de Huh, veja-se o texto de Carlos Florentino *June Huh, entre a Poesia e a Matemática*, <https://ciencias.ulisboa.pt/pt/noticia/22-07-2022/june-huh-entre-a-poesia-e-a-matematica>

⁵ June Huh, *Rota’s Conjecture and Positivity of Algebraic Cycles in Permutohedral Varieties*, <https://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/1108901>



UMA NOTA ACERCA DOS NÚMEROS PERMÚLTIPLOS

Eudes Antonio Costa^a, Jaqueline Ribeiro Dias^b

UFT, ARRAIAS, MATEMÁTICA^{a, b}

eudes@uft.edu.br^a, jaqueline.ribeiro1@uft.edu.br^b

1. INTRODUÇÃO

Consideraremos o conjunto dos números inteiros não negativos (naturais) denotado por $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, e por conveniência diremos apenas que n é um número (natural) para todo o $n \in \mathbb{Z}_+$.

Seja n um número não nulo no sistema posicional decimal (base 10), com $k+1$ algarismos, e escrito na forma $n = a_k \dots a_1 a_0$, isto é, $n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$, em que $a_i \in D = \{0, 1, \dots, 8, 9\}$ e $a_k \neq 0$.

Considere ainda o número n' também com os mesmos $k+1$ algarismos (e a mesma quantidade de algarismos), da forma $n' = a'_k a'_{k-1} \dots a'_1 a'_0$, obtido do número n permutando (alternando ou trocando a posição de) os seus algarismos, isto é, a'_j ($0 \leq j \leq k$) é igual a algum a_i ($0 \leq i \leq k$). Por exemplo os números 2024, 2042, 2204, 2240, 4022, 4202 e 4220 são números com quatro algarismos obtidos pela permutação dos algarismos do número 2024. Um estudo sobre propriedades dos números permutados, números obtidos pela permutação dos algarismos de um número fixo, pode ser encontrado em [4, 6].

Definição 1.1. *Sejam n e n_1 números permutados distintos. Se n_1 for múltiplo de n , então estes números são chamados permúltiplos.*

Exemplo 1.2. *Os números 102564 e 410256 são permúltiplos, visto que $410256 = 4 \cdot 102564$ (veja [2]).*

Neste trabalho vamos estudar pares de números inteiros positivos n e n_1 formados pelos mesmos algarismos, e tais que n seja um divisor de n_1 , denominados permúltiplos. Por exemplo, $n = 1089$, $n_1 = 9801$ são permúltiplos, visto que $9801 = 9 \cdot 1089$ e são formados pelos mesmos algarismos, quais sejam: 0, 1, 8 e 9.

Os números 21978 e 87912 também são permúltiplos, pois $87912 = 4 \cdot 21978$ (veja [15, 16]). Da mesma forma, além de 1089 e 9801, os números 10989 e 98901 são permúltiplos, pois $98901 = 9 \cdot 10989$ (veja [11, 12, 16]).

O termo *permúltiplo* foi usado por Holt (2015) e é uma justaposição das palavras permutação e múltiplo. Nos interessantes trabalhos [11, 12], Holt exhibe alguns exemplos e também apresenta propriedades acerca de alguns números *palíntuplos* (palíndromos e múltiplos) na base 10 e noutras bases.

Nestas notas, o nosso interesse é mostrar como gerar ou encontrar outros números *permúltiplos*, apresentando uma forma, ou um procedimento, para obter e construir outros (infinitos) números nesta classe.

2. NÚMEROS PERMÚLTIPLOS CONCATENADOS

Primeiramente vamos introduzir e utilizar a notação $n_{[k]}$, que representa o número n concatenado ou justaposto k vezes. Por exemplo, se $n = 2024$ e $k = 3$ então $2024_{[3]} = 202420242024$.

Nesta secção inicialmente tomamos um número n , e realizamos a concatenação (ou justaposição) deste número k vezes ($k \geq 1$).

Aplicando o princípio de indução matemática em $k \geq 1$, mostra-se que:

Lema 2.1. [9] *Seja n um número com $t \geq 1$ algarismos. Então o número n , concatenado k vezes é escrito na forma*

$$n_{[k]} = n \times 10^{(k-1)t} + \dots + n \times 10^{2t} + n \times 10^t + n.$$

Exemplo 2.2. Sendo $n = 142857$ um número com seis algarismos e $2 \leq k \leq 4$, temos que:

$$142857_{[2]} = 142857142857 = 142857 \times 10^6 + 142857;$$

$$142857_{[3]} = 142857142857142857 \\ = 142857 \times 10^{12} + 142857 \times 10^6 + 142857;$$

$$142857_{[4]} = 142857 \times 10^{18} + 142857 \times 10^{12} \\ + 142857 \times 10^6 + 142857.$$

O exemplo a seguir explora, em cada k -etapa de concatenação, o que ocorre quando n e n' forem permúltiplos.

Exemplo 2.3. *Tomando $n = 142857$, $n' = 428571$ com $3 \cdot n = n'$, e usando os resultados obtidos no exemplo 2.2,*

obtemos que:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 142857_{[2]} &= 3(142857 \times 10^6 + 142857) \\ &= 3 \cdot 142857 \times 10^6 + 3 \cdot 142857 \\ &= 428571 \times 10^6 + 428571 = 428571_{[2]}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 3 \cdot 142857_{[3]} &= 3(142857 \times 10^{12} + 142857 \times 10^6 + 142857) \\ &= 3 \cdot 142857 \times 10^{12} + 3 \cdot 142857 \times 10^6 + 3 \cdot 142857 \\ &= 428571 \times 10^{12} + 428571 \times 10^6 + 428571 \\ &= 428571_{[3]}. \end{aligned}$$

De igual maneira, obtém-se que $3 \cdot 142857_{[4]} = 428571_{[4]}$.

O exemplo anterior pode ser generalizado pelo seguinte resultado.

Teorema 2.4. *Sejam n e $n' = r \cdot n$ números permúltiplos com $t \geq 1$ Algarismos. Então os números $n_{[k]}$ e $n'_{[k]}$ também são permúltiplos para todo o $k \geq 1$.*

Demonstração. Para $k = 1$ verifica-se o resultado, visto que $n' = r \cdot n$.

Admitindo que o resultado é válido para algum $k \geq 1$, mostraremos que o resultado também é válido para $k + 1$. Segue do lema 2.1 que

$$n_{[k+1]} = n \cdot 10^{kt} + n_{[k]}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} r \cdot n_{[k+1]} &= r(n \cdot 10^{kt} + n_{[k]}) \\ &= r \cdot n \times 10^{kt} + r \cdot n_{[k]} \\ &\stackrel{\text{hip ind}}{=} n' \times 10^{kt} + n'_{[k]} \\ &= n'_{[k+1]}. \end{aligned}$$

□

3. NÚMEROS PERMÚLTIPLOS CONCATENADOS ALTERNADOS

Agora vamos usar a notação $n_{[k,1]}$, que representa o número n concatenado ou justaposto k vezes, alternado por, ou acrescido de, um algarismo 0 entre cada elemento n concatenado. Por exemplo, se $n = 2024$ e $k = 3$ então $2024_{[3,1]} = 20240202402024$.

Nesta secção inicialmente tomamos um número n , e realizamos a concatenação alternada por 0 deste número k vezes ($k \geq 1$). Aplicando o princípio de indução

matemática em $k \geq 1$, mostra-se que:

Lema 3.1. *Seja n um número com $t \geq 1$ Algarismos. Então o número $n_{[k,1]}$ é escrito na forma*

$$n_{[k,1]} = n \times 10^{(k-1)t+(k-1)} + \dots + n \times 10^{2t+2} + n \times 10^{t+1} + n.$$

Exemplo 3.2. *Seja $n = 21978$ um número com cinco Algarismos e $2 \leq k \leq 4$, temos que:*

$$\begin{aligned} 21978_{[2,1]} &= 21978021978 = 21978 \times 10^6 + 21978; \\ 21978_{[3,1]} &= 21978021978021978 \\ &= 21978 \times 10^{12} + 21978 \times 10^6 + 21978; \\ 21978_{[4,1]} &= 21978 \times 10^{18} + 21978 \times 10^{12} + 21978 \times 10^6 + 142857. \end{aligned}$$

Sabendo que $n = 21978$ e $n' = 87912$ são permúltiplos com $4 \cdot n = n'$, tem-se:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 21978_{[2,1]} &= 4(21978 \times 10^6 + 21978) \\ &= 4 \cdot 21978 \times 10^6 + 4 \cdot 21978 \\ &= 87912 \times 10^6 + 87912 = 87912_{[2,1]}. \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} 4 \cdot 21978_{[4,1]} &= 4(21978 \times 10^{18} + 21978 \times 10^{12} \\ &\quad + 21978 \times 10^6 + 21978) \\ &= 87912 \times 10^{18} + 87912 \times 10^{12} \\ &\quad + 87912 \times 10^6 + 87912 \\ &= 87912_{[4,1]}. \end{aligned}$$

De maneira recursiva, podemos generalizar este tipo de concatenação alternada para qualquer quantidade de zeros, mesmo para uma quantidade distinta de zeros em cada bloco.

Considere

$$Z_r = \underbrace{00 \dots 00}_{r \text{ vezes}} \text{ com } r \geq 0.$$

Assim, dados os inteiros k, r_1, \dots, r_{k-1} , a concatenação alternada por zeros define-se por:

$$n_{[k, r_{k-1}, \dots, r_2, r_1]} = nZ_{r_{k-1}}n \dots nZ_{r_2}nZ_{r_1}n.$$

Mais uma vez, aplicando o princípio de indução matemática em k , mostra-se que:

Lema 3.3. *Seja n um número com $t \geq 1$ Algarismos. Então o número $n_{[k, r_{k-1}, \dots, r_1]}$ é escrito na forma*

$$n_{[k,r_{k-1},\dots,r_1]} = n \times 10^{(k-1)t+(r_{k-1}+\dots+r_2+r_1)} + \dots \\ + n \times 10^{2t+r_2+r_1} + n \times 10^{t+r_1} + n.$$

Claramente o lema 3.1 é uma especificação do lema 3.3 quando $r_1 = r_2 = \dots = r_{k-1} = 1$.

Exemplo 3.4. Os números $n = 10989$ e $n' = 98901$ são permúltiplos com cinco algarismos e $9 \cdot n = n'$. Assim,

$$10989_{[2,3]} = 1098900010989 = 10989 \times 10^8 + 10989.$$

Por outro lado,

$$10989_{[3,4,5]} = 109890000109890000010989 \\ = 10989 \times 10^{19} + 10989 \times 10^{10} + 10989.$$

Assim

$$9 \cdot 10989_{[2,3]} = 9(10989 \times 10^8 + 10989) = 98901_{[2,3]},$$

como também

$$9 \cdot 10989_{[3,4,5]} = 9 \cdot (10989 \times 10^{19} + 10989 \times 10^{10} + 10989) \\ = 98901_{[3,4,5]}.$$

Os exemplos 3.2 e 3.4 podem ser generalizados pelo seguinte resultado.

Teorema 3.5. Sejam n e $n' = s \cdot n$ números permúltiplos com $t \geq 1$ algarismos. Então os números $n_{[k,r_1,\dots,r_{k-1}]}$ e $n'_{[k,r_1,\dots,r_{k-1}]}$ também são permúltiplos para todo o $k \geq 1$.

Demonstração. Para $k = 2$ temos que

$$n_{[2,r_1]} = nZ_{r_1}n = n \times 10^{t+r_1} + n'$$

assim,

$$s \cdot n_{[2,r_1]} = s(n \times 10^{t+r_1} + n) \\ = s \cdot n \times 10^{t+r_1} + s \cdot n \\ = n' \times 10^{t+r_1} + n' \\ = n'_{[2,r_1]},$$

e obtemos o resultado.

Admitindo que é válido o resultado para algum $k \geq 2$, mostraremos que o resultado também é válido para $k + 1$. Vejamos que

$$n_{[k+1,r_k,r_{k-1},\dots,r_1]} \stackrel{\text{Lem 3.3}}{=} n \times 10^{kt+(r_k+r_{k-1}+\dots+r_2+r_1)} + n_{[k,r_1,\dots,r_{k-1}]}.$$

Assim,

$$s \cdot n_{[k+1,r_k,r_{k-1},\dots,r_1]} = s(n \times 10^{kt+(r_k+r_{k-1}+\dots+r_2+r_1)} + n_{[k,r_1,\dots,r_{k-1}]}) \\ = s \cdot n \times 10^{kt+(r_k+r_{k-1}+\dots+r_2+r_1)} + s \cdot n_{[k,r_1,\dots,r_{k-1}]} \\ \stackrel{\text{hip ind}}{=} n' \times 10^{kt+(r_k+r_{k-1}+\dots+r_2+r_1)} + n'_{[k,r_1,\dots,r_{k-1}]} \\ = n'_{[k+1,r_k,r_{k-1},\dots,r_1]}.$$

□

4. LISTAGEM DE NÚMEROS PERMÚLTIPLOS

Nesta secção vamos apresentar um pequeno apontamento acerca dos números permúltiplos sem concatenação, na verdade um apanhado de vários resultados envolvendo estes números sem uma preocupação com a justificação de tais factos. Também faremos na tabela 1 uma catalogação de trabalhos, ou bancos de questões, em que apareceram números permúltiplos, sem que tal signifique uma primazia ou originalidade.

Ball [1] observa, sem justificar ou conceituar, que $9801 = 9 \cdot 1089$.

Barros [2] mostra a relação entre os números 102564 e 410256, verificando que $410256 = 4 \cdot 102564$. Apresenta ainda a seguinte questão: dado um número inteiro positivo n com k algarismos, se trasladarmos o algarismo da unidade para a posição de maior ordem (primeira posição à esquerda), que condições devemos estabelecer para que o número n' seja múltiplo de n ? Carvalho e Costa [5] apresentam um estudo da questão proposta em [2], exibindo os números permúltiplos da forma $n = 9b \frac{R_k}{d}$, sendo $R_k = 11 \cdots 11$ uma repunidade, $b \in \{2, 3, \dots, 9\}$ e $d \in \{19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89\}$ um divisor de R_k . Por exemplo, para $b = 3$, obtém-se o número primo $d = 29$. Como 29 divide R_{28} , tem-se

$$n = \frac{27 \times R_{28}}{29} = 1034482758620689655172413793, \\ n_1 = 3103448275862068965517241379 = 3 \times N.$$

Gardner [10] e Moreira [13] exibem números que possuem a propriedade de ser múltiplos de um número inicial fixo, e todos os números são obtidos pela permutação cíclica dos algarismos daquele número inicial. Enquanto Gardner [10] o faz de uma forma mais lúdica ou por curiosidade aritmética, Moreira [13] justifica a conexão com os restos na divisão euclidiana por um número primo p , com foco na preparação de estudantes para competições olímpicas em matemática. Neste último, ressaltamos que alguns números são permúltiplos admitindo o algarismo

inicial 0.

Como dissemos, Holt [11, 12] cunha o termo permúltiplo, bem como exhibe exemplos e apresenta propriedades acerca de alguns destes números na base 10 e noutras bases.

Webster e Williams [16] “catalogam” uma subclasse dos permúltiplos, os divisores reversos, um inteiro que é divisor do seu número reverso (o número obtido pela inversão da posição dos seus algarismos, assim o reverso de 23 é 32). Por exemplo, os permúltiplos 1089 e 9801 são divisores reversos. Para $n \geq 3$, mostram que todos os divisores reversos são do tipo $11(10^{n-2} - 1)$ (tipo I), $2 \cdot 11(10^{n-2} - 1)$ (tipo II), e concatenação de números do tipo I. Por exemplo, 1089 e 10989, e os seus respetivos reversos, são do tipo I, enquanto $2178 = 2 \cdot 1089$ e $21978 = 2 \cdot 10989$, e os seus respetivos reversos, são do tipo II. Conclui-se ainda deste trabalho que há divisores reversos (permúltiplos) com qualquer quantidade k de algarismos, para $k \geq 4$.

Por fim, Costa e Santos [8] mostram que os números do tipo I, apresentados por Webster e Williams [16], são números mágicos de Ball (resultado de um algoritmo que aparece em Ball [1], sendo 1089 um exemplo). Por conseguinte, os números do tipo II são o dobro de um número de Ball.

Na tabela 1, apresentamos alguns números permúltiplos sem concatenação, e o(s) trabalho(s) que estes números apareceram e podem ser consultados.

5. CONSIDERAÇÕES

Esperamos que este trabalho desperte a curiosidade sobre esta interessante classe de números inteiros.

Na forma de desafio ou com foco em competições matemáticas, pode propor-se um problema similar a estudantes. Por exemplo, dado um número n com k algarismos, qual a condição ou as condições, para que o número n' , formado por uma permutação dos algarismos de n , seja um múltiplo de n ? Esta foi a motivação inicial da nossa pesquisa.

Pensando nesta situação-problema e aplicando as técnicas e os procedimentos vistos em [2, 5, 8, 11], obtemos três pares de números permúltiplos (sem concatenação):

$$7 \cdot 1014492753623188405797 = 7101449275362318840579$$

$$8 \cdot 1012658227848 = 8101265822784$$

e

$$9 \cdot 10112359550561797752808988764044943820224719 \\ = 91011235955056179775280898876404494382022471 .$$

Sendo este o objeto de pesquisa do trabalho de conclusão de curso (em preparação) da segunda autora e que poderá ser explorado num trabalho futuro.

Agradecimento

O primeiro autor agradece à PROPESQ/UFT pelo apoio à pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] Ball, Walter W. R. *Mathematical Recreations and Essays*. Macmillan, 1914.
- [2] Barros, Augusto M. A. “Qual a Relação que Existe Entre os Números 102564 e 410256?”. *Revista do Professor de Matemática SBM*, Vol. 63, p.22-23, 2007.
- [3] BRASIL-OBMEP. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. Prova 2022. SBM : IMPA. www.obmep.org.br
- [4] Carvalho, Fernando S.; Costa, Eudes A. “Permutando Algarismos dos Números”. *Eureka!*, SBM, n. 39; 27-36, 2015.
- [5] Carvalho, Fernando S.; Costa, Eudes A. “Números Permúltiplos”. *Revista do Professor de Matemática*, SBM, n. 106, 49-52, 2022.
- [6] Costa, Eudes A.; Santos; Bruno C. “Número Equilibrado Aritmético ou Geométrico”. *Revista de Matemática da UFOP*, n.3, vol 03, 64-74, 2022.
- [7] Costa, Eudes A.; Santos, Douglas C. “Algumas Propriedades dos Números Monodígitos e Repunidades”. *Revista de Matemática da UFOP*, vol.2, n.2022, p.47-58, 2022.
- [8] Costa, Eudes A.; Santos, Ronaldo A. “Reverse Divisors and Magic Numbers”. *arXiv preprint arXiv:2404.06656*[math.NT], 2024.
- [9] Costa, Eudes A.; Soares, Thalles S. “Soma Iterada de Algarismos de um Número Concatenado”. *Revista de Matemática da UFOP*, v. 1, n.2024, p.e1-e11, 2024.
- [10] Gardner, Martin. *Mathematical Circus*. American Mathematical Society, 1996.

