

N. 0203

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXXV | Jul - Out 2024 | 4,20€

Como Poupar
Testes de Rastreio:
a Testagem em
Grupos como
Introdução
ao Método
Probabilístico

João Ribeiro

O Problema *16
Revisitado

Carlos Gomes

MATEMÁTICA PARA A
INDÚSTRIA E INOVAÇÃO

O Que Está por
Detrás de um Avatar?

Rongjiao Ji, Stevo Racković
e Filipa Valdeira

SEXTA FEIRA
22 NOVEMBRO

Dirigido ao público escolar

SÁBADO
23 NOVEMBRO

Dirigido a famílias
e público geral

22a23
NOV
2024

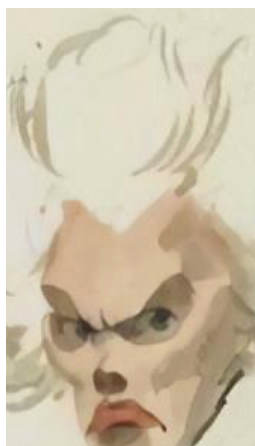
XI FEIRA DA MATEMÁTICA

MARQUE JÁ NA
SUA AGENDA!

PARTICIPAÇÃO GRATUITA

**Informações e marcações
geral@museus.ulisboa.pt**



**44 MATEMÁTICOS NA PRIMEIRA PESSOA****08 CANTO DÉLFICO****22 APANHADOS NA REDE****25 HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA**

- 02 EDITORIAL** | *Paulo Saraiva*
Decifrando os Papiros de Herculano
- 04 RECREIO** | *Hélder Pinto*
O Problema do Gato e da Tartaruga Que Sobem a Mesas (e Outros Problemas algébricos)
- 08 CANTO DÉLFICO** | *Alfredo Costa*
A Fórmula de Legendre para Fatoriais
- 12 ARTE E MATEMÁTICA** | *Pedro J. Freitas*
Cinema e Geometria Descritiva
- 14 COMO POUPAR TESTES DE RASTREIO: A TESTAGEM EM GRUPOS COMO INTRODUÇÃO AO MÉTODO PROBABILÍSTICO**
João Ribeiro
- 22 APANHADOS NA REDE** | *José Carlos Santos*
O Problema dos Três Corpos
- 25 HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA** | *Jorge Nuno Silva*
Caligrafia e Aritmética
- 28 O PROBLEMA *16 REVISITADO**
Carlos Gomes
- 33 MATEMÁTICA PARA A INDÚSTRIA E INOVAÇÃO** | *Rongjiao Ji, Stevo Racković e Filipa Valdeira*
O Que Está por Detrás de um Avatar?
- 44 MATEMÁTICOS NA PRIMEIRA PESSOA** | *Ana Mendes e Milton Ferreira*
Professor Helmuth Robert Malonek: Com o coração na Matemática de Três Países
- 55 MATEMÁTICA E LITERATURA** | *Nuno Camarneiro*
Bibliomania
- 56 BARTOON** | *Luis Afonso*
- 57 NOTÍCIAS**
- 63 CARTAS DA DIREÇÃO** | *José Carlos Santos*
Em Jeito de Balanço



PAULO SARAIVA
Universidade
de Coimbra
psaraiva@fe.uc.pt

DECIFRANDO OS PAPIROS DE HERCULANO

As recentes descobertas resultantes da decifração de papiros carbonizados motivam uma breve viagem ao mundo da papirologia.

O leitor habitual da *Gazeta de Matemática* sabe que, percorrendo os diversos números desta publicação, pode encontrar interessantes artigos contendo referências diretas ou indiretas a textos de matemática bastante antigos (por vezes, com séculos de existência). Por exemplo, uma obra de meados do século XVII, recentemente descoberta, contendo uma parte relativa ao ensino da aritmética, é o tema da secção *Histórias da Matemática* do presente número. Na verdade, os leitores da *Gazeta* são beneficiários do labor de autores para quem a contextualização histórica ocupa um lugar fundamental na compreensão das ideias expostas, do modo como estas evoluíram ou como foram o motor para diversas áreas das ciências. Frequentemente, a consulta das fontes originais pode revelar-se uma tarefa difícil, levando à citação de fontes secundárias, o que pode comportar os seus riscos, haja em vista o curioso episódio da figura de Legendre, relatado no *Canto Delfico* deste número, em que a repetição de um erro de identificação se propagou até há bem poucos anos. Noutros casos, tal consulta é manifestamente impossível, seja porque da obra citada apenas nos chegou notícia por tradição oral e dos trabalhos que a citam, seja porque há documentos que, devido ao seu estado, têm sido dados como perdidos no que concerne ao estudo do seu conteúdo. Relativamente a estes, os desenvolvimentos tecnológicos nas últimas décadas têm sido de tal ordem, que permitiram decifrar textos contidos em papiros danificados

ou mesmo carbonizados, de modo não invasivo, evitando o que seria a sua provável destruição se manipulados manual ou mecanicamente.

O trabalho pioneiro nesta área data de 2002, quando Brent Seales, um especialista em Ciência Computacional da Universidade do Kentucky, e a sua equipa criaram um sistema hoje conhecido por *desenrolamento virtual*. Esta técnica consiste num conjunto de passos (a digitalização, a segmentação e o achatamento, e a deteção de tinta) implementados com o auxílio de algoritmos computacionais que permitem converter os resultados visuais de um objeto obtidos por imagiologia numa representação plana. O resultado são imagens planas do que se encontra escrito num dado suporte (por exemplo, um livro ou um rolo de papiro). Uma vez produzidas as imagens, continuam a ser necessários especialistas que saibam ler e interpretar os conjuntos de caracteres obtidos. Seales demonstrou que o desenrolamento virtual funcionava laboratorialmente, pelo que o passo seguinte consistia na sua aplicação na leitura de papiros carbonizados. Bastante conhecidos entre os estudiosos de manuscritos antigos são os rolos de papiro (cerca de 1800) encontrados em Herculano, em 1750, carbonizados por correntes de gás e matéria vulcânica após a explosão do Vesúvio em 79 d.C. A atualmente conhecida por *Villa dei Papiri*, continha uma biblioteca repleta de manuscritos de filosofia. Em 2005, Seales propôs que os papiros de Herculano pudessem ser lidos através

deste novo método, mas deparou-se com a resistência inicial no acesso a estes fragmentos por parte de papirologistas e dos responsáveis pelas bibliotecas que os conservam (na Biblioteca Nacional de Nápoles, numa das bibliotecas da Universidade de Oxford e no Institut de France). Já em 2016, e após desenvolver um inovador programa de computador para localizar e mapear superfícies 2D dentro de um objeto 3D, a equipa de Seales aplicou a técnica de desenrolamento virtual para decifrar o texto do antigo papiro de Ein-Gedi – revelando que continha o início do Livro do Levítico (um dos textos bíblicos mais antigos já encontrados). No caso dos papiros de Herculano, a tinta presente é bastante menos visível, por ser à base de carbono. Foi preciso desenvolver algoritmos de aprendizagem automática para detetar e amplificar os vestígios de tinta presentes nos papiros, e “aprender” como os padrões nos dados aparecem quando a tinta está presente.

Seales tornou universalmente acessíveis os seus dados, métodos e resultados, dando impulso para que jovens especialistas em inteligência artificial e redes neurais empreendam na decifração dos papiros. Na sequência, em março de 2023, com a ajuda de financiamento privado, Seales e Nat Friedman (fundador do GitHub), lançaram o Vesuvius Challenge¹, uma competição internacional de aprendizagem automática e visão computacional com o objetivo de decifrar os papiros carbonizados de Herculano. Os *media* deram já conta, no início de 2024, dos primeiros resultados alcançados por um trio de jovens investigadores: Youssef Nader, estudante egípcio de doutoramento em Berlim, Luke Farritor, estudante norte-americano, estagiário da SpaceX, e Julian Schilliger, estudante suíço de robótica. Primeiro individualmente, e depois de modo colaborativo, os vencedores do prémio (no valor de 700 000 dólares) alcançaram mais do que o exigido: além de decifrarem quatro passagens de 140 caracteres cada, com pelo menos 85% dos caracteres recuperáveis, fizeram-no com fragmentos adicionais de texto num total de dois mil caracteres.

Entre os continuadores do trabalho de Seales situa-se o grupo do professor Graziano Ranocchia, filólogo da Universidade de Pisa, responsável pelo lançamento do Greek Philosophical Schools Project², uma iniciativa com financiamento da União Europeia que visa digitalizar e tornar acessíveis textos gregos antigos, bem como criar uma plataforma em código aberto para edição crítica e colaborativa dos textos decifrados. Ranocchia defende que só o esforço multidisciplinar e a colaboração entre especialistas de diversas áreas poderão conduzir a avanços

significativos na decifração dos papiros de Herculano. Os trabalhos desta equipa foram bem-sucedidos no que se refere à leitura de um papiro revelando vários aspetos da vida do filósofo Platão, o que foi amplamente divulgado nos primeiros meses de 2024.

A maioria dos papiros de Herculano até agora decifrados contém textos filosóficos e literários, particularmente obras do filósofo epicurista Filodemo de Gadara (110-35 a.C.), autor do *Índice dos Filósofos Gregos*, talvez a mais antiga história da filosofia grega de que há conhecimento. Todavia, em artigo de 2002, Richard Janko, especialista em Estudos Clássicos, ao descrever novos achados na biblioteca de Herculano, menciona ter-se encontrado num dos papiros referência à obra, atribuída a Zenão de Sídon, intitulada *Em Resposta ao Ensaio de Crátero Contra o [trabalho de Zenão] “Sobre as Provas Geométricas”*³. Janko descreve-a como a mais antiga resposta conhecida a uma recensão polémica de uma obra.

Esperamos que a leitura dos artigos desta *Gazeta* seja tão estimulante quanto a acima descrita incursão no mundo da papirologia.

¹ <https://scrollprize.org>

² <https://greeskschools.eu>

³ Janko, Richard. (2002) “The Herculaneum Library: Some Recent Developments.”, *Estudios Clásicos*, t. XLIV, 121, pp. 25-42.



HÉLDER PINTO
Instituto Piaget,
Insight e CIDMA-UA
helder.pinto@piaget.pt

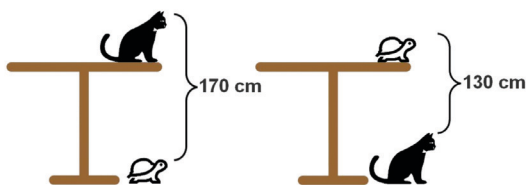
O PROBLEMA DO GATO E DA TARTARUGA QUE SOBEM A MESAS (E OUTROS PROBLEMAS ALGÉBRICOS)

Como determinar a altura de uma mesa quando se tem dois animais de estimação?

Nem sempre é fácil descobrir a verdadeira origem de um determinado desafio matemático, sendo possível encontrar várias fontes para o mesmo problema (e com o advento da *web*, este problema da fonte original agudizou-se exponencialmente). Por exemplo, o problema que trazemos a seguir é referenciado muitas vezes como sendo da China, embora algumas vezes apareça como originário da Rússia, como em [1]:

Um gato está sentado em cima de uma mesa e uma tartaruga rasteja no chão, diretamente por baixo dele. A distância entre as orelhas do gato e o topo da carapaça da tartaruga é de 170 cm. A Alena trocou os animais de estimação de sítio. Agora, a distância entre as orelhas do gato e o topo da carapaça da tartaruga é de 130 cm. Qual é a altura da mesa?

Não abordaremos aqui por que carga de água se conhecem as distâncias entre o topo dos animais e não se mediu diretamente a altura da mesa... (o que se ganha em interesse matemático e algébrico perde-se muitas vezes na “veracidade” das situações na vida real!). Na plataforma *Reddit*, para este mesmo problema, questionava-se ainda



se é possível determinar a altura dos dois animais. O que parece ao leitor?

De facto, muitas vezes não se questiona o valor de uma variável específica, mas sim o resultado de uma determinada expressão que utiliza essas variáveis. Observe-se o exemplo a seguir, onde determinar o valor das variáveis diretamente e calcular a expressão pelos métodos usuais é bastante trabalhoso.

Se $a + b = 1$ e $a^2 + b^2 = 2$, qual o valor da expressão $a^{11} + b^{11}$?

Em certas situações, é até mesmo impossível determinar o valor exato das variáveis como, por exemplo, no problema a seguir (como bem sabe o leitor, uma equação com duas incógnitas não tem solução única):

Se $x + xy + y = 54$, a que é igual $x + y$?

Na mesma senda das situações anteriores, determine as soluções inteiras dos seguintes sistemas de equações:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} ab + c = 2020 \\ abc = 2021 \end{cases}; \\ 2) & \begin{cases} ab + c = 2023 \\ abc = 2022 \end{cases}. \end{aligned}$$

A MATEMÁTICA NAS NOTÍCIAS:

1. Ainda a matemática das eleições: “Enganos nas eleições? Votos no ADN podem ter tirado três deputados à AD”

Como já falámos noutras edições deste *Recreio*, os deputados do Parlamento português são eleitos pelo bem conhecido método de Hondt, aplicado em 22 círculos eleitorais. Como também já foi referido, este método beneficia os grandes partidos em relação ao que aconteceria se fosse aplicada uma simples proporcionalidade direta em função dos votos expressos a nível nacional. Uma consequência deste método está bem visível no que aconteceu nas últimas eleições legislativas em que se supõe (embora não haja maneira de confirmar a veracidade desta afirmação, uma vez que o voto é anónimo) que muitos eleitores tenham votado no partido ADN por engano, quando o que pretendiam era votar na coligação AD (note-se que, no boletim de voto, esta coligação era indicada por ALIANÇA DEMOCRÁTICA PPD/PSD.CDS-PP.PPM, não aparecendo a sigla AD em local nenhum). Claro que alguém fez os cálculos matemáticos desta potencial situação [2]:

“A [Rádio] Renascença fez um exercício meramente matemático, aplicando o Método d’Hondt, (...) o que permitiria à AD de Luís Montenegro tirar dois deputados ao PS – um em Lisboa e outro em Viseu – e um ao Chega, em Coimbra.

Em Lisboa, o ADN conseguiu 19 mil votos (1,45%), ou seja, mais 16 mil do que o partido tinha conseguido nas eleições anteriores. O número era o suficiente para a AD conseguir o seu 15.º deputado e ultrapassar o PS como o partido mais votado no círculo eleitoral.

Em Viseu, um dos círculos onde o ADN foi o 4.º partido mais votado, o partido conseguiu mais de 6 mil votos (3,13%), quando há dois anos tinha sido o 13.º partido mais votado nas legislativas de 2022. Estes votos seriam o suficiente para a coligação de PSD e CDS conquistar o 4.º deputado no círculo, às custas do 3.º do PS.

O terceiro deputado que o ADN terá desviado da AD foi em Coimbra. O partido teve 1% dos votos, cerca de 2.400, quando há dois anos o partido não tinha sequer listas no círculo eleitoral. O último deputado no distrito foi eleito por uma diferença de pouco mais de 800 votos, o 2.º do Chega, que, com os votos no ADN, serviriam à AD [para] eleger o 4.º deputado no distrito.”

E, claro, têm-se então os seguintes “paradoxos” que não fazem muito sentido ao nosso senso comum:

- ▶ O ADN não conseguiu eleger nenhum deputado, mas os seus votos permitiriam à AD eleger mais três deputados...
- ▶ O PS e o Chega, que nada têm a ver com este eventual

engano (isto é, teriam exatamente o mesmo número de votos que tiveram), acabariam por perder deputados...

E é neste tipo de questões que nasce, em parte, a questão do designado “voto útil” ... Os votos num partido pequeno não elegeram ninguém (como se costuma dizer, não serviram para nada); num partido grande teriam feito a diferença elegendo mais três deputados; lembre-se que, no final, os resultados deram 80 deputados à AD contra 78 do PS (recorde-se que se esteve vários dias à espera que se contassem os votos dos imigrantes, que viriam a eleger quatro deputados, para se conseguir garantir matematicamente a vitória da AD, tendo o então primeiro-ministro, António Costa, afirmado a inesquecível frase: “A matemática é matemática, creio que ninguém discute com a matemática” [3]); segundo as contas agora feitas, teriam ficado então 83 deputados para a AD contra 76 do PS, o que teria sido uma vitória bem mais substancial do que a que se verificou na realidade (embora, no final, viéssemos a estar exatamente na mesma situação em termos de possíveis maiorias parlamentares).

2. A simulação do Euro 2024 (e desta vez não é a simulação de um penálti)

Quando sair esta edição da nossa *Gazeta* (em julho) já é provável que se saiba como está a correr-nos o Europeu de Futebol na Alemanha. No momento em que escrevo estas linhas (maio), contudo, já existem previsões do que poderá vir a acontecer [4]:

“Estamos a caminhar a passos largos para o Euro 2024 e, de maneira a aguçar ainda mais a curiosidade para aquilo que poderá acontecer na competição, o criador de conteúdo James Lawrence Allcott resolveu fazer uma simulação da prova dez mil vezes. É certo que alguns dos resultados surpreendem, mas o grande destaque vai mesmo para Portugal, que foi a seleção que saiu... com maior chance de conquistar o troféu.
(...)

No que diz respeito ao torneio como um todo, a Seleção Nacional terminou a simulação com 14.74% de chance de sair vitoriosa, à frente de Inglaterra (11.48%), Espanha (10.99%), França (10.85%) e Bélgica (7.76%). Curiosamente, a Alemanha, a anfitriã do Euro 2024, surge apenas em 6.º (5.76%).”

A vantagem de se fazer uma simulação deste género é que já se entra em linha de conta com os eventuais “percursos”

que cada equipa tenha de fazer até ser campeã; por exemplo, Portugal, fruto do seu grupo (que é relativamente fácil, com Turquia, Chéquia e Geórgia), venceu o seu adversário dos oitavos de final em 95,82% das simulações.

Será que a simulação deu “resultados” para Portugal? Para ser justo, as probabilidades estão tão diluídas e há tantas equipas candidatas que, qualquer que venha a ser a equipa vencedora, dificilmente teremos um vencedor totalmente inesperado... Apesar desta simulação, não se descarte a sempre candidata Alemanha, pois, como se costuma dizer: “o futebol são 11 contra 11 e no fim ganha a Alemanha”!

3. “Educação matemática para o nosso subdesenvolvimento”

Que título tão estranho, quando estamos habituados a associar a matemática a desenvolvimento científico e económico... A seguir segue parte da opinião de José Miguel Pinto dos Santos sobre este assunto [5]:

“Tornar um tópico aborrecido não requer grande competência pedagógica ou científica. Mas tornar a aprendizagem da matemática algo de abominável, de modo a que o puto fique vacinado para sempre, com uma sensação indelével de que é algo de arbitrário e que não serve para nada de bom, requer alguma arte.

Um dos métodos usados com grande sucesso nas nossas escolas públicas para prevenir o desenvolvimento intelectual das crianças e as afastar do vício da matemática é exigir uniformidade nas respostas aos problemas dados. É comum um problema algébrico ou geométrico poder ser resolvido de vários modos. Para matar pela raiz qualquer veleidade de criatividade e independência intelectual, é normal os nossos professores considerarem errada qualquer resposta com desenvolvimento lógico e resultado correto, mas que não tenha sido obtida seguindo o processo de resolução que foi dado em aula. Para passar a Matemática nas escolas portuguesas, os alunos têm de internalizar que, na nossa sociedade, é necessário conformarem-se com a maneira de pensar imposta pela autoridade. A lógica pode ser impecável, o resultado pode ser o correto, mas se a maneira de resolver o problema ou o modo de pensar não for o oficial, então “estás errado e és reprovado”. Chumbas até aprenderes. Repetes até te conformares.”

Bem sabemos que a matemática escolar por vezes é abor-

recida e tem dificuldade em mostrar diferentes perspetivas e apresentar diferentes abordagens de resolução de um determinado problema (até porque, muitas vezes, os problemas escolares são relativamente simples e não há muita maneira de inovar). E bem sei que nos exames nacionais a questão apresentada é premente para alguns estudantes que, porventura, tenham mais capacidades e conhecimentos, como, por exemplo, os estudantes que fazem uma preparação específica para as Olimpíadas de Matemática. Contudo, ver nesta situação uma tentativa sub-reptícia da escola de reprimir os seus estudantes e os tornar seres conformados com o *statu quo* parece-me manifestamente exagerado... De facto, esta questão parece-me que nasceu de uma tentativa de quantificar tudo, numa tentativa de ser o mais rigoroso e justo possível na avaliação dos exames. Dizia-me um amigo que os critérios de correção são de tal forma pormenorizados que, por vezes, existem alunos com notas bastante razoáveis não tendo sequer acertado um único exercício de início ao fim...

Da minha parte, deixo já aqui a indicação de que, por vezes, também faço isso de “forçar” certos métodos de resolução:

- ▶ Quando peço para resolver um sistema pelo método da adição ordenada (e não pelo método de substituição, que eles costumam preferir); aqui o conteúdo é o método em si e não a solução do sistema propriamente dita;
- ▶ Quando proíbo explicitamente de usarem a fórmula resolvente das equações do 2.º grau nas equações incompletas (por causa da tão esquecida “elegância matemática”, que “não nos deixa” usar um canhão para matar uma simples mosca).

O que se pretende com estas duas situações acima é dar aos estudantes mais opções, mais ferramentas matemáticas, para que, no futuro, possam ser criativos (e críticos). Para quê aprender o método da adição ordenada “se já me safo muito bem com o da substituição”? Se de início não forçamos a aprendizagem de outros métodos, dificilmente os estudantes terão mais tarde a destreza e a intuição para perceberem que nalguns casos dá mais jeito um método do que o outro.

E de facto, para finalizar, quero crer que os nossos professores de Matemática, em geral, sabem bem acarinhar e apadrinhar os seus alunos mais criativos e com mais potencialidades, preparando-os da melhor maneira possível quer para os exames, quer para os seus posteriores estudos superiores.

SOLUÇÕES DOS DESAFIOS PROPOSTOS NO NÚMERO ANTERIOR:

A solução para o problema do Círculo de Moser (Em quantas partes pode dividir-se um círculo, usando todos os segmentos de reta formados por n pontos que estão na respetiva circunferência?) com $n = 6$ é 31. Para $n = 7$ é 57. A solução geral ($n \in \mathbb{N}$) é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}.$$

Em [6] podem encontrar-se três formas de demonstrar que esta expressão é a resposta ao problema pretendido: uma usando argumentos combinatórios, outra usando a fórmula de Euler para grafos planos e a última usando equações diferenciais.

Voltando à questão da criatividade em matemática, este é um bom exemplo de como se pode chegar ao mesmo resultado usando diferentes técnicas, aproveitando ainda para vos deixar as duas últimas frases deste artigo: *"This article illustrates how a classical problem can lead to different and creative developments. That is what makes mathematics so exciting."* ([6], p. 11).

Até ao próximo número do nosso *Recreio!*

[1] *The Guardian*, 13 de dezembro de 2021; <https://www.theguardian.com/science/2021/dec/13/did-you-solve-it-from-russia-with-logic>

[2] *Rádio Renascença*, 11 de março de 2024; <https://rr.sapo.pt/noticia/politica/2024/03/11/enganos-nas-eleicoes-votos-no-adn-podem-ter-tirado-tres-deputados-a-ad/370348>

[3] *Expresso*, 12 de março de 2024; <https://expresso.pt/politica/eleicoes/legislativas-2024/2024-03-12-Potencial-vitoria-do-PS-com-votos-por-apurar--A-matematica-e-matematica-creio-que-ninguem-discute-com-a-matematica-diz-Costa-646f4f33>

[4] *Record*, 27 de abril de 2024; <https://www.record.pt/internacional/competicoes-de-selecoes/europeu/euro-2024/detalhe/portugal-favorito-a-conquista-do-euro2024-numa-simulacao-feita-10-mil-vezes>

[5] *Observador*, 18 de dezembro de 2023; <https://observador.pt/opiniao/educacao-matematica-para-o-nosso-subdesenvolvimento/>

[6] Lucatero, C. R. (2017). *The Moser's Formula for the Division of the Circle by Chords Problem Revisited*. arXiv preprint arXiv:1701.08155



Exposições (ma)temáticas da SPM.

Disponíveis para exibição nas escolas, bibliotecas ou instituições similares*.

Mais Informações em www.spm.pt/exposicoes

*A requisição das exposições tem custos de manutenção.

A FÓRMULA DE LEGENDRE PARA FATORIAIS

Neste *Canto Délfico*, abordamos a fórmula de Legendre para o cálculo dos expoentes da fatorização em primos de um fatorial, tendo em mente a sua aplicação em problemas de Olimpíadas de Matemática.

1. UM PROBLEMA DAS OPM

O seguinte problema foi proposto na final das XIX Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM), em 2001, e encontra-se, com solução, num dos volumes de compilações de problemas das OPM feitas por Jorge Picado e Paulo Eduardo Oliveira [7].

Problema 1. *Com quantos zeros consecutivos termina o número*

$$2001! = 2001 \times 2000 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1?$$

O autor deste artigo do *Canto Délfico* também encontrou este problema noutras fontes, e.g. num teste de seleção de talentos das Olimpíadas Sul-Africanas, de 2009 (mas com o número 2009 no enunciado, em vez do número 2001). A fórmula de Legendre que é objeto deste *Canto Délfico* sistematiza a resposta a este tipo de problemas.

Começemos por escrever uma solução direta do problema das OPM. Para tal é conveniente usarmos a notação $\lfloor x \rfloor$, indicando o chão do número real x , ou seja, o maior inteiro menor ou igual a x . Assim, se a e b são inteiros positivos, o número $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ é o “número de vezes que b cabe em a ”, ou seja, é o quociente da divisão inteira de a por b .

Uma resolução do problema. Começemos por observar que o número de zeros com que $2001!$ termina é o maior inteiro k tal que $2001!$ é um múltiplo de 10^k . Tendo em conta a fatorização em primos $10 = 2 \times 5$, somos levados a procurar



Figura 1. Adrien-Marie Legendre (1752-1833).¹

descobrir qual é o maior inteiro r tal que 5^r divide $2001!$.