Tabela 1. Números permúltiplos sem concatenação

m	x	$x' = m \cdot x$	Referência
9	1089	9801	[1, 1914], [3, BQ 2014], [16, 2012]
9	10989	98901	[3, BQ 2014], [8, 2024], [11, 2014], [16, 2012]
4	2178	8712	[8, 2024], [16, 2012]
4	21978	87912	[3, BQ 2012], [5, 2022], [11, 2014]
4	219978	879912	[3, BQ 2013], [8, 2024], [16, 2012]
4	102564	410256	[2, 2007], [5, 2022]
2	142857	285714	[10, 1996], [11, 2014], [13, 1998]
3	142857	428571	[10, 1996], [11, 2014], [13, 1998]
4	142857	571428	[10, 1996], [11, 2014], [13, 1998]
5	142857	714285	[10, 1996], [11, 2014], [13, 1998]
6	142857	857142	[10, 1996], [11, 2014], [13, 1998]
2	0588235294117647	1176470588235294	[10, 1996], [11, 2014], [13, 1998]
3	0588235294117647	1764705882352941	[13]
4	0588235294117647	2352941176470588	[13]
5	0588235294117647	2941176470588235	[13]
6	0588235294117647	3529411764705882	[13]
7	0588235294117647	4117647058823529	[13]
8	0588235294117647	4705882352941176	[13]
9	0588235294117647	5294117647058823	[13]
10	0588235294117647	5882352941176470	[13]
11	0588235294117647	6470588235294117	[13]
12	0588235294117647	7058823529411764	[13]
13	0588235294117647	7647058823529411	[13]
14	0588235294117647	8235294117647058	[13]
15	0588235294117647	8823529411764705	[13]
16	0588235294117647	9411764705882352	[13]
2	105263157894736842	210526315789473684	[5, 2022]
3	10344827586206 89655172413793	31034482758620 68965517241379	[5]
5	102040816326530612244 897959183673469387755	510204081632653061224 489795918367346938775	[5]
6	1016949152542372881355 9322033898305084745762 71186440677966	6101694915254237288135 5932203389830508474576 27118644067796	[5]

[11] Holt, Benjamim V. "Some General Results and Open Questions on Palintiple Numbers". *Integers*, v. 14, p. A42, 2014.

[12] Holt, Benjamin V. "On Permutiples Having a Fixed Set of Digits". *arXiv preprint, arXiv:1511.02033v2 [math.NT]*, 2015.

[13] Moreira, Carlos G. T. de A. "Números Mágicos e Contas de Dividir". *Eureka-SBM*, 1, p.38-40, 1998.

[14] Niven, I.; Zuckerman, H. S. "An Introduction to the Theory of Numbers". *Bull. Amer. Math. Society*, v. 67, p. 339-340, 1961.

[15] Sloane, N. J. A. "2178 and All That". *Fibonacci Quart.* 52, no. 2, p. 99-120, 2014.

[16] Webster, Roger; Williams, Gareth. "On the Trail of Reverse Divisors: 1089 and All That Follow". *Mathematical Spectrum*, n.45, p. 96-102, 2012.

SOBRE OS AUTORES

Eudes Antonio Costa (<https://orcid.org/0000-0001-6684-9961>) é professor adjunto no colegiado de Matemática da Universidade Federal do Tocantins, Arraias, Brasil. Os seus interesses de investigação prendem-se com tópicos de álgebra, teoria dos números, ensino de matemática e matemática recreativa.

Jaqueline Ribeiro Dias é académica do curso Licenciatura em Matemática no Campus de Arraias, Universidade Federal do Tocantins, Brasil.



Exposições (ma)temáticas da SPM.

Disponíveis para exibição nas escolas,
bibliotecas ou instituições similares*.

Mais Informações em
www.spm.pt/exposicoes

*A requisição das exposições tem custos de manutenção.



PEDRO J. FREITAS
Universidade de
Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

MAX BILL E A ARTE CONCRETA

O artista Max Bill deixou-nos vários quadros de índole geométrica, como diversos outros artistas da mesma época. No entanto, alguns dos quadros de Bill têm uma característica especial: podem ser vistos como *puzzles* matemáticos.

Na primeira metade do século 20, houve um movimento artístico nos Países Baixos chamado Neoplasticismo, ou *De Stijl*, (“o estilo” em neerlandês) que tentava encontrar e representar os elementos pictóricos mais básicos, quer nas formas quer nas cores. O nome mais conhecido deste movimento terá sido Piet Mondrian (1872-1944), que concretizou estas ideias nos seus famosos quadros com linhas negras, apresentando apenas áreas geométricas azuis, amarelas e vermelhas (além de usar igualmente branco e negro).

Outro aderente a este movimento foi Theo van Doesburg (1883-1931), que, no final da sua carreira artística, veio a propor outra forma de pensar a arte visual, próxima do Neoplasticismo em alguns pontos, mas talvez mais próxima da abstração matemática. Esse movimento foi a Arte Concreta. O seu manifesto, redigido por Van Doesburg em 1930 e assinado por mais quatro artistas, é o seguinte.¹

BASE DA PINTURA CONCRETA

Afirmamos:

1. A arte é universal.
2. Uma obra de arte deve ser inteiramente concebida e moldada pela mente antes da sua execução. Não deve receber nada dos dados formais da natureza, da sensualidade ou do sentimentalismo. Queremos excluir o lirismo, o drama, o simbolismo, etc.



Figura 1: Max Bill em 1970.

¹Tradução do inglês do autor deste artigo

3. A pintura deve ser inteiramente construída com elementos puramente plásticos, nomeadamente superfícies e cores. Um elemento pictórico não tem qualquer significado para além de “ele próprio”; consequentemente, um quadro não tem qualquer significado para além de “ele próprio”.
4. A construção de um quadro, bem como a dos seus elementos, deve ser simples e visualmente controlável.
5. A técnica de pintura deve ser mecânica, ou seja, exata, anti-impressionista.
6. É obrigatório um esforço para atingir uma clareza absoluta.

Após a morte de Van Doesburg, o estilo foi popularizado pelo suíço Max Bill (1908-1994), pintor, mas igualmente designer gráfico e de produto (são conhecidos os seus mostradores de relógios), arquiteto e escultor, além de teórico e professor (veja-se um retrato na figura 1). Bill estudou na Bauhaus, em Dessau, com Kandinsky, Klee e Schlemmer, entre 1927 e 1929. Depois de regressar à Suíça, ajudou a organizar o grupo Allianz para defender os ideais da arte concreta e, em 1944, organizou a primeira exposição internacional em Basileia. Em 1953, fundou a Escola de Design de Ulm, que seguiu os princípios integradores das artes da Bauhaus, sendo a primeira a incluir o estudo da semiótica. A escola fechou em 1968.

Em 1960, Bill organizou uma grande exposição retrospectiva de arte concreta em Zurique, ilustrando os primeiros 50 anos do seu desenvolvimento. Na figura 2, vemos uma sua escultura, de 1986, que segue claramente os princípios desta arte: estruturalmente, trata-se de uma tira de Möbius, em granito, pesando 80 toneladas.

Através da Escola de Ulm, Max Bill promoveu este movimento na América Latina, em particular através de alunos como o argentino Tomás Maldonado (1922-2018). No Brasil, vieram a surgir dois manifestos: o do Grupo Ruptura, em 1952, em São Paulo, defendendo a Arte Concreta, e o Manifesto Neoconcreto, de 1959, escrito por um grupo de artistas do Rio de Janeiro. Estes movimentos alargaram o termo concreto também a outras disciplinas além da pintura, incluindo a escultura, a fotografia e a poesia (note-se que o autor do *Manifesto Neoconcreto* foi, não um artista plástico, mas o escritor Ferreira Gullar).

Voltamos agora a Max Bill, e a algumas das suas obras com teor mais matemático. Podemos encontrar um dos



Figura 2: Max Bill, *Continuidade* (Colosso de Frankfurt), 1986. Coleção do Deutsche Bank, Frankfurt am Main.

seus quadros no Museu de Arte Contemporânea do Centro Cultural de Belém, que apresentamos na figura 3, junto a uma análise desse mesmo quadro.

Esta peça pode ser encarada como sendo potencialmente fractal, feita de modo iterativo, como o próprio nome sugere. Como se mostra no desenho explicativo, o método que a peça segue, iterativamente, é o seguinte:

- ▶ Dividir a meio o último segmento desenhado (o inicial é o vertical);
- ▶ Fazer surgir, nesse ponto médio, um novo segmento com metade do comprimento e formando um ângulo de 60° com o segmento inicial.

Há também meios de definir a posição dos limites esquerdo e direito do quadro (deixamos isso aos leitores mais curiosos). Assim, como se vê, o quadro segue fielmente os princípios explicitados no manifesto: é uma obra que materializa um pensamento, de forma clara, sem qualquer significado representativo a não ser o do próprio quadro.

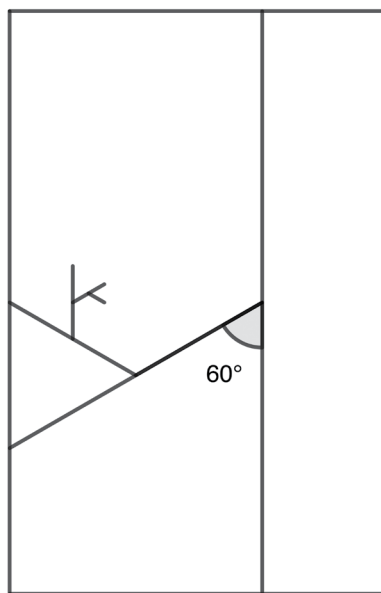


Figura 3: Max Bill, *Progressão em Seis Passos* (1942-43), Coleção Berardo, e desenho explicativo da obra.

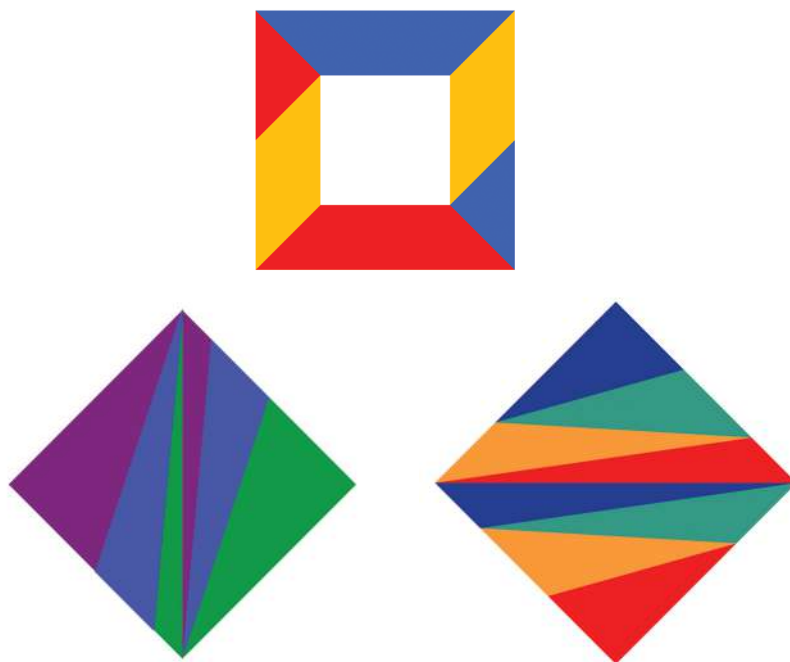


Figura 4: Reprodução dos seguintes quadros de Max Bill: *Quatro Quanta de Cores do Mesmo Tamanho* (1970), *Quadrado em Verde-Azul* (1988) e *Composição Abstrata* (1990).

Max Bill tem também uma vasta coleção de quadros, muitos deles quadrados, em que aparecem simplesmente formas poligonais coloridas. A figura 4 apresenta reproduções de três destes quadros.

No primeiro, de 1970, o título dá a ideia de que as quatro cores ocupam áreas iguais, o que nos leva a pensar que nos restantes se passa o mesmo. Assim, cada um destes quadros representa um pequeno *puzzle*, uma vez que esta condição nos leva a perguntar: que proporções devem ter as medidas dos polígonos para que, de facto, as áreas ocupadas por cada cor sejam iguais? No primeiro caso, bastará saber a proporção entre os lados do quadrado exterior e o do interior, no segundo, a proporção entre as bases dos triângulos, no lado inferior esquerdo. No terceiro, sugerimos considerar (como parece ser o caso na figura 4) que as bases dos triângulos vermelho e laranja, assentes no lado inferior esquerdo do quadrado, são iguais (isto leva a que a solução seja única). É possível encontrar muito mais quadros deste tipo fazendo uma pesquisa na internet.

Assim, para quem tem um gosto especial pela matemática, estes quadros de Max Bill acabam por proporcionar vários níveis de apreciação: o estético, em primeiro lugar, e o do raciocínio dedutivo, para quem tenha esta curiosidade de assim os analisar.

Créditos das figuras:

Figura 1: Recorte de: Vogt, Marcel - ETH-Bibliothek Zürich, Bildarchiv / Com_L19-0188-0203A / <http://doi.org/10.3932/ethz-a-000253670>, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=45464120>

Figura 2: Frank Behnsen - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=20651509>

Figura 3: Foto e estudo do autor em GeoGebra.

Figura 4: Desenhos do autor em GeoGebra.

TABELA DE PUBLICIDADE 2025

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1250

Nº de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

CONTACTOS

Tel.: 21 793 97 85

imprensa@spm.pt

ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)

Margem de corte: 4 mm

LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

					
	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPE
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.



JORGE NUNO SILVA
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

DODECAEDRO ROMANO

Quando se ouve uma referência ao *dodecaedro romano*, devemos entender que não se trata de um sólido qualquer. Trata-se de um objecto, encontrado em contexto arqueológico, que consiste essencialmente num dodecaedro regular com vértices exagerados e orifícios, quase sempre circulares, nas faces. A datação indica que é de origem romana, mas a sua utilização original permanece misteriosa. Nas referências, os leitores encontrarão caminhos para várias possibilidades.



Figura 1. Lokilech, CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons.

Foram já encontradas várias dezenas de dodecaedros deste tipo. Muitos estão expostos em museus, sempre acompanhados de etiquetas lacónicas. Trata-se de dodecaedros regulares com vértices protuberantes, de tamanho variável, mas sempre adequado ao manuseamento sem dificuldade. As faces apresentam aberturas, normalmente circulares, de diferentes diâmetros. São metálicos e a sua distribuição inclui, de acordo com a Wikipedia, Áustria, Bélgica, França, Alemanha, Hungria, Luxemburgo, Países Baixos, Suíça e

Grã-Bretanha, mas não Itália. Datam dos primeiros séculos do primeiro milénio e são inquestionavelmente de origem romana. Por que não surgiram estes objectos em Itália? Talvez porque a sua utilização tenha a ver com exploração de terrenos menos familiares... O nosso colega Tiago Hirth coligiu uma substancial colecção de referências bibliográficas que atestam o interesse que este assunto tem suscitado, não só entre historiadores e arqueólogos, mas também em camadas menos especializadas. Vamos referir, neste texto, parte dessas referências.

Estes artefactos, baseados num sólido platónico, esteticamente muito atraentes, apresentam um mistério ainda por desvendar. Isto é, surgiram, ao longo dos tempos, várias propostas para a sua finalidade, propostas essas bem diferentes entre si. Daremos aqui conta de algumas, deixando nas referências bibliográficas caminhos para o leitor mais curioso explorar.

O dodecaedro teria sido, segundo alguns, um auxiliar de tricotagem de lã. Na Internet encontram-se muitos defensores desta interpretação, bem como vários vídeos demonstrativos de apoio, como [15] e [6].

Outros acreditam que o uso certo para o dodecaedro seria no âmbito da agricultura. Mediante o estudo da incidência dos raios solares, os momentos certos para as acções agrícolas seriam determinados. Em [16] podemos encontrar uma longa explicação, ilustrada com esquemas sugestivos.



Figura 2. Réplica inspirada em [9].

O trabalho de Sparavigna [13] foi o que mais sensato nos pareceu, e nele baseámos a nossa proposta de utilização do dodecaedro romano.

Usando uma descrição exacta de um destes objectos, o colega Tiago Robalo construiu, via impressão 3D, a réplica em que fizemos várias tentativas de compreensão.

O dodecaedro regular apresenta seis pares de faces paralelas. Tipicamente, em duas faces paralelas, encontramos dois orifícios circulares de diâmetros diferentes. Ajustando a distância ao observador, podemos obter uma situação em que os dois orifícios ficam visualmente coincidentes. Esquemáticamente, reduzindo a uma situação bidimensional, a situação corresponde a ter dois segmentos de recta paralelos, de comprimentos diferentes, mas percebidos iguais em perspectiva. Suponhamos o observador colocado em O e que temos os dois segmentos paralelos AB e CD . A situação pode representar-se pelo seguinte esquema.

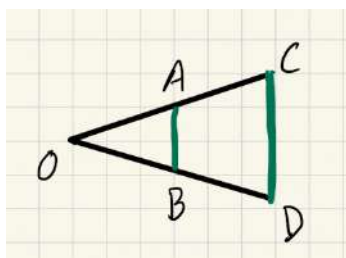


Figura 3. Dois segmentos de recta paralelos vistos como coincidentes.

Suponhamos agora que alinhemos dois orifícios de faces paralelas do nosso dodecaedro de forma a que sejam vistos como coincidentes por um observador em A (ver figura 4). Podemos representar, em corte, os diâmetros dos orifícios por BC e EF . Admitamos ainda que há um objecto, à distância, também alinhado com o cone de visão definido pelos orifícios, GH .

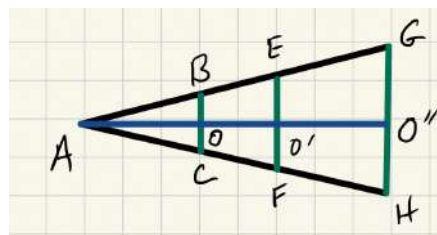


Figura 4. Objecto distante capturado pelo cone de visão do dodecaedro.

Os pontos médios dos segmentos BC , EF e GH são, respectivamente, O , O' e O'' . Nestas circunstâncias, temos, por semelhança de triângulos,

$$\frac{BO}{AO} = \frac{EO'}{AO'} = \frac{GO''}{AO''}$$

Ora,

$$\begin{aligned} \frac{EO'}{AO'} &= \frac{BO}{AO} \Rightarrow \frac{EO'}{AO + OO'} = \frac{BO}{AO} \\ &\Rightarrow AO \times EO' = BO \times (AO + OO') \\ &\Rightarrow AO \times (EO' - BO) = BO \times OO' \\ &\Rightarrow AO = \frac{BO \times OO'}{EO' - BO} \end{aligned}$$

Usando esta igualdade em

$$\frac{GO''}{AO''} = \frac{BO}{AO}$$

obtemos

$$\frac{BO \times OO'}{EO' - BO} \times GO'' = BO \times AO''$$

isto é,

$$\frac{OO'}{EO' - BO} \times GO'' = AO''$$

e, portanto,

$$AO'' = \frac{OO'}{EF - BC} \times GH$$



▲ Figura 5. *L'Academie des Sciences et des Beaux Arts, Cyclopaedia*, de Chambers.

Figura 6. *L'Academie des Sciences et des Beaux Arts, Cyclopaedia*, de Chambers (pormenor). ▶



Isto significa que cada par de orifícios em faces paralelas, colocado nesta situação de alinhamento, define um factor (o quociente entre a distância entre as faces e a diferença de diâmetros dos orifícios) que relaciona o tamanho do objecto à distância (GH , no nosso esquema) com a sua distância ao observador, AO'' .

Parece-nos plausível que a utilização preferencial do dodecaedro romano permitisse estimar, pelo método descrito, a distância do observador a um objecto distante, objecto esse de dimensões conhecidas (uma torre, um estandarte, uma colina...).

Na réplica que nos foi disponibilizada por Tiago Robalo, este coeficiente é um número “redondo” (50 e 100) para três escolhas de faces paralelas, o que nos encoraja a acreditar estarmos no caminho certo para a compreensão deste objecto. Na mesma réplica, duas das faces paralelas apresentam orifícios elípticos. As suas dimensões são demasiado próximas para lhes vermos

utilidade prática. Contudo, duas elipses em faces opostas, com eixos homólogos de comprimentos distintos, permitiriam aplicar o método que descrevemos de forma dupla (usando o eixo maior e o eixo menor). Precisamos de estudar em pormenor mais exemplares para esclarecer também esta situação.

A ilustração da figura 5, fornecida também por Tiago Hirth, foi retirada de [4] e mostra o dodecaedro romano entre utensílios científicos (ao centro).

Vejamos o detalhe central na figura 6.

Este contexto reforça em nós a convicção de que não estamos perante um artefacto para fazer tricot, nem para

ajudar nas colheitas. Mas, claro, podemos estar enganados.

Para tentar esclarecer definitivamente este mistério, estamos a participar na organização de um grupo de estudiosos que começará por efectuar levantamento e registo rigorosos dos dodecaedros encontrados. A seu tempo, daremos notícias nestas páginas sobre o trabalho desenvolvido.

REFERÊNCIAS

[1] Artmann, Benno (1996). “A Roman Icosahedron Discovered”. Em: *The American Mathematical Monthly* 103.2, pp. 132–3. issn: 00029890, 19300972. <http://www.jstor.org/stable/2975105> (acedido em 20/12/2024).

[2] — (2012). *Euclid – The Creation of Mathematics*. SpringerLink: Bücher. Springer New York. isbn: 9781461214120. <https://books.google.pt/books?id=F8XgBwAAQBAJ>.

[3] Bamford, John (fev. de 2024). “The Mystery of the Ancient Roman Dodecahedrons”. Em: *The Quantum Record*. <https://thequantumrecord.com/technology-over-time/mystery-of-ancient-roman-dodecahedrons/>.

[4] Chambers, E. (1728). *Cyclopaedia: Or an Universal Dictionary of Arts and Sciences*. D. Midwinter.

[5] Chertine P (2014). *Knitting with a Roman Dodecahedron*. <https://www.youtube.com/watch?v=76AvV601yJ0> (acedido em 2014).

[6] Gaines, Amy (2024). *Solved? The Roman Dodecahedron*. <https://www.youtube.com/watch?v=IADTLozKm0I> (acedido em 2024).

[7] Greiner, Bernhard A. (1995). “Römische Dodekaeder: Untersuchungen zur Typologie, Herstellung, Verbreitung, und Funktion”. Em: *Carnuntum Jahrbuch*, pp. 9–44.

[8] Guggenberger, Michael (2013). “The Gallo–Roman Dodecahedron”. Em: *The Mathematical Intelligencer* 35.4, pp. 56–60.

[9] Guillier, Gérard, Richard Delage e Paul-André Besombes (2008). “Une Fouille en Bordure des Thermes de Jublains (Mayenne) : Enfin un dodécaèdre en Contexte

Archéologique !” Em: *Revue archéologique de l'Ouest* 25. <https://journals.openedition.org/rao/680#quotation>.

[10] Henig, M. e M. Henig (2003). *Religion in Roman Britain*. Taylor & Francis. isbn: 9781135782764. <https://books.google.pt/books?id=mVKQAgAAQBAJ>.

[11] Lamm, Lisa (2024). *Römische Dodekaeder: Mysteriöse Objekte aus der Antike*. (Acedido em 2024).

[12] Metcalfe, Tom (2018). *The Mysterious Bronze Objects that Have Baffled Archaeologists for Centuries*. <https://getpocket.com/explore/item/the-mysterious-bronze-objects-that-have-baffled-archaeologists-for-centuries>.

[13] Sparavigna, Amelia Carolina (2012a). “A Roman Dodecahedron for Measuring Distance”. Em: *Arxiv*. <http://arxiv.org/abs/1204.6497>.

[14] — (2012b). “Roman Dodecahedron as Diopteron: Analysis of Freely Available Data”. Em: *Arxiv*. <https://arxiv.org/pdf/1206.0946>.

[15] TheMartinhallett (2014). *The Roman Dodecahedron – An Ancient Mystery Solved?* <https://www.youtube.com/watch?v=poGapxsanal&t=1s> (acedido em 2024).

[16] Wagemans, G.M.C. (2024). *A New Theory About the Dodecahedron*. <https://www.romandodecahedron.com/the-hypothesis> (acedido em 2024).

[17] Wikipedia contributors (2024). *Roman Dodecahedron – Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 28-December-2024]. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Roman_dodecahedron&oldid=1258671743.



LUÍS L. FERRÁS
Centro de Matemática
da Universidade do
Minho e Centro
de Estudos de
Fenómenos de
Transporte, Faculdade
de Engenharia,
Universidade do Porto
lferras@fe.up.pt

MATEMÁTICA EM MOVIMENTO: PREVER O ESCOAMENTO DE FLUIDOS PARA REVOLUCIONAR A INDÚSTRIA DOS MATERIAIS

A indústria portuguesa de plásticos conta com cerca de 1150 empresas e 8000 milhões de euros de volume de negócios, representando cerca de 4% do Produto Interno Bruto. Porém, segundo a ONU, a cada minuto é atirado para os oceanos do nosso planeta o equivalente a um camião de lixo de plástico. Por um lado, o plástico é um bem necessário, mas, por outro, gera muita poluição. Este problema pode ser mitigado evitando o desperdício de matéria-prima aquando da elaboração de um novo produto, e através da reciclagem e do uso de novos materiais. O objetivo deste trabalho é mostrar como a matemática pode ajudar a reduzir esse desperdício de plástico.

1. INTRODUÇÃO

A indústria portuguesa de plásticos é um setor robusto, composto por cerca de 1150 empresas que geram aproximadamente 8000 milhões de euros em volume de negócios, contribuindo com cerca de 4% para o Produto Interno Bruto (PIB) nacional. Este setor desempenha um papel essencial na economia e fornece uma ampla gama de produtos, desde embalagens e materiais de construção até peças fundamentais para a indústria automóvel e eletrodomésticos. Contudo, o impacto ambiental associado ao plástico representa um dos maiores desafios da nossa era [1].

Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU), o plástico continua a ser uma das maiores fontes de poluição marinha, com estimativas alarmantes que indicam que, a cada minuto, uma quantidade equivalente a um camião de lixo cheio de plástico é despejada nos oceanos do planeta. Este material, embora essencial e versátil, é fre-

quentemente descartado de forma inadequada, causando danos graves aos ecossistemas marinhos e contribuindo para a degradação ambiental.

Para abordar esta questão, é crucial adotar práticas de produção mais sustentáveis que permitam reduzir o desperdício de matérias-primas e melhorar a eficiência no uso do plástico. Além disso, a implementação de estratégias de reciclagem e a aposta em novos materiais biodegradáveis ou de origem sustentável são fundamentais para minimizar o impacto ambiental.

Este trabalho pretende demonstrar como a matemática pode ser uma aliada poderosa nesta missão. Através de modelos matemáticos aplicados à dinâmica dos fluidos, podemos prever e otimizar o comportamento do escoamento de polímeros durante a produção, evitando desperdícios significativos de material [2]. Estes modelos

matemáticos permitem aos engenheiros ajustar os processos de fabricação de modo a utilizar apenas a quantidade necessária de matéria-prima, contribuindo assim para uma produção mais eficiente e sustentável.

2. MODELOS MATEMÁTICOS E METODOLOGIAS

As equações de Navier-Stokes são um conjunto de equações diferenciais parciais que descrevem o movimento de fluidos viscosos. Estas equações permitem modelar o comportamento de fluidos em diferentes condições e são essenciais para a análise de problemas de dinâmica dos fluidos. A sua aplicação abrange desde o escoamento de água em rios e oceanos até à modelação do ar em torno de aeronaves e automóveis.

As equações de Navier-Stokes baseiam-se em dois princípios fundamentais da física:

- ▶ **Conservação da Massa:** A massa do fluido deve permanecer constante ao longo do tempo, o que é representado pela *equação da continuidade*.
- ▶ **Balço da Quantidade de Movimento:** A taxa de variação da quantidade de movimento é igual à soma das forças aplicadas, o que é representado pela *equação de quantidade de movimento*.

Para um fluido incompressível, as equações de Navier-Stokes podem ser expressas como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{u} representa o vetor velocidade do fluido, t é o tempo, ρ é a densidade do fluido (constante num fluido incompressível), p é a pressão, ν é a viscosidade cinemática do fluido ($\nu = \eta/\rho$ com η a viscosidade dinâmica) e \mathbf{f} representa forças externas, como por exemplo a gravidade. O vetor velocidade e o campo escalar de pressões dependem do tempo e das coordenadas espaciais (x, y, z). O operador ∇ representa o vetor gradiente, que é dado por $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$.

A equação (2.1) é a **equação da continuidade**, que garante a conservação da massa (o divergente da velocidade é nulo). A equação (2.2) é a **equação de quantidade de movimento**, que descreve a dinâmica do fluido sob a in-

fluência de forças internas e externas. A equação da quantidade de movimento pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}, \quad (2.3)$$

onde se usa o conceito de tensão, σ , definido como a força exercida numa partícula de fluido por unidade de área. Para o caso simplificado em que temos o escoamento de um fluido newtoniano (por exemplo, água) entre duas placas paralelas (em que a placa superior se move com velocidade constante U na direção positiva de x), a relação obtida para a tensão é que esta é proporcional à variação da velocidade no sentido perpendicular à direção do escoamento (y), tal como ilustrado na figura 1. A constante de proporcionalidade é então dada pela viscosidade (η), que mede a resistência de movimento do fluido.

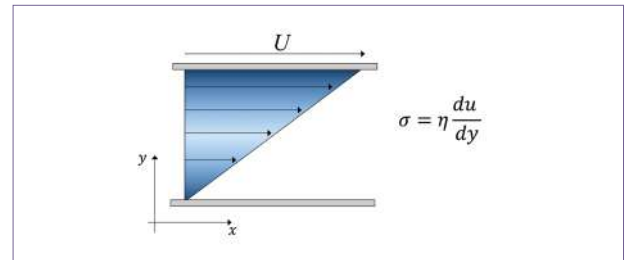


Figura 1. Escoamento entre placas paralelas. A placa superior move-se com velocidade constante e vai arrastando o fluido (representado a azul), devido à viscosidade entre as diferentes camadas do fluido. Este perfil linear de velocidade é obtido porque é assumida uma distância *muito pequena* entre as placas superior e inferior. A relação $\sigma = \eta \frac{du}{dy}$ é conhecida como a lei de Newton da viscosidade.

2.1 Fluidos complexos

As equações de Navier-Stokes são utilizadas para modelar uma ampla variedade de escoamentos de fluidos. Porém, alguns fluidos mostram um comportamento mais complexo, no qual, além de viscosidade, também é possível observar elasticidade, resultando em viscoelasticidade. Para modelar essa viscoelasticidade, é assumido que o fluido se comporta como uma mola (parte elástica) e um amortecedor (parte viscosa) em série, tal como ilustrado na parte superior da figura 2.

Podemos ver que, na parte superior da figura, temos do lado esquerdo umas mãos a esticarem uma mola. Então, a tensão sentida nas mãos (σ) é proporcional à deformação elástica da mola (γ_e), ou seja, quanto mais esticarmos a mola, maior a tensão sentida (Lei de Hooke). No centro

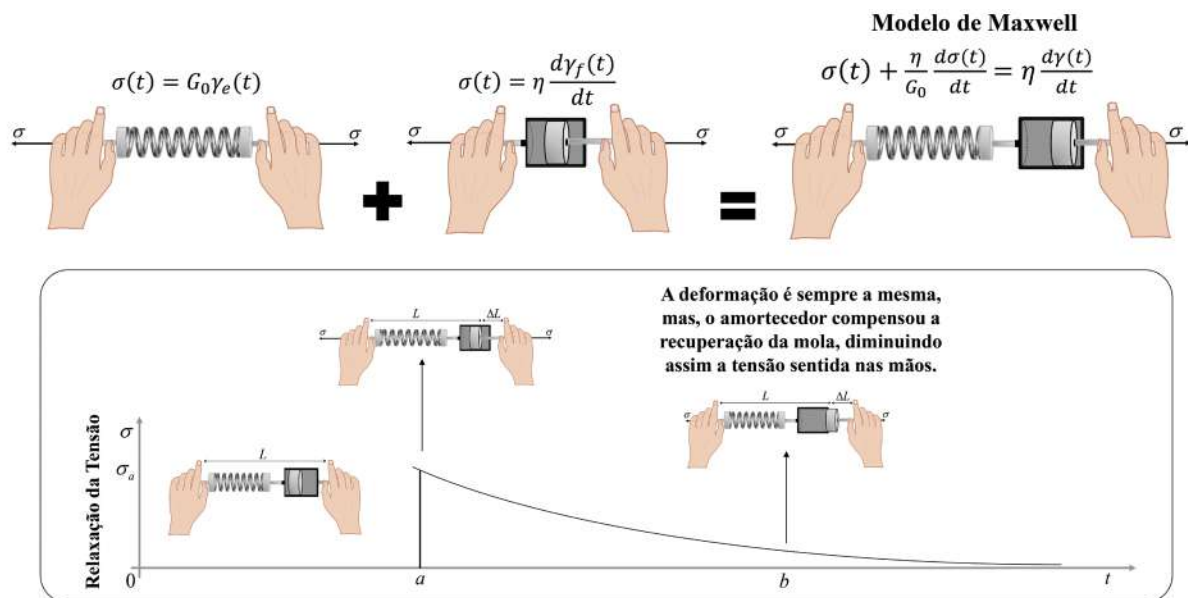


Figura 2. Na parte superior da figura encontra-se uma representação mecânica (modelo de Maxwell) de um fluido viscoelástico: uma mola (representando a componente elástica, com a tensão dada por $\sigma(t) = G_0 \gamma_e(t)$, onde a tensão é proporcional à deformação) e um amortecedor (representando a componente viscosa, com a tensão dada por $\sigma(t) = \eta \frac{d\gamma_f(t)}{dt}$, onde a tensão é proporcional à taxa de deformação) dispostos em série. O modelo de Maxwell pode ser obtido assumindo que a deformação total ($\gamma(t)$) resulta da soma das deformações elásticas ($\gamma_e(t)$) e viscosa ($\gamma_f(t)$). A parte inferior da figura ilustra um caso em que uma deformação constante ΔL é aplicada no instante $t = a$. Observa-se que, a partir desse momento, a tensão *sentida* nas mãos diminui, pois o deslocamento do êmbolo dentro do amortecedor compensa a recuperação da mola ao seu estado inicial.

da figura (parte superior), temos um amortecedor, que representa o comportamento newtoniano observado na figura 1, e que modela bem fluidos viscosos. Para fluidos newtonianos, a tensão é proporcional, não à deformação, mas sim à variação instantânea da deformação do fluido ($d\gamma_f/dt$). Isto significa que quanto mais rápido se puxar as extremidades do amortecedor, mais difícil será fazer esse movimento, ou seja, maior a tensão sentida nas mãos.

O modelo viscoelástico mais simples é então dado pela soma das duas deformações (elástica, γ_e , e do fluido, γ_f), resultando num modelo misto que combina uma mola ligada ao amortecedor, e que tem o nome de modelo de Maxwell (canto superior direito da figura 2). A parte inferior da figura 2 ilustra o caso em que uma deformação constante ΔL é aplicada no instante $t = a$. Observa-se que, a partir desse momento, a tensão *sentida* nas mãos diminui, pois o deslocamento do êmbolo dentro do amortecedor compensa a recuperação da mola ao seu estado inicial.

Estes conceitos de viscosidade e elasticidade são importantes para se perceber o comportamento de certos

fluidos. A viscosidade descreve a resistência de um fluido ao escoamento, ou seja, quanto maior a viscosidade, maior é a força necessária para gerar um determinado escoamento. Se compararmos, por exemplo, o mel com água, onde o mel tem a viscosidade mais alta dos dois, é fácil perceber que o mel não flui tão facilmente como a água. Ser viscoelástico significa que o material, em certa medida, se comporta tanto como um líquido quanto como um sólido e apresenta uma deformação dependente do tempo (existe um determinado tempo de relaxação) [3]. Por exemplo, o mel é mais elástico do que a água (que não possui elasticidade).

2.2 Solução das equações de Navier-Stokes

Para descrever matematicamente fluidos viscoelásticos, temos de resolver as equações (2.1) e (2.3), adicionando a este sistema uma variante do modelo de Maxwell apresentado na figura 2 (canto superior direito).

Porém, a resolução deste sistema de equações apresen-

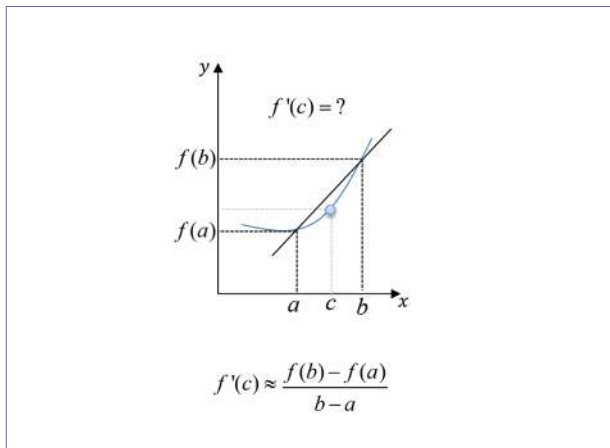
ta um desafio significativo devido à sua complexidade e ao facto de ser um sistema altamente não linear, o que torna difícil a obtenção de soluções analíticas na maioria dos casos de interesse. Consequentemente, recorre-se frequentemente à **simulação numérica** (Mecânica dos Fluidos Computacional ou *Computational Fluid Dynamics – CFD*), que permite obter soluções aproximadas através de métodos computacionais e da aproximação de derivadas. Em vez de determinarmos a solução (ou o comportamento do fluido) de forma contínua em todos os pontos do espaço e do tempo, obtemos apenas o comportamento (aproximado) em pontos discretos do domínio, dependendo do método numérico utilizado.

A ideia básica por trás da solução numérica consiste

no uso de aproximações para calcular as diferentes derivadas, como ilustrado na figura 3. Nesta figura, a derivada de uma função genérica f no ponto $x = c$, representada por $f'(c)$, pode ser aproximada por um quociente, em que o numerador contém valores discretos da função f e o denominador apresenta valores discretos de x .

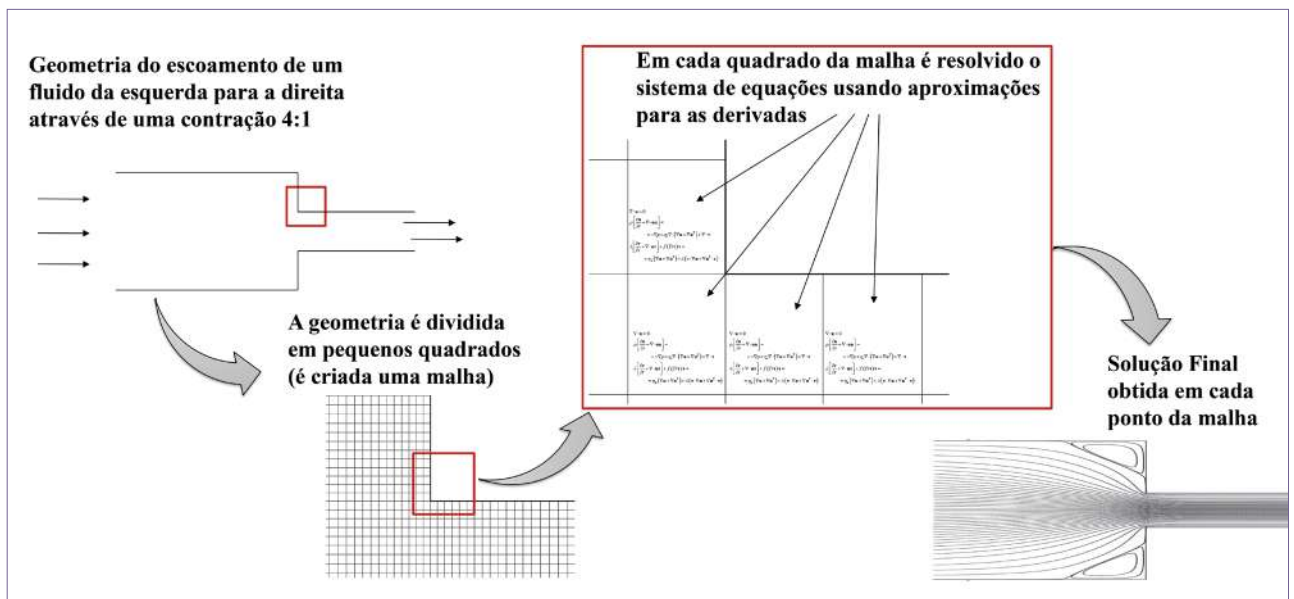
Na figura 4 é ilustrado o processo de resolução numérica para um escoamento através de uma contração 4:1 (um canal 2D onde a largura da saída é quatro vezes menor do que a da entrada). De realçar que o método numérico usado foi o Método dos Volumes Finitos [4].