Note-se que r é o número de vezes em que o fator 5 aparece na fatorização de $2001!$ em primos (contando repetições). Denotando por r_i o expoente de 5 na fatorização em primos de i para cada $i \in \{1, \dots, 2001\}$, vemos que

$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2001}.$$

Para cada inteiro positivo n , consideremos o conjunto

$$S_n = \{i : r_i \geq n\},$$

que apenas para um número finito de valores de n é não vazio. Usando a notação $|X|$ para a cardinalidade de um

conjunto X , observemos que

$$|S_1| + |S_2| + \dots = r.$$

Ora $|S_n|$ é o número de múltiplos de 5^n que são menores ou iguais a 2001, ou seja,

$$|S_n| = \left\lfloor \frac{2001}{5^n} \right\rfloor.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} r &= \left\lfloor \frac{2001}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{625} \right\rfloor \\ &= 499. \end{aligned}$$

Portanto, 2001! é um múltiplo de 5^{499} , mas não de 5^{500} .

Por outro lado, como existem 1000 números pares menores do que 2001, sabemos em particular que 2001! é um múltiplo de 2^{499} . Logo 2001! é um múltiplo de 10^{499} , mas não de 10^{500} . Concluimos que 2001! termina precisamente com 499 zeros. $\square$

Nas linhas seguintes vamos ver uma sistematização do método aplicado nesta resolução.

2. VALORAÇÕES p -ÁDICAS

Dado um primo p e um inteiro não nulo a , denotemos por $v_p(a)$ o expoente de p na fatorização de a em números primos. Por outras palavras, temos

$$v_p(a) = \max\{k \in \mathbb{N} : p^k | a\},$$

onde a notação $x|y$ significa que x divide y (isto é, que y é um múltiplo de x) e onde se considera 0 como elemento de $\mathbb{N}$. Em particular, $v_p(a) = 0$ se e só se p não divide a . A função v_p é por vezes chamada de *valorização p -ádica*. Esta função já foi alvo de atenção nesta coluna da *Gazeta de Matemática*, num artigo sobre o Teorema de Monsky [3].

Exercício 1. Prove as seguintes propriedades da função v_p , para quaisquer inteiros positivos a, b :

1. $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.
2. $\min\{v_p(a), v_p(b)\} \leq v_p(a+b)$; se $v_p(a) < v_p(b)$, então $v_p(a) = v_p(a+b)$.
3. $v_p(m.d.c.(a_1, a_2, \dots, a_n)) = \min\{v_p(a_1), v_p(a_2), \dots, v_p(a_n)\}$
4. $v_p(m.m.c.(a_1, a_2, \dots, a_n))$

$$= \max\{v_p(a_1), v_p(a_2), \dots, v_p(a_n)\}.$$

Se adotarmos a definição razoável de que $v_p(0) = \infty$, com a convenção de que $\infty > x$ e $\infty + x = \infty = x + \infty$ para qualquer número real x , vemos que as propriedades 1 e 2 do exercício anterior se estendem para quaisquer inteiros a, b .

3. A FÓRMULA DE LEGENDRE

A função de Legendre associada ao primo p é a função e_p definida por $e_p(n) = v_p(n!)$, onde n é um número natural. Replicando o argumento usado na secção anterior na resolução do problema das OPM aí apresentado, deduz-se a seguinte Fórmula de Legendre.

Teorema 1. (Fórmula de Legendre). Para qualquer primo p e para qualquer inteiro positivo n , temos

$$e_p(n) = \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor.$$

Esta fórmula está associada a Adrien-Marie Legendre (1752-1833), devido ao estudo que este dela fez na sua obra *Essai sur la théorie des nombres* [5]. O leitor provavelmente ficará mais bem-impressionado com a elegância do enunciado e a prova da fórmula alternativa para $e_p(n)$, que apresentaremos na secção seguinte, e que Legendre obteve no mesmo livro.

Entretanto, façamos uma pausa para mencionar uma surpreendente curiosidade sobre a figura de Legendre, em que estamos a usar a palavra “figura” num sentido bastante literal. A figura 2 contém a única verdadeira imagem conhecida de Adrien-Marie Legendre. Trata-se de uma caricatura de Legendre e de Fourier, que foi descoberta pela comunidade matemática apenas em 2008. A ampliação na figura 1 foca-se no rosto do primeiro destes dois ilustres matemáticos franceses. Durante mais de um século, até 2005, o matemático Legendre era identificado erradamente, e em livros reputados, com a imagem na figura 3, que sabemos agora retratar o político, seu contemporâneo, Louis Legendre. A interessante história em torno desta confusão e do seu esclarecimento mereceu destaque num número das *Notices of the American Mathematical Society* [4], tendo por capa a referida caricatura.

¹ Ampliação de uma porção da imagem na figura 2.



Figura 2. Caricatura de Adrien-Marie Legendre (esquerda) e Joseph Fourier (direita), da autoria de Julien-Léopold Boilly.²



Figura 3. Louis Legendre (1752-1797).³

4. VARIANTE DA FÓRMULA

Explorando a igualdade

$$(x-1)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^k)=x^{k+1}-1,$$

válida para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, prova-se que a fórmula de Legendre admite a seguinte variante:

Teorema 2. (*Fórmula de Legendre – versão alternativa*). Para qualquer primo p e para qualquer inteiro positivo n , seja $S_p(n)$ a soma dos dígitos da expansão de n na base p . Então temos

$$e_p(n) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}.$$

Demonstração. A expansão de n na base p consiste na única decomposição

$$n = a_0 + a_1p + \dots + a_kp^k$$

em que $a_k \neq 0$ e $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$ para qualquer $i \in \{0, \dots, k\}$. Observemos que

$$\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = a_i + a_{i+1}p + \dots + a_kp^{k-i}$$

para qualquer $i \in \{0, \dots, k\}$. Atentando no somatório

$$\sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^k (a_i + a_{i+1}p + \dots + a_kp^{k-i})$$

e aí associando, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, as parcelas da forma $a^j p^r$, obtemos a seguinte cadeia de igualdades:

$$\begin{aligned} (p-1)e_p(n) &= (p-1) \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \\ &= (p-1) \sum_{i=1}^k a_i(1+p+\dots+p^{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i(p^i-1) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i(p^i-1) + a_0(p^0-1) \\ &= \sum_{i=0}^k a_i(p^i-1) \\ &= \sum_{i=0}^k a_i p^i - \sum_{i=0}^k a_i = n - S_p(n). \end{aligned}$$

Portanto, temos $e_p(n) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$. □

5. EXERCÍCIOS

O leitor pode apreciar a fórmula de Legendre (na formulação que lhe for conveniente) ao resolver os seguintes exercícios.

Exercício 2. Seja p um primo. Determine o expoente de p na fatorização de $(p^m)!$ em números primos.

Exercício 3. Determine todos os inteiros positivos n tais que $n!$ termina em exatamente 1000 zeros.

Exercício 4. Mostre que 2^n não divide $n!$, para qualquer inteiro positivo n , e determine todos os inteiros positivos n tais que 2^{n-1} divide $n!$.

Estes exercícios são exemplos típicos de problemas de matemática olímpica que se atacam facilmente com a fórmula de Legendre. Eles aparecem com solução, por exemplo, num livro de Andreescu e Andrica de introdução à Teoria dos Números na perspectiva da preparação para Olimpíadas de Matemática [2].

6. MAIS PROBLEMAS OLÍMPICOS

Convidamos agora o leitor a ter a satisfação de resolver um problema das Olimpíadas Internacionais de Matemática (OIM). Com efeito, o seguinte problema das OIM de 1972 resolve-se de modo natural com o auxílio da fórmula de Legendre.

Problema 2. Mostre que, para quaisquer inteiros positivos m, n , o número

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

também é um inteiro.

O livro de Andreescu e Andrica também inclui uma solução do problema [2]. Este problema serve como exemplo da utilidade da seguinte estratégia para provar que um inteiro a divide um inteiro b : aproveitar o facto de que a divide b se e só se $v_p(a) \leq v_p(b)$ para qualquer primo p .

A dificuldade dos problemas das OIM aumentou dramaticamente desde os primórdios desta prestigiada competição internacional anual para adolescentes, iniciada em 1959. O contraste entre o problema anterior e o seguinte, das OIM de 2019, é eloquente, sendo este exemplo escolhido por também se recorrer à fórmula de Legendre na solução oficial. Esta está disponível, por exemplo, na página web da OIM 2019 [1].

Problema 3. Determine todos os pares de inteiros positivos (k, n) tais que

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

O seguinte problema surgiu num teste de seleção da equipa romena para a OIM de 2010, podendo a sua solução, onde a fórmula de Legendre é aplicada, ser encontrada no texto de Mihet [6]. Sejam n, q inteiros positivos tais que todos os divisores primos de q são maiores do que n . Mostre que $n!$ divide o produto $(q-1)(q^2-1) \cdots (q^{n-1}-1)$.

O leitor com alguns conhecimentos elementares de Teoria dos Números, dentre os que são normalmente usados na matemática olímpica, pode preferir começar por atacar este último problema antes de abordar o problema da OIM de 2019...

REFERÊNCIAS

- [1] <https://www.imo2019.uk/wp-content/uploads/2018/07/solutions-r856.pdf>.
- [2] Titu Andreescu and Dorin Andrica. *Number Theory. Structures, Examples, and Problems*. Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2009.
- [3] Alfredo Costa. "O Teorema de Monsky". *Gazeta de Matemática*, (195):11-16, 2021.
- [4] Peter Duren. "Changing Faces: the Mistaken Portrait of Legendre". *Notices Amer. Math. Soc.*, 56(11):1440-1443, 2009.
- [5] Adrien-Marie Legendre. *Essai sur la théorie des nombres*. Cambridge Library Collection. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. Reprint of the second (1808) edition.
- [6] Dorel Mihet. "Legendre's and Kummer's Theorems Again." *Resonance*, 15:1111-1121, 2010.
- [7] Jorge Picado, Paulo Eduardo Oliveira, e Sociedade Portuguesa de Matemática. *Olimpíadas de Matemática*, volume 2. Texto Editores, 2007.

² Imagem do domínio público, via Wikimedia Commons, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Legendre_and_Fourier_\(1820\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Legendre_and_Fourier_(1820).jpg)

³ Imagem do domínio público, via Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/db/Louis_Legendre.jpg



PEDRO J. FREITAS
Universidade de
Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

CINEMA E GEOMETRIA DESCRITIVA

Tanto no cinema como na literatura, uma história pode não se contar linearmente, começando no princípio e acabando no fim. Há mesmo formas de tratar a linha narrativa que têm paralelos com a geometria descritiva.

No momento da escrita deste texto, está em cartaz o filme *Culpado – Inocente – Monstro* (2023) de Hirokazu Kore-eda, um *thriller* psicológico que conta a história de um pré-adolescente, Minato, e das suas relações com a mãe, Saori, e o seu professor, Hori.

O título original japonês é simplesmente *Monstro* – o título adotado em Portugal, tripartido, quis refletir uma das características centrais do filme, que terá contribuído para este ter ganhado o prémio de Melhor Argumento em Cannes: a história é contada três vezes, primeiro do ponto de vista da mãe, depois do do professor e finalmente do de Minato. Saori começa por se preocupar com o comportamento estranho do filho, bem como com algumas feridas que ele traz da escola, suspeitando de maus-tratos por parte do professor. Hori, porém, tem de lidar com problemas de mau comportamento e *bullying* por parte dos seus alunos, problemas que não compreende completamente. Minato, no centro da situação, é quem acaba por ter as maiores dificuldades, nas relações com os colegas e com as expectativas que os adultos têm dele.

Como se espera, de cada vez que a história nos é

contada, acrescentam-se pormenores que nos levam a reavaliar as situações ocorridas e as nossas convicções sobre as várias personagens (e talvez a ordem Inocente – Culpado – Monstro se adaptasse melhor à evolução da nossa perceção). A informação transmitida é doseada criteriosamente, no sentido de nos dar a perspetiva de cada personagem em cada momento, terminando num final solar, porém ambíguo. É um filme que merece uma segunda visita, que permita ao espectador ver o que está por detrás do que é imediatamente apresentado.

Esta estrutura narrativa tem semelhanças com a descrição geométrica de um objeto tridimensional feita através de vários pontos de vista – de frente, de lado e de cima. Tal como no filme, estas vistas podem ser aparentemente incompatíveis à primeira vista, mas trazem, cada uma, mais informação sobre o objeto representado, permitindo, no seu conjunto, uma perceção completa desse objeto. Assim, consideramos que esta maneira de apresentar uma história tem paralelo com a forma como a geometria descritiva apresenta os objetos. Relembramos aqui, a propósito, um exercício interessante: tentar encontrar um objeto

cuja vista de frente seja um quadrado, a vista de lado, um triângulo, e a vista de cima, um círculo.

Este modo de gerir a linha temporal da narrativa, repetindo-a de vários pontos de vista, é uma técnica usada em diversos filmes, em geral com a mesma finalidade: contar a história de forma fragmentada e parcial, permitindo ao espectador conhecê-la na totalidade apenas no final, deixando-o ora iludido ora perplexo à medida que o filme decorre. Um outro exemplo de uso desta técnica encontra-se em *Go* (1999) de Doug Liman, uma comédia criminal que conta a história de uma noite atribulada, que tem lugar pouco antes da véspera de Natal, envolvendo comprimidos de *ecstasy*, uma operação policial à paisana e uma viagem a Las Vegas. Mais uma vez, a história é contada três vezes, do ponto de vista de várias personagens, em que cada relato acrescenta sucessivamente informação. Neste filme, há mais um elemento interessante no que diz respeito à narrativa: a primeira cena é o início da última parte do filme e a frase de uma das personagens nessa cena, “Aqui estamos nós, quem havia de dizer?”, dá conta dos meandros complicados e inesperados do argumento.

Quer o tema quer a forma de gerir a narrativa de *Go* levaram a comparações com *Pulp Fiction* (1994) de Quentin Tarantino. Porém, apesar de os filmes terem temas semelhantes, Tarantino apresenta a narrativa de forma muito menos ordenada e sem recorrer a repetições. No entanto, em *Jackie Brown* (1997), Tarantino apresenta exatamente este tipo de estrutura, de história repetida sob várias perspetivas, numa cena passada num centro comercial, em que se dá a transação de um saco com dinheiro.

Diga-se também que Liman tem, aparentemente, um gosto particular por este tipo de manipulações da linha narrativa. Em *Edge of Tomorrow* (2014), apresenta uma personagem que, ao defender a Terra de invasores extraterrestres, entra num ciclo temporal, revivendo os seus últimos dias consecutivamente.

Está para surgir em breve mais um exemplo de narrativas deste tipo, desta vez numa série de autoria portuguesa, disponível na plataforma RTP Play. A série chama-se *Prisma*, é realizada por Sónia Balacó e Zé Bernardino e tem lugar no mundo das artes plásticas. São cinco episódios, com cinco personagens que cruzam os seus percursos (e as suas perspetivas) ao longo de um dia. No momento da publicação deste texto, é possível que a série já esteja disponível.

O filme que ficou mais famoso por usar esta estrutura de recontar a história sob várias perspetivas é *Rashomon* (1950) de Akira Kurosawa, que ganhou o Leão de Ouro no Festival de Veneza em 1951¹. No filme, a história da morte de um samurai é contada sucessivamente por quatro pessoas: a sua mulher, que viajava com ele, um bandido (interpretado por Toshiro Mifune) que foi capturado e é acusado de o assassinar, o próprio samurai (que fala através de um médium) e uma testemunha ocular. Os relatos de cada uma das personagens têm pontos em comum: uma aproximação que se estabeleceu entre o bandido e a mulher do samurai, uma luta entre o samurai e o bandido, e um punhal, que é usado para matar o samurai. Porém, o modo como estes elementos se interligam e mesmo a motivação e a responsabilidade de cada uma das ações são distintos em cada uma das versões, sendo o culpado pela morte do samurai diferente em cada versão, tornando as histórias incompatíveis. Por causa desta inconsistência das histórias baseadas em recordações, o filme deu nome a um fenómeno psicológico, o *efeito Rashomon*, sobre a deturpação na formação de memórias.

Também no filme *Culpado – Inocente – Monstro*, as cenas centrais que aparecem nas várias versões da história são as mesmas e, ainda que sejam consistentes, lançam novas visões sobre os acontecimentos, permitindo-nos separar a verdade da mentira. Também aqui a responsabilidade por várias ações vai mudando com cada versão. E, gradualmente, há uma quarta personagem que vai ganhando importância na narrativa e que vem a revelar-se central.

Finalmente, é de assinalar que parte da banda sonora do filme é da autoria de Ryuichi Sakamoto, que nunca chegou a ver a estreia por ter falecido dois meses antes. O filme é-lhe dedicado.

¹ O filme completo pode ser visto no site archive.org.



COMO POUPAR TESTES DE RASTREIO: A TESTAGEM EM GRUPOS COMO INTRODUÇÃO AO MÉTODO PROBABILÍSTICO

JOÃO RIBEIRO

NOVA LINES E FCT-UNL

jribeiro@tecnico.ulisboa.pt, joao.ribeiro@fct.unl.pt | <https://sites.google.com/site/joaorib94/>

O rastreio de doenças é uma peça fundamental no controlo de epidemias. Neste artigo estudamos um modelo matemático (simplificado) de testagem paralela. Veremos como o método probabilístico em combinatória nos permite facilmente obter esquemas de testagem com um número quase optimal de testes para uma dada população.

1. INTRODUÇÃO

Todos nós tivemos, recentemente, contacto próximo com testes de rastreio. Num contexto onde é necessário testar uma grande população num curto espaço de tempo e com recursos limitados, é fundamental correr o menor número possível de testes, e organizar o processo de testagem de forma altamente paralelizada. Este problema não é novo – foi estudado pela primeira vez há mais de 80 anos por Dorfman [Dor43], que pretendia otimizar o processo de testagem de soldados infetados com sífilis durante a Segunda Guerra Mundial.

Dorfman propôs o conceito de *pooling*: amostras recolhidas de vários soldados seriam misturadas e testadas em conjunto. Um teste positivo levaria, portanto, à conclusão de que pelo menos um dos soldados nesse grupo foi infetado (mas não *quantos* nem *quais* dos soldados). O objetivo seria usar o conceito de *pooling* para desenhar esquemas de testagem que, para uma população de n soldados, necessitassem de muito menos do que n testes.

No caso mais extremo, esquemas de testagem “em grupo” prosseguem em sequência. Isto é, o resultado dos primeiros i testes informa o conjunto de soldados a sele-

cionar para o $(i + 1)$ -ésimo teste. Por exemplo, se sabemos que um teste que inclui dez soldados devolveu “negativo”, então podemos removê-los da nossa população para os testes seguintes, pois sabemos que nenhum destes soldados está infetado. Apesar de poder levar a uma grande poupança no número de testes necessários para identificar os indivíduos infetados, estes esquemas em série requerem muito tempo e mão de obra, pois cada teste apenas pode ser determinado e efetuado quando os anteriores terminam. Consequentemente, existe um grande foco em desenhar esquemas de testagem em grupo que requerem um pequeno número de fases paralelas. O caso ideal corresponde a apenas uma fase de testagem, sendo portanto todos os testes definidos *a priori* e efetuados em paralelo. Chamamos a esquemas de testagem em grupo com esta propriedade *esquemas de testagem paralela*.

Neste artigo fazemos uma breve exploração da matemática por detrás dos esquemas de testagem paralela. É importante realçar que o modelo matemático considerado para estes testes, que herdamos de Dorfman, é simplificado e não se ajusta diretamente à realidade do rastreio de doenças infecciosas. Por exemplo, este modelo ignora, por um lado, efeitos de diluição de amostras e, por outro, ignora informação extra que pode ser revelada pelos testes. Também não consideramos questões de sensibilidade nem de especificidade (conceitos relacionados com a probabilidade de falsos negativos e falsos positivos) dos testes. Não obstante, ao longo das últimas décadas, o estudo de esquemas de testagem paralela estabeleceu-se como uma área madura com fortes ligações a combinatória, álgebra e teoria da probabilidade. Notavelmente, estes esquemas têm encontrado inúmeras aplicações a tópicos ortogonais à sua motivação original, como a transmissão de informação através de canais com ruído, aprendizagem automática, compressão de dados e sequenciação de ADN (incluindo o *Human Genome Project* [HG]).

A nossa exploração de esquemas de testagem paralela servirá como uma boa introdução ao método probabilístico. Esforçámo-nos por tornar a discussão acessível, necessitando o leitor apenas de conhecimentos básicos de combinatória e probabilidade discreta. Para não obscurecer as ideias mais interessantes com tecnicidades, optámos por não otimizar certos argumentos. Discussões muito mais extensas e otimizadas destes tópicos podem ser encontradas nos livros de Du e Hwang [DH00, HD06] e na monografia de Aldridge, Johnson, e Scarlett [AJS19]. No que diz respeito a aplicações, [AJS19, Secção 1.7] apresenta uma discussão extensa e variada.

2. REPRESENTAÇÕES DE ESQUEMAS DE TESTAGEM PARALELA

Começamos por apresentar uma forma simples e útil de representar esquemas de testagem paralela. Dada uma população de n indivíduos, vemos cada teste como um vetor binário $v \in \{0, 1\}^n$ onde $v_i = 1$ se e só se o item i participa no teste em causa. Por exemplo, se temos uma população de oito indivíduos e um dos testes é aplicado a uma mistura de amostras dos indivíduos 1, 2 e 5, então esse teste é representado pelo vetor $(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$. Consequentemente, podemos representar um esquema de testagem paralela para uma população de n indivíduos com t testes como uma matriz binária M de dimensão $t \times n$ em que cada linha representa um teste.

Dado um vetor binário u , definimos o seu *suporte*, denotado por $\text{supp}(u)$, como

$$\text{supp}(u) = \{i \mid u_i = 1\}.$$

Por exemplo, se $u = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ como acima, então $\text{supp}(u) = \{1, 2, 5\}$, o que corresponde às coordenadas com valor 1.

Dizemos que um vetor binário u é *coberto* por outro vetor v com o mesmo comprimento se $\text{supp}(u) \subseteq \text{supp}(v)$. Por exemplo, o vetor $u = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ é coberto pelo vetor $v = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$, pois para todas as coordenadas i tal que $u_i = 1$ também temos $v_i = 1$. Por outro lado, u não é coberto pelo vetor $w = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, pois $u_2 = 1$ e $w_2 = 0$.

Podemos representar os indivíduos infetados numa população de n indivíduos como um vetor $x \in \{0, 1\}^n$ em que $x_i = 1$ significa que o i -ésimo indivíduo está infetado. Portanto, o conjunto de indivíduos infetados corresponde a $\text{supp}(x)$. A aplicação do esquema de testagem paralela definido por $M \in \{0, 1\}^{t \times n}$ à população representada por x produz o vetor de resultados $y \in \{0, 1\}^t$ tal que

$$\text{supp}(y) = \bigcup_{j \in \text{supp}(x)} \text{supp}(M_{.j}),$$

onde $M_{.j}$ denota a j -ésima coluna de M . Dizemos que M é um *esquema de testagem paralela para n indivíduos e até d infetados* se para qualquer população $x \in \{0, 1\}^n$ com $|\text{supp}(x)| \leq d$ (i.e., a população x tem no máximo d infetados) conseguimos determinar $\text{supp}(x)$ dada apenas a descrição M do esquema de testagem paralela e o vetor de resultados y . O esquema de testagem paralela mais básico corresponde ao caso em que M é a matriz identidade de dimensões $n \times n$.

Para facilitar a compreensão, apresentamos um exemplo

de cálculo do vetor de resultados y a partir de uma matriz M e de um vetor de infetados x . Sejam

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $x = (1, 1, 0, 1, 0, 0)$. Isto corresponde ao caso em que o primeiro, o segundo e o quarto indivíduos numa população estão infetados. Primeiro, verificamos que $\text{supp}(x) = \{1, 2, 4\}$. Assim, sabemos que $y \in \{0, 1\}^4$ é tal que $\text{supp}(y) = \text{supp}(M_{.1}) \cup \text{supp}(M_{.2}) \cup \text{supp}(M_{.4})$. Como

$$\begin{aligned} \text{supp}(M_{.1}) &= \{1, 4\}, \text{supp}(M_{.2}) = \{2, 4\}, \\ \text{e } \text{supp}(M_{.4}) &= \{1, 2\}, \end{aligned}$$

segue que

$$\text{supp}(y) = \{1, 4\} \cup \{2, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 4\},$$

e portanto $y = (1, 1, 0, 1)$. Por outras palavras, o primeiro, o segundo e o quarto testes tiveram resultado positivo.

2.1. O Problema da Moeda Defeituosa

Iniciamos agora a nossa exploração de esquemas de testagem paralela, focando-nos no caso especial em que $d=1$, isto é, em que pretendemos apenas identificar até 1 infetado. Este caso corresponde ao seguinte conhecido enigma: temos um conjunto de n moedas com o mesmo peso, exceto no máximo uma delas, e temos também acesso a uma balança. De quantas pesagens necessitamos para identificar a moeda defeituosa, ou para provar que esta não existe?

Trivialmente, n pesagens são suficientes para identificar a moeda defeituosa. Veremos agora como a representação de esquemas de testagem paralela discutida acima nos permite facilmente resolver este enigma e mostrar que o número de testes realmente necessários é significativamente menor.

Teorema 1. *Existe um esquema de testagem paralela para uma população de tamanho n e até 1 infetado com $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ testes, onde $\lceil \cdot \rceil$ denota o menor inteiro maior do que o argumento ou igual (o teto).*

Demonstração. Começamos por identificar as propriedades que tal esquema de testagem paralela terá. Seja $M \in \{0, 1\}^{t \times n}$ uma qualquer matriz binária, e seja $x \in \{0, 1\}^n$ o vetor de infetados com $|\text{supp}(x)| \leq 1$. Recordamos que ao usarmos M como esquema de testagem paralela, obtemos o vetor de resultados y tal que $\text{supp}(y) = \bigcup_{j \in \text{supp}(x)} \text{supp}(M_{.j})$.