A vantagem destas simulações numéricas é que permitem prever o comportamento do fluido em qualquer ponto da geometria, desde que o modelo (sistema de equa-



◀ Figura 3. Exemplo de aproximação de uma derivada.

▼ Figura 4. Esquema ilustrativo do processo de resolução das equações que governam o escoamento de fluidos viscoelásticos. Primeiro, define-se a geometria onde se pretende resolver o sistema, impondo as condições de fronteira e iniciais. O segundo passo consiste na criação de uma malha. Em seguida, procede-se à discretização das equações governativas ((2.1), (2.3) e modelo constitutivo), aproximando as derivadas por valores pontuais da variável em estudo. Esta discretização resulta num sistema algébrico de equações que, após ser resolvido, permite obter os campos de velocidade, tensão e pressão. Nesta figura, são apresentadas apenas as linhas de fluxo do fluido como solução final.



ções diferenciais) esteja bem ajustado ao fluido em estudo. O ajuste do modelo é feito através de alterações nos parâmetros que caracterizam o fluido viscoelástico, como por exemplo a densidade, a viscosidade e o tempo de relaxação (sendo esses parâmetros obtidos experimentalmente usando uma pequena amostra do fluido e aparelhos específicos para fazerem essas medições).

3. CASO DE ESTUDO

3.1 Aplicação ao processo de extrusão

O processo de extrusão (figura 5) consiste em alimentar a extrusora com grânulos de polímero, que são transportados ao longo do cilindro pela rotação de um parafuso.

As bandas de aquecimento derretem os grânulos, transformando-os em polímero fundido antes de chegarem à feira. A feira, por sua vez, confere ao produto a sua forma final (perfil) [5].

Uma das aplicações das simulações numéricas é a de prever a qualidade final de perfis de plástico (por exemplo, persianas, *deck*, cateteres, entre outros – ver figura 6), produzidos através do processo de extrusão. É importante salientar que o *deck* é um pavimento exterior frequentemente utilizado em jardins ou áreas circundantes de piscinas em habitações. A extrusão de um perfil de *deck* constitui o objeto de estudo deste trabalho.

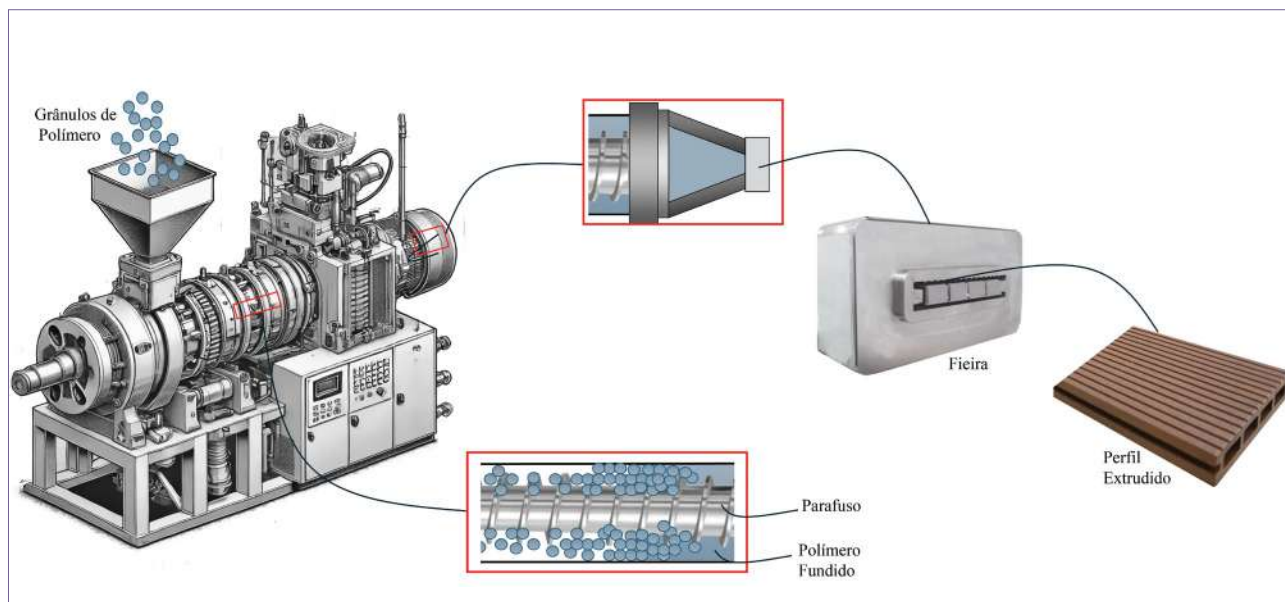


Figura 5. Esquema de funcionamento de uma extrusora.



Figura 6. Perfis termoplásticos. Da esquerda para a direita, temos o perfil de uma persiana, o perfil de um cateter (de aplicação médica) e o perfil de *deck*.

3.2 Extrusão de um perfil de *deck* – simulações numéricas

Os fluidos são preguiçosos e tentam sempre mover-se na direção que oferece menor resistência. Por exemplo, tal como ilustrado no caso do escoamento 2D da figura 7 (a), para um caudal fixo imposto na entrada do canal, uma maior quantidade de fluido segue para o canal inferior (saída **B**), pois tem mais espaço entre as paredes (o fluido encontra menos resistência nessa região).

Esta característica dos fluidos é um problema grave quando se pretende produzir um perfil com diferentes espessuras, tal como ilustrado na figura 7 (b) (lado direito). Como podemos ver, existem partes do perfil sem material (velocidades muito baixas), porque este encontrou muita resistência nessa região (ao longo da feira). Outras regiões do perfil oferecem menos resistência, logo o material passa por essas regiões com velocidade mais elevada, levando a um perfil não homogêneo e com defeitos de fabrico.

Na figura 7 (b) (lado esquerdo), podemos ver o resultado de uma simulação numérica (obtido na saída da feira), que mostra precisamente as diferentes velocidades nos diferentes locais do perfil (velocidades mais elevadas

a vermelho e velocidades mais baixas a azul).

Na prática, o que se faz é encontrar uma forma de enganar o fluido, de modo a que este não consiga descobrir quais as regiões que oferecem menor resistência, e tenha a mesma velocidade em todas as regiões do perfil, aquando da saída da feira. Na figura 8, é ilustrado esse processo para o escoamento 2D da figura 7. Como podemos ver, foi introduzido um obstáculo no canal mais largo (que oferece menos resistência) de modo a obter a mesma velocidade do fluido nas saídas **A** e **B**.

Esta técnica é usada no interior da feira (caso 3D) para se obter um perfil de velocidade homogêneo.

Na indústria, este processo é feito experimentalmente e o seu sucesso depende muito da experiência da pessoa responsável, levando a um intenso processo de tentativa e erro, até que se obtenha o perfil final com as dimensões desejáveis. Neste processo de tentativa e erro, há perda de tempo e desperdício de material, tanto de polímero como do metal utilizado na construção de novas feiras com geometrias diferentes. No caso das simulações numéricas pode haver algum tempo perdido nessas simulações, mas não há desperdício de material.

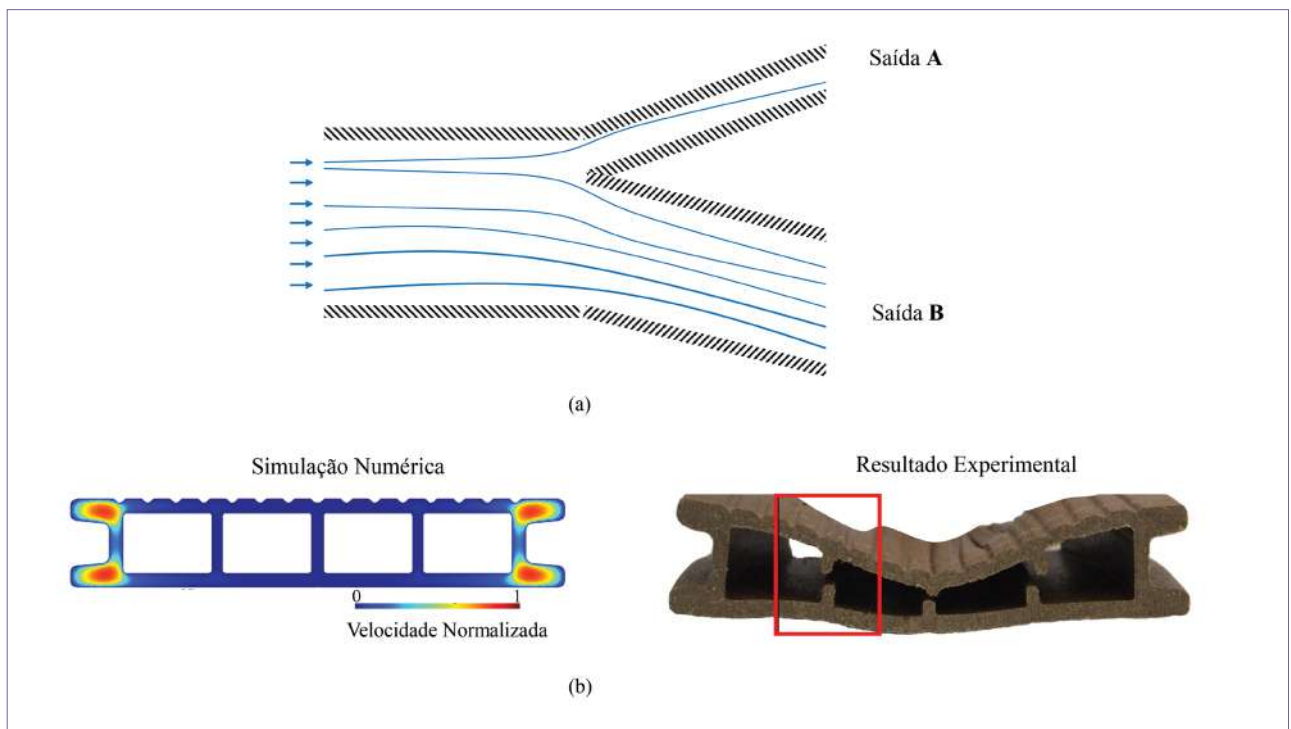


Figura 7. (a) Exemplo de um escoamento 2D onde o fluido tem tendência a deslocar-se para a saída **B** em detrimento da saída **A**, pois a saída **A** oferece mais resistência. (b) Exemplo de uma simulação numérica (resultado obtido na saída da feira) e respetivo resultado experimental.

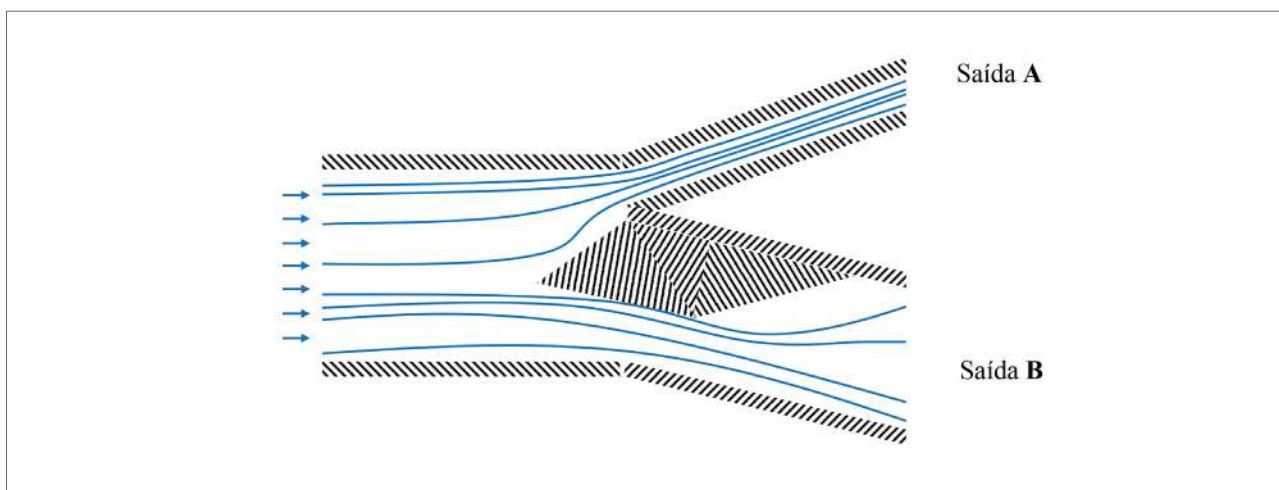


Figura 8. Introdução de um obstáculo no canal mais largo da figura 7, de modo a obter a mesma velocidade do fluido nas saídas A e B.

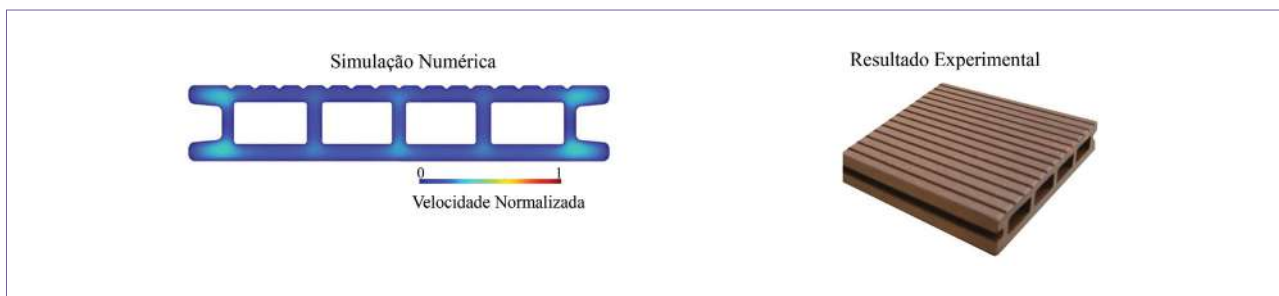


Figura 9. Exemplo de uma simulação numérica (resultado obtido na saída da feira) e respetivo resultado experimental. A distribuição de velocidades é homogênea.

O processo numérico de otimização do perfil de velocidade é conduzido de acordo com as seguintes etapas:

1. Criar uma malha para a geometria no interior da feira, considerando a presença de obstáculos nas regiões com menor resistência;
2. Realizar a simulação numérica e analisar os perfis de velocidade à saída da feira;
3. Calcular a norma da velocidade média obtida e, para cada ponto da malha no perfil de saída, determinar a diferença entre a norma da velocidade nesse ponto e a norma da velocidade média. Somar todas essas diferenças;
4. Verificar se a soma de todas as diferenças é inferior a um valor de tolerância previamente definido pelo utilizador. Se esta condição for satisfeita, o perfil obtido é considerado o perfil final. Caso contrário, retornar ao ponto 1 e ajustar as dimensões dos obstáculos.

Esta metodologia segue também um processo de tentativa e erro, mas não desperdiça material. A metodologia pode ainda ser otimizada através do uso de uma função erro, que indica o caminho a seguir na alteração das dimensões dos obstáculos, através do cálculo do gradiente dessa mesma função erro.

Na figura 9, é mostrado o caso de um perfil de deck que foi obtido através da metodologia descrita. Como podemos observar, o perfil não mostra imperfeições, tendo uma distribuição homogênea.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma metodologia numérica para a simulação do escoamento de um polímero fundido durante o processo de extrusão, utilizado na produção de perfis termoplásticos.

O sistema de equações diferenciais a resolver é composto pela equação da continuidade (conservação da massa), pela equação de balanço da quantidade de movimento e por uma equação constitutiva que relaciona tensão e deformação.

Para resolver este sistema não linear de equações diferenciais, utiliza-se o Método dos Volumes Finitos, amplamente reconhecido na simulação de escoamentos de fluidos. Este método é o preferido devido à sua capacidade de garantir a conservação da massa em cada volume de controlo, fator essencial para a precisão das simulações.

A feira, responsável por dar a forma final ao perfil extrudido, define a geometria (parte interna da feira onde passa o polímero fundido) que serve como domínio para a solução do sistema de equações diferenciais. Devido à existência de diferentes espessuras no perfil extrudido, é comum a formação de perfis defeituosos. Alterar a geometria interna da feira (mantendo o perfil de saída inalterado) permite ajustar o fluxo de material nas diferentes regiões da saída.

Por meio de simulações numéricas, é possível obter um perfil de velocidades homogéneo, utilizando uma metodologia baseada no cálculo de uma função de perda, cujo gradiente orienta as modificações necessárias na geometria.

Este processo numérico reduz significativamente o desperdício de materiais, como o metal utilizado na construção da feira e o polímero utilizado no processo de extrusão, substituindo o método experimental de tentativa e erro tradicionalmente adotado na indústria (no processo industrial convencional, cada alteração na geometria da feira pode exigir a fabricação de uma nova peça). Por outro lado, com recurso a simulações numéricas, basta ajustar o domínio da solução e modificar a malha, tornando o processo consideravelmente mais eficiente e sustentável.

Agradecimento

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT/MCTES (PIDDAC), no âmbito do projeto 2022.06672.PTDC – iMAD – Melhorias na Modelação de Difusão Anómala e Viscoelasticidade: soluções para a indústria e DOI 10.54499/2022.06672.PTDC (<https://doi.org/10.54499/2022.06672.PTDC>).

REFERÊNCIAS

- [1] Rhodes, C. J., "Solving the Plastic Problem: From Cradle to Grave, to Reincarnation". *Science Progress*, 102, 218-248, 2019.
- [2] Gonçalves, N., Teixeira, P., Ferrás, L., Afonso, A., "Innovative Approach to the Design of Profile Extrusion Dies". *Plastics Research Online*, 2015.
- [3] Morrison, F. A., *Understanding Rheology*. Oxford University Press. New York, 2001.
- [4] Moukalled, F., Mangani, L., Darwish, M., *The Finite Volume Method*. Springer International Publishing. 2016.
- [5] Lafleur, P. G., Vergnes, B. (eds.), *Polymer Extrusion*. John Wiley & Sons. 2014.

SOBRE O AUTOR

Luís Ferrás é professor auxiliar no departamento de Engenharia Mecânica (Secção de Matemática) da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. É ainda membro colaborador do Centro de Matemática da Universidade do Minho e membro integrado do Centro de Estudos de Fenómenos de Transporte da Universidade do Porto. As suas áreas de investigação são Análise Numérica (métodos numéricos para equações integro-diferenciais), Modelação Matemática (escoamentos viscoelásticos complexos e difusão anómala) e Machine Learning (equações diferenciais neuronais).

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação pt-maths-in@spm.pt



NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfc@ua.pt

HONRAS DE PANTEÃO

A recente transladação dos restos mortais de Eça de Queiroz do Cemitério de Santa Cruz do Douro, no concelho de Baião, para a Igreja de Santa Engrácia, o designado Panteão Nacional, foi motivo de debate e de alguma reflexão em torno do modo como o nosso país escolhe os seus notáveis e de que forma estes são distinguidos.

O Panteão Nacional começou por ser chamado Monumento Público Consagrado à Memória dos Grandes Homens e foi decretado a 26 de Setembro de 1836 pelo secretário de Estado dos Negócios do Reino, Passos Manuel, vindo a ser inaugurado 130 anos mais tarde, a 7 de Dezembro de 1966, com missa presidida pelo cardeal Cerejeira e na presença do Presidente da República, Américo Tomás, e do presidente do Conselho, Oliveira Salazar. Terminavam assim as famigeradas “Obras de Santa Engrácia” e ficou consagrado que “Ninguém deixará de ter disposto o ânimo para grandes empresas, sabendo que debaixo do venturoso Reinado de Vossa Magestade não ficará nunca o merecimento sem o devido galardão”, como se pode ler no decreto original.

A discussão em torno da transladação de Eça de Queiroz, com a oposição de parte dos descendentes e o firme apoio e a promoção de Afonso Reis Cabral, trineiro do escritor, presidente da fundação com o nome do trisavô e ele mesmo escritor, foi o ponto de partida para um debate mais vasto. Afinal, quem deve ter honras de panteão, e quem o decide? E, talvez ainda mais fundamental: para que serve um panteão?

Todas as nações tendem a glorificar os seus filhos dialectos, é uma forma de construir a memória comum, de enaltecer os que por esforços, méritos e talentos se distinguiram e de promover a identidade nacional.

À margem dos demais debates, resolvi debruçar-me

sobre os moradores do nosso e dos demais panteões, por mais ou menos oficiais que estes sejam. Na dita Igreja de Santa Engrácia, o Panteão oficial, temos seis cenotáfios (túmulo ou monumento fúnebre em memória de alguém cujo corpo não jaz ali sepultado): quatro navegadores/descobridores, um militar e um poeta. Há depois 13 túmulos: sete escritores, três políticos, um militar, uma fadista e um futebolista. Finalmente, está lá presente a lápide do diplomata Aristides de Sousa Mendes. Dentre os demais locais onde jazem figuras com honras de panteão e que se distribuem pelo Mosteiro dos Jerónimos, o Mosteiro de São Vicente de Fora, o Mosteiro de Santa Cruz de Coimbra e o Mosteiro de Santa Maria da Vitória, na Batalha, contam-se 15 reis e rainhas, dois patriarcas de Lisboa, dois militares, três escritores/poetas e um navegador.

Todas estas figuras se contam por entre as mais nobres e ilustres da nação, mas olhando para os seus prósperos, fica a pergunta: onde estão os cientistas da nação? Que destino lhes foi dado? Onde estão sepultados Pedro Nunes, Garcia de Orta, Francisco de Holanda ou Egas Moniz? Onde podemos render-lhes homenagem?

Em França, no Panteão de Paris, situado no 5.º *arrondissement*, em pleno Quartier Latin, além dos insuspeitos Voltaire, Rousseau, Victor Hugo, Émile Zola ou Alexandre Dumas, encontramos também os nomes de Lagrange, Carnot, Berthelot, Langevin, Gaspard Monge ou Pierre Curie, nomes ligados às várias ciências e jus-

tamente celebrados. Em Inglaterra, na Abadia de Westminster, que não sendo exactamente um panteão, acaba por desempenhar a mesma função, estão ali sepultados, além dos muitos monarcas, políticos, escritores e músicos (tais como Isabel I, Maria da Escócia, Carlos II, Churchill, Samuel Johnson, Jane Austen, Dickens ou Händel), alguns dos maiores cientistas da História (inglesa e universal), como Newton, Lord Kelvin, Rutherford, Darwin ou Stephen Hawking.

Fica então a pergunta: onde estão sepultados os nossos maiores cientistas e porque não há um único dentro do panteão? Deixo-vos o desafio, procurem-nos e, se puderem, vão lá acender uma velinha ou, melhor ainda, um bico de Bunsen. Que cada um de nós construa, na sua memória, o seu próprio panteão.

QUER SER SÓCIO DA SPM?

CONSTRUA UMA
BANDA DE MÖBIUS
COM ESTA PÁGINA

COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos. Contacte-nos!

VALOR DE QUOTAS:

Sócio Efetivo: 40 euros

Sócio Estudante: 20 euros
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais

Escolar: 80 euros

Académico: 400 euros

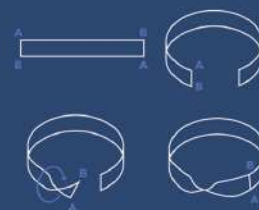
Corporativo: 600 euros

CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.



spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

INFORMAÇÕES

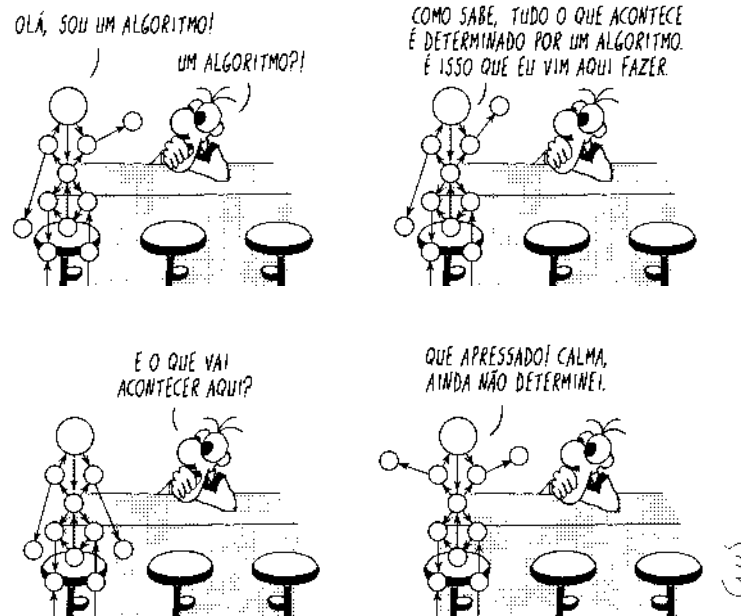
Av. da República, 45 3.º eq
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785

E-mail: spm@spm.pt

www.spm.pt





Publicado originalmente no jornal Público, em 29/12/2024. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

Paulo Saraiva Universidade de Coimbra

EDITORES:

Patrícia Beites Universidade da Beira Interior

Rui Santos Politécnico de Leiria

Sandra Bento Universidade da Beira Interior

CONSELHO EDITORIAL:

Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Carlos Farias** E. S. Campos Melo, Covilhã • **Helder Vilarinho** Universidade da Beira Interior • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Maria de Natividade** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Sílvia Barbeiro** Universidade de Coimbra • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

Turbilhão de Cores - Soluções de Produção

Rua Almirante Gago Coutinho, N^o 19, Traseiras, Gar. 19, 2620-204 Ramada

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO

Sociedade Portuguesa de Matemática

SEDE: Av. República 45, 3^o Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: <http://gazeta.spm.pt/politica>

TIRAGEM **1350 Exemplares**

ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**



UMA CONVERSA COM VOLKER MEHRMANN: A MATEMÁTICA TRAZ FELICIDADE

SÍLVIA BARBEIRO
Universidade de
Coimbra,
silvia@mat.uc.pt

ANA MENDES
Escola Superior de
Tecnologia e Gestão
do Politécnico de
Leiria
aimendes@ipleiria.pt

MARTIN RAUSSEN
Universidade de
Aalborg
raussen@math.aau.dk



Volker Mehrmann é um matemático completo e surpreende em todas as vertentes: investigação, ensino, transferência de conhecimento e cargos administrativos. Especialista nas áreas de álgebra linear numérica, equações diferenciais algébricas e teoria do controlo, gosta de fazer investigação motivada por problemas reais e desenvolver matemática fundamental impactante na ciência e na tecnologia. Com uma personalidade marcante, Mehrmann deixa um legado notável como presidente da GAMM (Associação Internacional de Matemática Aplicada e Mecânica), da MATHEON (Centro de Investigação Matemática para tecnologias-chave), do ECMath

(Centro Einstein de Matemática, em Berlim) e ainda da EMS (Sociedade Europeia de Matemática). Preocupa-se com a forma como comunica matemática e com o ambiente de trabalho dos seus estudantes.

Conversámos com Volker Mehrmann no passado mês de outubro e ouvimos avidamente as respostas a todas as perguntas que lhe colocámos. No final, descobrimos o seu segredo: a matemática traz felicidade.

Este artigo foi preparado em duas versões para publicação na *Gazeta de Matemática* (versão reduzida, em língua portuguesa) e na *EMS Magazine* (versão integral, em língua inglesa).

ENSINO SECUNDÁRIO E UNIVERSIDADE DE BIELEFELD

Caro professor Mehrmann, caro Volker: O que, ou quem, estimulou em primeiro lugar o seu interesse pela matemática?

Bem, isso aconteceu no Ensino Secundário. Eu estava numa escola especial para alunos de Matemática, Física e áreas STEM¹. Gostava muito e era bom nisso. Por isso, decidi que queria ser professor de Matemática. E sou.

Pode contar-nos um pouco mais sobre as suas experiências escolares nessa altura?

Isso foi nos anos 60 e 70, quando o sistema escolar alemão ainda era bastante rígido. As escolas estavam separadas em três níveis. O *Gymnasium* ou Ensino Secundário destinava-se aos melhores alunos. Depois havia a escola média e a escola básica. A educação no *Gymnasium* durava 13 anos, na escola média dez e na outra durava oito ou nove anos. Fui enviado para o *Gymnasium* por recomendação dos meus professores, porque eu já era bom a Matemática no Ensino Básico. Os meus pais, que eram operários, concordaram, embora se preocupassem com o facto de não conseguirem ajudar-me. Não foi fácil: tinha de ir para outra cidade e apanhar o autocarro todas as manhãs. Mas gostei, era bom na escola e, por isso, era bastante claro que queria continuar.

A Alemanha estava dividida entre Ocidental e Oriental nessa época. O que significava isso para si?

Eu vivia na Alemanha Ocidental, onde, à época, as escolas começavam a tornar-se um pouco mais individualizadas. Não era assim quando entrei no *Gymnasium*, mas mais tarde debatia-se muito e a política começou a ser importante. No entanto, como eu estava numa escola com ênfase em Matemática e Física, a política não desempenhava um papel significativo. Tínhamos mais aulas de Matemática do que outras escolas secundárias, seis horas por semana, e eu gostava disso. Pelo que sei, o sistema da Alemanha Oriental era mais semelhante ao russo, que exigia muita persistência.

Pode falar-nos sobre as suas experiências quando começou os estudos na universidade?

Bem, começou com uma experiência muito má. Quando entrei na universidade, tinha apenas 17 anos. Era muito jovem, o que era incomum naquela época. Após o primeiro semestre, fui convocado para o Exército e, por isso, tive de deixar os estudos durante os 15 meses de serviço militar. Quando regresssei, fui diretamente para o terceiro semestre, como se não tivesse estado ausente. Isso não foi bom, porque perdi muita matéria importante, que tive de recuperar. Estudei na Universidade de Bielefeld,

¹ STEM: Science, Technology, Engineering and Mathematics.



Volker Mehrmann com Angelika Bunse-Gerstner, em Bielefeld, em 1991.

que foi criada como uma universidade reformista, uma das novas universidades fundadas na Alemanha sob os governos sociais-democratas. Eram baseadas em ideias fantásticas. Bielefeld tinha um forte enfoque interdisciplinar, com centros de investigação interdisciplinares. Mas o Departamento de Matemática na altura era, em 90%, muito teórico. Os 10% restantes eram incentivados a trabalhar com economistas, químicos, etc. Gostei dessa abordagem e, por isso, acabei por me dedicar à matemática aplicada. O curso de Matemática estava dividido em dois programas diferentes, um para formação de professores e outro chamado *Diplom*, para estudantes que queriam trabalhar com matemática fora das escolas. O primeiro incluía Didática, Filosofia, e assim por diante. Eu estava inscrito nesse programa porque queria ser professor. Mas antes disso, queria trabalhar como tutor universitário, e para tal era necessário passar num exame intermédio, o *Vordiplom*, algo semelhante a uma licenciatura nos dias de hoje. Foi por isso que fiz este exame após o meu terceiro semestre. Depois surgiu uma oportunidade: um novo professor, especialista em combinatória e teoria dos grafos,

chegou à universidade. Como tutor, integrei o curso dele, embora nunca o tivesse frequentado antes. Ele perguntou-me se estaria interessado em escrever uma tese em teoria dos grafos, mas eu já estava decidido a trabalhar em análise numérica, pois gostava muito dessa área e também de programação.

ESTUDOS AVANÇADOS NOS ESTADOS UNIDOS

Comecei a trabalhar com o professor Ludwig Elsner, na área de análise numérica. Mas quando lhe disse que queria fazer o exame para professores e escrever uma tese nesse programa, ele teve dificuldades em imaginar uma tese de professores em numérica e sugeriu que eu escrevesse uma tese de diploma em vez disso. Ele disse-me que poderíamos certamente fazer com que a tese fosse reconhecida como uma tese de professores mais tarde.

Para trabalhar como professor numa escola secundária, era necessário um passo adicional, em que se aprendia como ensinar Matemática aos alunos. Quando me

candidatei, enviaram-me para um local muito remoto, para onde não quis ir. Sendo aventureiro, perguntei ao professor Elsner se poderia continuar os estudos noutra país. Ele disse: “Isso é muito fácil: pegas na página inicial da revista *Linear Algebra and Its Applications* e olhas para todos os nomes que estão lá. Escreves uma carta a cada um deles perguntando se poderias ir estudar fora.” E foi exatamente o que fiz. Enviei cartas manuscritas.

Quem foi o primeiro a aceitá-lo?

Recebi três respostas positivas: uma de Stanford, do Gene Golub; uma de Calgary, do Peter Lancaster; e outra do Richard Varga, da Kent State University. Como a resposta do Richard Varga foi a primeira a chegar, e estava escrita em alemão, optei por ir para Kent State, uma pequena universidade no Midwest. Stanford talvez tivesse sido uma escolha mais vantajosa para a minha carreira. Quem sabe? Gostei muito da experiência em Kent State.

Teve de pagar propinas?

Não, ofereceram-me imediatamente uma posição como assistente de ensino, porque já tinha um diploma. Além disso, não precisei de fazer os exames de qualificação habituais e pude começar imediatamente a trabalhar numa tese. Mas depois tive uma experiência muito má: já tinha um tema para a tese de doutoramento, na área de teoria das perturbações para famílias de matrizes paramétricas, e comecei a trabalhar nesse campo.

Esse tema foi sugerido pelo seu orientador em Kent State?

Não, veio, na verdade, do meu orientador de mestrado alemão, que o tinha sugerido como um problema importante em aberto, e eu estava bem preparado para trabalhar nele. Quando cheguei a Kent State, Richard Varga disse-me que não daria aulas naquele semestre. Fui o seu único estudante e fiz um seminário individual de duas horas por semana com ele. Todas as semanas, ele dava-me um artigo para ler, e na semana seguinte eu tinha de o apresentar. Na terceira semana, ele deu-me um artigo de Peter Stuart, de Maryland, onde já tinha sido resolvido o problema que deveria ser o tema da minha tese!

Richard Varga deu-me então um tema diferente, que era trabalhar em matrizes não negativas, um problema importante proposto por Olga Taussky, a famosa algebrista. O objetivo era unificar três tipos diferentes de não negatividade em matrizes: a não negatividade de todos os elementos, a não negatividade para formas quadráticas (não negatividade de Loewner) e a não negatividade total, que significa que todos os subdeterminantes são não negati-

vos. Olga Taussky tinha conjecturado que deveria haver uma forma uniforme de tratar todas estas situações. Trabalhei nesta conjectura, provando-a para matrizes de dimensão $n = 5$. Depois, tentei encontrar um contraexemplo usando o computador, mas não consegui. Como frequentemente acontece em matemática, em vez disso, acabei por provar outros resultados. Acho que foi só em 1999 que a conjectura foi provada como falsa, através de um contraexemplo para matrizes 22 por 22. A questão ainda permanece em aberto, para as dimensões entre 5 e 22.

Quem encontrou este contraexemplo?

Foi Olga Holtz, em Berkeley. Ela teve a ideia engenhosa de investigar uma classe especial de matrizes, as matrizes de Toeplitz com bandas, de forma a que não tivesse de lidar com tantos parâmetros. Eu tinha trabalhado na classe geral de matrizes $n \times n$, com n^2 parâmetros e $n!$ desigualdades com determinantes!

DIREÇÕES NA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Pode contar-nos um pouco mais sobre a sua investigação, seja como iniciante ou mais recentemente? Há resultados de que se orgulhe particularmente?

Há um ditado que diz que “o criminoso volta sempre ao local do crime”. No meu caso, isto aplica-se ao tema da minha tese de mestrado. Na minha tese, desenvolvi um algoritmo para cálculo de valores próprios sobre o grupo simplético, o grupo unitário e o grupo ortogonal com respeito a produtos internos indefinidos. Provei que o único caso em que os cálculos numéricos funcionavam bem era para o grupo unitário. Nos outros casos, havia divergência e mau condicionamento. Cerca de quatro anos depois, após o meu doutoramento, estava pela segunda vez nos EUA e ouvi uma palestra de Ralph Byers, que estava a usar o grupo simplético em controlo ótimo. Pensei: “Eis uma aplicação para o meu algoritmo inútil!” E foi assim que comecei a trabalhar em teoria de controlo, e desde então tenho trabalhado nisso, além dos tópicos numéricos clássicos que já conhecia. É muito divertido, porque significa colaborar com engenheiros. Aprende-se muito ao cooperar com engenheiros de controlo, pois eles trabalham com problemas da vida real. Em cada automóvel, avião e bicicleta, existem questões para as quais a teoria de controlo é essencial. Ao longo dos anos, tenho trabalhado em teoria de controlo, teoria de matrizes e também em computação de alto desempenho. Estas foram as principais direções.

Em 2011, recebi um financiamento do ERC (Conselho

Europeu de Investigação) para modelar sistemas acoplados provenientes de diferentes domínios físicos. No início, foi um fracasso completo. Não conseguia avançar. Mas então ouvi uma palestra do teórico de controlo Arjan van der Schaft, dos Países Baixos. Ele propôs uma abordagem baseada em energia, mais próxima da física. Desde 2015, tenho-me dedicado a sistemas port-hamiltonianos, à modelação, à análise numérica e à álgebra linear, e é realmente mágico. Quando me fazem uma pergunta, eu interpreto-a na estrutura port-hamiltoniana. Existe uma matemática muito elegante por trás disso, geometria e, claro, física. Seja qual for o problema, parece funcionar muito melhor com esta abordagem do que sem ela. Um físico certamente diria: *Ah, sempre soubemos disso!* Mas os engenheiros não sabiam!

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ALGÉBRICAS

Pode explicar-nos o que são equações diferenciais algébricas (EDA)? Estas são o ingrediente-chave do seu trabalho mais citado, em coautoria com Peter Kunkel...

Uma equação diferencial algébrica é, na essência, uma equação diferencial num espaço com restrições, ou seja, numa variedade. Há um fluxo associado a uma equação diferencial, mas ele é condicionado por restrições. Um exemplo típico seria um satélite em órbita, ou um robô que possui restrições devido aos motores nas juntas. Este tipo de abordagem surgiu nos anos 70 como uma nova forma de investigação. No entanto, se recuarmos na História, foi iniciado por Kirchhoff em 1870 na Academia de Ciências de Berlim, quando ele apresentou as equações para descrever a eletricidade. Kronecker e Weierstrass continuaram este trabalho, estabelecendo a teoria para o caso linear no final do século XIX. Mas essa abordagem saiu completamente de moda.