Caso $|\text{supp}(x)| = 0$ (i.e., não existem infetados), então $y = (0, \dots, 0)$. Por outro lado, quando $\text{supp}(x) = \{j\}$, então $y = M_{\cdot j}$. Concluimos que para obter o esquema de testagem paralela desejado basta construir uma matriz M tal que todas as colunas sejam distintas e nenhuma contenha apenas 0s. Isto pode ser feito representando os inteiros de 1 até n como sequências binárias de comprimento $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ e usando estas sequências como colunas de M . $\square$

Por exemplo, para identificarmos até $d = 1$ infetado numa população de $n = 7$ indivíduos basta usarmos $t = 3$ testes paralelos definidos pela matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se o vetor de infetados é $x = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, então o correspondente vetor de resultados y satisfaz $y = M_{\cdot 5} = (1, 0, 1)$. No geral, se $\text{supp}(x) = \{i\}$, então $y = M_{\cdot i}$. Como as colunas de M são todas distintas, conseguimos recuperar o indivíduo infetado i a partir de y . Quando $x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ (não há infetados), o vetor de resultados associado é $y = (0, 0, 0)$, que também é diferente de todas as colunas de M . Conseguimos, então, também discernir o caso em que não existem indivíduos infetados.

O Teorema 1 é ótimo relativamente ao número de testes, o que pode ser demonstrado através de um simples argumento de contagem. Qualquer esquema de testagem paralela para n indivíduos que detete até 1 infetado tem de desambiguar entre $n + 1$ eventos possíveis. Mais precisamente, tem de especificar que não existe nenhum infetado, ou, caso contrário, qual a posição do infetado entre os n indivíduos. Por outro lado, a aplicação de um esquema de testagem paralela com t testes gera um vetor binário $v \in \{0, 1\}^t$, e, portanto, pode desambiguar entre no máximo 2^t casos possíveis. Concluimos, então, que é necessário ter

$$2^t \geq n + 1.$$

Como t é inteiro, isto implica que $t \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$, que corresponde ao número de testes obtido no Teorema 1. Notavelmente, este argumento aplica-se igualmente ao caso em que os testes não são efetuados de forma paralela! Consequentemente, não perdemos nada em considerar apenas testes paralelos neste caso especial com no máximo $d = 1$ infetado.

3. MATRIZES DISJUNTAS

Na Secção 2.1 vimos um esquema simples para detetar até 1 infetado entre n indivíduos usando muito menos do que n testes. Gostaríamos, claro, de estender este resultado para o caso em que pretendemos detetar até $d > 1$ infetados de forma eficiente. Tendo isto em conta, definimos *matrizes disjuntas*, um conceito combinatorial simples e bastante útil no desenho de esquemas de testagem paralela com descodificação eficiente e que requerem poucos testes.

Definição 1 (Matriz d -disjunta) Uma matriz binária $M \in \{0, 1\}^{t \times n}$ diz-se d -disjunta se para quaisquer índices $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_d \leq n$ e $j \notin \{j_1, \dots, j_d\}$ temos que

$$\text{supp}(M_{\cdot j}) \not\subseteq \text{supp}(M_{\cdot j_1}) \cup \text{supp}(M_{\cdot j_2}) \cup \dots \cup \text{supp}(M_{\cdot j_d}).$$

Por palavras, uma matriz M é d -disjunta se qualquer coluna de M não é coberta pela união (entrada a entrada) de quaisquer outras d colunas de M . Outra maneira equivalente de descrever esta propriedade é dizer que para quaisquer índices $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_d \leq n$ e $j \notin \{j_1, \dots, j_d\}$ existe um índice i tal que $M_{ij} = 1$, mas $M_{ij_1} = M_{ij_2} = \dots = M_{ij_d} = 0$. Por exemplo, a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é 1-disjunta pois nenhuma coluna é coberta por outra coluna, mas não é 2-disjunta pois $\text{supp}(M_{\cdot 1}) = \{1, 2\}$ e $\text{supp}(M_{\cdot 2}) \cup \text{supp}(M_{\cdot 3}) = \{1, 3\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ e, portanto, $\text{supp}(M_{\cdot 1}) \subseteq \text{supp}(M_{\cdot 2}) \cup \text{supp}(M_{\cdot 3})$. Já a matriz identidade

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é 2-disjunta.

O seguinte teorema captura a utilidade das matrizes disjuntas.

Teorema 2. Se uma matriz $M \in \{0, 1\}^{t \times n}$ é d -disjunta, então representa um esquema de testagem paralela para n indivíduos e até d infetados.

Demonstração. Sejam $M \in \{0, 1\}^{t \times n}$ uma matriz d -disjunta, $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $|\text{supp}(x)| \leq d$, e $y \in \{0, 1\}^t$ o respetivo vetor de resultados. Recordamos que y é tal que $\text{supp}(y) = \bigcup_{j \in \text{supp}(x)} \text{supp}(M_{\cdot j})$. Provamos que o conjunto de indivíduos infetados, $\text{supp}(x)$, corresponde

exatamente aos índices $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que a coluna $M_{.j}$ é coberta por y .

Primeiro, notamos que se j é um indivíduo infetado, então y claramente cobre $M_{.j}$, pois $\text{supp}(M_{.j}) \subseteq \text{supp}(y)$ pela definição de y . Suponhamos agora que j não está infetado. Isto quer dizer que $j \notin \text{supp}(x)$. Como $|\text{supp}(x)| \leq d$ e M é d -disjunta, concluímos que

$$\text{supp}(M_{.j}) \not\subseteq \bigcup_{j' \in \text{supp}(x)} \text{supp}(M_{.j'}) = \text{supp}(y),$$

e, portanto, $M_{.j}$ não é coberta por y . $\square$

Uma propriedade importante implícita na demonstração do Teorema 2 é que esquemas de testagem paralela provenientes de matrizes disjuntas têm um simples algoritmo associado de reconstrução do conjunto $\text{supp}(x)$ de infetados – basta verificar quais as colunas de M que são cobertas pelo vetor de resultados y . No geral, não se conhecem algoritmos de reconstrução eficientes para esquemas de testagem paralela para até d infetados cujas matrizes associadas não são d -disjuntas. Para exemplificar o algoritmo de reconstrução para matrizes disjuntas, considere-se a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que é 2-disjunta. Pelo Teorema 2, concluímos que conseguimos identificar até 2 infetados com a ajuda do esquema de testagem descrito por M (com um número subótimo de testes!). Suponhamos que recebemos o vetor de testes $y = (1, 1, 1, 0, 1, 0)$. Para recuperar o conjunto de infetados $\text{supp}(x)$, procuramos as colunas de M que são cobertas por y . Como apenas $M_{.1}$ e $M_{.3}$ são cobertas por y , concluímos que os indivíduos 1 e 3 estão infetados.

Note-se que se M é um esquema de testagem paralela para n indivíduos e até d infetados, não é necessariamente verdade que M é também d -disjunta. Basta considerar a matriz M descrita na Secção 2.1, que não é 1-disjunta mas permite identificar até $d = 1$ infetado. No entanto, estas duas noções são “quase” equivalentes – o leitor curioso poderá convencer-se de que tal matriz M é sempre $(d - 1)$ -disjunta.

4. LIMITES DE ESQUEMAS DE TESTAGEM PARALELA PARA MAIS INFETADOS

Tendo em conta o Teorema 1, sabemos como detetar 1 infetado entre n indivíduos usando apenas $\lceil \log_2(n + 1) \rceil$ testes. Vimos também que este número de testes é ótimo através de um simples argumento de contagem. Considerando agora $d > 1$ infetados, quantos testes serão necessários?

Claro, n testes serão sempre suficientes, mas esperamos usar muito menos testes. Podemos facilmente generalizar o argumento de contagem para d infetados. Observamos que existem mais de

$$\binom{n}{\leq d} := \sum_{i=0}^d \binom{n}{i}$$

eventos possíveis, correspondentes aos possíveis subconjuntos de indivíduos infetados. Isto implica que necessitamos de

$$t \geq \log_2 \binom{n}{\leq d} \geq d \log_2(n/d) \quad (1)$$

testes para desambiguar entre estes casos, onde usamos a conhecida desigualdade $\binom{n}{\leq d} \geq \binom{n}{d} \geq (n/d)^d$, válida para todo o d tal que $1 \leq d \leq n$. Existem, no entanto, melhores minorantes para o número de testes necessários. Por exemplo, Füredi [Fü96] apresenta uma prova elegante de que

$$t \geq \frac{1}{4} d^2 \log_d n \quad (2)$$

quando $d \leq n^\alpha$ para qualquer $\alpha < 1/2$ e $n \geq n_0$ para uma certa constante n_0 . Anteriormente, sabíamos já por D'yachkov e Rykov [DR82] que é possível substituir a constante $1/4$ por uma expressão mais complicada que é aproximadamente igual a $1/2$ quando d é pequeno. De facto, até hoje este continua a ser o melhor minorante conhecido num extenso leque de parâmetros d e n . A exemplo de comparação, quando $d = n^{1/4}$, o minorante dado pela Equação (1) é da ordem $n^{1/4} \log_2 n$, enquanto o minorante da Equação (2) é da ordem $\sqrt{n}$, levando assim a uma grande diferença assintótica.

5. ESQUEMAS DE TESTAGEM PARALELA E O MÉTODO PROBABILÍSTICO

Será que o minorante dado pela Equação (2) está muito longe da verdade? Para respondermos a esta questão, usaremos o *método probabilístico*. Esta estratégia elegante foi ini-

cialmente usada por Szele [Sze43] e Erdős [Erd47] em teoria de grafos e por Shannon [Sha48a, Sha48b] em teoria da informação. Para estabelecermos a existência de objetos (por exemplo, matrizes binárias $t \times n$) com uma dada propriedade desejada (por exemplo, ser d -disjunta), começamos por definir uma experiência aleatória apropriada sobre um conjunto de objetos. De seguida, demonstramos que esta experiência aleatória devolve um objeto com a propriedade desejada com probabilidade positiva. Isto garante a existência do objeto desejado de forma “não construtiva”.

Desde a sua introdução, o método probabilístico tem encontrado inúmeras aplicações em matemática discreta e na teoria da computação. O livro de Alon e Spencer [AS16] é uma excelente fonte de tais aplicações. A aplicação do método probabilístico ao estudo de esquemas de testagem paralela que discutiremos serve como boa introdução a esta técnica.

O seguinte teorema estabelece, com a ajuda do método probabilístico, a existência de um esquema de testagem paralela para n indivíduos e até d infetados com aproximadamente $4d^2 \ln n$ testes. Ao contrário dos exemplos básicos mais comuns da aplicação do método probabilístico, que impõem distribuições uniformes na classe de objetos e cuja respetiva análise é diretamente substituível por um simples argumento de contagem, o exemplo que veremos nesta secção usa uma distribuição não uniforme sobre o espaço das matrizes binárias $M \in \{0, 1\}^{t \times n}$ que depende do parâmetro d . É, portanto, mais aparente a grande utilidade do método probabilístico nesta situação.

Teorema 3. *Existe uma matriz d -disjunta $M \in \{0, 1\}^{t \times n}$ com $t = \lceil e d(d+1) \ln n \rceil$. Em particular, existe um esquema de testagem paralela para n indivíduos e até d infetados com $t = \lceil e d(d+1) \ln n \rceil$ testes.*

Demonstração. Aplicamos o método probabilístico. Construimos uma matriz binária $M \in \{0, 1\}^{t \times n}$ decidindo que cada entrada é, independentemente das restantes, 1 com probabilidade $p \in [0, 1]$ (e 0 caso contrário), onde o número de testes t e a probabilidade p são parâmetros que escolhermos mais tarde.

Fixemos quaisquer $d+1$ colunas de M . A probabilidade de a primeira coluna ser coberta pela união das restantes d colunas é exatamente

$$(1 - p(1-p)^d)^t. \quad (3)$$

Para nos convenceremos disto, começamos por observar que a primeira entrada da primeira coluna não é coberta pela união das primeiras entradas das restantes d colunas exata-

mente quando a primeira entrada da primeira coluna é 1 e as restantes primeiras entradas são todas 0. Isto acontece com probabilidade $p(1-p)^d$. Para que a primeira coluna seja coberta pela união das restantes, este evento não pode ocorrer em nenhuma das t coordenadas. Obtemos então a Equação (3) usando a independência entre as várias coordenadas.

A matriz M é d -disjunta se e só se o evento acima não ocorrer para nenhuma escolha de $d+1$ colunas de M e seleção da primeira coluna. Existem n maneiras de escolher a “coluna-alvo”, e, posteriormente, $\binom{n-1}{d}$ maneiras de escolher d colunas dentre as restantes $n-1$ colunas de M . Para cada uma destas escolhas a probabilidade da coluna alvo ser coberta pela união das restantes é dada pela Equação (3). Usando o facto de que

$$\Pr[E_1 \vee E_2 \vee \dots \vee E_m] \leq \sum_{i=1}^m \Pr[E_i]$$

para quaisquer eventos $E_1, \dots, E_m$ (a famosa *union bound* ou desigualdade de Boole), temos que a matriz M não é d -disjunta com probabilidade menor ou igual a

$$n \cdot \binom{n-1}{d} \cdot (1 - p(1-p)^d)^t.$$

Falta apenas, então, escolher p e t apropriadamente para que tenhamos

$$n \cdot \binom{n-1}{d} \cdot (1 - p(1-p)^d)^t < 1, \quad (4)$$

caso em que concluímos que existe uma matriz d -disjunta $M \in \{0, 1\}^{t \times n}$. Começamos por notar que

$$(1 - p(1-p)^d)^t \leq e^{-tp(1-p)^d},$$

consequência da desigualdade $(1+x)^t \leq e^{tx}$ válida para todo o $x \geq -1$ e $t \geq 0$. Como

$$n \cdot \binom{n-1}{d} \leq n(n-1)^d,$$

onde usamos a desigualdade $\binom{a}{b} \leq a^b$ válida para todos os naturais $a \geq b$, para a equação (4) se verificar é então suficiente escolhermos p e t tal que

$$n \cdot (n-1)^d \cdot e^{-tp(1-p)^d} < 1. \quad (5)$$

Começamos por analisar o termo $p(1-p)^d$ a fim de otimizarmos a escolha de p . Com $d \geq 1$ fixo, a função $f(p) = p(1-p)^d$ é maximizada em $]0, 1[$ quando $p = \frac{1}{d+1}$. Isto acontece pois

$$f'(p) = (1-p)^d - dp(1-p)^{d-1}$$

e, portanto $f'(p) \geq 0$ exatamente quando $p \leq \frac{1}{d+1}$, com igualdade quando $p = \frac{1}{d+1}$. Usando $p = \frac{1}{d+1}$, caso em que

$$f(p) = \frac{1}{d+1} \cdot \left(\frac{d}{d+1}\right)^d,$$

ao aplicarmos logaritmos a ambos os lados da Equação (5) concluímos que t satisfaz a Equação (5) desde que

$$\begin{aligned} t &> \left(\frac{d+1}{d}\right)^d (d+1)(d \ln(n-1) + \ln n) = \\ &= (1 + 1/d)^d (d+1)(d \ln(n-1) + \ln n). \end{aligned}$$

Como $(1 + 1/d)^d < e$ para todo o $d \geq 1$ e $d \ln(n-1) + \ln n \leq (d+1) \ln n$, concluímos que é suficiente termos

$$t \geq e d(d+1) \ln n.$$

Podemos escolher, então, $t = \lceil e d(d+1) \ln n \rceil$, como desejado.

Comparando o Teorema 3 com o minorante da Equação (2), vemos que estes diferem apenas num fator multiplicativo de ordem $\ln d$. Concluímos que os minorantes e majorantes aqui discutidos estão perto do número ótimo de testes, e que, quando d é suficientemente pequeno comparado com n , o número de testes necessário é também muito mais pequeno do que o majorante trivial, n . Com vista a uma comparação mais concreta, a Tabela 1 apresenta o número de testes suficientes para detetar até d infetados numa população de n indivíduos para várias escolhas destes parâmetros. $\square$

$d \backslash n$	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
2	76	113	151	188	226
5	376	564	752	939	1127
10	1377	2066	2754	3443	4131
20	5278	7887	10506	13145	15773

Tabela 1: Número de testes suficientes pelo Teorema 3 para detetar até d infetados numa população de n indivíduos, para várias escolhas de (d, n) . Entradas a vermelho representam os casos em que o número de testes é maior do que n , o majorante trivial.

Finalmente, é interessante também realçar que a demonstração do Teorema 3 garante não só a existência de um esquema de testagem paralela com poucos testes, mas também especifica um simples e prático algoritmo probabilístico que recebe como *input* naturais n e $d \leq n$ e devol-

ve com probabilidade de, pelo menos, 0.99 um esquema de testagem paralela para n indivíduos e até d infetados com um número ligeiramente mais elevado de testes $t = \lceil 20d(d+1) \ln n \rceil$.

6. INDO MAIS ALÉM

A nossa exploração de esquemas de testagem paralela foi, necessariamente, superficial. Por exemplo, apesar de o Teorema 3 garantir a existência de esquemas de testagem paralela que usam poucos testes, este não providencia um algoritmo *determinístico e eficiente* que, dados o tamanho da população n e o número máximo de infetados como *inputs*, devolva uma matriz d -disjunta $M \in \{0, 1\}^{t \times n}$. O desenho e análise de tais algoritmos foi alvo de grandes esforços. Um resultado clássico de Kautz e Singleton [KS64] apresenta um algoritmo eficiente que, dados n e d , constrói matrizes d -disjuntas $M \in \{0, 1\}^{t \times n}$ com $t = cd^2 \log_d^2 n$ para uma constante $c > 0$ independente de n e d . Quando d é muito mais pequeno do que n , este valor de t é assintoticamente maior do que o valor de t obtido no Teorema 3. Por outro lado, quando, por exemplo, $d = n^\alpha$ para alguma constante $\alpha > 0$, o número de testes do método de Kautz-Singleton é muito mais pequeno assintoticamente do que o número de testes garantido pelo Teorema 3. Esta linha de investigação culminou também num algoritmo eficiente de Porat e Rothschild [PR08] que, dados n e d , constrói matrizes d -disjuntas $M \in \{0, 1\}^{t \times n}$ com $t = Cd^2 \log_2 n$ para uma constante $C > 0$ grande. Este valor de t é da ordem do valor não construtivo apresentado no Teorema 3, mas não é necessariamente prático devido à constante C acima.

O estudo moderno de esquemas de testagem paralela também considera outras direções motivadas por aplicações práticas. Por exemplo, podemos permitir uma pequena probabilidade de erro na recuperação do conjunto de indivíduos infetados, sendo esta probabilidade tomada sobre uma escolha uniformemente aleatória do conjunto de d infetados e, se relevante, sobre a aleatoriedade usada para construir o esquema de testagem. Neste caso, usando uma estratégia semelhante à da demonstração do Teorema 3, é possível concluir que o número de testes suficientes é da ordem de $d \log_2(n/d)$ [AJS19, Secções 1.3 e 1.4 e Capítulo 2]. Uma longa sequência de trabalhos tem também vindo a estudar esquemas de testagem resilientes a erros nos resultados dos testes [AJS19, Capítulo 3]. Os esquemas apresentados neste breve artigo não têm garantias de resiliência, e garantem a reconstrução correta de qualquer conjunto de até d infetados. Numa direção ortogonal, vários grupos

têm estudado esquemas de testagem paralela que permitem a reconstrução extremamente rápida do conjunto de infetados. Como ponto de partida, o algoritmo de reconstrução associado a esquemas de testagem paralela baseados em matrizes disjuntas $M \in \{0,1\}^{t \times n}$ tem complexidade temporal de ordem $n \cdot t$. Atualmente, conhecemos construções de esquemas de testagem paralela com um número quase-ótimo de testes e com algoritmos de reconstrução associados com complexidade temporal quase-ótima (na ordem de $t \log_2^2 n$) [CN20].

Os esquemas estudados neste artigo englobam apenas uma fase de testagem que pode ser completamente paralelizada. Outra direção de investigação recai sobre esquemas que consistem em múltiplas fases de testagem sequenciais, o que leva a uma ainda maior redução do número de testes à custa de limites adicionais na paralelização. Exemplos particulares são o esquema original de Dorfman [Dor43] e esquemas baseados em *square arrays* [PS94].

Agradecimento: O autor agradece ao revisor anónimo por vários comentários e sugestões pertinentes que melhoraram a exposição deste artigo.

REFERÊNCIAS

- [AJS19] Matthew Aldridge, Oliver Johnson and Jonathan Scarlett. "Group Testing: An Information Theory Perspective". *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 15(3-4):196–392, 2019.
- [AS16] Noga Alon and Joel Spencer. *The Probabilistic Method*. John Wiley & Sons, 2016.
- [CN20] Mahdi Cheraghchi and Vasileios Nakos. "Combinatorial Group Testing and Sparse Recovery Schemes with Near-Optimal Decoding Time". In *2020 IEEE 61st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 1203–1213, 2020.
- [DH00] Ding-Zhu Du and Frank Hwang. *Combinatorial Group Testing and its Applications*. World Scientific, 2000.
- [Dor43] Robert Dorfman. "The Detection of Defective Members of Large Populations". *The Annals of Mathematical Statistics*, 14(4):436–440, 1943.
- [DR82] Arkadii Georgievich D'yachkov and Vladimir Vasil'evich Rykov. "Bounds on the Length of Disjunctive Codes". *Problemy Peredachi Informatsii*, 18(3):7–13, 1982.
- [Erd47] Paul Erdős. "Some remarks on the theory of graphs". *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53(4):292–294, 1947.
- [Für96] Zoltán Füredi. "On r -cover-free families". *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 73(1):172–173, 1996.
- [HD06] Frank Hwang and Ding-Zhu Du. *Pooling Designs and Nonadaptive Group Testing: Important Tools for DNA Sequencing*. World Scientific, 2006.
- [HG] The Human Genome Project. <https://www.genome.gov/human-genome-project>.
- [KS64] William Kautz and Richard Singleton. "Nonrandom binary superimposed codes". *IEEE Transactions on Information Theory*, 10(4):363–377, 1964.
- [PR08] Ely Porat and Amir Rothschild. "Explicit non-adaptive combinatorial group testing schemes." In Luca Aceto, Ivan Damgård, Leslie Ann Goldberg, Magnús M. Halldórsson, Anna Ingólfssdóttir, and Igor Walukiewicz, editors, *Automata, Languages and Programming*, pages 748–759. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [PS94] Ravindra Phatarfod and Aidan Sudbury. "The use of a square array scheme in blood testing". *Statistics in Medicine*, 13(22):2337–2343, 1994.
- [Sha48a] Claude Shannon. "A Mathematical Theory of Communication". *Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, 1948.
- [Sha48b] Claude Shannon. "A Mathematical Theory of Communication." *Bell System Technical Journal*, 27(4):623–656, 1948.
- [Sze43] Tibor Szele. "Kombinatorikai vizsgálatok az iranyított teljes graffal kapcsolatban". *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, 50:223–256, 1943.

SOBRE O AUTOR

João Ribeiro é atualmente Professor Auxiliar no Departamento de Informática da FCT-UNL e membro integrado do NOVA LINS. Em agosto de 2024 inicia funções como Professor Auxiliar no Departamento de Matemática do IST. Antes disto, saltitou entre Portugal, Suíça, Reino Unido, e EUA. Os seus interesses centram-se na teoria da computação, com ênfase em criptografia, pseudorandade, e teoria de códigos e da informação.



JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

O PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS

Uma série recente da Netflix, *3 Body Problem*, atraiu bastante atenção. Esta série é baseada num romance com o mesmo título. Neste texto, iremos ver a que é que o título se refere.

O *Problema dos Três Corpos* é um romance de ficção científica, da autoria do autor chinês Liu Cixin, publicado originalmente sob a forma de livro (em chinês) em 2008.¹ Uma tradução para inglês do romance foi publicada em 2014 (veja-se [2]) e foi galardoada com o prestigiado prémio Hugo, que se destina a obras de ficção científica. Foi adaptado a uma série televisiva (*3 Body Problem*), que pode ser vista na Netflix.

O título do romance refere-se a um famoso problema, o problema dos três corpos. Vejamos do que é que se trata.

A lei da gravitação universal afirma que quaisquer dois objetos se atraem um ao outro com uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa. Esta lei é geralmente associada a Isaac Newton, embora não tenha sido ele a primeira pessoa a tê-la enunciado. Com efeito, já tinha sido sugerida pelo astrónomo francês Ismaël Bullialdus em 1645, bem como pelo matemático italiano Giovanni Alfonso Borelli em 1666. Um contemporâneo de Newton, Robert Hooke, escreveu mesmo, em 1670, que “todos os corpos celestes têm uma atração ou um poder gravitacional na direção dos seus centros”² e sabe-se que Hooke era da opinião de que a intensidade desse poder gravitacional era inversamente proporcional ao quadrado da distância. A grande contribuição de Newton para a lei da gravitação universal consistiu em provar que as leis de Kepler³ eram uma consequência daquela lei.

Em particular, a primeira lei de Kepler, segundo

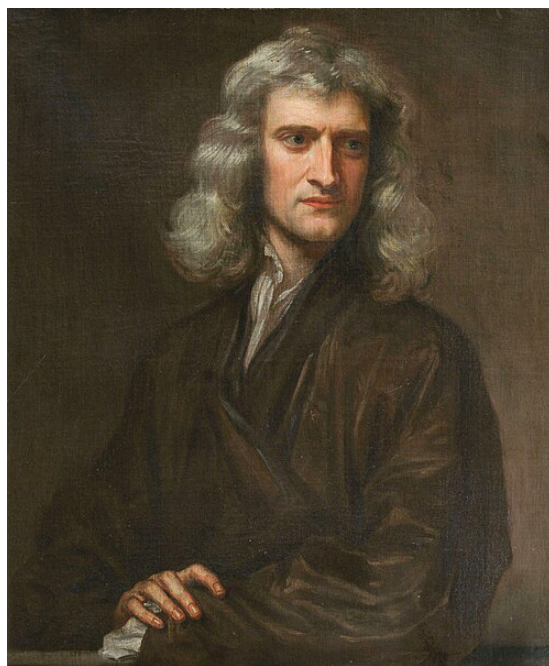


Figura 1. Isaac Newton.

a qual as órbitas dos planetas são elípticas, estando o Sol num dos seus focos, é uma consequência da lei da gravitação. Isto resolve então o chamado *problema dos dois corpos*: sabendo que dois corpos se atraem mutuamente através de uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância, qual é a trajetória que eles

seguem? Ao contrário do que normalmente se pensa, não é verdade que o corpo menos maciço percorre uma órbita elíptica em torno do outro; o que acontece é que *ambos* os corpos seguem trajetórias elípticas em torno do centro de massa comum. Mas, por exemplo, no caso do par formado pela Terra e pelo Sol, esse centro de massa fica no interior do Sol, pelo que, para efeitos práticos é razoável afirmar que a Terra orbita em torno do Sol. Temos algo análogo para o par formado pela Lua e pela Terra. Só que nem sempre é assim. Por exemplo, o centro de massa do sistema formado por Plutão e pelo seu maior satélite, Caronte, fica fora de Plutão.

E quando há três corpos, tal como, por exemplo, o Sol, a Terra e a Lua? O problema dos três corpos consiste em encontrar o movimento de três corpos sabendo que cada um deles atrai qualquer um dos outros dois através de uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância. Newton foi a primeira pessoa a estudar este problema (veja-se [5, cap. 10]). Uma conclusão que tirou rapidamente foi a de que a primeira lei de Kepler, embora seja válida para um sistema solar que consiste num único planeta que gravita em torno de uma estrela, só é aproximadamente válida em geral, pois o movimento de cada planeta em torno do Sol é também afetado, em maior ou menor grau, por todos os restantes planetas. Isto é irónico, uma vez que foi a compatibilidade entre as leis de Kepler e a lei da gravitação universal que levou à aceitação desta última.

O próprio Newton estudou o problema dos três corpos no caso do sistema formado pelo Sol, pela Terra e pela Lua e usou os resultados obtidos a fim de conseguir previsões mais fiáveis relativas à posição da Lua no céu. Mas, contrariamente ao que aconteceu com o problema dos dois corpos, nunca conseguiu resolver o dos três corpos.

Nem Newton nem ninguém que tenha vindo a seguir a ele. Os matemáticos fizeram então o que costumam fazer nesta situação: já que não conseguiam resolver o problema em geral, começaram a resolvê-lo em casos particulares. Euler encontrou soluções do problema dos três corpos nas quais os três objetos são colineares, enquanto Lagrange encontrou soluções nas quais os três objetos formam os vértices de um triângulo equilátero.⁴ Também abordaram o problema no caso em que um dos objetos tem uma massa muito mais pequena do que os restantes (o chamado problema restrito dos três corpos).

Em 1884, o rei Oscar II da Suécia, que fora um brilhante estudante de matemática na sua juventude, patrocinou



Figura 2. Henri Poincaré

um prémio de matemática para celebrar o seu sexagésimo aniversário, que teria lugar em 1889. O vencedor receberia uma medalha de ouro e 2500 coroas suecas. A comissão encarregada de avaliar os trabalhos recebidos consistiu em Gösta Mittag-Leffler (o matemático sueco mais conceituado daquela época), Karl Weierstrass e Charles Hermite (veja-se [1]). O prémio foi atribuído a Henri Poincaré pelo seu trabalho “Sobre o Problema dos Três Corpos e as Equações da Dinâmica”. Estava previsto que o trabalho fosse publicado na revista *Acta Mathematica*. Um dos editores daquela revista, Edvard Phragmén, ficou encarregado de rever o manuscrito para publicação e ficou intrigado com diversas passagens. O que não é de espantar, pois, como escreveu mais tarde Jean Dieudonné (veja-se [3]),

¹ Fora publicado de forma seriada dois anos antes.

² Who Really Discovered the Law of Gravity? <https://www.sciencefocus.com/science/who-really-discovered-the-law-of-gravity>

³ Rafael C. Asth, *Leis de Kepler: Entenda Quais São*; <https://www.todamateria.com.br/leis-de-kepler/>

⁴ Richard Montgomery, “The Three-Body Problem”, *Scientific American* (Agosto de 2019); <https://www.scientificamerican.com/article/the-three-body-problem/>

“Como em tantos dos seus artigos, ele deu liberdade à sua imaginação e à sua extraordinária intuição, a qual raramente o enganava; em quase todas as secções há alguma ideia nova. Mas não vale a pena procurar definições e é frequentemente necessário adivinhar o que é que ele tem em mente interpretando o contexto. Para muitos enunciados, pura e simplesmente não forneceu qualquer demonstração e é difícil encontrar um argumento que não levante dúvidas.”

De facto, o texto que foi finalmente publicado, após um elevado número de correções, era muito diferente daquele ao qual fora atribuído o prémio. Além disso, o número da *Acta Mathematica* que continha a versão original do artigo já tinha sido impresso. Foi necessário fazer uma reimpressão, que foi cobrada a Poincaré (e cujo valor excedeu o prémio monetário que lhe fora atribuído).

E qual foi a contribuição de Poincaré? Ele mostrou que um determinado método que potencialmente poderia resolver o problema dos três corpos não funcionava. Além disso, mostrou que aquele problema é caótico, ou seja, que alterações minúsculas às condições iniciais levam rapidamente a soluções radicalmente distintas. Isto além de ter desenvolvido métodos qualitativos para estudar o problema, ou seja, métodos que não dependem de termos uma expressão analítica para descrever as soluções. Poincaré acabaria por desenvolver bastante estas ideias numa obra publicada em três volumes com o título *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*.

Entretanto, surgiu a Teoria da Relatividade Geral, que tornou estes problemas ainda mais complexos. De facto, no âmbito daquela teoria nem mesmo o problema dos dois corpos tem uma solução simples e fácil de descrever. Em particular, *não* é verdade que, num sistema solar com um único planeta, a órbita desse planeta seja uma elipse, mas está tanto mais próxima de ser elíptica quanto mais distante o planeta estiver da estrela em torno da qual está a orbitar. É por isso que este fenómeno começou por ser detetado relativamente à órbita de Mercúrio: não é elíptica e nem mesmo a influência dos restantes planetas do Sistema Solar explica isso no quadro da teoria da gravitação de Newton.

O problema dos três corpos continua a ser estudado no presente. Por exemplo, em 2000, os matemáticos Alain Chenciner e Richard Montgomery (veja-se [4])

descobriram uma solução do problema dos três corpos na qual todos têm a mesma massa e se movem ao longo de uma figura em forma de oito (o nome técnico desta figura é lemniscata de Bernoulli). Uma tal configuração nunca foi observada na Natureza. Talvez um dia isso venha a acontecer.

BIBLIOGRAFIA

- [1] June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem*, American Mathematical Society, 1997.
- [2] Liu Cixin, *The Three-Body Problem*, Head of Zeus, 2014.
- [3] Florin Diacu, “The Solution of the n -Body Problem”, *The Mathematical Intelligencer* **18** (3), 1996.
- [4] Richard Montgomery, “A New Solution to the Three-Body Problem”, *Notices of the American Mathematical Society* **48**(5), 2001.
- [5] Richard Westfall, *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton*, Cambridge University Press, 1980.



JORGE NUNO SILVA
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

CALIGRAFIA E ARITMÉTICA

Foi descoberto recentemente, na Biblioteca Pública de Évora, um manuscrito do jesuíta António Pessoa, de meados do século XVII. Esse texto, *Orthographia Pratica de Varias Letras*, é dedicado principalmente à técnica e à arte da grafia das letras, mas contém também um capítulo de aritmética e um terceiro sobre a *demonstração das ciências*. O texto que segue pretende dar uma ideia da parte matemática do trabalho de António Pessoa.

Em Claro et al. 2023, é apresentada uma transcrição do texto de Pessoa e vários estudos sectoriais, por vários autores de consequência. Esta é, naturalmente, a nossa principal referência, a par com o original (Pessoa c. 1648).

O manuscrito a que aqui nos referimos é uma obra-prima de Caligrafia. Os dotes de António Pessoa são ímpares nesta matéria e o resultado é lindíssimo. A parte que abordaremos superficialmente aqui, e que trataremos com mais profundidade noutro local, é a dedicada à Aritmética.



Figura 1. Página de rosto.



Figura 2. A aritmética.

173

TAVOADA CHAMESEM PRATICA

1	1	1	3	3	9	6	6	36
2	2	4	3	4	12	6	7	42
3	3	9	3	5	15	6	8	48
4	4	16	3	6	18	6	9	54
5	5	25	3	7	21	6	10	60
6	6	36	3	8	24			
7	7	49	3	9	27	7	7	49
8	8	64	3	10	30	7	8	56
9	9	81	4	4	16	7	9	63
10	10	100	4	5	20	7	10	70
			4	6	24			
2	2	4	4	7	28	8	8	64
2	3	6	4	8	32	8	9	72
2	4	8	4	9	36	8	10	80
2	5	10						
2	6	12	5	5	25	9	9	81
2	7	14	5	6	30	9	10	90
2	8	16	5	7	35			
2	9	18	5	8	40	10	10	100
2	10	20	5	9	45			
			5	10	50	10	100	1000

Figura 3. A tabuada.



Figura 4. Uma soma.

O autor começa com a tabuada da multiplicação. Primeiro, constam os quadrados dos números de 1 a 10, depois vêm os restantes produtos elementares (com repetição desses quadrados). O reconhecimento implícito da comutatividade permite dedicar somente uma página aos produtos básicos.

Depois de várias apresentações gráficas distintas da tabuada, o autor dá uma lista de conversão para pesos e medidas, após o que aborda a soma, para a qual fornece exemplos, em que podemos ver o respectivo algoritmo, a aplicação da prova dos nove e a descrição, por extenso, de todos os passos do processo. Este modelo de apresentação é seguido em toda a obra.

As páginas seguintes são dedicadas à subtração, que merece tratamento semelhante. Alguns exemplos apresentam erros de cálculos. A multiplicação, cujo algoritmo é virtualmente igual ao dos nossos dias, é apresentada em contexto, por exemplo, como preço pago numa compra, sabendo a quantidade e o preço unitário.

Os exemplos vão ficando mais complexos e o autor multiplica números não inteiros, mostrando lacunas na execução dos algoritmos. Há inconsistências e erros, além de alguns lapsos. Noutro local, exibiremos um estudo completo de todas as falhas matemáticas do texto, que não cremos serem todas da mesma natureza.

A divisão é apresentada com prova dos nove e prova real (*Prova Imperial*, nas palavras de Pessoa).

À semelhança do que sucede com os tratados de Aritmética Comercial do século anterior (ver Silva e Freitas 2022), António Pessoa aborda a Regra de Três e a Regra das Companhias. De ambas dá vários exemplos. Por fim, o autor reconhece que a aritmética não é o seu forte:

"... com que concluímos esta obra, por não ser possível alcançar mais nesta arte, sendo que não é tanto de nossa profissão como a Ortografia prática de várias letras, em que só fiz meu fundamento. Vale."

Pessoa c. 1648, p.240

Embora se trate de um texto elementar e não isento de incorrecções, somos de opinião de que justifica a atenção dos historiadores. O seu estudo aprofundado poderá revelar-se útil, nomeadamente melhorando a nossa compreensão da prática e do ensino da matemática no contexto dos colégios jesuítas da época.



Figura 5. Uma multiplicação.



Figura 6. Uma divisão.

REFERÊNCIAS

Claro, Ana et al., eds. (2023). *Orthographia, Arithmetica e Siencias – Três Tratados do Pe. António Pessoa, S.J. (c. 1648)*. Lisboa: Scribe.

Pessoa, António (c. 1648). *Orthographia Pratica de Varias Letras pello P. Antonio Pessoa da Companhia de IESV, natural da Villa do Crato*. Biblioteca Pública de Évora, Maniz. Cód. 99.

Silva, Jorge Nuno e Pedro Freitas, eds. (2022). *O Tratado da Prática de Aritmética de Gaspar Nicolas (1519)*. Lisboa: FCG.



O PROBLEMA *16 REVISITADO

CARLOS GOMES

ESCOLA SECUNDÁRIA DE AMARANTE

carlosgomes@esamarante.edu.pt

<https://orcid.org/0000-0003-1205-7795>

Muitos são os exemplos em que um problema apresentado aos alunos (em manuais, cadernos de exercícios, provas, exames nacionais) não é mais do que um caso particular de um resultado geral. Neste texto trazemos como exemplo um problema de um exame nacional, para tentar mostrar o potencial didático que ele pode conter quando o exploramos, com tempo, na sala de aula ou fora dela. Colocando ênfase nas premissas que garantem o resultado solicitado, usando o arsenal matemático já disponível, ou outro ainda por explorar, testando hipóteses recorrendo a modelos dinâmicos criados para o efeito, é prazer garantido, não para todos, mas para muitos que estão à sua espera, ao abrigo da escola inclusiva.

O PROBLEMA

Considere as funções f e g , de domínio $]0, +\infty[$, definidas por $f(x) = \frac{k}{x}$ e por $g(x) = -\frac{k}{x}$, com $k > 0$.

Considere ainda:

- ▶ dois pontos P e Q , com a mesma abscissa, pertencentes, respetivamente, ao gráfico da função f e ao gráfico da função g ;
- ▶ a reta s , tangente ao gráfico da função f no ponto P ;
- ▶ a reta t , tangente ao gráfico da função g no ponto Q ;
- ▶ o ponto R , ponto de intersecção das retas s e t .

Mostre que, qualquer que seja a abscissa dos pontos P e Q , a área do triângulo $[PQR]$ é igual a k .

Problema *16 - Exame Nacional de Matemática A - 2023 2.ª F

PRIMEIRAS IMPRESSÕES

Neste problema, é com relativa tranquilidade que se percebe que a condição $f = -g$ e $f(x) \neq 0$, para todo o $x \in D_f$, é suficiente para que R tenha a sua existência garantida no eixo Ox . E isto é claro porque sabemos que $f'(x) \neq 0$ em todo o domínio considerado. Caso $f'(x) = 0$, para algum x , o ponto R deixaria de existir (assim como o $\triangle[PQR]$). As imagens abaixo ilustram as duas situações para a função $f(x) = e^{\sin x} + 2$.

Note-se que, em geral, como se pode ver pelas figuras 1 e 2, a área do triângulo $[PQR]$ não é constante, quando a abscissa de P e Q varia, ao contrário do que acontece no Problema 16 para a função $f(x) = \frac{k}{x}$. Em geral, quando $f'(\alpha) = 0$, a área "explode" para ∞ quando x tende para α .

O leitor pode, se entender, manipular a construção GeoGebra¹ experimentando outras funções a seu gosto. Casos que pode ser interessante experimentar:

$$f(x) = e^x; f(x) = \operatorname{tg}(x); f(x) = \frac{20}{x-2}; f(x) = 5;$$

$$f(x) = x^n; f(x) = \operatorname{tg}^n(x); f(x) = \operatorname{sen}^n(x) \quad (n \geq 2).$$

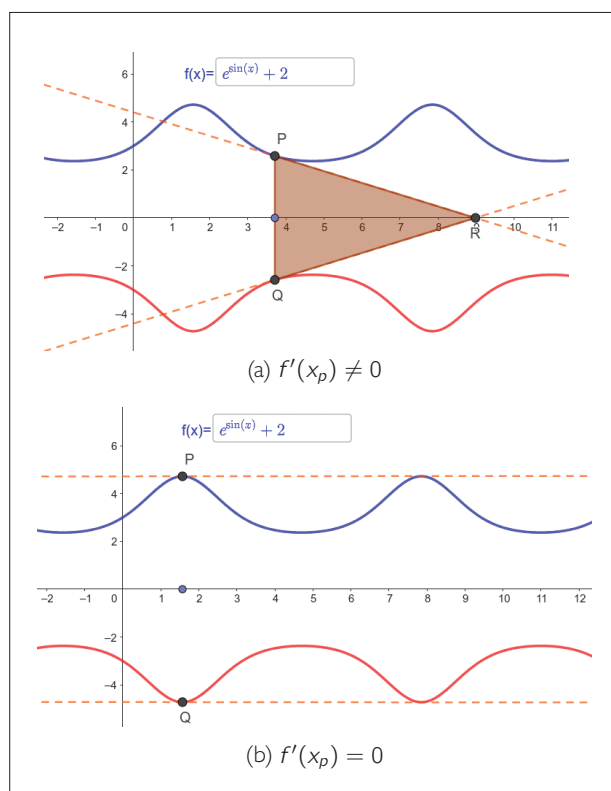


Figura 1. $f(x) = -g(x)$ e $f'(x) \neq 0$. garantem que R está no eixo Ox .

¹ <https://www.geogebra.org/m/xfkxhxcxm>

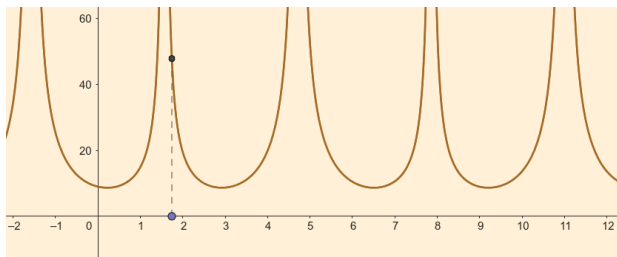


Figura 2. Gráfico da função $A_{\Delta[PQR]}(x)$ para $f(x) = e^{\sin x} + 2$.

GENERALIZAÇÕES

A função f que surge no Problema 16, e a área constante que daí resulta, é apenas um caso particular do seguinte resultado.

Teorema 1. (Área do triângulo) *Seja f uma função positiva diferenciável num intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Considere ainda:*

- dois pontos P e Q , com a mesma abscissa α , pertencentes, respetivamente, aos gráficos de f e $-f$, satisfazendo $f'(\alpha) \neq 0$;
- a reta s , tangente ao gráfico da função f no ponto P ;
- a reta t , tangente ao gráfico da função $-f$ no ponto Q ;
- o ponto R , ponto de intersecção das retas s e t .

Então, a área do triângulo $[PQR]$ é dada por

$$A(\alpha) = \frac{f(\alpha)^2}{|f(\alpha)|}.$$

Demonstração. Equações das retas s e t :

$$s : y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha);$$

$$t : y = -f'(\alpha)(x - \alpha) - f(\alpha). \quad (1)$$

A intersecção das retas apenas não ocorre se $f'(\alpha) = 0$, pois nesse caso $s \parallel t$, que não são coincidentes porque α não é um zero de f .

Sendo $R(x, y)$ o ponto referido no enunciado, das equações (1) resulta que

$$\begin{aligned} y &= -f'(\alpha)(x - \alpha) - f(\alpha) \\ &= -[f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)] = -y \end{aligned}$$

o que equivale a

$$y = 0. \quad (2)$$

O que significa que o ponto R vive no eixo Ox , sendo a sua abscissa, x , a solução da equação (α fixo)

$$f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) = 0.$$

Resolvendo-a,

$$\begin{aligned} f'(\alpha)(x - \alpha) &= -f(\alpha) \\ \Leftrightarrow x - \alpha &= -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \\ \Leftrightarrow x &= \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Segue-se de (2) e (3) que R tem de coordenadas

$$R\left(\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, 0\right).$$

Assim, a área do triângulo $[PQR]$ será dada por

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \left| 2f(\alpha) \left(\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \alpha \right) \right| = \frac{f(\alpha)^2}{|f'(\alpha)|}. \quad (4)$$

□

No Problema 16, $f(x) = \frac{k}{x}$ e $g(x) = -f(x)$, sendo que f é diferenciável e $f(x) \neq 0$, $f'(x) \neq 0$ no domínio considerado. Verificando o resultado (4),

$$A(\alpha) = \frac{\left(\frac{k}{\alpha}\right)^2}{\left|-\frac{k}{\alpha^2}\right|} = \frac{k^2}{\alpha^2} \times \frac{\alpha^2}{k} = k.$$

Nota para reflexão: A abscissa do ponto R , $x_\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, e a fórmula recursiva no método de Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

não têm o mesmo aspeto por acaso, pois não? No caso particular da função $f(x) = \frac{k}{x}$, $x_{n+1} = 2x_n$, o que não surpreende mas traduz certas propriedades geométricas únicas presentes nas hipérbolas, nomeadamente algumas relacionadas com áreas (voltaremos a este aspeto mais tarde, numa demonstração quase visual...).

MAIS ALÉM...

Tal como observámos atrás, em geral, a área $A_{\Delta}(x)$ do triângulo $[PQR]$ não é uma função constante.

Por exemplo, se $f(x) = e^{\sin(x)} + 2$ (figura 1), basta observar que esta tem extremos, para afirmar que a área do triângulo $[PQR]$ varia. Neste exemplo, essa área é dada, para cada valor de $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + t\pi, t \in \mathbb{Z}\}$, pela função

$$A_{\Delta}(x) = \frac{f(x)^2}{|f'(x)|} = \frac{(e^{\sin x} + 2)^2}{e^{\sin x} |\cos x|},$$

cujas representação gráfica se encontra na figura 2.

No entanto, no Problema 16 estamos perante uma

função, $f(x) = \frac{k}{x}$, com $A_{\Delta}(x) = k$ constante! Já sabemos que $f(x) = \frac{k}{x}$ é diferenciável e não tem extremos. Mas isso não chega para garantir que a área do triângulo $[PQR]$ seja constante: a função $f(x) = e^x$ também é diferenciável e não tem extremos, no entanto $A_{\Delta}(x) = e^x$ (curioso!). Assim, a questão que se pode colocar é:

Quais são exatamente as funções que têm como função área associada, $A_{\Delta}(x)$, uma função constante k positiva?

A resposta está no seguinte resultado.

Teorema 2. (Funções de área associada constante) *Seja f uma função diferenciável com $f(x) \neq 0$, $f'(x) \neq 0$ num intervalo aberto de $\mathbb{R}$, e o triângulo $[PQR]$ tal como definido no Teorema 1. Então,*

$$A_{\Delta}(x) = k \text{ (constante positiva)} \iff f(x) = \pm \frac{k}{x + c'} \text{ com } c \text{ constante.}$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Basta substituir $f(x)$ e $f'(x)$ na expressão $A(x) = \frac{f(x)^2}{|f'(x)|}$ e verificar que tudo se simplifica para k (é deixado como exercício).

($\Rightarrow$) Nesta implicação temos de resolver a equação

$$\frac{f(x)^2}{|f'(x)|} = k$$

em ordem a $f(x)$ e mostrar que a solução é a família de funções

$$f(x) = \pm \frac{k}{x + c}.$$

Fazendo $y = f(x)$, a equação (diferencial) fica

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{|y'|} = k &\iff y^2 = k|y'| \iff \\ \iff y^2 = -ky' \quad (y' < 0) \vee y^2 = ky' \quad (y' > 0).^2 \end{aligned}$$

Resolvendo cada uma das equações da disjunção,

$$\begin{aligned} y^2 = -ky' &\iff -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{k} \Rightarrow \int -\frac{y'}{y^2} dx \\ &= \int \frac{1}{k} dx \iff \frac{1}{y} = \frac{x+c}{k} \iff y = \frac{k}{x+c}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 = ky' &\iff \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{k} \Rightarrow \int \frac{y'}{y^2} dx \\ &= \int \frac{1}{k} dx \iff -\frac{1}{y} = \frac{x+c}{k} \iff y = -\frac{k}{x+c}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$f(x) = \pm \frac{k}{x+c}$$

□

Esta expressão define uma família (infinita) de funções, uma para cada valor da constante real c , de modo que a área do triângulo $[PQR]$ é sempre k , para cada valor de c .

O leitor pode, se entender, manipular a construção GeoGebra³, visualizando as curvas integrais da equação diferencial e as soluções para as condições iniciais definidas pelo leitor, assim como o triângulo $[PQR]$.

No exemplo dado na figura 3, para $k = 15$ e para a condição $f(3) = 5$, ou seja, para que o gráfico de f contenha o ponto $(3, 5)$ e a área do triângulo seja 15, $c = 0$.

Fica como exercício verificar que c pode ser obtido, em função da condição inicial $f(\alpha) = \beta$, pela expressão $c = \frac{k - \alpha\beta}{\beta}$.

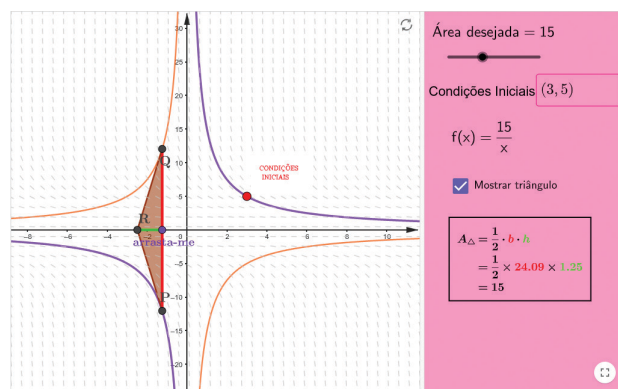


Figura 3. $k = 15$ e condição inicial $f(3) = 5$.

O REGRESSO À SIMPLICIDADE

Quando se consultam os critérios de classificação deste item, existe uma clara orientação para uma abordagem usando essencialmente ferramentas relacionadas com derivadas de funções e geometria analítica.

A geometria analítica é uma ferramenta muito valiosa que nos foi dada pelos matemáticos do século XVII para resolvermos problemas de geometria (e não só), mas não deve ser vista como uma imposição!

Vejamos uma alternativa de resolução do Problema 16, que deveria estar incluída nos critérios de classificação, e como essa abordagem ao problema permite apresentar uma prova alternativa da implicação ($\Leftarrow$) do Teorema 2 (abdicando do resultado dado pelo Teorema 1), com al-

² Pelo T. de Darboux, como D_f é um intervalo, $f'(x) > 0 \forall x \in D_f$ ou $f'(x) < 0 \forall x \in D_f$.