Os matemáticos têm uma grande tendência para abandonar algo que já dominam para se dedicarem a novas áreas e abordagens. A teoria das EDO (equações diferenciais ordinárias) e dos sistemas dinâmicos estava bem desenvolvida. Por isso, o método das EDA foi esquecido, até regressar nos anos 70, quando a simulação de circuitos tornou necessário lidar automaticamente com milhões de equações. Ninguém podia resolver as equações algébricas e colocá-las no enquadramento das EDO. William Gear e Linda Petzold, dos EUA, que eram, na verdade, cientistas da computação, começaram a investigar essa direção. O campo cresceu rapidamente, mas surgiram várias dificul-

dades ao lidar com restrições. Por exemplo, num sistema mecânico com posição limitada a uma superfície, como um comboio numa linha, a posição está restrita, mas a velocidade também não pode sair da linha. Isso significa que a velocidade também está condicionada, embora isso não esteja explicitamente escrito. Estas chamadas restrições ocultas deixam os métodos numéricos confusos. Na maioria dos sistemas realistas, há muitas restrições ocultas.

O meu trabalho com Peter Kunkel começou enquanto eu trabalhava no IBM Research Center, em Heidelberg. O meu chefe trouxe-me um problema de um cliente. Era, na verdade, um problema de controlo ótimo. Eu implementei-o e obtive uma solução maravilhosa. Fui almoçar com o Peter, que trabalhava no mesmo escritório. Ele rapidamente disse: “Eu também tenho um código.” Ele implementou-o, executou-o e obteve outra solução maravilhosa. Mas eram completamente diferentes!

O que aconteceu então?

Uma delas crescia exponencialmente, enquanto a outra decaía; não era um bom resultado! Mas, como matemático, sabe-se imediatamente que a solução provavelmente não é única. E assim começámos a analisar, o que deu início à nossa colaboração. Na verdade, é uma colaboração maravilhosa. Concluímos a segunda edição do nosso livro, que acabou de ser publicada pela EMS Press.

Este é o método mais natural de modelar. Se quiser acoplar sistemas, escreve o acoplamento como uma restrição algébrica, diferencial ou de outra natureza, e depois junta mais restrições. Este foi o tópico: dominar este acoplamento com EDA. Mas as dificuldades são imensas, e ainda hoje não existem códigos disponíveis muito bons.

Os códigos são o maior obstáculo, mais do que a velocidade dos computadores?

O problema é que é necessário diferenciar. Numericamente, a diferenciação é má. A integração é boa, mas a diferenciação não. Há mais variações a considerar. Se alterar ligeiramente a direção, a derivada sai completamente diferente; como se tem de diferenciar implicitamente, os códigos apresentam problemas.

Aqui vai uma história interessante: Nos anos 70, a Alemanha desenvolveu os comboios ICE, ou comboios de alta velocidade, e França fez o mesmo na mesma época. Na Alemanha, a modelação foi feita com EDO, enquanto em França foi feita com EDA. Os comboios alemães, numericamente, “voariam” porque as restrições não estavam presentes. Pelo menos numericamente, os comboios

alemães saíam dos carris. É por isso que os ICE alemães eram muito mais pesados do que os TGV franceses, pelo menos nos primeiros anos.

TU² CHEMNITZ

Curioso... Trabalhou em vários lugares diferentes. Nos EUA, além da Kent State, também esteve em Madison. Na Alemanha, trabalhou em Aachen, em Chemnitz e, finalmente, em Berlim durante muitos anos. Tenho um interesse pessoal em Chemnitz, porque está situada na antiga RDA (República Democrática Alemã), que tinha um sistema universitário muito diferente.

Quando entrei no mercado de trabalho após a minha agregação, era extremamente difícil conseguir uma posição. Na Alemanha, quase não abriam vagas para professores. Por isso, aceitei um cargo temporário de dois anos em Aachen e trabalhei um ano na IBM em Heidelberg. Mas, então, o muro caiu. Eu ainda estava em Aachen e recebi um convite do grupo em Chemnitz. Em Chemnitz havia grandes conflitos no departamento, entre numérica e análise. Muitos dos especialistas em análise numérica eram alinhados com o partido e tinham posições importantes, como reitor, chefe do Comité Disciplinar, e assim por diante. Esses eram os membros do partido, enquanto os analistas não eram. Após a reunificação, o estado da Saxónia, onde Chemnitz está localizada, essencialmente demitiu-os todos. Mas abriram novas posições, e as pessoas puderam recandidatar-se. As pessoas responsáveis queriam garantir que o conflito entre análise e numérica não surgiria novamente. A pergunta mais importante na minha entrevista foi: “Consegue imaginar-se a trabalhar com os teóricos de operadores e analistas, construindo uma ponte entre os dois campos?” Era exatamente isso que eu já fazia! Tive sorte porque era mesmo isso que queriam.

Mudei-me para lá no início de 1993, logo após o término do processo de recontração. Diria que foi um dos melhores lugares onde já trabalhei. Os estudantes eram fantásticos porque Chemnitz era um dos polos de estudantes talentosos. Na RDA, havia escolas para estudantes dotados em desporto, matemática, música e outras áreas. Quem conseguisse entrar numa dessas escolas podia ir para a universidade no 11.º ano. Um exemplo maravilhoso é o Heinrich Hertz *Gymnasium*, em Berlim, que teve alunos como Peter Scholze e Yuri Tschinkel, agora na Simons Foundation, entre outros. Assim, os estudantes da escola secundária em Chemnitz chegavam à universidade muito

jovens. E eram fantásticos. Havia poucos estudantes, cerca de 30 no primeiro semestre. Mas metade deles tinham potencial para se tornarem professores universitários! É preciso dizer que esse sistema ainda existia em 1993. Mas depois a Saxónia teve um governo conservador, e eles eliminaram tudo o que tivesse alguma ligação com o socialismo. As escolas de elite não tinham qualquer traço de socialismo, mas estavam relacionadas com o sistema antigo. As escolas ainda existem, mas, pelo menos na Saxónia, já não é possível que estudantes talentosos entrem na universidade tão jovens. Em Berlim, isso ainda é possível. Os alunos talentosos podem frequentar disciplinas universitárias no primeiro ano enquanto ainda estão no Ensino Secundário.

Mudou-se para Chemnitz com a sua família?

Sim, mudei-me com a minha companheira na altura, e tivemos um bebé logo depois de eu chegar. Mas ela não suportou. Também era da área de matemática, em teoria dos grafos. Não era um lugar bom para ela; Chemnitz era uma cidade terrível. Quando deixei Chemnitz, em 2000, perguntaram-me: “Porquê? Fez uma grande carreira aqui!” E eu respondi: “Olhem, há outras partes da vida além da matemática, e se não se consegue fazer amigos...” Chemnitz era um lugar muito especial porque era a cidade-modelo da RDA. Mudaram o seu nome para Karl-Marx-Stadt. O partido e os Serviços Secretos dominavam tudo. Portanto, os professores não tinham muito contacto social uns com os outros.

Com receio de haver informadores?

Sim. E havia. Mas não após 1993. Porque os informadores foram despedidos, e assim que encontravam algo nos registos que mostrava que alguém tinha sido informador, essa pessoa não era readmitida. Isso foi muito diferente noutros estados.

TU BERLIN E O MATHEON

Berlim foi uma história completamente diferente, acredito.

Totalmente o oposto. Aberta, internacional... Chemnitz não era nada internacional. Falar inglês era uma exceção. Trazer estudantes estrangeiros ou pós-doutorados não era fácil. Berlim era exatamente o oposto. Confesso que estava receoso, porque Berlim é uma cidade de outra

² Technische Universität

escala, e eu já tinha 45 anos quando me mudei, em 2000. No entanto, as pessoas em Berlim são tão abertas que fui imediatamente bem recebido.

E então surgiu o MATHEON.

Sim, foi engraçado. Em 1999, fui eleito presidente do Comité de Matemática da Fundação Alemã de Ciência (o painel que decide sobre projetos) como representante da parte oriental, porque estava em Chemnitz. Logo após ter chegado a Berlim, a administração ligou-me e disse que havia uma proposta em curso para novos centros de investigação. E seria ótimo se houvesse um na área de matemática. Era claro que não queriam matemática pura, mas algo mais diretamente relevante para a sociedade.

Depois de apenas quatro semanas neste novo local, esse foi um bom desafio para começar. Reuni algumas pessoas: Peter Deuflhard, Jürgen Sprekels e Martin Grötschel. Tivemos seis semanas para escrever uma pequena proposta. Encontrámo-nos no meu escritório e, após cerca de 20 minutos, tornei-me o datilógrafo porque as ideias simplesmente saltavam daquelas pessoas. Na primeira fase, não conseguimos. O financiamento foi para medici-

na, física e ciências oceânicas. Mas abriram imediatamente uma segunda fase, e em 2002 conseguimos. Devo ter sido um bom datilógrafo, porque Martin Grötschel pediu-me para ser o vice-presidente.

Durante seis anos, Martin foi o presidente, e depois eu assumi a posição. Gostava de ser o vice de Martin, porque ele é um político fantástico. Sabia apresentar a matemática ao público muito melhor do que eu poderia fazer. Mas, quando ele disse que deveríamos trocar, tornei-me o presidente. O passo seguinte foi o Einstein Center, que durou cinco anos. Isso continuou com a iniciativa de excelência. Mas depois disso, decidi afastar-me.

Agora chama-se Math+.

É um programa novo, e eles querem sempre um novo nome. Tanto o MATHEON como o Einstein Center for Mathematics e o Math+ são esforços conjuntos das três universidades de Berlim, bem como de dois centros de investigação. O nosso maior sucesso foi conseguir reunir toda a comunidade matemática de Berlim. O que, visto de fora, parece ótimo! Mas posso dizer-lhe que causou muitas fricções entre as diferentes administrações universitárias.



MATHEON recebeu o prémio Alemanha - Terra das Ideias, 2007.

ENSINO DE MATEMÁTICA

Falemos sobre a sua carreira de ensino. Já nos contou que se formou como professor de Ensino Secundário, mas depois tornou-se professor universitário. Sei que lecionou álgebra linear para alunos do primeiro ano várias vezes e que até escreveu um livro sobre álgebra linear, baseado na sua filosofia. Mas também orientou muitos estudantes de doutoramento.

Desde o início, sempre tive a ambição de tornar a matemática compreensível, não apenas para os três ou quatro génios, mas também para os matemáticos médios e bons. Isso significa que é necessário pensar de forma um pouco diferente: como é que a matemática entra no cérebro humano? Como professor de Ensino Secundário, é claro que tem de se ensinar todos os alunos. Mas quando cheguei à universidade, percebi que muitos professores só tinham em mente os três ou quatro génios. Eles ensinavam álgebra linear de uma forma muito abstrata, abordando imediatamente módulos, corpos finitos e coisas do género. Isso demorou muito tempo a fazer sentido para mim.

E está a ficar pior, porque a educação no Ensino Secundário tem vindo a deteriorar-se desde então. Em particular, a álgebra linear abstrata tem problemas. Com a análise, é um pouco mais fácil, porque funções, derivadas e coisas semelhantes são mais intuitivas. Mas o conceito abstrato de um grupo ou de uma álgebra é difícil de visualizar. Eu mesmo tive dificuldades em formar uma imagem mental.

Acho muito importante, neste processo de aprendizagem, que se consiga formar uma imagem do conceito abstrato de que se está a falar, antes de aprender sobre ele. Pode-se aprender a operar com o conceito, mas será que ele realmente “se fixa” na mente? Para o estudante médio do Ensino Secundário que chega à universidade atualmente, álgebra linear é um pesadelo. Por isso, refleti sobre o que faria com um estudante do Ensino Secundário, e é essa abordagem que o meu livro de álgebra linear adota.

Começamos com matrizes, em vez de espaços vetoriais e homomorfismos entre eles. Isso tudo aparece mais tarde, mas só depois de o conceito de transformação linear como uma matriz multiplicando um vetor já estar solidificado. E o *feedback* tem sido muito encorajador. Recentemente, publicámos a quarta edição do livro, e a versão em inglês tem 4,5 milhões de *downloads*. O livro de álgebra linear mais próximo em popularidade está na casa dos cem mil *downloads*. Acho que este é um passo muito importante. Sei que muitos colegas não gostam disso. Dizem que é demasiado concreto trabalhar com matrizes e ser forçado

a usar coordenadas. Mas acredito que, para muitos, isso facilita o entendimento antes de abordar a teoria abstrata. Para os estudantes muito bons, não faz diferença. Tento sempre apresentar uma aplicação concreta ao lado, para que os alunos possam imaginar o que significa ter um método que funcione. Por outro lado, gosto muito das coisas abstratas, então também as ensino. Mas, do ponto de vista da comunicação matemática, acho útil começar com algo mais concreto.

Soube que foi “reciclado” recentemente e que está a ensinar novamente.

Sim. Reformei-me há um ano, mas atualmente temos uma carência de professores de análise numérica. Então, pediram-me para voltar, e eu voluntariei-me. Estou a gostar.

Apenas queremos acrescentar que, mesmo para um génio, ter bons exemplos em mente é uma vantagem. Não ensinou apenas caloiros, mas também muitos estudantes de doutoramento. A *math genealogy* contabiliza 34. Qual é a sua filosofia para os orientar?

Na verdade, são 40 estudantes de doutoramento. No sistema alemão, só se pode ser orientador se se for professor. Eu orientei vários estudantes, mas o professor formal tinha de assinar.

Sempre achei muito importante que os estudantes de doutoramento tenham alguém com quem possam falar o tempo todo, para que não acabem num buraco negro sem fazer progresso. Além disso, sempre os incentivei a falar com outros estudantes de doutoramento ou pós-doutorandos. Como estudante, seja de mestrado ou de doutoramento, deve ter-se curiosidade para aprender coisas novas, fazer conexões e explorar mais. Não se deve focar apenas numa única direção. Tento ensinar isso aos meus alunos: serem curiosos e discutirem com outros estudantes e grupos. Para tal, procuro proporcionar um bom ambiente de trabalho, organizando festas, caminhadas e outros eventos, passando algum tempo juntos. Isso ajuda muito! Especialmente quando estão numa crise, o que acontece a todos nós de vez em quando, quando não fazemos progresso no trabalho. E isso tem funcionado muito bem. Todos falam uns com os outros, escrevem artigos juntos, e eu apoio isso plenamente. Portanto, é basicamente a mesma filosofia: trabalhar em equipa, mostrar curiosidade pela ciência e pela matemática e, se necessário, aprender novas direções. E o meu compromisso é estar sempre disponível para eles.

Ainda tenho quatro estudantes de doutoramento

atualmente, e são muito diferentes uns dos outros. É uma vantagem estar numa área mais aplicada, porque é geralmente mais fácil conseguir financiamento para um estudante de doutoramento.

Mas, nesses tópicos aplicados, também desenvolve matemática fundamental?

Sim, a tese inclui sempre matemática fundamental. A minha experiência é que, se obtivermos um problema de aplicações realmente interessante, a matemática necessária para o resolver geralmente não está bem desenvolvida.

Pode dar-nos um exemplo de como problemas aplicados levam ao desenvolvimento de matemática fundamental?

Claro! Em 2004, um engenheiro responsável pelo traçado das linhas de alta velocidade entre Frankfurt e Colónia abordou-me com um problema. Eles queriam que os comboios viajassem a 350 km/h, mas não tinham a certeza de que isso fosse possível. As vibrações dos trilhos poderiam causar descarrilamentos e outros problemas graves. Eles realizaram várias simulações e cálculos, mas não conseguiam obter resultados precisos que concordassem com as experiências. Como engenheiros, isso deixou-os muito nervosos! Então, trouxeram-me o problema.

Eu disse: “Os valores próprios são λ e λ barra. Deve haver alguma simplicidade envolvida.” Investigámos o caso e ficou claro que essa era a questão essencial. E então pensei: “Deve haver uma generalização da simplicidade.” Estes eram problemas de valores próprios polinomiais, então procurei uma generalização da simplicidade para polinómios matriciais. Escrevemos alguns artigos sobre isso, e o interesse pela área explodiu. Agora há muitos artigos sobre o tema, especialmente em Espanha e Itália. O problema surgiu num desafio inteiramente aplicado e acabou no desenvolvimento em matemática pura. Hoje a questão é estudada em campos finitos e noutras áreas.

PRESIDÊNCIA DA EMS E COMUNICAÇÃO EM MATEMÁTICA

Podemos dedicar alguns minutos à sua presidência da EMS? Sabemos que foi um período difícil por duas razões: a pandemia de COVID-19, que impossibilitou reuniões presenciais, e, no final do seu mandato, a invasão da Ucrânia pela Rússia. Isso deve ter desviado a atenção do foco principal. Certamente tinha uma agenda. O seu primeiro ponto en-

volvía a unidade da matemática. Acredito muito na unidade da matemática. Mas também acredito que alguns dos nossos colegas não partilham dessa visão e não gostam dela. Porque pensam que é muito mais confortável permanecer na sua própria comunidade de 20 ou 30 investigadores que se entendem mutuamente. Comunicar sobre matemática não é, geralmente, o ponto forte deles. E, muitas vezes, sentem-se ameaçados por isso. De repente, têm de falar com engenheiros ou físicos. Este foi um dos meus principais objetivos: tentar manter a unidade o mais intacta possível! Mas também fazer um esforço para comunicarmos melhor uns com os outros. Acho que tive algum sucesso, mas apenas parcialmente.

Já nos deu muitos exemplos da importância de que os canais entre a matemática motivada por aplicações e a matemática motivada pela curiosidade funcionem. Existem problemas que vêm das aplicações e, para os resolver, é necessário usar ferramentas do conjunto que já existe. Por outro lado, também deu exemplos que mostram que a matemática pura surge assim que se é curioso o suficiente para levar a sério problemas de áreas aplicadas. Na História, muita da matemática surgiu de considerações físicas.

Acho que precisamos de uma melhor comunicação, e não acho que tenhamos matemáticos suficientes no mundo que possam ser tradutores. Pegue num resultado abstrato em geometria algébrica, ou nos *perfectoids* de Peter Scholze, ou na Conjetura ABC, que Mochizuki afirma ter provado. Não creio que existam muitas pessoas capazes de traduzir o que está ali para algo que possa ser usado por engenheiros ou físicos. A força da matemática está na abstração. E torna-se cada vez mais abstrata. O problema surge quando se fica apenas nesse nível e não se faz a tradução do que nos levou até ao nível abstrato. É isso que está em falta, e é uma pena. Gostaria que a comunidade o percebesse e deixasse de ser arrogante quando alguém não entende o que estamos a dizer, porque não estudou geometria algébrica durante 15 anos. Esforce-se e tente explicar!

Falemos agora sobre o Congresso Europeu de Matemática que teve lugar em Berlim há oito anos. Foi o seu principal organizador e a experiência que teve provavelmente foi mais ou menos a mesma. Pelo menos, algumas palestras não foram compreensíveis para uma audiência alargada. Tem ideias para mudar esta atitude?

Não sei realmente como convencer algumas das pessoas que são estrelas do topo a saírem da sua torre de marfim e a tentarem explicar, pelo menos, a ideia por trás do que

estão a fazer. Tentámos isso nessa reunião, enviámos a todos um memorando explicando o que gostaríamos que fizessem. Mas...

Não teve muito sucesso...

Deixe-me contar uma história. O meu filho é topólogo algébrico. Muito abstrato: categorias e homologia. Ele candidatou-se a uma bolsa de doutoramento do estado de Baden-Württemberg. Perguntou-me: "Podes dar uma olhada na minha proposta?" Respondi: "Claro, mas tens de aceitar as minhas críticas." E então tive de lhe dizer: "Olha, li esta proposta de três páginas. Várias vezes senti-me ofendido porque escreveste: "É óbvio que, se fizeres isto e aquilo, então é claro que blá-blá-blá." Pensa bem. Queres vender a tua proposta a um comité que quer dar-te dinheiro. Um comité de todas as áreas: matemática, física, sociologia, filosofia, com no máximo um matemático. Se esse matemático for mais aplicado ou um estatístico e não entender uma única palavra, então estás perdido

desde o início. Porque não tentas, em pelo menos uma das três páginas, explicar a tua linha geral de pensamento? Ninguém te culpará depois por entrares em detalhes nas páginas restantes."