³ <https://www.geogebra.org/m/se685zbs>

Designe-se por a a abscissa dos pontos P e Q .
 Reconhecer que as ordenadas dos pontos P e Q são, respetivamente,
 $\frac{k}{a}$ e $-\frac{k}{a}$ 2 pontos
 Determinar $f'(x)$ e $g'(x)$ 2 pontos
 Obter as equações das retas tangentes aos gráficos das funções f e g ,
 respetivamente, nos pontos P e Q 2 pontos
 Determinar as coordenadas do ponto R 2 pontos
 Reconhecer que a é a altura do triângulo $[PQR]$ relativa ao lado $[PQ]$ 2 pontos
 Reconhecer que $\frac{2k}{a}$ é o comprimento de $[PQ]$ 2 pontos
 Concluir o pretendido 2 pontos

Figura 4. Critérios de classificação.

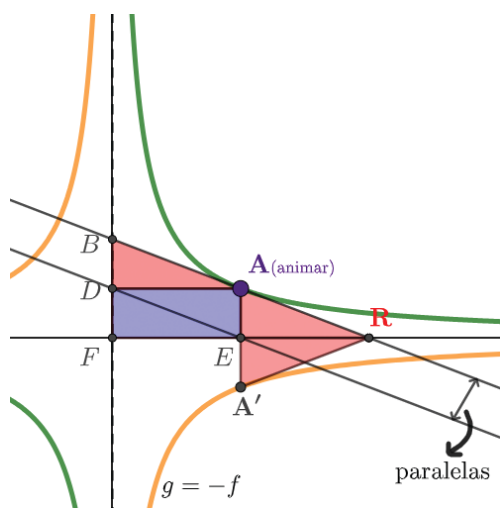


Figura 5. Hipérbole e gráfico de $f(x) = \frac{k}{x}$.

guns recursos de geometria sintética que, em última instância, derivam de propriedades da hipérbole.

Partamos da situação mais simples, exatamente a função do Problema 16, $f(x) = \frac{k}{x}$. Esta é a conhecida função de proporcionalidade inversa de constante k , já muito familiar no Ensino Básico. Também se pode escrever $xy = k$. O significado geométrico desta expressão é óbvio, muito explorado no 9.º ano: a área do quadrilátero $[FEAD]$, de dimensões $x = \overline{FE}$ e $y = \overline{EA}$, é constante e igual a k (ver figura 5).

O declive da reta tangente em $A(x, \frac{k}{x})$ é $-\frac{k}{x^2} = f'(x)$. O declive da reta ED também é $-\frac{k}{x^2}$ (porquê?). Assim, as retas RB e ED são paralelas e $\overline{BD} = \overline{AE}$ e $\overline{DA} = \overline{ER}$, uma vez que $[BDEA]$ e $[DERA]$ são paralelogramos. Assim, a área do retângulo $[FEAD]$ é igual à soma das áreas dos

triângulos $[BDA]$ e $[ERA]$, ou seja, o triângulo $[FRB]$ pode sempre ser decomposto em quatro triângulos equivalentes (independentemente da localização do ponto A no gráfico de $f(x) = \frac{k}{x}$). Por aqui fica arrumado o Problema 16 pois basta fazer uma simetria do triângulo $[ERA]$ relativamente ao eixo Ox e obtemos o triângulo $[AA'R]$ ($[PQR]$ no problema) com área igual a k . O ponto A' , simétrico de A em relação ao eixo Ox , fica sobre o gráfico da função $g = -f$. Fica aqui⁴ a proposta de manipular a construção *GeoGebra*, ou clicar sobre a figura 5, onde se pode observar os argumentos atrás apresentados.

Quando passamos para funções do tipo $h(x) = \pm \frac{k}{x+c} = \pm f(x+c)$, $c \in \mathbb{R}$, as áreas são totalmente preservadas, pois as únicas transformações do gráfico de f são a translação e a simetria em relação a eixo Ox (10.º ano). Logo, tudo o que foi provado para $f(x) = \frac{k}{x}$ fica provado para $h(x) = \pm \frac{k}{x+c}$, tendo em consideração que a assíntota $x = -c$ faz o papel de eixo Oy em toda a construção geométrica descrita.

Assim,

$$f(x) = \pm \frac{k}{x+c} \xRightarrow[\text{Definição}]{} A_{[FEAD]} = k \xLeftrightarrow[\text{Prop. geométricas}]{} A_{[AA'R]} = k.$$

1

SOBRE O AUTOR

Carlos Gomes, natural de Guimarães, completou todo o Ensino Secundário na Escola Secundária Francisco de Holanda. Licenciado em Ensino de Matemática pela Universidade do Minho, é professor de Matemática na Escola Secundária de Amarante (ESA) desde 2000.

⁴ <https://www.geogebra.org/m/huy7sgez>



RONGJIAO Ji
NOVA School of
Business and Economics
(NOVA SBE)
rongjiao.ji@novasbe.pt

STEVO RACKOVIĆ
Instituto Superior
Técnico, Universidade
de Lisboa
stevo.rackovic@tecnico.ulisboa.pt

FILIPA VALDEIRA
NOVA School of
Science and Technology
(NOVA MATH e
NOVA LINGS)
f.valdeira@fct.unl.pt

O QUE ESTÁ POR DETRÁS DE UM AVATAR?

Um avatar é uma representação virtual de um utilizador, capaz de replicar uma expressão facial ou movimentos pretendidos. A sua utilização tem crescido em popularidade em diversos ramos, desde animação para filmes até jogos virtuais. A comunicação *online* é também uma aplicação com grande potencial, mas com desafios diversos, visto que o mapeamento é feito em tempo real e os recursos ao alcance do utilizador são, em geral, limitados. A solução proposta passa pela criação de um modelo individualizado e simples, que permita estimar de maneira mais precisa os parâmetros do modelo do avatar. Propomos ainda a possibilidade de o utilizador intensificar uma determinada emoção, o que é possível aprendendo uma relação entre expressões e emoções.

1. INTRODUÇÃO

A crescente preocupação com a privacidade em plataformas de comunicação virtual requer estratégias que possam, por exemplo, preservar o anonimato de um utilizador, sem comprometer a eficácia da mensagem transmitida. Uma das soluções para este problema é a utilização de um avatar que, substituindo o rosto original do utilizador, é capaz de replicar as suas expressões – desde as mais gerais, como o movimento da boca, às mais subtis, como a expressão de emoções. Para que este processo seja realizado em tempo real, uma das principais dificuldades é fazer este mapeamento de forma precisa e eficiente. Além disso, para que a solução possa ser utilizada pela vasta generalidade dos utilizadores, não deve depender de tecnologia ou pré-processamento complexo e avançado. Em aplicações de larga escala, tal como a utilização de CGI (Computer Generated Imagery) em filmes, os estúdios têm acesso a uma elevada quantidade de recursos, tecnológicos e humanos, que permitem criar avatares personalizados para cada um dos atores. No entanto, a maioria dos utilizadores tem ao seu alcance simples câmaras

de telemóvel ou de computador, e não deseja passar por complexos processos de preparação.

A questão a que procuramos responder é então: "Como replicar as expressões de um utilizador com um avatar 3D, recorrendo apenas a uma câmara e sem acesso a uma extensa base de treino personalizada, oferecendo uma solução em tempo real?"

1.1 Em que consiste um modelo de avatar?

No contexto de animação, a parametrização mais comum do rosto humano é o modelo de *blendshape* [1], cujos principais componentes são uma face com expressão neutra e um conjunto de *blendshapes*. A expressão neutra é uma malha, ou seja, um conjunto de vértices (pontos) e faces (polígonos definidos num subconjunto de vértices), que representa a posição da cara em repouso. As *blendshapes* constituem um conjunto de m malhas semelhantes à expressão neutra, mas onde uma determinada região local se encontra ligeiramente deformada, representando expressões elementares da face, como puxar o

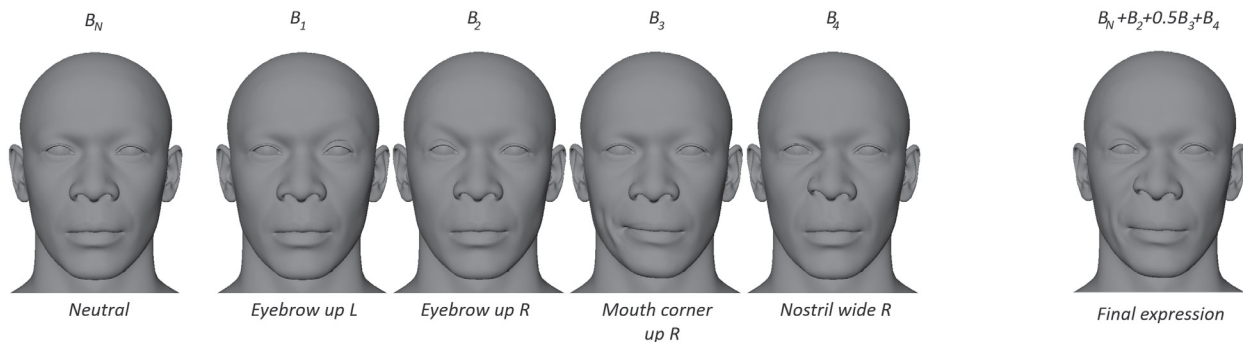


Figura 1. Exemplos de diferentes *blendshapes* e a expressão produzida pela sua combinação linear. Avatar Jesse disponível em MetaHuman Creator <https://metahuman.unrealengine.com>

canto esquerdo dos lábios para cima. Representamos os vértices da face neutra numa matriz $B_N \in \mathbb{R}^{n \times 3}$, em que n é o número total de pontos, e uma *blendshape* i como $B_i \in \mathbb{R}^{n \times 3}$, notando que B_N e B_i têm o mesmo número de pontos. É importante referir ainda que, seguindo uma prática comum, utilizamos não as *blendshapes* segundo a definição apresentada, mas sim a sua diferença relativamente à face neutra (modelo geralmente designado por *delta blendshape model*). Deste modo, B_i contém as deformações entre a face neutra e a *blendshape* i .

A combinação linear de várias *blendshapes* (em inglês *blend the shapes*) dá origem a expressões mais complexas e naturais, como exemplificado na figura 1. Assim, uma determinada expressão final pode ser dada por

$$\tilde{B} = B_N + \sum_{i=1}^m w_i B_i,$$

onde $w = [w_1, \dots, w_m]$ representa um vetor de pesos de ativação, ou seja, de coeficientes que indicam o peso de cada *blendshape* na expressão final. Variando o vetor w conseguimos produzir expressões diferentes e, dado um número suficiente de *blendshapes*, qualquer expressão plausível será reproduzível pelo modelo.

Assim, a reprodução de uma certa expressão traduz-se na estimação dos coeficientes $w_1, \dots, w_m$ que tornam a expressão $\tilde{B}$ o mais semelhante possível à expressão-alvo. Para que os pesos sejam corretos é necessário que o modelo utilizado para a estimação tenha um rosto semelhante (idealmente igual) à expressão-alvo. Isto para que os pesos reflitam deformações associadas à expressão e não a diferentes formatos do rosto. No entanto, os coeficientes estimados podem depois ser aplicados a qualquer avatar, incluindo desenhos animados ou criaturas não humanas, desde que se mantenha o significado semântico das *blendshapes*.

1.2 Como recriar os movimentos do utilizador através de um avatar?

Num vídeo em que se representa o rosto de um utilizador, em cada *frame* são detetados *landmarks* (pontos de referência) nos pontos mais relevantes do rosto, em particular nas zonas de nariz, olhos e boca. O objetivo é então estimar os pesos w de modo a que a expressão do avatar replique a dos *landmarks* capturados em tempo real, o que requer um processo bastante eficiente. Como referido previamente, para esta estimação, é necessário um modelo personalizado, ou seja, baseado no rosto do utilizador. Tradicionalmente, estes modelos são obtidos à custa de extenso trabalho manual e instrumentação avançada, que não estão disponíveis nesta situação. Finalmente, abrimos a possibilidade de o utilizador poder selecionar uma emoção que será intensificada ao longo do vídeo, independentemente da expressão demonstrada. Para isso, é necessário aprender a relação entre emoções e expressões faciais, de modo a reajustar os pesos estimados e a refletir a emoção desejada.

O método proposto divide-se em três componentes, que procuram responder a três perguntas sequenciais (figura 2):

- Personalização das *blendshapes*. Como é possível criar *blendshapes* personalizadas de um utilizador a partir de uma imagem de vídeo, sem que o utilizador tenha de fornecer muitos dados de treino?

- Estimação de coeficientes das *blendshapes*. Dado um modelo personalizado de *blendshapes* e *landmarks* do *frame* atual, como estimar os pesos w em tempo real, replicando a expressão do utilizador?

- Intensificação de emoções. Dados os pesos atuais da expressão do utilizador, como ajustá-los de modo a intensificar uma determinada emoção?

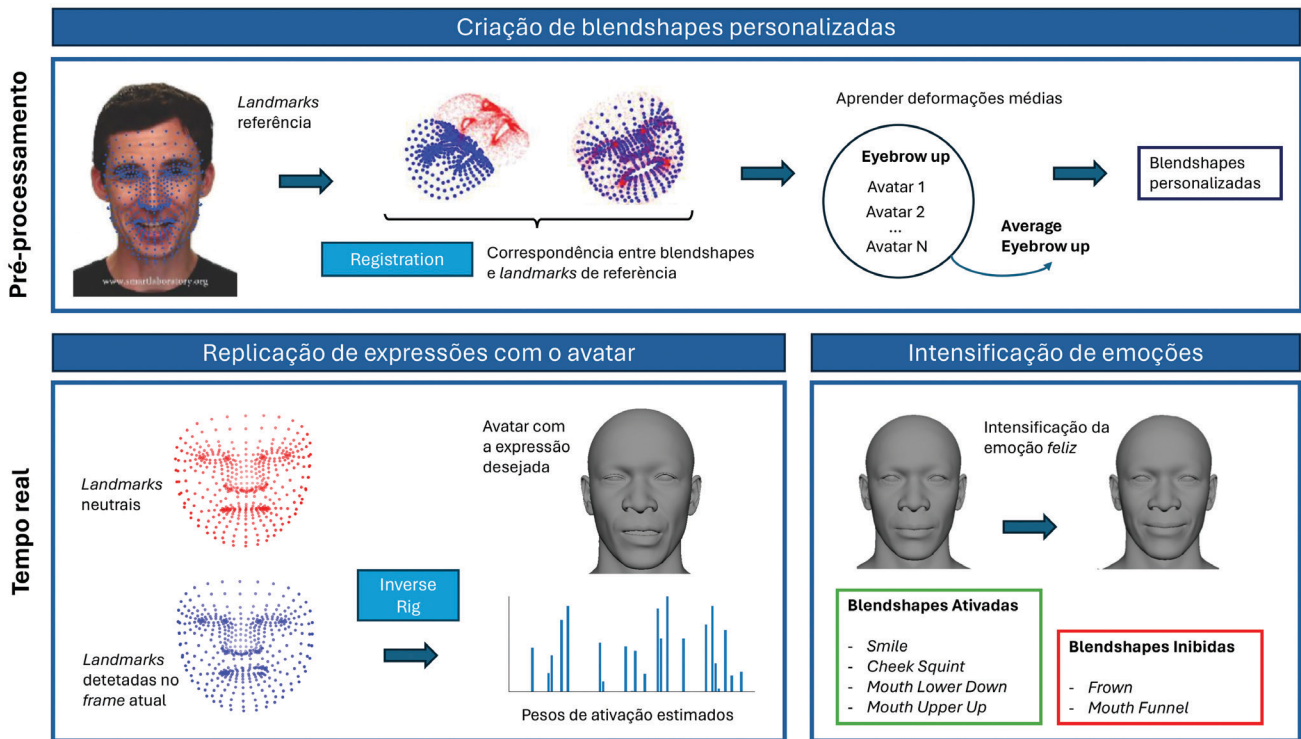


Figura 2. Vista geral do método utilizado. Na parte superior, o procedimento de pré-processamento (realizado uma única vez) que permite obter as *blendshapes* personalizadas do utilizador. Na parte inferior, o processo em tempo real, aplicado a cada *frame* do vídeo. Do lado esquerdo, a estimação dos coeficientes $w_1, \dots, w_m$ para replicar a expressão do utilizador. Do lado direito, a possibilidade de intensificar uma emoção selecionada, atualizando os coeficientes de ativação.

Este trabalho junta diversas áreas e técnicas para responder e integrar todas as perguntas. Na secção 2 explicamos de forma intuitiva, e numa visão geral, os métodos utilizados. No entanto, descrições mais detalhadas podem ser encontradas em [3] (secção 2.1), [2] (secção 2.2) e [7, 6] (secção 2.3).

2. METODOLOGIA

O primeiro passo é a identificação de *landmarks* nas imagens do vídeo. O desenvolvimento deste método não faz parte dos objetivos deste trabalho, pelo que utilizamos um de vários algoritmos de reconhecimento facial existentes para o efeito [4]. Assim, dada uma imagem 2D do rosto do utilizador (correspondente ao *frame* i), conseguimos obter um conjunto de pontos $L_i \in \mathbb{R}^{k \times 3}$. Numa fase de pré-processamento, é pedido ao utilizador que produza duas imagens: uma com uma expressão neutra e outra com a expressão de referência, como observado na figura 3.

Estes dois elementos são os únicos dados requeridos ao utilizador durante todo o processo, sendo denotados como L_N (expressão neutra) e L_R (expressão de referência).

Assumimos ainda a existência de um conjunto de avatares. Neste trabalho, utilizamos *MetaHumans* [9], que asseguram variações de etnicidade e género de modo a capturar da melhor forma a generalização das deformações faciais. Todos os avatares têm o mesmo número de *blendshapes* e vértices. Para cada avatar $a = 1, 2, \dots, S$, temos uma expressão neutra $B_N^{A_a} \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ e um conjunto de *blendshapes* $\{B_i^{A_a} : i = 1, \dots, m\}$.

2.1 Criação de *blendshapes* personalizadas

O objetivo inicial é a criação de um modelo de *blendshape* personalizado do utilizador, ou seja, $\{B_i^U : i = 1, \dots, m\}$ e B_N^U . Notamos que $B_i^U \in \mathbb{R}^{k \times 3}$ deve ter o mesmo número de pontos que os *landmarks* obtidos do vídeo. A expressão neutra corresponde precisamente à pose neutra fornecida pelo utilizador como observado na figura 3(b), ou seja,

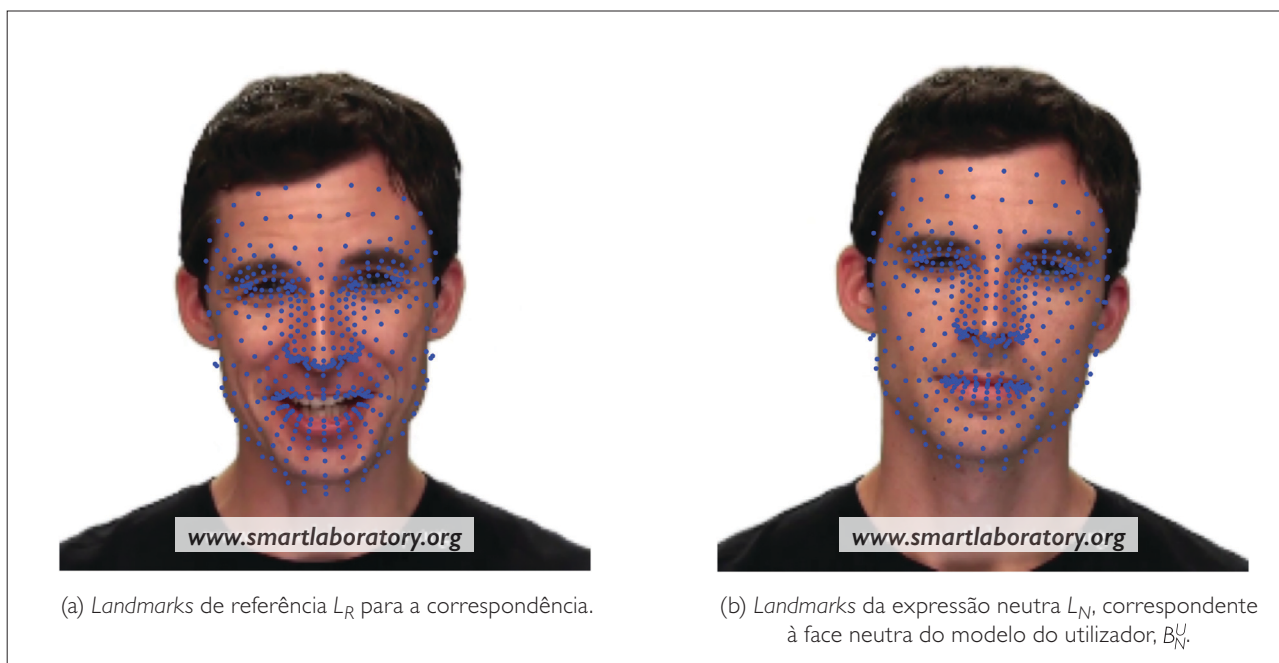


Figura 3. Landmarks detetados no vídeo para o passo de pré-processamento.

$B_N^U = L_N$. Resta-nos então determinar B_i^U .

Aprender B_i através de um conjunto de treino. Notamos que B_i são interpretadas como um conjunto de deformações aplicadas à expressão neutra B_N , para criar expressões elementares. Aqui, assumimos que estas transformações podem ser aprendidas a partir de um conjunto de treino e são transferíveis para a face do utilizador. Dadas *blendshapes* de N avatares diversos B^{A_i} , obtemos as deformações médias simplesmente como

$$B_i^A = \frac{1}{S} \sum_{a=1}^S B_i^{A_a},$$

em que S é o número de avatares.

Tendo a expressão neutra do utilizador B_N^U , deverá então ser possível obter B_i^U através das deformações médias B_i^A . No entanto, B_N^U e B_i^A não têm correspondência entre si. Dito de outro modo, não só têm um número diferente de pontos, como não é possível saber qual é a correspondência entre eles, pelo que não é possível aplicar diretamente as deformações calculadas com o modelo de avatar a B_N^U .

Registo da face de referência. Para resolver este problema, selecionamos uma expressão de referência B_R^A do avatar e uma B_R^U do utilizador, visíveis na figura 3(a). Apesar de ser pouco intuitivo, estas expressões não devem cor-

responder às faces neutras para permitir uma melhor correspondência em áreas como boca e olhos (por exemplo, a boca aberta permite uma correspondência mais fiel do que fechada). De seguida, o objetivo é deformar B_R^A de modo a que tenha uma forma o mais semelhante possível com B_R^U para que se possa estabelecer uma correspondência entre pontos. Este problema designa-se na literatura como *registration*.

Em primeiro lugar, as transformações rígidas, rotação e translação, são removidas de forma a que as nuvens estejam moderadamente alinhadas. De seguida, procuramos as deformações não rígidas que, quando aplicadas a B_R^A , resultam em B_R^U . Um grande desafio neste processo é a elevada diferença de número de pontos entre as *landmarks* B_R^U e a referência do modelo B_R^A . Recorremos a duas estratégias para mitigar este problema. Modelando as deformações a aplicar a B_R^A através de processos gaussianos, conseguimos introduzir informação adicional sobre o seu comportamento através da escolha do *kernel*. Assim, o *kernel* expressa conhecimento *a priori* que temos sobre a forma como a nuvem de pontos poderá sofrer deformações. Neste caso, utilizamos um *kernel rational quadratic* que permite ajustar deformações detalhadas em diferentes escalas, com um *kernel* empírico (construído com o conjunto de treino) que permite preservar a forma da face em locais com ausência de pontos. A segunda es-

estratégia passa por uma correspondência probabilística ao longo do processo de registo. Ou seja, em cada iteração do processo mantém-se uma probabilidade de correspondência a vários pontos, que é progressivamente ajustada à medida que a nuvem de referência B_R^A adquire o formato de B_R^U .

Criação de *blendshapes* personalizadas. Dada uma correspondência, é apenas necessário utilizar esse mapeamento para aplicar as deformações médias B_i^A aos pontos corretos de B_N^U .

2.2 Estimação dos pesos de animação

Com um conjunto de *blendshapes* personalizadas, é possível avançar para o problema central, ou seja, a estimação de w . Este problema é designado por *inverse rig* na literatura. O termo *rig* designa uma função ou estrutura que dita a deformação de uma malha – neste caso, trata-se de um modelo *blendshape* linear.

Alinhamento com os *landmarks* de referência. Um passo preliminar é o alinhamento das nuvens de pontos. Durante a filmagem, o utilizador naturalmente não se mantém na mesma posição, o que significa que os *landmarks* não estão alinhados entre *frames* diferentes. Assim, é necessário também aqui um passo intermédio de alinhamento para remover os efeitos de translação e rotação entre L_i e L_N , de modo a que as deformações correspondam apenas aos efeitos das expressões faciais. Para o alinhamento, é necessário identificar um conjunto de *landmarks* que se mantenham estáticos (entre si) ao longo do vídeo. Ou seja, pontos da face que não sofram deformações com as diferentes expressões. Encontramos estes pontos examinando os pontos menos ativos dentro do conjunto de *blendshapes*.

Neste caso, utilizamos os 100 vértices menos ativos, representados na figura 4.

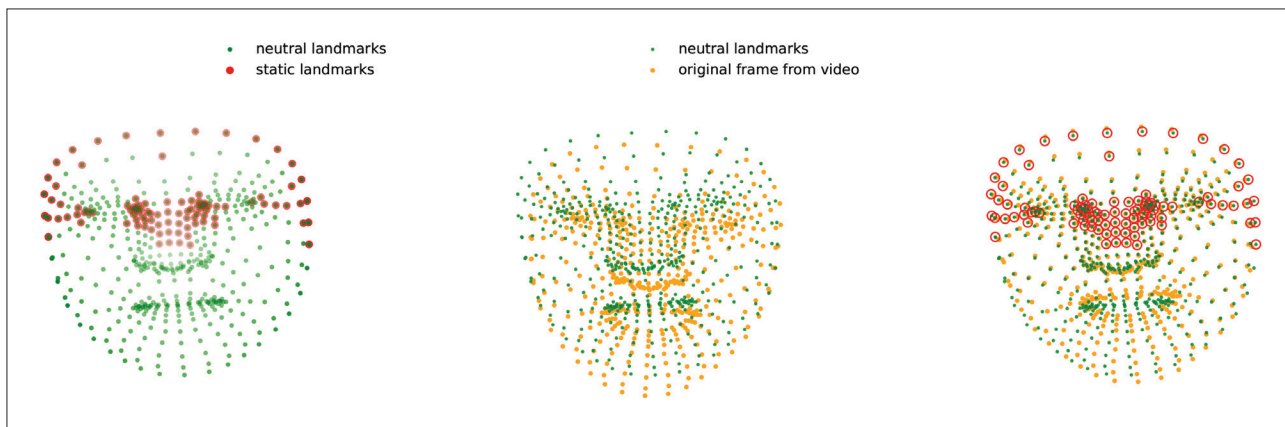
Resolver o problema de *inverse rig*. O principal objetivo é que o conjunto de pesos estimado $[w_1, w_2, \dots, w_m]$ deforme a malha de modo a que os vértices $B_N^U + \sum_{i=1}^m w_i B_i^U$ (correspondentes à expressão final do avatar) estejam alinhados da melhor forma possível com os *landmarks* de referência L_i . No contexto de otimização, este problema é tipicamente resolvido através da minimização no sentido dos mínimos quadrados, ou seja,

$$\min_{w_1, \dots, w_m} \left\| B_N^U + \sum_{i=1}^m w_i B_i^U - L_i \right\|_2^2.$$

No entanto, o problema não se restringe a esta minimização.

Além da adequação aos dados, estamos também interessados na cardinalidade dos pesos de ativação – o número de elementos diferentes de zero. Se demasiados pesos forem ativados, i.e., apresentarem um valor diferente de zero, a malha pode quebrar ou não ter um aspeto natural. Esta é uma das grandes dificuldades em animação, visto que algumas combinações de *blendshapes* não devem ser ativadas simultaneamente, e as regiões locais não devem ser influenciadas por um elevado número de deformações

▼ Figura 4. Alinhamento dos pontos de referência obtidos em diferentes imagens. Na imagem da esquerda, estão representados os *landmarks* da face neutra e assinalados a vermelho os pontos considerados estáticos. No meio, observamos novamente a face neutra (verde), sobreposta com *landmarks* obtidos de uma imagem do vídeo. É possível notar que as nuvens de pontos não se encontram alinhadas. Na imagem da direita, observamos ambas as nuvens de pontos, após o alinhamento, guiado pelos pontos estáticos.



simultâneas. Para ultrapassar esta dificuldade, utiliza-se um termo de regularização, ou seja, uma simples adição dos elementos de w , ponderada por um hiperparâmetro α que equilibra a importância deste termo com os restantes.

Finalmente, dados a definição e o conceito do modelo de *blendshapes*, não deve ser permitido que os pesos tenham valores negativos. Ou seja, as deformações podem ser acrescentadas com menor ou maior peso, mas, naturalmente, adicionar deformações negativas não teria um significado real, levando a deformações não naturais. Adicionalmente, os pesos não podem exceder a unidade, o que poderia resultar em expressões exageradas e aumentar a probabilidade de artefactos e efeitos secundários indesejados. Assim, é necessário introduzir *box constraints* $0 \leq w_i \leq 1$.

Em conclusão, o problema de otimização a resolver é dado por

$$\min_{0 \leq w_1, \dots, w_m \leq 1} \left\| B_N^U + \sum_{i=1}^m w_i B_i^U - L_i \right\|_2^2 + \alpha \sum_{i=1}^m w_i.$$

A solução deste problema e detalhes adicionais podem ser encontrados em [2].

2.3 Intensificação de emoções

Para alterar os pesos w intensificando uma emoção em particular, é necessário compreender a relação entre as expressões faciais e as várias emoções. Para isso, utilizamos análise de dados funcionais (*functional data analysis*), que trata os pontos do rosto como funções suaves, tornando mais fácil o seguimento de mudanças em expressões faciais. Utilizamos ainda uma base de dados (ver [5]) em que um ator pronuncia a mesma frase com diferentes emoções. Naturalmente, este processo de treino é realizado previamente e aplicável a qualquer utilizador, sendo que em tempo real é feita a previsão para a atualização dos pesos.

Alinhamento de expressões. Dado que os vídeos contêm expressões em momentos diferentes e mesmo em velocidades diferentes, o primeiro passo é criar uma linha temporal consistente, que permita comparar as expressões no mesmo ponto de cada frase. Assim, transformamos o tempo cronológico num tempo registado, através de um método baseado em componentes principais (ver [8]), que permite separar a variabilidade de fase da variabilidade de amplitude.

Regressão linear funcional. Neste ponto, assumimos um

conjunto de *blendshapes* alinhadas no tempo e categorizadas por emoção e definimos a matriz $B_{g,i,k}(t)$ como referente à *blendshape* i , emoção g e exemplo de treino k . Através de múltiplos modelos de regressão multivariada *function-on-scalar*, estabelecemos uma relação entre as expressões e as emoções observadas. Consideramos $g = 0$ (ausência de emoção, neutral) como grupo de controlo, sendo as suas curvas de evolução comparadas com cada uma das outras emoções $\tilde{g} \in \{1, \dots, G\}$. Cada expressão é então decomposta em três partes: uma função média de base dada por $\mu_{i,0}(t)$ (independente de emoções); o impacto específico da emoção g , dado por $\alpha_{i,g}(t)$; e as restantes variações individuais aleatórias. De forma a identificar de modo único os parâmetros estimados, impõe-se a restrição $\sum_{g=0}^G \alpha_{i,g}(t) = 0$.

Determinação do impacto emocional com testes FANO-VA. Para determinar o impacto de cada emoção em cada *blendshape*, é possível utilizar testes de contraste baseados no parâmetro de contraste

$$c = \alpha_{i,0}(t) - \alpha_{i,\tilde{g}}(t) = (\alpha_{i,0}(t) + \mu_{i,0}) - (\alpha_{i,\tilde{g}}(t) + \mu_{i,0}).$$

Este teste permite comparar a *blendshape* média i de cada emoção com a face neutra, sendo a diferença de médias das amostras $\sum_k B_{0,i,k}(t) - \sum_k B_{\tilde{g},i,k}(t)$ um estimador não enviesado do contraste c . De seguida, usamos um teste de permutação para determinar se as diferenças são estatisticamente significativas e, consequentemente, se a emoção tem impacto relevante na expressão.

Relação entre emoções e expressões. Na figura 5 é possível observar os valores médios de $\alpha_{i,g}(t)$ ao longo do tempo, para cada *blendshape* i (nas colunas) e emoção g (linhas). Tomemos como exemplo a emoção *happy* (felicidade). Observamos que para a expressão *Mouth Smile* (boca sorriso) existe uma diferença positiva média relativamente à expressão neutra, o que significa que o sorriso é fundamental para expressar a emoção felicidade, como será intuitivo.

3. SIMULAÇÕES

Bases de dados. Para realizar as simulações, consideramos a base de dados RAVDESS [5], em específico o conjunto de performances do ator Mike, como se observa na figura 3. Ao longo de todos os vídeos, é possível observar a face do ator com uma ampla variedade de expressões, o que permite testar a capacidade do método de forma abran-

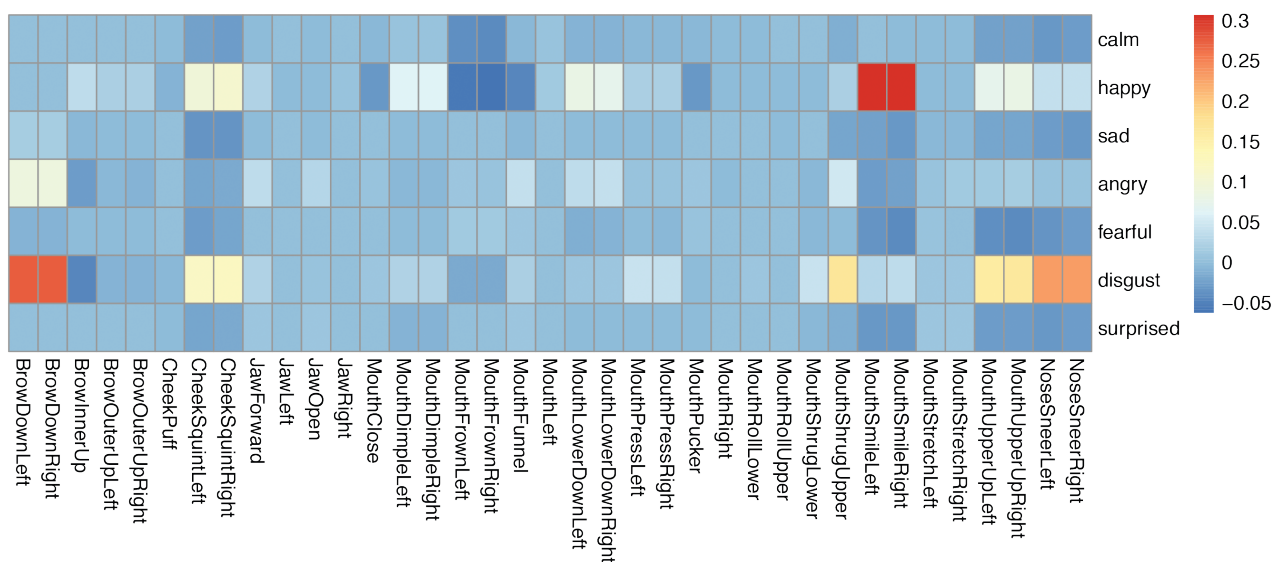


Figura 5. Impacto de diferentes emoções nas *blendshapes*. Nas colunas representamos uma série de *blendshapes* e nas linhas diversas emoções. Os valores representados na escala de cor refletem o impacto positivo ou negativo das emoções nas expressões elementares.

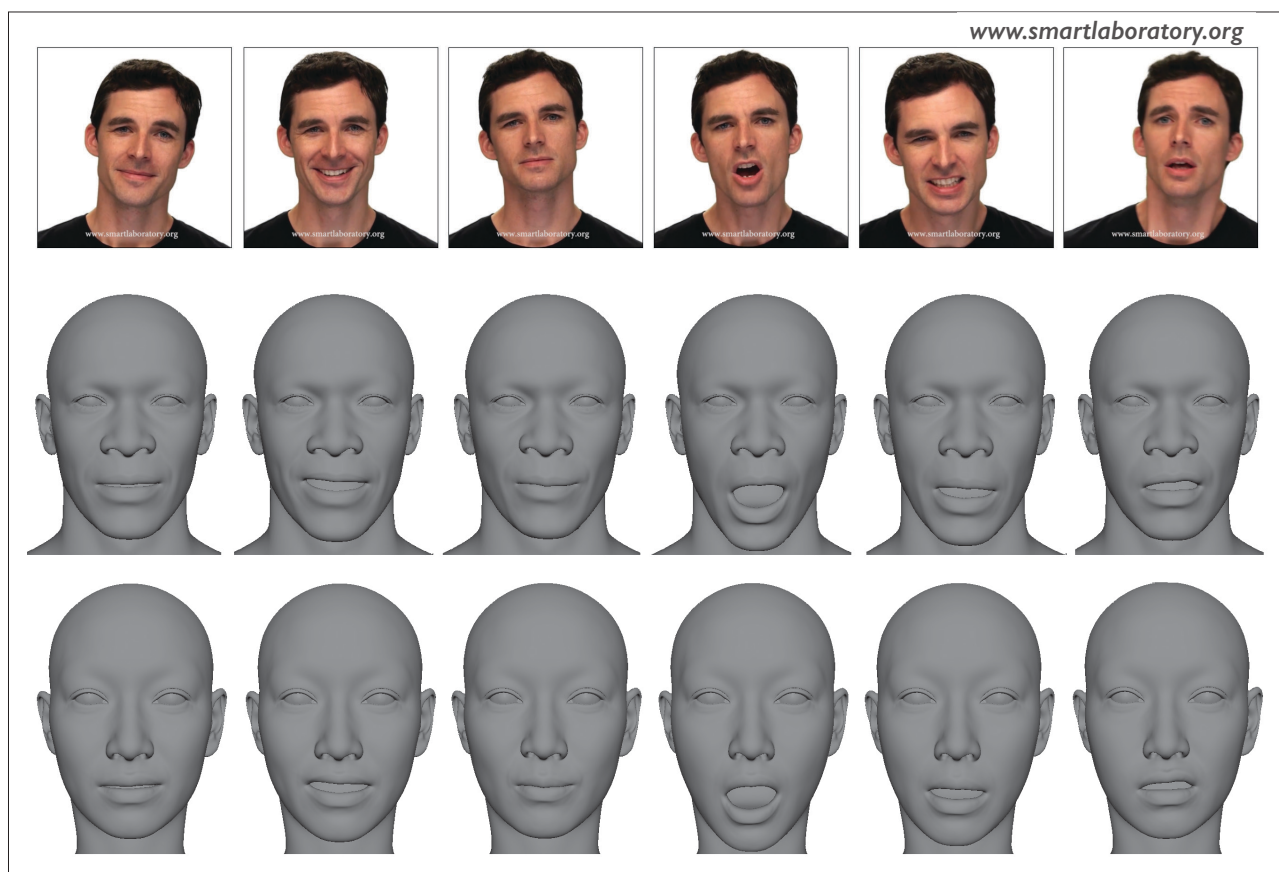


Figura 6. Frames retirados do vídeo RAVDESS (em cima) e a correspondente reconstrução das expressões com avatares MetaHuman (Jesse no meio e Bernice em baixo).

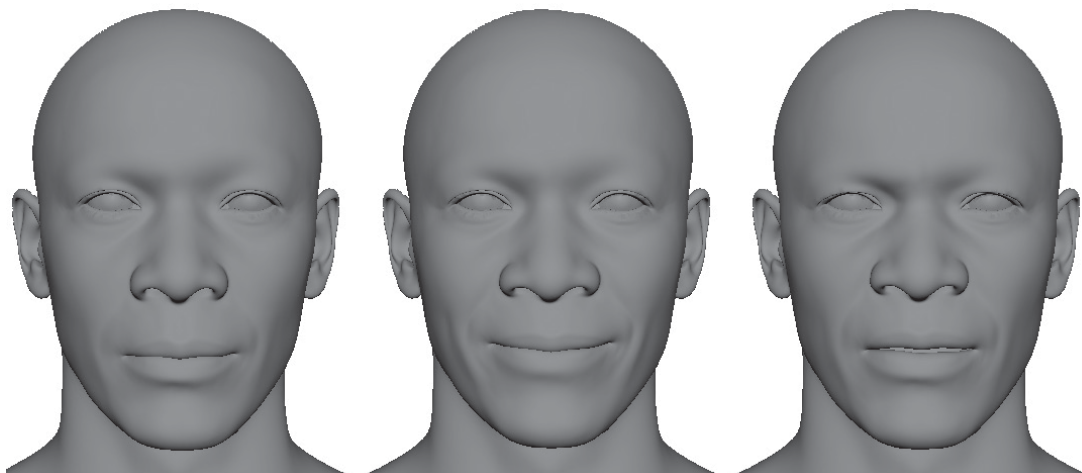


Figura 7. Intensificação de emoções. À esquerda observamos um avatar com expressão neutra. Os dois avatares seguintes representam a intensificação de duas emoções bem distintas: *felicidade* e *repugnância*, respetivamente.

gente. Naturalmente, o processo não é dependente do vídeo ou ator em particular. No caso dos avatares, usamos meta-humanos disponíveis em [9] (Jesse, Ada, Myles, Bernice, Omar e Vivian), que cobrem uma vasta categoria de etnicidade e géneros. São modelos do estado da arte, onde o *rig* facial é baseado em *blendshapes*. Qualquer outra escolha de modelos seria válida, desde que todos eles apresentassem a mesma estrutura de *rigs*.

Resultados. Na figura 6 observamos o vídeo original do ator Mike e a reconstrução das suas expressões através de dois avatares diferentes (Jesse e Bernice). Ao longo de todo o vídeo, para cada *frame* resolvemos o problema de otimização formulado na secção 2.2 para estimar os coeficientes que são aplicados no avatar desejado. Cada segundo de animação contém 24 *frames*, e o problema é resolvido em aproximadamente um milissegundo, o que permite uma realização em tempo real.

Vemos que as expressões de ambos os avatares replicam, com uma precisão aceitável, as expressões do ator original. Aqui não pretendemos replicar os movimentos do utilizador, pelo que a posição do rosto não é semelhante à do avatar. A intensificação de emoções é demonstrada na figura 7, onde observamos a expressão neutra do avatar e a intensificação de duas emoções diversas: *felicidade* e *repugnância*. Estes avatares foram obtidos ajustando os pesos estimados no *inverse rig*, com os obtidos na aprendizagem de emoções.

4. COMENTÁRIOS FINAIS

Neste artigo explicamos como se pode replicar as expressões de um utilizador num avatar 3D em tempo real, recorrendo apenas a uma câmara de telemóvel e a duas imagens iniciais do utilizador, com expressões diferentes. Isto permite uma vasta aplicabilidade do método, o que é particularmente relevante dado o aumento de comunicações virtuais e a crescente preocupação com a privacidade dos utilizadores. No entanto, realçamos também as preocupações éticas que advêm da utilização do método, ao permitir a geração de expressões e rostos manipulados.

REFERÊNCIAS

- [1] Lewis, J. P., Anjyo, K., Rhee, T., Zhang, M., Pighin, F. H., Deng, Z. (2014). "Practice and Theory of Blendshape Facial Models". *Eurographics (State of the Art Reports)*, 1(8).
- [2] Racković, S., Soares, C., Jakovetić, D. (2023). "Distributed Solution of the Blendshape Rig Inversion Problem". In *SIGGRAPH Asia 2023 Technical Communications*, 1-4.
- [3] Valdeira, F. M., Ferreira, R., Micheletti, A., Soares, C. (2023). Probabilistic Registration for Gaussian Process Three-Dimensional Shape Modelling in the Presence of Extensive Missing Data. *SIAM Journal on Mathematics of Data Science*, 5(2), 502-527.

[4] Kartynnik, Y., Ablavatski, A., Grishchenko, I., Grundmann, M. (2019). "Real-Time Facial Surface Geometry from Monocular Video on Mobile GPUs." *arXiv:1907.06724*.

[5] Livingstone, S. R., Russo, F. A. (2018). "The Ryerson Audio-Visual Database of Emotional Speech and Song (RAVDESS): A Dynamic, Multimodal Set of Facial and Vocal Expressions in North American English". *PloS one*, 13(5).

[6] Ji, R. (2023). *Functional Statistical Learning Methods Applied to Human Emotion Recognition from Facial Videos*. Tesi di dottorato, Università degli Studi di Milano.

[7] Ji, R., Micheletti, A., Jerinkić, N. K., Desnica, Z. (2022). "Group Pattern Detection of Longitudinal Data Using Functional Statistics". *arXiv preprint arXiv:2203.14251*

[8] Wrobel, J., Bauer, A., McDonnell, E., Scheipl, F., Goldsmith, J., Wrobel, M. J. (2022). *Package 'registr'*.

[9] Unreal Engine. (2023). MetaHumans [Software]. Available from Unreal Engine: <https://metahuman.unrealengine.com/>

Secção coordenada pela **PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação** pt-maths-in@spm.pt

SOBRE OS AUTORES

Rongjiao Ji é atualmente professora auxiliar convidada do programa de *Operations, Technology and Innovation Management*, em Nova School of Business and Economics (Nova SBE). Doutorada em Matemática pela Universidade de Milão, através do programa *BIGMATH*, uma ação Marie Skłodowska-Curie, em colaboração com a empresa 3Lateral. O seu doutoramento centrou-se na investigação de deteção de emoções faciais, análise de sentimentos e processamento de linguagem natural.

Stevó Racković é atualmente um aluno de doutoramento e investigador no Instituto Superior Técnico (Universidade de Lisboa) e membro do grupo Trustworthy ML, na Nova School of Science and Technology. O seu principal interesse de investigação é o ramo de matemática aplicada, com incidência em Machine Learning (ML) e Optimizacão Numérica. A sua atividade de investigação envolve diferentes esferas de aplicação, incluindo áreas como animação e medicina.

Filipa Valdeira é atualmente investigadora auxiliar na NOVA School of Science and Technology (Universidade NOVA de Lisboa), com NOVA Lincs (Departamento de Informática) e NOVA Math (Departamento de Matemática). Tem um doutoramento em Matemática, pela Universidade de Milão, e um mestrado integrado em Engenharia Aeroespacial, pela Universidade de Lisboa. Os seus principais interesses de investigação incluem Machine Learning e Optimização, com vista à aplicação em áreas como modelação 3D, espaço e saúde.



LOJA
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em www.spm.pt



PROFESSOR HELMUTH ROBERT MALONEK: COM O CORAÇÃO NA MATEMÁTICA DE TRÊS PAÍSES

ANA MENDES
Escola Superior de
Tecnologia e Gestão
do Politécnico
de Leiria
aimendes@ipleiria.pt

MILTON FERREIRA
Escola Superior de
Tecnologia e Gestão
do Politécnico
de Leiria
milton.ferreira@ipleiria.pt

Helmuth Malonek foi professor na Universidade de Aveiro (UA) de 1992 a 2020, ano em que se aposentou. Graduiu-se na Universidade Estatal de Yerevan (Arménia) em 1974 e concluiu o seu doutoramento em Matemática pela Universidade de Halle (Alemanha), onde, depois de ter defendido a sua tese de habilitação, foi professor associado de 1988 a 1992.

Em setembro de 1992 ingressou no Departamento de Matemática (DMat) da UA como professor associado convidado, tornando-se professor catedrático em 1998. Destacou-se no ensino e na investigação, sendo atualmente líder do Grupo de História da Matemática e Educação Matemática do CIDMA – Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações, da UA. Durante quase duas décadas, também foi líder do grupo de

investigação em Análise Complexa e Hiper-complexa do CIDMA.

Doutorou-se com um tema da Análise Complexa Aplicada e depois da habilitação desenvolveu a sua carreira científica principalmente na área da Análise de Clifford. É também um grande impulsionador do desenvolvimento da área científica de História da Matemática na UA. Em ambas as áreas científicas, o professor Helmuth Malonek é um nome de referência a nível nacional e internacional.

O professor Malonek recebeu-nos no seu gabinete, de onde podemos avistar a magnífica ria de Aveiro, num dia de luz extraordinária. Com os seus olhos azuis brilhantes, envoltos na sua biblioteca pessoal composta de livros que já viajaram muito à volta do mundo, sentámo-nos para conversar no tom doce que o caracteriza.



GAZETA MATEMÁTICA Nasceu na Alemanha depois da Segunda Guerra Mundial. Que recordações guarda da sua infância e da sua família?

HELMUTH MALONEK Guardo recordações dos meus pais e irmãos que nasceram antes da Segunda Guerra Mundial. Dos cinco irmãos, somos ainda dois. Ainda tenho uma irmã viúva com 87 anos. Fui um rapaz muito desejado. Depois da Segunda Guerra Mundial, a vida familiar voltou à normalidade. O meu pai desertou nos últimos dias da guerra e conseguiu não ficar prisioneiro. Por isso, eu tive uma infância muito feliz, embora nos primeiros nove anos da minha vida o meu pai trabalhasse numa cidade longe de casa e eu só o visse ao fim de semana. Foi um tempo duro para o meu pai. Ele era “mestre jardineiro” e tinha um negócio de plantas, mas com a guerra perdeu tudo e teve de ir trabalhar na construção. Quando o meu pai não estava, passava os dias com a minha mãe sempre perto de mim. Não podia brincar na rua, tinha de estar sempre ao lado dela. Eu era o *pequeno último filho*, não podia morrer num acidente!

GAZETA Havia sempre o fantasma da guerra...

HELMUTH Sim, ainda existia nas conversas dos adultos, e por isso, para mim, as crueldades da guerra têm sempre um significado muito forte.

GAZETA Então o seu pai era jardineiro e a sua mãe...

HELMUTH Era dona de casa e tomava conta de nós. Apesar de ter problemas graves nos ouvidos, ela gostava de cantar e tocar concertina. Isso ficou gravado na minha memória. Ela também pintava, e junto com muitas cartas dos meus pais, guardo também um dos seus quadros.

O tempo passou e eu entrei na escola em 1957. Nessa época, os professores, na maioria jovens, tinham sido formados à pressa e muitas vezes através de estudos noturnos, mas trabalhavam com um enorme carinho e empenho. Agradeço para sempre aos professores das escolas onde andei, porque os meus pais nunca faziam férias. Trabalhavam sempre. Foram esses professores que me enviaram para campos de férias, onde eu me divertia muito.

No quinto ano, em 1961/1962, participei nas primeiras olimpíadas matemáticas escolares da RDA, as Olimpíadas dos Jovens Matemáticos. E desde esse ano soube que queria estudar Matemática.

GAZETA Então começa aí o seu gosto pela Matemática...

HELMUTH Nos últimos anos da primeira escola em que andei, no sétimo e oitavo anos, as minhas férias de verão foram passadas nos já mencionados campos para “Jovens Matemáticos”. Tenho muito boas recordações desses tempos. A princípio, a minha ideia, sugerida e apoiada pelos professores de Matemática, era entrar, depois do oitavo ano, numa escola em Berlim, que era especializada no perfil matemático e científico. Ainda hoje continua a existir como Heinrich-Hertz-Gymnasium. Aliás, o segundo matemático alemão a ganhar uma Medalha Fields (no Rio de Janeiro, em 2018), Peter Scholze, nasceu em Dresden e acabou o Ensino Secundário nessa escola em 2007. Infelizmente não pude frequentá-la porque não tinha regime de internato, era só para alunos que viviam ou podiam viver em Berlim. Mas não fiquei triste, os meus professores encontraram um lugar para mim numa outra escola com o mesmo perfil na cidade universitária de Greifswald, no nordeste da RDA, a cerca de 150 km da minha casa. Aliás, Felix Hausdorff foi professor nessa universidade de 1913 a 1921.

GAZETA Para completar a primeira pergunta, qual foi a cidade onde o professor nasceu?

HELMUTH A cidade chama-se Sternberg, no norte da Alemanha e fica a 200 km de Berlim, numa região hoje designada Mecklenburg-Vorpommern. Há lagos e florestas ao seu redor. Sternberg era o mais pequeno distrito da República Democrática Alemã (RDA).