Costumava haver uma regra não escrita para palestras: a primeira parte é para todos, a segunda parte para as pessoas experientes e a última parte para ti mesmo. Isso já não acontece. Muitos palestrantes parecem esperar que saibas tudo de antemão.

Mas temos de dizer que o seu legado como presidente da EMS foi excelente! Um de nós participou no congresso da EMS este ano e encontrou muitas pessoas da matemática aplicada. Envolver muitas pessoas, incluindo matemáticos aplicados, na EMS é uma grande conquista.

É verdade, mas fui a todas as palestras convidadas e plenárias que pude assistir. E ainda diria que cerca de 30% ou 40% dos palestrantes deram palestras sem fazer qualquer esforço para que a audiência os compreendesse.



MATHEON recebeu o prémio Alemanha - Terra das Ideias, 2007

E isto falando para matemáticos! Não consigo entender. Se fizerem isso, afastam qualquer pessoa que esteja fora do seu círculo mais restrito... Étienne Ghys deu uma palestra maravilhosa na conferência de Sevilha, um exemplo magistral. Ele falou sobre algo completamente abstrato, mas conseguiu transmitir a mensagem. É isso que gostaria que as pessoas fizessem. Mas ainda há uma certa arrogância.

Talvez devesse fazer parte da formação de um matemático.

Acho que sim. Há sempre estudantes que tendem a falar acima do nível do público. Quando isso acontece, critico-os.

EMS YA

E que mais foi importante para si enquanto presidente da EMS?

O segundo ponto na minha agenda foi tornar a EMS uma sociedade mais equilibrada, tanto no sentido de gênero, como em relação à participação de países e sociedades menores e menos ricos. Martin, tu foste vice-presidente, sabes, quando os comités foram formados e os nomes foram colocados em cima da mesa, quase sempre eram franceses, alemães e britânicos e, por vezes, alguém da Dinamarca ou da Polónia, ou algo assim. Alguns países nunca apareciam nos comités. O meu objetivo era fazer com que nos aproximássemos um pouco mais, em toda a Europa. O terceiro ponto importante da minha agenda foi envolver os jovens na sociedade e garantir que se sentissem em casa na comunidade matemática e que contribuíssem para levar a comunidade matemática para a frente. Estes foram os pontos principais da minha agenda.

Começamos pelo equilíbrio. Acho que consegui parcialmente. Durante o último congresso da EMS, os prémios da EMS foram atribuídos a quatro mulheres em dez, o que foi bastante bom. Nas comissões editoriais, ainda são necessárias melhorias no que diz respeito à participação de pessoas do Sudeste da Europa ou do antigo Leste. Acho que a guerra matou completamente essa iniciativa, porque os representantes desses países deixaram de falar entre si. E só se pode ser eleito se tiveres apoiantes. Isso não correu bem! A comunidade russa era muito forte na EMS, é terrível que agora esteja completamente afastada.

A EMS Young Academy parece funcionar bem. Eles agora têm um lugar no comité executivo. Têm de compe-

tir com os outros, mas podem nomear uma posição. Eu falei com muitos desses jovens e eles estão ansiosos por se envolver.

EMS PRESS E S2O

O meu maior sucesso foi-me, na verdade, entregue pelo meu antecessor, Pavel Exner. Nos últimos anos do seu mandato como presidente, ele esforçou-se bastante para encontrar uma sucessão para a editora da EMS. Foram analisadas, pelo menos, cinco ou seis opções, mas nenhuma resultou. Apareceu então um jovem rebelde, André Gaul, que era estudante do nosso grupo de álgebra linear numérica. Ele disse: “Esqueçamos toda esta publicação tradicional. Vamos fazer de forma diferente, vamos fazê-lo de raiz, vamos torná-lo aberto!” Ele criou uma empresa onde se podia descarregar um artigo num fórum da *internet*, fazer comentários sobre artigos e livros, e assim por diante. Tive muitas discussões com ele. O meu ponto de vista era que isso poderia funcionar em áreas com muitos leitores, mas não acreditava que funcionasse num campo altamente especializado. As pessoas não fariam comentários negativos ou críticos. Poderiam fazê-lo num relatório de arbitragem, mas não num fórum.

Pedi a este rapaz que se candidatasse a diretor da editora. E o comité escolheu-o! Planeámos configurar a EMS Press de uma forma completamente diferente. Agora, é uma empresa propriedade da EMS como único acionista. A empresa está orientada para a comunidade, mas também deve gerar algum lucro, que, por sua vez, ajuda a EMS. E como ele era tão a favor do acesso aberto, começámos imediatamente a analisar as atuais formas de publicação por parte dos editores comerciais. Eles tentam essencialmente ganhar o máximo de dinheiro possível e reduzem a qualidade, se necessário, quando se trata de aceitar mais um artigo com o qual lucram. André Gaul teve a ideia de adotar o modelo “Subscribe to Open” (S2O). E eu acho que é um verdadeiro sucesso! Ele imaginou que funcionaria dessa forma. Além disso, ele é um organizador fantástico, faz muitas coisas incríveis.

Poderia explicar melhor este conceito de S2O?

“Subscribe to Open” é um novo modelo de publicação no qual a comunidade – matemática, neste caso –, as sociedades e as bibliotecas trabalham juntas. A ideia é: as bibliotecas subscrevem a revista como no passado. Quando a revista tem assinantes suficientes, torna-se aberta,

completamente. Isso significa que os assinantes pagam pelo resto do mundo, e então a ciência é aberta! Isto é completamente diferente do modelo de taxas de processamento de artigos, onde se paga por artigo, seja por alguma organização governamental ou pelo próprio autor.

Para lhe dar uma ideia, se quiser subscrever todas as 22 revistas da EMS Press, isso custa-lhe, como pacote, cerca de €6000 por ano. Se quiser publicar um artigo na Springer ou na Elsevier, tem de pagar €2500 por artigo.

O sucesso desta abordagem é evidente. Cada vez mais sociedades e editoras estão a aderir ao S2O. Recebemos pedidos todas as semanas de revistas que querem juntar-se à EMS Press e aderir ao S2O.

Por que é o S2O tão bem-sucedido? É do interesse das bibliotecas manter o seu modelo de subscrição tradicional. Com as taxas de processamento, as bibliotecas tornar-se-iam obsoletas. Tudo ficará disponível na *internet*, mas é melhor se for a biblioteca a fazê-lo.

Além disso, nunca se deve sacrificar a qualidade pelo dinheiro, especialmente na ciência. É isso que este modelo pode alcançar. A editora está realmente a prosperar, gerando receitas para a EMS e, ao mesmo tempo, mudando o mundo da publicação.

IA E COMPUTAÇÃO

Sobre a IA, acha que ela influenciará o futuro dos matemáticos profissionais? Continuaremos a trabalhar em matemática como antes da IA?

Certamente algumas coisas vão mudar. Tivemos essa discussão no Congresso em Sevilha. A IA pode certamente ajudar na demonstração automática. O reconhecimento de imagens em áreas médicas não será possível no futuro próximo, julgo, sem IA. Futuramente, acho que são os matemáticos que terão de ser a boa consciência da IA, porque alguém tem de dizer quando e onde a IA está realmente a fornecer algo bem-sucedido ou se está apenas a gerar muito dinheiro e a dar resultados de má qualidade.

Isso provavelmente exigiria uma compreensão matemática mais profunda sobre como e quando a IA realmente funciona bem, como aparentemente acontece com frequência.

É por isso que devemos formar os nossos estudantes neste tópico. Várias universidades já começaram. Mas, como sabem, os estudantes “votam com os pés” quando

têm de escolher entre apenas aplicar a IA para resolver um problema ou analisar a IA. Aplicar para resolver um problema é muito mais fácil; também é mais atraente!

Estou a dar este curso de análise numérica e enfrento dificuldades, porque muitas pessoas acreditam que o que é ensinado neste curso pode ser feito pela IA imediatamente. Além disso, estamos a criar novos computadores para IA. Esses computadores não seguem os padrões a que estamos habituados em análise numérica, por exemplo, a aritmética IEEE, para que possamos analisar o problema. Então, o que significa isso? Significa que um computador típico para IA, que as grandes empresas estão a produzir, usa quatro dígitos. Não se pode fazer uma análise numérica razoável com quatro dígitos. Aposto que, daqui a dez anos, um computador comum no qual se possa executar o MATLAB com 16 dígitos será caro.

Principalmente porque todo o dinheiro está a ser investido no desenvolvimento de *hardware* voltado para a IA e não para a engenharia, matemática ou física padrão. Isso preocupa-me.

Quatro dígitos podem ser um verdadeiro perigo...

Enquanto tivermos alternativas disponíveis, isso não é um problema. Dou-lhe outro exemplo: por volta de 2000, as pessoas começaram a trabalhar com placas gráficas (computação GPU). A placa gráfica não segue o padrão IEEE, apenas até certo ponto. Não têm *overflow* e *underflow*, e têm *bitflips*. Ou seja, têm uma matriz onde pequenas unidades fazem o cálculo, e nunca se descobrirá se uma dessas pequenas unidades alterou um *bit* de forma errada. Isso significa que não se pode verificar os resultados, e se executar o mesmo programa duas vezes pode obter resultados diferentes. Agora, nós, como matemáticos, sabemos lidar com isso! Se temos incerteza nos nossos dados e nos nossos algoritmos, fazemos estatística, certo?

Executa-se o mesmo programa 100 vezes e traça-se uma curva de Gauss, pode-se dizer: “É bastante boa, tem uma cauda pequena”, e então sabe-se que este é provavelmente o resultado a considerar. Mas isso significaria que teria de fazer todos os cálculos 100 vezes, e já se sabe da loucura que são os gastos de energia com a utilização da IA. Ecologicamente e em termos de sustentabilidade, esta é realmente uma má ideia, e estou preocupado. Digo aos meus alunos: “Vejam, é o vosso trabalho no futuro. Trabalharão numa empresa e o chefe dir-vos-á para usarem este computador de IA que acabou de ser

comprado. É o vosso trabalho dizer-lhes: ‘Resolveram este sistema linear ou este problema de otimização?’” Só os matemáticos podem fazer isso porque, em segundo plano, há uma teoria de aproximação profunda, estocástica profunda e otimização. Quanto à demonstração automática ou à verificação, desconheço o que está por trás. Mas, quanto à análise numérica, estou preocupado. Não posso ensinar análise numérica da maneira usual, e teremos de integrar a IA de alguma forma.

Na Universidade de Erlangen, começaram um programa em matemática da ciência de dados. E agora têm 10% dos novos alunos em matemática e 90% em matemática da ciência de dados.

Como veremos isso no futuro? Quanto de matemática e estatística haverá nos cursos de ciência de dados?

Depende realmente. A ideia simplista da IA é a seguinte: têm-se dados e quer-se encontrar uma função em várias variáveis que interpole os dados. Em análise numérica, chamamos a isso interpolação. Temos pontos e queremos encontrar uma curva que os contenha. Se a função com que começou é o arco tangente de uma função exponencial, por exemplo, então temos polinómios ou polinómios por segmentos, e Weierstrass diz-nos que, se se tomar um grau suficientemente alto, obtém-se convergência.

E o que é a IA? Utiliza uma rede neuronal. E o que é uma rede neuronal? É uma função, $Ax + b$, depois $G(Ax + b)$, e depois itera oito vezes ou mais. Isso é uma rede neuronal! Existe um teorema, utilizando matemática muito interessante da análise funcional, que nos diz que qualquer função contínua pode ser aproximada arbitrariamente bem por uma rede neuronal. Percebeste? Já não se baseia em polinómios, mas noutra classe de funções. Tudo se baseia num resultado de aproximação! Agora, 99% do tempo de computação é gasto a ajustar os parâmetros. Para isso, utilizas o método de tentativa e erro, o gradiente estocástico. Vais numa direção, tentas encontrar o mínimo nessa direção, depois escolhes outra diferente. Desperdiças imenso tempo de computação a tentar fazer isto. Eventualmente, funcionará se correres 100 milhões de vezes em todas as direções diferentes na tua cidade. Em algum momento, podes acabar na loja a que querias ir inicialmente.

Não achas que é extremamente importante que as pessoas compreendam exatamente o que disseste?

Tenho a certeza absoluta de que é importante e que temos de ensinar isto.

As pessoas começaram agora a falar sobre isso nos jornais, em particular sobre o desperdício de energia...

Mas vai a um departamento de matemática comum e sugere que, em vez de Topologia Algébrica II ou Geometria Algébrica II ou III, os alunos possam frequentar um curso sobre Matemática da Inteligência Artificial. Não estou tão certo de que consigas que seja aceite pelo corpo docente. Acho que é um grande problema que a comunidade matemática tenha afastado os cientistas da computação há 40 anos. Em muitas universidades, também os estatísticos foram afastados dos departamentos de matemática. E receio que façamos o mesmo com a inteligência artificial. Há um novo interveniente na área, e teremos de ceder algo de nós para o integrar.

E o novo interveniente tem muito apoio. Visto de fora, é muito mais fácil obter apoio se estiveres nesta área da ciência...

E podes obter muito mais reconhecimento por parte do reitor da universidade.

MATEMÁTICA A NÍVEL GLOBAL

Deixando de lado a matemática europeia por um momento: países até agora considerados em desenvolvimento tornaram-se atores importantes na matemática. Com a China, isso é muito óbvio. Mas há também outros países que, neste momento, se tornaram forças motrizes na matemática. Como vê este desenvolvimento e como podemos apoiá-lo, se necessário? Como podemos enfrentar a matemática chinesa, por exemplo?

Esta é uma questão muito difícil. Há 20 anos, poderíamos tê-los integrado muito melhor, talvez. Mas agora estão tão fortes, têm tanto dinheiro e investem muito mais em ciência do que nós, na Europa ou no mundo Ocidental. Coisas semelhantes irão acontecer na Índia e, talvez, também no Norte de África.

Temos de ser abertos, mas há um verdadeiro problema... Por exemplo, na minha revista, *Linear Algebra and Its Applications*, recebemos cerca de 1400 submissões por ano. Cerca de metade vêm da China. Mas a revisão por pares é feita em 80% por pessoas do Ocidente. Porque não conhecemos essas pessoas. Temos editores na China, mas é um mercado totalmente diferente, e é completamente movido pelo dinheiro. Algumas dessas universidades têm incentivos: se escrever um artigo na revista de topo, se publicar em *Annals* ou *Inventiones*, recebe um



Caminhada na Suíça saxónica com os grupos de numérica de Chemnitz e Berlim, junho de 2005.

salário adicional de um ano. O que irão fazer os cientistas como consequência? Vão tentar entrar e bombardear o sistema com artigos. E, se quiseres ser imparcial, deves rever esses trabalhos, mas fazendo perder muito tempo dos nossos colegas. Não sei como resolver este dilema. O número de matemáticos na China está a explodir e o mesmo sucede com o número de artigos “incrementais”. Espero que, em algum momento, conheçamos melhor as pessoas dessas comunidades e possamos integrá-las melhor no nosso sistema de avaliação. Afinal, todas elas querem ir para a Europa ou para os EUA, pelo menos para dar um salto na carreira. Então, assim conhecemo-las! Por outro lado, infelizmente, não podemos integrar a maior parte delas no ensino, porque o seu alemão, francês ou português não é adequado. É um período de transição estranho; não sei para onde vai. A EMS tentou, durante algum tempo, organizar conferências com a China, com o Japão e com a Índia. A COVID parou tudo isso, e não sei como se vai desenvolver.

Vou contar-lhe outra história. Um colega muito famoso, em Princeton, foi uma vez visitado pelo FBI porque tinha muitos contactos com a China. Agora ele já saiu de Princeton. Foi para a Academia Chinesa de Ciências e obteve dinheiro para centenas de pessoas fazerem EDP e

IA. Se tiver 100 pessoas, mesmo que só dez sejam muito boas, isso deve ser suficiente!

INTERESSES PESSOAIS

Finalmente, vamos deixar de lado a matemática! Gostaríamos de lhe perguntar sobre os seus interesses pessoais fora da matemática. O que tem explorado no seu tempo livre?

Nos últimos cinco anos, comecei a praticar jardinagem, a cultivar os meus próprios vegetais. Como sabem, sou vegetariano. É fácil ser vegetariano em Berlim, mas não o é se não estiveres em Berlim. Em Portugal foi mais ou menos, mas não espetacular. Em Espanha passei por um período muito difícil. Agora, estou a cultivar os meus próprios vegetais. Tenho uma casa bonita no campo onde cultivo os meus vegetais e faço matemática.

Além disso, ando muito de bicicleta. Esta é a minha atividade para o corpo. Jardinagem, na verdade, não é tão boa para o corpo. Tens sempre dores nas costas. [Risos] Tenho muitos amigos e gosto de ir ao cinema, ouvir música e participar em eventos culturais, o que é tão fácil em Berlim.

Uma amiga minha que começou a aprender a tocar trombone aos 52 anos, perguntou-me: “Porque é que não comesças, agora que te reformaste, a fazer música?” Bem, eu respondi: “Gostaria de tocar guitarra de *rock*, mas não tenho tempo.”

Não fiquei muito infeliz quando me pediram para ensinar novamente. Além disso, tenho um trabalho extra que está em pausa no momento. Em 2011, candidatei-me a um centro de investigação interdisciplinar. Algo como o MATHEON, com um edifício onde grupos de pessoas de diferentes áreas podem juntar-se. Foi, na verdade, aprovado em 2013. E assim, estamos a construir uma nova casa. E como estamos em Berlim, estamos um pouco lentos, como sempre. O edifício está agora terminado, e vamos mudar-nos no início do próximo ano. A universidade pediu-me para coordenar esse projeto e para facilitar para que as pessoas realmente façam projetos de investigação interdisciplinar juntas. De certa forma, este é um dos “bebés” da minha carreira.

Integrando investigação, ciência e administração, que tem feito durante muitos, muitos, anos.

Sim. E consegui organizá-lo de tal maneira que a administração da universidade não tem poder de decisão [Risos]. É uma espécie de sonho conseguirmos que tudo funcione. E isso remonta à época em que eu estudei, quando estava numa universidade onde a investigação interdisciplinar era muito valorizada. Por isso é que digo que o criminoso volta sempre ao local onde cometeu o crime.

Como conseguiu combinar investigação de alto nível, ensino de alto nível, ciência de alto nível, administração e vida familiar numa só vida? Isso é muito impressionante. Qual é o seu truque?

Bem, o truque é muito simples. Todas estas são coisas que gosto de fazer. É divertido... Quando fazemos coisas de que gostamos e das quais desfrutamos, e pelas quais obtemos reconhecimento e as pessoas dizem: “Ótimo, conseguiu!”, então podemos colher muita energia disso. Esse é o meu segredo. Quase todos os que têm sucesso neste aspeto transmitem essa experiência. Não podemos fazer algo de que não gostamos. É divertido!

Isso é realmente inspirador. Acho que é um bom momento para terminar esta entrevista. Mas se tiver algo mais que gostasse de partilhar connosco...