GAZETA E na sua infância tinha consciência do Muro de Berlim, que dividia a Alemanha em duas partes?

HELMUTH Foi em 1961, a 13 de agosto, e eu tinha 11 anos. Durante o verão de 1962, houve um campo de férias para “Jovens Matemáticos” nos arredores de Berlim e eu vi o muro... era assustador e muito estranho para nós. Nas noites claras e estreladas, tentávamos descobrir o primeiro satélite artificial americano, o *Explorer 1*, ou um *Sputnik* russo, enquanto voavam sobre nós. Sem conseguir entender o real contexto da época, apercebemo-nos de uma situação tensa em Berlim. Ainda me lembro bem disso. Mas acima de tudo lembro-me de um dos mais famosos matemáticos da Universidade de Humboldt na área de Geometria Diferencial, Hans Reichardt (1908-1991) e que ele nos deu uma aula. Ele impressionou-me. A dada altura, ele disse: “Hoje



Jovem Helmut com 14 anos



Helmut num acampamento nas montanhas em Yerevan

à noite sonhei sobre a demonstração das mediatrizes no triângulo se intersectarem num ponto único.” Se calhar foi uma brincadeira. Ou talvez não... [risos]. Ele nunca mais falou sobre isso, mas impressionou-me que ele fazia as demonstrações no seu subconsciente. Tinha 12 anos e gostei muito de aprender demonstrações da Geometria Elemental no 5.º ano.

GAZETA Em 1969 foi estudar para a Universidade Estatal de Yerevan, na Arménia. Qual o motivo e quem o incentivou?

HELMUTH Os primeiros passos nesse sentido foram dados depois do 10.º ano, quando eu tinha acabado de completar 17 anos. Os motivos foram a curiosidade de conhecer um país estrangeiro e a vontade de aprender, acompanhada da experiência de poder organizar a minha vida, sozinho e entre amigos, longe de casa. Antes de começar a estudar em Yerevan, completei os anos anteriores à conclusão do

Ensino Secundário numa escola que fazia parte de um instituto universitário de preparação para estudar no estrangeiro, na cidade universitária de Halle. Isto foi resultado de uma pesquisa de interessados realizada nas escolas e de uma breve entrevista de admissão. As aulas em Halle incluíam um ensino linguístico particularmente extenso. Já havia algumas aulas de matemática em russo com um professor de Moscovo. E quem queria estudar, por exemplo, na Polónia, na Hungria, na Roménia, etc., passava as férias entre o 11.º e o 12.º anos no país em questão para um curso intensivo de língua.

No início das últimas férias escolares, disseram-nos que íamos para Novosibirsk, na Sibéria, onde a União Soviética tinha instalado, a partir de 1958, o famoso Akademgorodok (Cidade Académica). O meu pai comprou-me umas botas e um fato apropriados para o frio. Entretanto, no fim do julho de 1969, houve uma alteração de planos e pouco antes da partida informaram-nos de que teríamos de ir para Yerevan. Houve alguns protestos, claro. O pai de

um colega, ele próprio professor em Berlim, ligou imediatamente para a administração da universidade [risos...]: "O meu filho, se não for para Akademgorodok, tem de estudar em Moscovo ou em Leningrado!" O curioso é que esse meu colega acabou por ser muito bem-sucedido em Yerevan, onde estudou Astrofísica. Yerevan era, e ainda hoje é, um centro de Astrofísica conhecido em todo o mundo.

GAZETA Então, quando chegou à Arménia, que país é que encontrou?

HELMUTH Economicamente (e comparando com muitas outras repúblicas), a Arménia era ainda uma república soviética bastante pobre, mas ao mesmo tempo com uma História muito rica e, depois de apenas 50 anos da sua fundação, já estava altamente desenvolvida em questões de cultura e ciência. Por exemplo, os primeiros computadores começaram a ser construídos no famoso Instituto Mergelian em 1964 e, além disso, o mundialmente conhecido e adorado compositor Aram Khachaturian (1903-1978) esteve, em 1973, perante nós, no palco da Ópera Yerevan, como maestro do seu *ballet Spartacus*.

Mas o mais importante durante toda a nossa vida lá era o calor das pessoas. Quando, em setembro de 1969 chegámos, éramos o primeiro grupo de estudantes estrangeiros na Universidade Estatal de Yerevan. Éramos oito estudantes do curso de Matemática e 24 do curso de Física. Recebíamos uma bolsa da RDA e nas férias de verão uma viagem paga para podermos ir ver os nossos familiares. Nós fazíamos uma vida normal, mas com pouco dinheiro, na tentativa de poupar para conseguir voltar para o nosso país também nas férias de inverno. Depois dos exames de janeiro, era necessário ter dinheiro para isso. Nós poupávamos e comíamos pouco. Eu era muito magro [risos...]. Claro, era uma vida às vezes complicada, sempre interessante e divertida, talvez num certo sentido exótica, num ambiente diferente do que conhecíamos antes. Apesar de difícil, tudo funcionou, nós éramos amigos, passámos o tempo, talvez o mais importante da nossa vida, na pequena e longínqua Arménia.

GAZETA Uma coisa que nos impressiona muito na Europa de Leste é a formação matemática. Desde muito pequenos é incentivada essa formação?

HELMUTH As Olimpíadas de Matemática contribuíam muito para encontrar talentos. Dessa maneira tornávamo-

-nos visíveis. E os professores ficavam contentes com isso e ajudavam-nos a encontrar o nosso caminho. A minha motivação era muito grande e foi sempre apoiada pelos professores. Por exemplo, depois de algum sucesso nas Olimpíadas, li livros sobre Arquimedes, Euler e Gauss, escritos para adolescentes. Com certeza, isto influenciou mais tarde o meu interesse pela História da Matemática.

GAZETA Da sua experiência em Portugal, porque é que acha que temos mais dificuldade em captar talentos para a Matemática? Porque é que eles fogem para a Medicina, por exemplo?

HELMUTH Quando cheguei em 1992 reparei que não se trabalhava ou quase não se falava muito das Olimpíadas de Matemática. Mais tarde, alguns professores do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra começaram a preparar miúdos, muito bem e com mérito, através do projeto Delfos em 2002. E o sucesso foi imediato, porque existem grandes capacidades. O que me chocou um pouco foi porque é que os alunos olímpicos também tinham de fazer exames nacionais de Matemática? Estou muito contente por ter testemunhado esta mudança e não acho que somos em Portugal menos eficazes em captar talentos para a Matemática.

GAZETA Para satisfazer uma das nossas curiosidades, na Arménia conheceu muitos matemáticos famosos?

HELMUTH Sim, é claro, pois para começar os meus professores já eram famosos. E ainda mais quando dois deles foram convidados do Congresso Internacional de Matemáticos (ICM). Eram eles Norair U. Arakelian (1936-2023), em Nice 1970, e Mkhitar M. Dzhrbashyan (1918-1994), em Vancouver 1974, da área de Análise Complexa. E mais ainda Rouben V. Ambartsumian (n. 1941) de Geometria Estocástica e Integral, também em Vancouver.

Voltando a uma outra pessoa com quem fiquei deslumbrado, e talvez por causa dela tenha ganhado o meu interesse pela História... Na época, o departamento tinha por hábito convidar gente de Moscovo e de outras cidades. Dessas pessoas encontrei talvez a mais interessante de todas as personalidades matemáticas que por lá apareceram: Pavel Alexandrov (1896-1982), famoso pelas suas contribuições para os fundamentos da Topologia. Ele e Heinz Hopf (1894-1971) escreveram o primeiro manual de Topologia em 1935. As suas aulas em Yerevan eram das sete às dez da noite. Os meus colegas estudantes e os professores

do departamento paravam para ouvir Pavel Alexandrov. Uma lição de História viva e muito especial foram as suas memórias dos matemáticos da escola de Göttingen, entre eles os famosos David Hilbert e Emmy Noether, com quem conviveu pessoalmente na segunda metade da década de 1920. Estas noites com Pavel Alexandrov ao lado dos meus professores impressionaram-me bastante.

GAZETA Poderia dizer-se que na Arménia a ciência estava a desenvolver-se? E o que é que estudou nessa época?

HELMUTH Sim, sem dúvida. O avanço da ciência na Arménia começou nos anos 40 e 50. Os matemáticos arménios colaboraram com grandes cientistas. Por exemplo, o famoso Rolf Nevanlinna (1895-1980), cuja Teoria da Distribuição dos Valores da Análise Complexa foi uma das áreas fortes na investigação em Yerevan, estive lá em 1964.

A partir do terceiro ano, cada um de nós escolhia a sua área de especialização. Eu escolhi a Teoria das Funções de uma variável complexa porque me parecia interessante e foi-me aconselhada por um professor de Berlim. Quando falou comigo, disse-me: “Olha, tu queres estudar uma área tão antiga, tão clássica, que já quase não existe?” [Risos] Eu escolhi essa área com grande curiosidade e tive de aprender arménio, porque existia a regra de que os alunos de língua nativa russa tinham de aprender arménio nos primeiros três anos e, por sua vez, os arménios aprendiam russo. Isto complicou o meu estudo, porque nessa época ainda não sabia arménio.

Depois tive aulas de especialização com o professor M. Dzhrbashyan. Foi ele quem, já nos anos 60, contribuiu, através da sua teoria das transformações integrais, para o avanço do cálculo fracionário. Acho que este facto é pouco conhecido. Vários colegas do nosso departamento trabalhavam ativamente nesta área, que voltou a estar no foco das atenções. Mas esta não é a única área na qual existem pontos de contacto com o trabalho de matemáticos arménios do passado. Isto também inclui Problemas Inversos, bem como a Teoria da aproximação e Polinómios Ortogonais.

GAZETA Após concluir a sua graduação em 1974, regressou à Alemanha para fazer o doutoramento. Quais as recordações que tem do seu tempo de doutoramento?

HELMUTH Eu fui assistente e, ao mesmo tempo, fiz o meu doutoramento. O meu orientador da tese de diploma foi o professor Nazaret E. Tovmasyan (1934-2010), que trabalhou de 1962 a 1969 em Akademgorodok, sobre mé-

todos de Análise Complexa combinados com métodos de Análise Funcional, especialmente com o conceito de soluções distribucionais para equações diferenciais parciais. Em Novosibirsk o trabalho nesta área era coordenado por Ilya N. Vekua (1907-1977), um dos criadores da Teoria das Funções Analíticas Generalizadas. Na tese de diploma, cujos resultados publiquei em dois artigos na revista da Academia das Ciências da Arménia, comecei o meu próprio trabalho nesta área, que terminei depois com o meu doutoramento.

O meu doutoramento foi sobre teoremas do tipo Phragmén-Lindelöf. Representam uma generalização do princípio do módulo máximo para funções analíticas dadas *a priori* como ilimitadas, por exemplo, em domínios angulares. Consegui obter resultados para funções analíticas generalizadas e também para outros sistemas de equações diferenciais parciais, como os sistemas de Bjarski e de Pascali, para mencionar apenas alguns. Existe uma ligação com as aplicações quase-conformes na teoria geométrica das funções, o que despertou a minha curiosidade sobre aplicações geométricas das funções analíticas generalizadas.

GAZETA O que fez após o seu doutoramento?

HELMUTH Em 1987 defendi a tese de habilitação numa área diferente da do doutoramento, influenciado pelo livro *Clifford Analysis*, publicado em 1982 pelos matemáticos belgas Brackx, Delanghe e Sommen. Era um livro que mais tarde deu nome a todo um campo de investigação, porque o seu título lembrava muito sugestivamente o conhecido livro de L. Ahlfors *Análise Complexa*. E não sem razão, porque a álgebra de Clifford é uma generalização da álgebra complexa. No mesmo ano, o professor Richard Delanghe, que escreveu esta bíblia da análise hipercomplexa com os seus alunos, visitou o Departamento de Matemática em Halle. Aquela foi uma época em que eu procurava um problema novo, interessante e desafiante.

Quando Delanghe falou comigo, disse-me que usando álgebras de quatérnions ou, mais geralmente, álgebras de Clifford, só através da generalização dos sistemas de Cauchy-Riemann, era possível encontrar um conjunto de funções bastante rico que podemos considerar como generalização das funções holomorfas de uma variável complexa em espaços euclidianos de dimensão superior. Mas na teoria das funções complexas existem várias abordagens equivalentes à classe das funções holomorfas que estão no centro da Análise Complexa. Não seria possível observar



Professor Malonek (à esquerda) com os colegas belgas Delanghe (à direita) e Sommen (ao centro) em Havana, Cuba

esta situação também em dimensões superiores?

Eu estava convencido de que a forma como se olhava para este problema não era a adequada. E tive sorte, encontrei a solução e escrevi a minha tese de habilitação neste tema. Durante dois anos estive obcecado, acreditando sempre que iria resolver o problema. Mais tarde, percebi que isso foi possível devido ao meu à-vontade na área da Análise Complexa e ao conhecimento que a minha pesquisa me proporcionou sobre ela. Percebi que a matemática é uma coisa muito bonita, uma construção com perfeição interior... Em particular, a teoria das funções de variáveis complexas. Esta crença e este conhecimento foram o resultado dos meus estudos em Yerevan e da atmosfera desafiante e criativa que lá encontrei enquanto estudante.

Senti tudo isto depois de ter terminado a minha tese de habilitação, com 37 anos. Fiquei muito contente, pois consegui fazer uma coisa que todos tinham dito e até demonstrado que não funcionava. Mas foi necessário um novo olhar. Assim consegui encontrar um caminho meu.

GAZETA Feita a habilitação, continuou ainda mais algum tempo na Alemanha. Supomos que constituiu família na altura...

HELMUTH Sim, durante o meu doutoramento nasceram três meninas. Também para um pai responsável não é tão fácil criar os filhos e escrever uma tese ao mesmo tempo. Agora tenho ainda uma quarta filha, de um segundo casamento e com 20 anos de diferença da irmã mais velha. Sou muito rico, não sou?

GAZETA E as suas filhas, assim, por curiosidade, ficaram com o gosto do pai pela matemática? [Risos]

HELMUTH Não as influenciei em nada. Talvez, indiretamente... Mesmo assim, a mais nova mostrou-se atraída pela Matemática. Estava a tirar Medicina e decidiu tirar Matemática em simultâneo. A minha segunda filha estudou Biologia, depois fez o doutoramento, e trabalha agora em investigação. A minha filha mais velha estudou Mu-

seologia... Talvez por alguma influência indireta do meu gosto pela História transmitido nas conversas e histórias contadas.

A minha terceira filha tem um mestrado em Aquicultura Ecológica. Está muito contente com o seu trabalho e cada ano, quando nos visita junto com o meu neto, apreciamos o oceano e a sua vasta fauna.

GAZETA Em 1992 vem para o Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro como professor associado convidado. Porque é que decidiu vir para uma universidade relativamente nova em Portugal e desconhecida internacionalmente?

HELMUTH Quando, em 1988, fui nomeado professor associado após concluir a minha habilitação, não tinha ideia do destino que me aguardaria.

Eu só queria continuar a minha investigação e ensinar alunos interessados. Mas, pouco depois, fui escolhido pelo reitor eleito em 1990, já na Alemanha unida, para ser vice-reitor de Investigação e Desenvolvimento Científico na Universidade Pedagógica de Halle, onde trabalhei desde 1984. Aceitei o cargo e estive dois anos nessas funções. Aí, conheci um colega que tinha trabalhado três anos em Moçambique. Quando ele fez a sua primeira viagem a Portugal, voltou e disse: “Olha, Portugal é um país cosmopolita fantástico.” Aliás, isto foi em 1990/1991. E novamente deu-se uma feliz coincidência que determinaria o resto da minha vida. Quando saíram os meus artigos com os resultados da minha habilitação em inglês, fui convidado para ir a Graz, na Áustria, e pelos já mencionados colegas de Ghent, na Bélgica. Eles falaram-me da Galois Network, um projeto ao nível europeu antes do início do projeto ERASMUS em grande escala. Nessa conversa fiquei a saber que procuravam gente numa das universidades parceiras do projeto, em Aveiro. Os professores Sousa Pinto e David Viera tinham a intenção de transformar a Secção Autónoma de Matemática num Departamento de Matemática, mas para isso era necessário terem dez doutorados. Talvez mais cedo e ao contrário das outras universidades, foram buscar gente vinda de fora, e fizeram muito bem. Estou muito grato por me terem recebido. Como todos nós, estrangeiros, tentei retribuir com a minha experiência e os meus contactos científicos para avançar e construir um departamento com uma investigação de sucesso a nível internacional.

GAZETA O que é que o encantou em Portugal?

HELMUTH Mais do que tudo, foi um desafio profissional. Uma mudança. Quando vês que aos 42 anos ainda és capaz de mudar o rumo da tua vida... Além disso, sentia-me atraído pela gente humilde de um país maravilhoso, pela sua História, a sua natureza. Observei que em Aveiro, de certa forma, era capaz de contribuir para ajudar a universidade e, em particular, o departamento, a desenvolver-se. Em 1992 éramos quatro docentes doutorados, hoje são mais de 50. Assim, comecei tudo de novo. A habilitação cá em Portugal não me valia de nada e tive de fazer a agregação. No ano 1997, fui o primeiro a fazer uma agregação no Departamento de Matemática da UA e em 1998 passei a professor catedrático.

GAZETA Quando formou o Grupo de Análise Complexa e Hipercomplexa, foi porque o departamento assim o quis?

HELMUTH No ano da criação da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), em 1997, formou-se também oficialmente o nosso Centro de Investigação. Com mais de uma dúzia de docentes doutorados a realizar investigação em diversas áreas, já havia massa crítica para isso. Acho que o Grupo de Análise Complexa e Hipercomplexa nasceu de forma muito natural dentro do centro. Já antes da minha chegada, uma colega tinha começado o seu doutoramento na área da Análise de Clifford no âmbito do mencionado Galois Network com um orientador de Ghent. A minha coorientação no local de trabalho foi uma circunstância não esperada, mas naturalmente favorável. Além disso, os meus contactos já existentes com os colegas de Ghent, mas também da Áustria e da Alemanha, mais tarde estendidos a França, Finlândia, México, Espanha, China e Itália através de cursos intensivos, *workshops* e conferências, projetos comuns de investigação e de pós-doutoramentos, garantiram uma estabilidade da investigação que até agora se mantém. Estou muito feliz porque vejo que o contributo que temos dado nesta área tem peso. Estávamos e estamos firmemente conectados com toda a comunidade desta área.

GAZETA Os conhecidos rigor e perfeccionismo alemães são diferentes do sentir português?

HELMUTH Em primeiro lugar, o perfeccionismo alemão é um fantasma e um grande preconceito contra o qual tive de lutar algum tempo, às vezes não pouco.

Profissionalmente, acho que a diferença entre nós não é tão grande quando se enfrenta a vida diária. Tal como os meus colegas de departamento, gosto de investigar e de

trabalhar com alunos. Infelizmente, na minha opinião, seria necessário reduzir drasticamente a ocupação de todos nós com tarefas burocráticas, relatórios, avaliações internas e externas permanentes que não garantem automaticamente um aumento da qualidade e da responsabilidade, mas resultam em tempo perdido e rotinas de respostas às vezes não bem refletidas.

Confesso que no meu trabalho diário sempre me senti motivado pela máxima de Wilhelm von Humboldt (1767-1835) sobre a unidade do ensino e da investigação no seio de uma universidade moderna. Humboldt foi um importante reformador da universidade alemã influenciado pelo Iluminismo, mas sem copiar o modelo napoleônico das escolas superiores.

Foi isto que me orientou quando, depois de iniciar as aulas de História da Matemática, em 1994, e as correspondentes aulas num posterior curso de mestrado para professores, em 2001, pensei em criar um grupo de investigação em História da Matemática com alunos interessados e membros do corpo docente.

GAZETA Quando começou a lecionar História da Matemática, focou-se mais nos matemáticos internacionais?

HELMUTH Criei o meu próprio programa bastante abrangente, mas tive sempre um capítulo sobre matemáticos portugueses. Desde o Pedro Nunes até 1772, o ano de reforma da Universidade de Coimbra, e depois com Anastácio da Cunha, Francisco Gomes Teixeira até à fundação da República e à fundação das universidades em Lisboa e Porto, passando pelos anos 40 até ao 25 de Abril e aos nossos dias. Falei aos alunos sobre a obra de Mira Fernandes, Vicente Gonçalves e do movimento dos matemáticos nos anos 40, como António Aniceto Monteiro, Bento de Jesus Caraça e Ruy Luís Gomes. Tenho aqui uma foto do ano 1927, de Francisco da Costa Lobo, Vicente Gonçalves e Ruy Luís Gomes, entre outros, que recebemos do arquivo da Academia das Ciências da Rússia, em Moscovo, quando começámos a investigar sobre o Instituto de Coimbra e a estada de Nicolai M. Kryloff (1859-1955) em Coimbra. O meu conhecimento da língua russa permitiu uma pesquisa direta e mais detalhada sobre este acontecimento único na História da Matemática em Portugal nos anos 20 do século passado.

GAZETA Sabemos que gosta de frequentar alfarrabistas à procura de livros antigos.

HELMUTH Sim, mas não só por causa da matemática. Também pela literatura e pela poesia, que são a minha segunda paixão. Trouxe muitos livros de outros países. A minha biblioteca é um pouco confusa, porque não tem um esquema de organização particular, tenho um pouco de tudo. Para mim, tem particular valor uma edição dos *Elementos de Euclides* de 1792 em português, que utilizei sempre nas minhas aulas. Recebi, como prenda de um grande amigo, um exemplar do sétimo volume das obras de Francisco Gomes Teixeira, de 1915, que ocupa um lugar especial na minha biblioteca.

GAZETA Há algum matemático português que seja para si uma referência?

HELMUTH Talvez Francisco Gomes Teixeira. Na investigação realizada através da orientação de teses de mestrado e de doutoramento, encontrámos, por acaso, uma ligação entre Gomes Teixeira e August Gutzmer (1860-1924), reitor da Universidade de Halle (1914-1915) e presidente da Academia Leopoldina (1921-1924), para a qual Gomes Teixeira foi eleito em 1906. Por outro lado, Gutzmer publicou os seus primeiros seis trabalhos no *Jornal de Ciências Matemáticas e Astronómicas*, fundado por Gomes Teixeira em 1877. Procurei no arquivo em Halle e encontrei documentos de Gomes Teixeira que mostram como as coisas funcionavam na altura. Um dos que assinaram a entrada de Gomes Teixeira na Academia foi Georg Cantor. Não é curioso que Gomes Teixeira e August Gutzmer em vários aspetos tenham tido uma carreira, como figuras académicas, em paralelo? Na História, é sempre importante ter acesso a documentos e fontes originais. Mais uma vez, estas descobertas foram uma feliz coincidência na minha vida, pois quem poderia imaginar que um matemático de Halle interessado em História descobriria um dia estas ligações entre o alemão Gutzmer e o português Gomes Teixeira?

GAZETA Considera então que Gomes Teixeira foi um dos matemáticos portugueses que mais contribuíram para a internacionalização da matemática portuguesa?

HELMUTH Absolutamente. E eu fico sempre um pouco triste, porque os meus colegas muitas vezes não valorizam isto suficientemente e acham que Anastácio da Cunha foi o maior matemático português depois de Pedro Nunes. Se calhar sim, porque a sua descoberta da convergência uniforme foi mencionada por Gauss. No entanto, procurar algum matemático português como Gauss, Poincaré ou



A foto de Nicolai Kryloff (matemático russo-ucraniano) em 1927 em Coimbra. É possível identificar na 1.ª fila, da esquerda para a direita: Manuel dos Reis, Manuel Esparteiro, Francisco M. da Costa Lobo, Nicolai M. Kryloff, José Vicente Gonçalves, Gumersindo da Costa Lobo e Ruy Luís Gomes

Weierstrass não é realista. Por isso, quando vi o que Gomes Teixeira fez e da maneira como o fez, fiquei bastante impressionado, porque ele não estudou em Berlim, mas conseguiu internacionalizar-se com o seu próprio esforço. Ele foi convidado para vários eventos fora de Portugal e chegou a encontrar-se com Felix Klein e outros matemáticos europeus. Também por causa do seu jornal e da sua influência por toda a Península Ibérica, Gomes Teixeira conseguiu ser altamente reconhecido em toda a Europa.

GAZETA Acha importante a inclusão da História da Matemática no currículo de formação dos professores de Matemática?

HELMUTH Sim, absolutamente. Aqui em Aveiro, desde

1994 até ao início do processo de Bolonha, a disciplina de História da Matemática fez parte do currículo da licenciatura em Ensino da Matemática e tinha aulas teóricas e práticas. Devido ao meu interesse e à minha formação suficientemente abrangente, comecei a lecionar esta disciplina em Aveiro. Começava sempre na Antiguidade com uma proposição dos *Elementos de Euclides* ou da obra de Arquimedes, e a partir daí falava sobre as diferentes etapas do desenvolvimento da matéria correspondente aos séculos seguintes. Não foi fácil, mas acho que foi importante para os estudantes verem que a matemática vem do passado, mas é mais do que só a Antiguidade, ela forma um edifício bem construído. Por exemplo, eu introduzi na disciplina de História a análise dos quaterniões como generalização das funções holomorfas. Acho que isto permitiu mostrar



Professor Malonek a dar uma palestra em Yerevan, em 2024

aos estudantes com conhecimentos básicos em Álgebra e Análise um capítulo interessante da interação de diferentes disciplinas no século XIX, sendo também uma área atual da investigação no CIDMA.

GAZETA Em 2011 foi convidado a coordenar a Escola Doutoral da Universidade de Aveiro. Quais foram os principais objetivos desta escola e quais os contactos internacionais que foram realizados para a sua concretização?

HELMUTH Recebi um convite da Reitoria da UA para instalar a Escola Doutoral, talvez devido a alguma experiência na gestão académica no passado. No início foi difícil, porque era necessário instalar um conselho, uma comissão executiva, pôr em funcionamento a administração específica, participar em reuniões noutros países e em projetos europeus. Por exemplo, Aveiro participou num projeto europeu para atrair estudantes da Índia. Estive na Índia

como representante da nossa universidade no arranque deste projeto lançado pelos colegas de Ghent (mais uma coincidência curiosa!). Juntos conseguimos criar um curso de doutoramento internacional com colegas da Holanda, da Bélgica, da Suécia, da República Checa e de outros países europeus. A instalação da Escola Doutoral foi mais um desafio particular na minha vida académica, mas nunca me esqueci ou interrompi a investigação nas minhas áreas científicas. Agradeço imenso a paciência que as minhas colaboradoras e os meus colaboradores tiveram comigo durante este tempo.

GAZETA No dia 12 de novembro de 2021 realizou a palestra de aposentação intitulada *New Looks Through Old Holes – The Unsustainable Lightness... Of Being a Mathematician*. O que é que quis transmitir nessa palestra? Como foi olhar para o passado e recordar toda a sua carreira enquanto matemático?

HELMUTH Por causa da pandemia, esta apresentação foi adiada. Em novembro de 2021 encontrou-se uma janela temporal para realizar a palestra. Lembro-me (e fiquei muito contente) de que até nestas circunstâncias adversas o anfiteatro estava cheio, com colegas e ex-colegas da Universidade de Aveiro. Tentei dar uma palestra muito especial porque só se faz isto uma vez na vida. Para responder mais concretamente à pergunta, quando consegues ter uma profissão de que gostas e sentes que a Matemática é uma disciplina muito especial, então o percurso valeu a pena e nunca te deixa parar. Até em situações muito complicadas, ainda com alguma leveza. O matemático Georg Cantor disse que a essência da matemática é a liberdade. Eu senti isso no meu percurso, às vezes com muito esforço, deixando outras coisas menos bem feitas. Eu tentei fazer o que eu próprio queria, o que o meu interior me sugeria. Não sou crente, mas neste aspeto se calhar até sou. A vivência na Arménia contribuiu muito para essa liberdade, eu vivi a História de um país com traços e escavações do tempo da Babilónia. Não me parece explicável, mas acho que tendo iniciado neste ambiente antigo, talvez um pouco austero, literalmente cercado pelo sopro de culturas de muitos séculos, era fácil seguir Matemática. O que me faz ficar um pouco triste é a industrialização da ciência. A ciência pura e as áreas fundamentais sofrem muito com isso. Por exemplo, ter um projeto aprovado na História da Matemática é muito complicado. Não quero ser pessimista, mas como uma pessoa mais virada para a matemática pura, vejo com preocupação que as tendências no momento desprezem estas áreas. Os apoios na História da Matemática não são muitos. O Ministro Mariano Gago pensava de outra forma. Por exemplo, no ano de celebração de Einstein, abriram-se bolsas na área da História das Ciências. Estou agora a tentar, com um novo membro francês do meu grupo de investigação, encontrar o financiamento para um projeto internacional na área da História das Ciências e Educação Matemática. Isto é muito importante. Só através de contactos internacionais consegues fazer alguma coisa de valor, a um nível que ultrapassa o normal. Do meu ponto de vista, a matemática e, também, o ensino da matemática, têm de ser uma coisa alegre e livre de preconceitos de que a matemática é uma coisa terrível.

GAZETA Tínhamos como última pergunta saber se ainda consegues encontrar a beleza das pequenas coisas na matemática, cuja pesquisa se tornou tão competitiva, crua e imediata. Tão produtiva, por assim dizer...

HELMUTH Sim, encontro a beleza da matemática todos os dias. Faço muitas vezes o que era o lema do matemático húngaro Alfréd Rényi (1921-1970) que escreveu em 1965 no espírito de Galileo Galilei três diálogos excelentes sobre a matemática, dedicados à sua filha Zsuzsi. Ele disse:

Se me sinto infeliz, faço matemática para ficar feliz.

Se estou feliz, faço matemática para continuar feliz.

Principalmente sou da opinião de que temos de estar abertos a todas as tentativas e ideias de fazer coisas novas. Mas ao mesmo tempo não devemos esquecer ou desvalorizar as experiências tradicionais na investigação e no ensino. Isto parece-me muito importante. E também que a História da Matemática seja um veículo para ensinar a própria matemática.

Na minha infância tive vários professores de Matemática, mas todos me explicaram a matemática como algo vivo. Por exemplo, a geometria elementar transforma-se numa área viva através da visualização dos seus objetos. Foi assim que eu encontrei o gosto pela matemática. As primeiras demonstrações que me espantaram eram as de propriedades de triângulos e do círculo. Depois interessei-me pelos números e a intuição de Euler. Não é nada de especial. Afinal a matemática começou com isto, com formas e números.

SOBRE OS AUTORES

Ana Mendes é professora do Politécnico de Leiria, Escola Superior de Tecnologia e Gestão. Doutora em Matemática Pura, investiga atualmente em problemas de classificação sendo investigadora convidada do LABI- Laboratório de aplicações bioinformática da UNIOESTE.

Milton Ferreira é Professor Adjunto da ESTG, do Politécnico de Leiria. Fez doutoramento na Universidade de Aveiro e realiza investigação no grupo de Análise Complexa e Hipercomplexa do CIDMA, na Universidade de Aveiro. Os tópicos atuais de investigação centram-se na Análise de Clifford e no Cálculo Fracionário.

BIBLIOMANCIA

*Diante da ruína o coração do homem é elevado;
E diante da glória é rebaixado.*

(Provérbios 18:12)



NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfc@ua.pt

O sentimento de impotência da Humanidade perante o mundo, perante o desastre, a violência, a doença e a morte terá nascido com a espécie *Homo sapiens*, com o cruel desacerto entre a capacidade de antecipar cognitivamente o infortúnio, por um lado, e a incapacidade de o evitar, por outro. Essa impotência e esse desacerto terão conduzido à procura de formas de prever o futuro, de saber o que nos espera, de antecipar o mal para que possamos escamoteá-lo ou prepararmo-nos para ele.

De todos esses métodos pensados e testados pela espécie humana, só a ciência parece produzir resultados testáveis, fidedignos e satisfatórios. É graças a ela que podemos antecipar a data dos eclipses, a passagem de um cometa, a trajetória de uma bala de canhão ou o efeito de um vírus ou de uma bactéria (bem como dos diversos tratamentos que contrariam esse efeito). Não se trata de adivinhar, mas sim de conhecer os mecanismos que regem tais fenómenos e como evoluem no tempo. Uma das famosas três leis do escritor de ficção científica Arthur C. Clarke afirma: “Qualquer tecnologia suficientemente avançada é indistinguível da magia”, mas, mesmo em pleno século XXI, alguns de nós parecem inverter a premissa, acreditando que “uma magia suficientemente avançada pode superar a ciência”.

Nem sempre fazemos jus ao epíteto de “espécie mais inteligente do planeta”, mas o que por vezes nos falta em clarividência é muitas vezes compensado pela criatividade de que vamos dando provas. Assim, fomo-nos

dedicando ao longo dos séculos a tentar adivinhar o futuro observando o voo dos pássaros, o vento e as marés, o comportamento dos gatos, as borras de café, as folhas de chá, as linhas das mãos, os sonhos, as nuvens, os relâmpagos, cartas tiradas à sorte, o movimento dos astros ou, aquele que é o meu método preferido, interpretando frases escolhidas à sorte por entre um livro.

Essa prática é designada de bibliomancia, a adivinhação por meio de um livro aberto ao acaso, que vem desde a antiguidade e terá sido praticada pelos gregos, usando a *Odisseia* e a *Iliada*, atribuídas a Homero; pelos romanos, usando a *Eneida*, de Virgílio; por cristãos que usavam a Bíblia; por muçulmanos que recorriam ao Alcorão ou na China usando o *I Ching*, traduzido como “O Livro das Mutações”, um livro filosófico em torno do qual foram desenvolvidos complexos rituais de adivinhação.

Os métodos para a escolha das passagens sofrem ligeiras variações, desde deixar o livro abrir-se caindo sobre a lombada, até à utilização de dados, moedas, lâminas que separem as páginas ou outros mecanismos que garantam a arbitrariedade. Antes, há que formular uma pergunta, pois sem pergunta não há resposta, por mais sábio que seja o tomo. Depois de lida a passagem escolhida, há que interpretá-la e aí se manifesta a arte do adivinhador.

Não acredito em nada que não possa ser-me provado de forma lógica, dedutiva ou científica, mas, de entre todos os divertimentos que são, para mim, tais mecanis-

mos de adivinhação, nenhum é tão interessante como este, a bibliomancia, talvez por me ter acostumado a procurar nos livros respostas a perguntas. A epígrafe que escolhi para a introdução desta crónica foi-me dada por uma página da Internet que extrai um versículo da Bíblia de forma aleatória. Não vou desvendar qual foi a pergunta formulada, mas admito que não me contentei

com o primeiro versículo produzido, nem com o segundo ou o terceiro. É essa a minha modalidade preferida de bibliomancia, escolher um livro ao qual atribuo valor e procurar nele uma frase que me traga conhecimento. É provável que não seja a primeira nem a segunda, nem a terceira, mas alguma algures há-de haver. Não se trata tanto de uma arte divinatória, mas sim da arte da leitura.

QUER SER SÓCIO DA SPM?

CONSTRUA UMA
BANDA DE MÖBIUS
COM ESTA PÁGINA

COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos. Contacte-nos!

VALOR DE QUOTAS:

Sócio Efetivo: 40 euros

Sócio Estudante: 20 euros
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais

Escolar: 80 euros

Académico: 400 euros

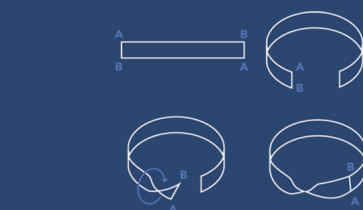
Corporativo: 600 euros

CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.



spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA



INFORMAÇÕES

Av. da República, 45 3.º esq
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785

E-mail: spm@spm.pt

www.spm.pt





BARTOON

LUIS AFONSO



Publicado originalmente no jornal Público, em 22/01/2024. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

Paulo Saraiva Universidade de Coimbra

EDITORES:

Patrícia Beites Universidade da Beira Interior

Rui Santos Politécnico de Leiria

Sandra Bento Universidade da Beira Interior

CONSELHO EDITORIAL:

Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Carlos Farias** E. S. Campos Melo, Covilhã • **Helder Vilarinho** Universidade da Beira Interior • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Maria de Natividade** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Sílvia Barbeiro** Universidade de Coimbra • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

FR Absolut Graphic

Rua Professor Egas Moniz n 38 4^o Dto - 2620-138 Póvoa Sto. Adrião

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO

Sociedade Portuguesa de Matemática

SEDE: Av. República 45, 3^o Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: <http://gazeta.spm.pt/politica>

TIRAGEM **1350 Exemplares**

ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

1.ª EDIÇÃO DO AUTUMN MEETING OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

Nos dias 4 e 5 de outubro de 2024 terá lugar o Autumn Meeting of Industrial Mathematics – amim'24 – na Foz do Arelho. O encontro contará com dois cursos de curta duração – Explainable Data Driven Decision Making, por Emilio Carrizosa, e Exploring Mixed Integer Linear Programming: Applications to Industry Problems, por Jorge Orestes Cerdeira –, comunicações e uma exposição de pósteres. Estão abertas as submissões de propostas para comunicações de 20 minutos ou para a apresentação de um póster.

O objetivo deste encontro é a partilha de conhecimento e experiência na área da Matemática Indus-

trial, em particular a aplicação da matemática na resolução de problemas complexos do mundo real, sejam eles do foro tecnológico, social, económico ou biológico. O evento representa uma oportunidade para aprofundar a ligação entre a matemática e a sua aplicação a problemas concretos.

Trata-se de um evento organizado pelo CEMAT – Center for Computational and Stochastic Mathematics e pela PT-MATHS-IN – Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação, com o apoio da SPM e da FCT. Mais informação poderá ser encontrada em <https://sites.google.com/view/amim24/>.

amim'24
autumn meeting of
industrial mathematics

Foz do Arelho, 4-5 Outubro, 2024

organização

ce^{mat}
center for computational
and stochastic mathematics

PT MATHS
IN
rede portuguesa
de matemática
para a indústria
e inovação

presença

[math-in]
100 Ciência, Tecnologia e Inovação

8.º WORKSHOP NEW TRENDS IN QUATERNIONS AND OCTONIONS – NTQO 2024

O 8.º Workshop New Trends in Quaternions and Octonions decorrerá em Braga, na Universidade do Minho, nos dias 11 e 12 de outubro de 2024. Este encontro tem como objetivo apresentar e discutir desenvolvimentos recentes no campo dos quatérnios e octônios, reunindo cientistas de matemática pura e aplicada, física, computação científica, engenharia e outras ciências aplicadas. O NTQO 2024 conta com quatro oradores convidados: António Machiavelo, da Universidade do Porto, Daniele Corradetti, da Universidade do Algarve, Federico Thomas, do Institut de Robotica i Informàtica Industrial, Espanha, e Kamal Diki, da Chapman University, Schmid College of Science & Technology, Estados Unidos. Haverá ainda diversas comunicações curtas.

O evento será realizado em formato híbrido (presencial e online). Trata-se de uma organização conjunta do Centro de Matemática da Universidade do Minho (CMAT – UMinho), do Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática da Universidade de Aveiro (CIDMA-UA) e do Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior (CMA – UBI). A participação é gratuita, mas a inscrição é obrigatória. Para mais detalhes, consulte <https://w3.math.uminho.pt/NTQO>.



APRESENTAÇÃO DE LISTAS PARA ELEIÇÃO DOS ÓRGÃOS SOCIAIS DA SPM

Decorrido o período de apresentação de listas para eleição dos Órgãos Sociais da SPM para o biénio 2024-2026, de 6 de maio a 5 de junho, não foram apresentadas candidaturas. Estas circunstâncias, ainda que inéditas, estão previstas nos Estatutos da SPM. Assim, o presidente da mesa juntamente com o presidente da direção devem promover a apresentação de uma candidatura e dar seguimento ao processo eleitoral. Enquanto o processo eleitoral não decorrer, a direção anteriormente eleita continuará a assegurar o normal funcionamento da SPM.



JORGE BUESCU REELEITO VICE-PRESIDENTE DA EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY

Jorge Buescu foi reeleito vice presidente da European Mathematical Society (EMS), no Encontro da instituição realizado de 13 a 14 de julho em Granada. O antigo presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática é o primeiro português a ocupar esta posição, para a qual foi eleito pela primeira vez em 2021. Jorge Buescu é professor na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, licenciado em Física e doutorado em Matemática pela Universidade de Warwick (Reino Unido). Realiza investigação em diversas áreas, dos Sistemas Dinâmicos à Análise Matemática e dedica-se à divulgação científica e ao ensaio. É reconhecido autor de vários livros de divulgação da Matemática.



9TH IBERIAN MATHEMATICAL MEETING



O 9th Iberian Mathematical Meeting realizar-se-á de 2 a 4 de outubro de 2024 na Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade dos Açores, em Ponta Delgada, São Miguel. Seguindo a tradição dos encontros anteriores, o evento está estruturado em torno de três áreas científicas principais. Nesta edição as áreas científicas são: Matemática Recreativa, Matemática e Medicina e Matemática em Sustentabilidade e Mudanças Climáticas. Além das conferências plenárias, serão realizadas sessões específicas para estas três áreas com oradores convidados, bem como uma sessão de pôsteres. Todas as informações podem ser encontradas em <https://acores9imm.spm.pt>

O Encontro Ibérico de Matemática (Iberian Mathematical Meeting) é um evento com organização conjunta da Sociedade Portuguesa de Matemática e da Real Sociedad Matemática Española. Tem como objetivo reunir matemáticos espanhóis e portugueses, visando o desenvolvimento de investigação matemática para o futuro. As anteriores oito edições realizaram-se em Lisboa (2007), Badajoz (2008), Braga (2010), Valladolid (2012), Aveiro (2014), Santiago de Compostela (2016), Évora (2018) e Sevilha (2022).

**PORTUGAL RECEBE
12.ª OLIMPIÁDA
DE MATEMÁTICA DA CPLP**



12.ª Olimpíada de Matemática da CPLP Portugal

Portugal é o país anfitrião da 12.ª edição da Olimpíada de Matemática da CPLP, que decorrerá em Oeiras, de 23 a 28 de julho.

Existentes desde 2011, depois de Portugal ter lançado o repto aos restantes países da Comunidade de Países de Língua Portuguesa, estas olimpíadas percorreram já seis dos oito países lusófonos. Em 2024, participarão Angola, Brasil, Guiné-Bissau, Moçambique, Portugal, São Tomé e Príncipe e Timor-Leste. Cabo Verde é o país que este ano falha a competição.

A Olimpíada de Matemática da CPLP acontece anualmente e tem como objetivos a melhoria da qualidade do ensino e a descoberta de talentos em matemática, a promoção do estudo da matemática nos países lusófonos, a criação de uma oportunidade para a troca de experiências educacionais nacionais e a união e a cooperação entre os países lusófonos para a criação de instrumentos que permitam a competição de alunos numa olimpíada internacional para os países de língua portuguesa.

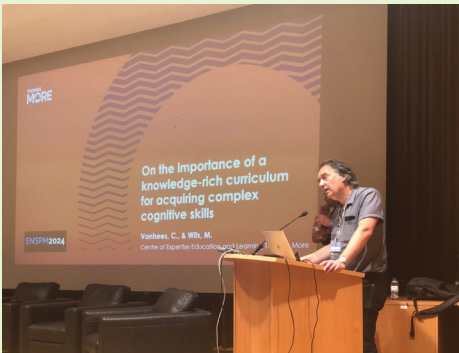
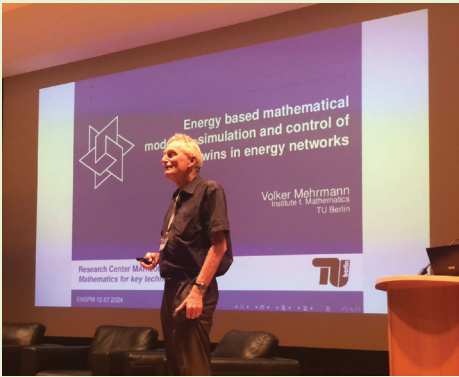
ENCONTRO NACIONAL DA SPM 2024

O Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática de 2024, ENSPM2024, decorreu de 10 a 12 de julho, no Campus de Gualtar da Universidade do Minho, em Braga.

Durante os três dias do evento, foram apresentadas conferências, 11 sessões plenárias, dois *workshops*, diversas sessões paralelas e quatro mesas-redondas. Esta edição do ENSPM contou com 11 oradores convidados, além de muitos outros conferencistas, entre eles algumas personalidades estrangeiras reconhecidas na área da matemática. Do programa fazia ainda parte uma ação de formação com a duração de 25 horas dirigida aos professores de Matemática dos grupos 230 e 500.

A Sociedade Portuguesa de Matemática realiza bi-anualmente o encontro nacional, dirigido a todos os matemáticos portugueses e a todos os que partilham como interesse comum a matemática, tendo em vista a troca de experiências, de conhecimentos e de ideias.





ALUNOS DA GUARDA CONQUISTAM DUAS MEDALHAS NAS OLIMPIADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

A Escola Secundária Afonso de Albuquerque, na Guarda, conquistou duas medalhas de prata nas 42.^{as} Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM). Inês Correia Sacadura, do 7.º ano, e Dinis Pires Teixeira, do 9.º ano, são os alunos responsáveis pelos galardões.

Na categoria B, dedicada a alunos do 10.º ao 12.º anos, as medalhas de ouro foram todas conquistadas por alunos do 11.º ano, um feito notável. De destacar a prestação de Tomás Ferreira Faria, do Colégio Moderno, em Lisboa, que arrecadou a sexta medalha de ouro consecutiva na competição.

Esta edição das OPM contou com a marca Renova como principal patrocinadora, através de um acordo com duração até 2026, contemplando as próximas três edições das Olimpíadas. Tal acordo visa reforçar o seu posicionamento e a sua gestão regida por princípios de sustentabilidade e de cidadania empresarial, contribuindo para a formação de uma nova geração de pessoas crescentemente informada.

O Agrupamento de Escolas Dr. Ginestal Machado, em Santarém, recebeu a competição que decorreu de 21 a 24 de março. A sessão de encerramento aconteceu no dia 24 de março, no Centro Nacional de Exposições e Mercados Agrícolas.

O evento contou com a presença do presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, José Carlos Santos, do vice-presidente da Câmara Municipal de Santarém, João Teixeira Leite, da diretora-executiva da Agência Ciência Viva, Ana Noronha, do subdiretor do Agrupamento de Escolas Dr. Ginestal Machado, Nuno Gomes, do diretor de *marketing* da Renova, Luís Saramago, e de Hélder Pais, da Direção-Geral de Educação.



Antes da entrega das medalhas, Adérito Araújo, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, apresentou a palestra “Um Conto de Cabras”.

As Olimpíadas Portuguesas de Matemática são organizadas pela Sociedade Portuguesa de Matemática em parceria com o Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

XI EDIÇÃO DA FEIRA DA MATEMÁTICA

A Feira da Matemática, que já vai na sua XI edição, decorrerá nos dias 22 e 23 de novembro, no Museu Nacional de História Natural e da Ciência. Será um evento repleto de atividades científicas, culturais e educativas. Tal como nos anos anteriores, no primeiro dia haverá um programa dirigido ao público escolar e no segundo dia ao público em geral e famílias. A entrada é gratuita, no entanto as escolas necessitam de se inscrever.



JOSÉ CARLOS SANTOS

PRESIDENTE DA SPM

jcsantos@fc.up.pt

EM JEITO DE BALANÇO

A SPM tem estado empenhada em desenvolver as suas atividades tradicionais, bem como algumas novas. O que é natural, pois novos tempos levantam novos desafios, mas raramente apagam os antigos.

A atual direção da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) tomou posse em setembro de 2022. E esta é então uma boa altura para fazer um balanço da atividade desenvolvida.

Há, naturalmente, o tipo de atividades que a SPM promove de maneira regular. Estas continuaram a ter lugar sem interrupções. Houve, por exemplo, a Escola de Verão da SPM, que aconteceu em Coimbra em 2023, e o Encontro Nacional da SPM, que já terá ocorrido em 2024 (em Braga) quando o leitor estiver a ler este texto. Estes encontros são importantes para fortalecer os contactos entre sócios da SPM de todo o País.

E também continuaram a decorrer as Olimpíadas de Matemática, que tiveram o apoio da Renova, do Ciência Viva, do Ministério da Educação e da Fundação Calouste Gulbenkian. A final das últimas Olimpíadas Portuguesas de Matemática teve lugar em Santarém, em março de 2024. Mas os alunos que chegaram à final são somente uma pequena parte dos alunos de todo o País que participaram nas Olimpíadas, com o apoio indispensável de um grande número de professores e de escolas.

Mas, além disto, também há as provas internacionais nas quais os estudantes portugueses participam. Em 2022 e em 2023, as Olimpíadas Internacionais de Matemática tiveram lugar na Noruega e no Japão respetivamente, tendo a equipa portuguesa obtido uma medalha de prata e três de bronze na primeira destas provas e

uma medalha de bronze na segunda. Também houve equipas portuguesas a participar noutras olimpíadas internacionais de matemática, tais como as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática e a Olimpíada de Matemática da CPLP (Comunidade de Países de Língua Portuguesa). Convém saber que a edição de 2024 destas últimas olimpíadas terá lugar em Portugal.

Outra iniciativa da SPM que está prestes a dar frutos consiste na edição de um livro sobre a matemática na *Bibliotheca do Povo e das Escolas*. Esta *Bibliotheca* foi uma coleção de livros de baixo custo, publicada originalmente no fim do século XIX e o início do século XX e destinada a um público formado por portugueses e brasileiros escolarizados, mas carentes de uma educação científica e literária. Esta edição, publicada pela SPM e a Imprensa da Universidade de Lisboa, consistirá num capítulo sobre a *Bibliotheca* e em capítulos com estudos sobre três dos fascículos da *Bibliotheca*, acompanhados da sua reprodução *fac-símile*, e deverá ser posta à venda no final do corrente ano, ou no início de 2025. Simultaneamente será divulgado um site onde estarão disponíveis livremente as digitalizações de todos os dez livros de matemática originalmente publicados na *Bibliotheca*.

A SPM também iniciou negociações para a recuperação das instalações de matemática do Jardim do Campo Grande, em Lisboa. Isto pode parecer não ter a ver com as atividades da SPM, mas aquele jardim tem uma série

de jogos e equipamentos relacionados com a matemática, fruto de uma antiga parceria entre a Câmara Municipal de Lisboa, a SPM e o Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Infelizmente, as estruturas envolvidas foram-se degradando com o tempo e a SPM constituiu um grupo de trabalho envolvendo colegas da Faculdade de Ciências a fim de sensibilizar a Câmara Municipal de Lisboa para a necessidade da sua recuperação, processo que, na presente data, ainda não se encontra terminado.

Como é sabido, a SPM está muito envolvida no ensino da matemática e empenha-se num ensino de matemática de qualidade. Um exemplo deste envolvimento com alguma visibilidade e que já vem muito de trás são os pareceres emitidos pela SPM relativos, entre outras coisas, aos exames, aos novos programas ou às novas políticas educativas. E também há os Círculos Matemáticos, que procuram fornecer os meios para que os estudantes encontrem uma ampla gama de problemas matemáticos desafiadores. E, finalmente, há os testes SPM. Estes têm tido uma grande procura por parte das escolas, mas houve grandes problemas técnicos com eles nos últimos anos. Para lidar com isto, a SPM adquiriu uma nova plataforma de apoio aos testes, e os problemas atrás mencionados desapareceram.

Como se pode ver, a SPM tem estado empenhada em desenvolver as suas atividades tradicionais, bem como algumas novas. O que é natural, pois novos tempos levantam novos desafios, mas raramente apagam os antigos.

TABELA DE PUBLICIDADE 2025

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1250

Nº de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

CONTACTOS

Tel.: 21 793 97 85

imprensa@spm.pt

ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)

Margem de corte: 4 mm

LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

					
	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: gazeta@spm.pt.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2025

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para imprensa@spm.pt

VISITE O SITE DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

www.spm.pt

E O DA GAZETA DE MATEMÁTICA

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