Infelizmente, não a trouxe comigo, mas tenho uma *t-shirt* maravilhosa do Museu da Matemática de Giessen que diz: *A Matemática traz felicidade.*

SOBRE OS AUTORES

Silvia Barbeiro é professora associada no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e membro do grupo de Análise Numérica e Otimização do CMUC. Os seus interesses de investigação incluem análise numérica e matemática computacional, com foco na teoria e aplicações, nomeadamente em problemas de biomatemática, engenharia, geociências e imagiologia médica. Foi galardeada com a Medalha de Honra para Mulheres na Ciência da L'Oréal Portugal em 2010 e foi editora-chefe da *Gazeta de Matemática* de 2017 a 2022. silvia@mat.uc.pt

Ana Mendes é professora na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Politécnico de Leiria (Portugal). Tem um doutoramento em matemática pura e, atualmente, investiga problemas de classificação de lesões cutâneas. É investigadora convidada no LABI – Laboratório de Aplicações Bioinformáticas da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil. aimendes@ipleiria.pt

Martin Raussen é professor emérito na Universidade de Aalborg, Dinamarca. Nos últimos anos, a sua pesquisa focou-se na aplicação de métodos da topologia algébrica dirigida a modelos geométricos/combinatórios da teoria da concorrência em ciência da computação. Foi editor-chefe do *EMS Newsletter* de 2003 a 2008 e vice-presidente da EMS de 2011 a 2016. Uma entrevista com ele apareceu na edição 131 da *EMS Magazine*. raussen@math.aau.dk

EMS MAGAZINE PUBLICA ARTIGO DA GAZETA DE MATEMÁTICA

A revista n.º 134 da European Mathematical Society publicou a versão em inglês da entrevista a Claire Voisin realizada por Ana Mendes, do Instituto Politécnico de Leiria, e Teresa Monteiro Fernandes, da Universidade de Lisboa, para a *Gazeta de Matemática* n.º 202 (acessível em <https://gazeta.spm.pt/fichagazeta?id=202>). A entrevista foi publicada originalmente em 2024, pouco depois de Claire Voisin ser distinguida com o Prémio Crafoord de Matemática, atribuído pela Academia Real de Ciências da Suécia e pela Fundação Crafoord (Lund, Suécia).

Claire Voisin é considerada uma das mais importantes especialistas em geometria algébrica da atualidade e uma das personalidades matemáticas mais relevantes do panorama matemático internacional. Fique a conhecer Claire Voisin através da entrevista “A Matemática Enquanto Espaço Privado: do Desvendar de Conjeturas ao Reconhecimento Mundial”.



WM25 WOMEN IN MATHEMATICS 2025

A 4.ª edição do Encontro Mulheres na Matemática em Portugal (WM25) terá lugar no Porto, de 14 a 16 de julho de 2025. O encontro é organizado pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e conta com Sílvia Barbeiro (CMUC, Univ. Coimbra), Sofia Castro (CMUP, Univ. Porto) e Margarida Mendes Lopes (CAMGSD, IST-Univ. Lisboa) no comité científico.

Os principais objetivos desta conferência são motivar e inspirar as novas gerações de mulheres matemáticas através de apresentações e discus-

sões científicas de alta qualidade que abrangem diversas áreas da matemática. Este encontro será uma oportunidade para partilhar experiências diferentes e, com base nas edições anteriores, ajudará a desenvolver uma comunidade mais solidária. A submissão de comunicações e de pósteres termina no dia 30 de abril.

Apesar de o título do evento poder sugerir o contrário, a participação e a apresentação de comunicações não são restritas ao sexo feminino. A entrada é livre, mas a inscrição é obrigatória. Mais informações em <https://www.fc.up.pt/wm25>.

MASAKI KASHIWARA DISTINGUIDO COM O PRÉMIO ABEL 2025



O matemático japonês Masaki Kashiwara foi distinguido, no dia 26 de março, com o Prémio Abel 2025. A Academia Norueguesa de Ciências e Letras destaca “as suas contribuições fundamentais para a análise algébrica e para a teoria de representação, em particular o desenvolvimento da teoria dos módulos D e a descoberta das bases de cristais como as razões que levaram à atribuição do prémio. O júri acrescentou ainda que “o seu trabalho continua na vanguarda da matemática contemporânea e a inspirar gerações de investigadores”.

Nascido em 1947 em Yuki, Masaki Kashiwara é o primeiro japonês a vencer este galardão. Desde muito jovem, demonstrou excelência na área da matemática, tendo o seu interesse despertado a partir do problema Tsurukamezan, que trata do cálculo do número de grou e de tartarugas, respetivamente, a partir do conhecimento do número total de cabeças e de patas.

O trabalho deste professor do Instituto de Investigação em Ciências Matemáticas e do Instituto de Estudos Avançados, ambos da Universidade de Quioto, Japão, abriu as portas a novas áreas, construiu pontes e criou ferramentas, particularmente na resolução de problemas na teoria da representação. Kashiwara provou teo-

remas surpreendentes com métodos que ninguém tinha imaginado. Na sua tese de mestrado, em 1970, sob a supervisão de Mikio Sato, de quem foi discípulo, desenvolveu a investigação para estabelecer os fundamentos da teoria dos módulos D analíticos, uma nova base para estudar sistemas de LPDEs através da análise algébrica. Na época, o matemático tinha apenas 23 anos, mas o seu trabalho teve impacto a nível global, apesar de nos primeiros 25 anos só estar disponível em japonês.

Ao longo dos últimos 50 anos, Kashiwara viu já o seu trabalho reconhecido com vários prémios e distinções, entre eles, o Prémio Iyanaga (1981), o Prémio Asahi de Ciência (1988), o Prémio Fujihara (2008), a Medalha Chern (2018) e o Prémio Quioto (2018). Em 2020, Kashiwara foi homenageado com a Ordem do Tesouro Sagrado do Japão, Ouro e Estrela de Prata e, em 2024, recebeu o Prémio da Câmara da Cultura de Quioto por uma Contribuição Excecional.

A cerimónia de entrega do Prémio Abel decorrerá em Oslo, no dia 20 de maio. Juntamente com o galardão, Kashiwara receberá um prémio pecuniário no valor de 7,5 milhões de coroas norueguesas, o equivalente a 660 mil euros.

17.ª EDIÇÃO DO PRÉMIO PEDRO MATOS

A 17.ª edição do Prémio Pedro Matos tem como tema “Matemática (in)Discreta”. Este tema pretende sensibilizar o público em geral para o reconhecimento da utilização da matemática discreta em fenómenos do dia a dia, nomeadamente, com recurso à tecnologia. Os trabalhos devem abordar a ligação entre os conceitos da matemática discreta e as suas aplicações práticas, como, por exemplo, a matemática por trás das redes sociais, a criptografia e a segurança digital, a otimização de rotas e logística, contagem, combinatória e probabilidades, etc. A pré-inscrição decorre até 9 de maio de 2025 e a

candidatura e a entrega do trabalho até 13 de junho de 2025. O prémio está dividido em duas categorias, Prémio Pedro Matos e Prémio Pedro Matos Júnior, destinados a estudantes do Ensino Secundário e a estudantes do 3.º ciclo do Ensino Básico, respetivamente. Além do prémio monetário oferecido aos três melhores trabalhos, os estudantes do Ensino Secundário do grupo vencedor que venham a ingressar numa das escolas do Politécnico de Leiria terão ainda direito à isenção do pagamento da propina durante o 1.º ano. Todas as informações podem ser consultadas em <https://premiopedromatos.ipleiria.pt>.





5.º VOLUME DO LIVRO MULHERES NA CIÊNCIA

No Dia Internacional da Mulher, 8 de março de 2025, a Ciência Viva homenageou as mulheres cientistas portuguesas com o lançamento do 5.º volume do livro *Mulheres na Ciência*. A Ciência Viva presta homenagem às mulheres cientistas portuguesas, que representam 45% do total de investigadores no nosso país e cujo trabalho notável tem sido fundamental para o progresso que a

ciência e a tecnologia nacionais registaram nas últimas décadas.

Este volume reúne 107 retratos de investigadoras de diferentes gerações e áreas do conhecimento. A sessão de lançamento contou com a intervenção de Ana Paiva, secretária de Estado da Ciência e uma das homenageadas no volume 4, lançado em 2023.

XXVII CONGRESSO DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE ESTATÍSTICA

A Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE), em colaboração com a Universidade do Algarve, vai organizar o seu XXVII Congresso, de 22 a 25 de outubro de 2025, no Complexo Pedagógico do Campus da Penha, em Faro. O congresso é uma das principais iniciativas da SPE, que tem como objetivos promover, valorizar e desenvolver o estudo da estatística, as suas aplicações e áreas científicas relacionadas. Ana Luísa Papoila, Cláudia Neves, Przemyslaw Biecek e Renato Assunção serão os oradores convidados. Mais informações podem ser consultadas em <https://spe2025.mozello.site.com>.

XXVII
CONGRESSO
SPE 25
SOCIEDADE PORTUGUESA DE ESTATÍSTICA

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA TEM NOVA DIREÇÃO

A nova direção da Sociedade Portuguesa de Matemática foi eleita no dia 6 de janeiro para o biênio 2024/2026, com Eugénio Rocha, da Universidade de Aveiro, a assumir a presidência. Isabel Hormigo (que pertenceu ao Agrupamento de Escolas Dona Filipa de Lencastre, em Lisboa, até agosto de 2024) e Pedro Alexandre Santos (Instituto Superior Técnico) são os vice-presidentes e Alexandre Rodrigues (Instituto Superior de Economia e Gestão) é o novo tesoureiro.

Eugénio Rocha é licenciado em Engenharia Informática (inteligência artificial) pela Universidade de Coimbra e Mestre e Doutor em Matemática (teoria do controlo não linear) pela Universidade de Aveiro. Foi membro da direção da SPM entre 2014 e 2018 e do Comité de Publicações Eletrónicas da EMS (EPC – SEM de 2013 a 2016). Tem mais de 100 publicações, em diversas áreas científicas, que incluem a análise funcional e as suas aplicações a PDEs. Desde 2005, coordenou

projetos educativos no âmbito do Geometrix, dirigidos a vários públicos-alvo, nomeadamente estudantes com necessidades especiais. Atualmente, também coordena projetos de big data, data analytics e machine learning aplicados à manufatura e à logística, tratando problemas de diversos parceiros industriais nacionais e internacionais, que envolvem uma verba de 3.2 milhões de euros.

Os restantes membros da nova direção são Ana Isabel Mendes (Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Politécnico de Leiria), Ana Rodrigues (Universidade de Évora), Frederico V. Amaral (Colégio Valsassina), James Kennedy (Universidade de Lisboa), Joana Teles (Universidade de Coimbra), Maria Clementina Timóteo (aposentada, tendo pertencido ao quadro de nomeação definitiva do Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas – Escola Secundária Padre Alberto Neto) e Rui Feliciano (Escola Secundária de Mirandela).

18.º CAMPEONATO NACIONAL DE JOGOS MATEMÁTICOS

Mais de 1800 alunos oriundos de 343 escolas de todo o País estiveram na Universidade de Aveiro para participar na final do 18.º Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos. O evento decorreu no dia 14 de março, data em que se celebra o Dia do Pi, nome pelo qual é

também conhecido o Dia Internacional da Matemática. A competição é dividida em quatro categorias (1.º, 2.º e 3.º ciclos e Ensino Secundário) e consta de seis jogos: Gatos & Cães, Rastros, Produto, Dominório, Atari Go e NEX.



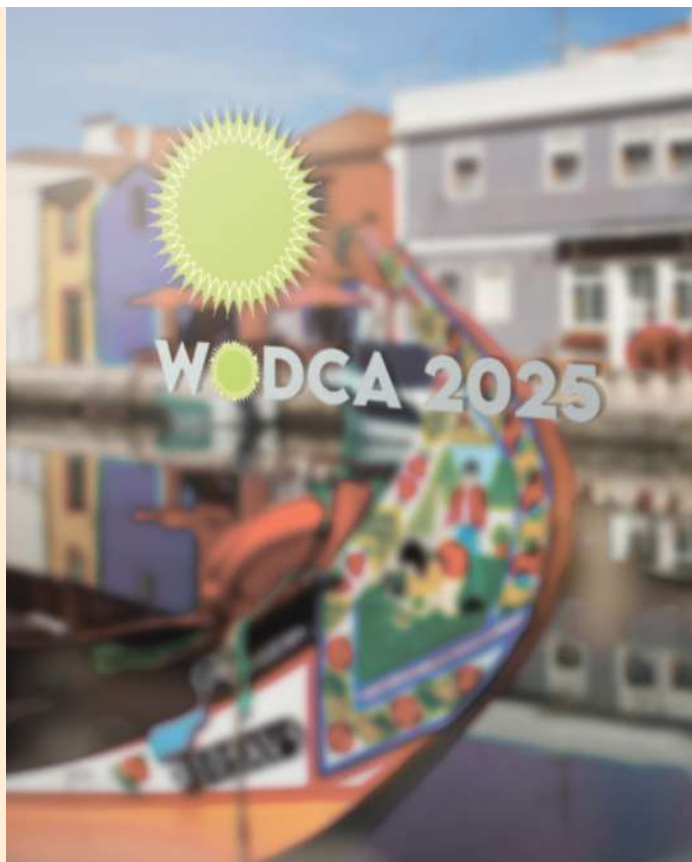
WORKSHOP ON OPTIMIZATION, DYNAMICS AND CONVEX ANALYSIS

O *Workshop on Optimization, Dynamics and Convex Analysis* 2025 (WODCA 2025) decorrerá de 11 a 14 de junho de 2025, em Aveiro. O *workshop* é dedicado ao 65.º aniversário de Alexander Plakhov, professor na Universidade de Aveiro.

Em sua homenagem haverá também uma edição especial do *Journal of Convex Analysis*, celebrando as suas notáveis contribuições para o campo da matemática. Esta edição comemorativa convida a submissões cujos temas estejam relacionados com as áreas de interesse do professor Plakhov, incluindo o bilhar e o transporte de massa ideal, o controlo ideal e a otimização, a geometria convexa e o cálculo de variações, os sistemas dinâmicos e a modelação matemática, as aplicações da matemática na mecânica e o problema da agulha de Kakeya, entre outros.

A data limite para submissão de apresentações é 20 de abril de 2025, podendo cada participante apenas submeter uma candidatura. Até 5 de maio todas as inscrições terão um valor reduzido. Mais informações em <https://sites.google.com/view/wodca2025>.

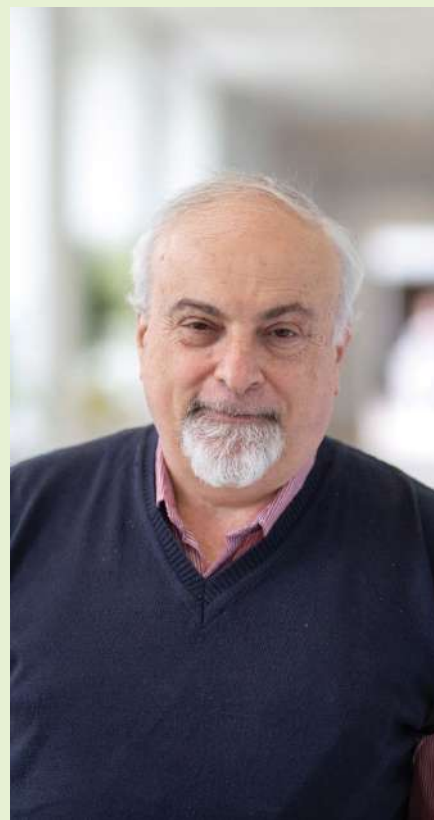
O evento é apoiado pelo Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e pelo Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.



CONFERÊNCIA ALGEBRA AND ITS ROLE IN COMPUTER SCIENCE

O Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa promove a Conferência Algebra and its role in computer science, nos dias 26 e 27 de junho. Esta conferência é dedicada ao 70.º aniversário de Mikhail V. Volkov e é uma forma de celebrar as suas muitas conquistas científicas e liderança. O foco é a “Álgebra e o seu papel na Ciência da Computação”, com especial ênfase nas áreas de estudo relacionadas com o trabalho de Volkov, como os semi-grupos e os autómatos.

As inscrições beneficiam de um preço reduzido até ao dia 30 de abril. No dia 26 haverá um jantar, no Restaurante Jockey, pelas 19h30. Saiba mais em <https://sites.google.com/view/workshop-volkov-2025/home?authuser=0>.



EUGÉNIO ROCHA
PRESIDENTE DA SPM
presidente@spm.pt

NOVA DIREÇÃO DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO COM A CONTINUIDADE E A INOVAÇÃO

Com um forte compromisso com a continuidade das atividades da SPM e um olhar atento à modernização e à simplificação de processos, a direção assume o desafio de consolidar o papel da SPM enquanto referência nacional e internacional na promoção da matemática.

No passado dia 18 de janeiro, tomou posse, em Lisboa, a nova direção da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) para o biénio 2024-2026. Liderada pelo presidente Eugénio Rocha, esta equipa reúne matemáticos de diversas áreas e instituições, refletindo a diversidade da comunidade matemática portuguesa.

Com um forte compromisso com a continuidade das atividades da SPM e um olhar atento à modernização e à simplificação de processos, a direção assume o desafio de consolidar o papel da SPM enquanto referência nacional e internacional na promoção da matemática.

Assumimos este desafio com entusiasmo, conscientes do trabalho que nos espera, mas também motivados pelo legado que nos foi deixado. A SPM tem sido, ao longo de mais de oito décadas, uma peça fundamental na promoção da matemática em Portugal. Agora, cabe-nos dar continuidade a esse percurso, mas também incorporar novas ideias e soluções que tornem a SPM ainda mais dinâmica e próxima dos seus associados.

Assim, a atual direção pretende honrar este legado, mantendo e fortalecendo iniciativas que já fazem parte da identidade da SPM, como são exemplo disso as Olimpíadas Portuguesas de Matemática, os SPM Testes, os Círculos Matemáticos, a publicação da *Portugaliae Mathematica*, da *Gazeta de Matemática* e do *Boletim da SPM*, a promoção das Tardes de Matemática e o apoio à realização de en-

contros científicos e ações de divulgação, entre outros. A colaboração com instituições internacionais também continuará a ser uma prioridade, promovendo o intercâmbio de conhecimento e reforçando a posição da SPM no panorama matemático global.

Contudo, novos tempos trazem novos desafios. Um dos focos centrais deste mandato será a simplificação e a organização dos processos internos da SPM. Pretendemos modernizar a gestão administrativa, garantindo eficiência na comunicação com os associados e otimizando os recursos disponíveis.

O ensino da matemática continua a ser um tema de grande relevância para a SPM. A direção manter-se-á empenhada em contribuir para a promoção de estratégias que melhorem a qualidade do ensino da matemática, procurando o diálogo com todas as partes para assegurar que os estudantes recebem a melhor formação possível e se promova o reconhecimento dos professores. A formação contínua de professores será igualmente uma prioridade, garantindo que os professores continuarão a ter acesso a uma formação de qualidade.

Por outro lado, a nossa visão para este mandato é a de que a investigação matemática em Portugal merece um apoio contínuo. A nova direção compromete-se a fomentar a realização de eventos científicos, a apoiar a publicação de trabalhos de qualidade e a reforçar as parcerias com

centros de investigação e empresas. O desenvolvimento de colaborações entre a academia e a indústria será mais incentivado e apoiado, demonstrando o impacto da matemática na inovação e no desenvolvimento da sociedade.

Neste contexto, iremos orientar-nos por valores fundamentais como o rigor na gestão, a qualidade da educação, a transparência na comunicação e a sustentabilidade financeira.

Por último, sendo a SPM um espaço aberto, onde todos

os matemáticos – investigadores, professores e estudantes – podem sentir-se representados e valorizados, iremos ainda reforçar os canais de comunicação e apostaremos na criação de iniciativas que estimulem o envolvimento da comunidade matemática com a SPM.

A nova direção assume este mandato com determinação e espírito de missão. Sabemos que a SPM só pode crescer com a participação de todos, e desejamos que cada associado se sinta parte desta caminhada.

SPM@Testes 2025

Testes Nacionais para 2.º, 4.º, 6.º, 9.º, 10.º, 11.º, 12.º anos

**De 6 a 16 de maio
nas escolas associadas da SPM**

Inscreva a sua escola!

<https://testesnacionais.spm.pt/>

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: gazeta@spm.pt.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2025

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para imprensa@spm.pt

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

