N. 0202

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA | Ano LXXXV | Mar. 2024 | 4,20€

MATEMÁTICOS NA PRIMEIRA PESSOA

A Matemática Enquanto Espaço Privado: do Desvendar de Conjeturas ao Reconhecimento Mundial

Entrevista a Claire Voisin

Ana Mendes e Teresa Fernandes

Números Ondulantes na Forma 101...01

Eudes Antonio Costa e Arthur Batista de Souza

APANHADOS NA REDE

Uma Estranha Amizade

José Carlos Santos

9th Iberian Mathematical Meeting

IMM9

Recreational Mathematics

Mathematics and Medicine

Mathematics in sustainability and climate change

University of the Azores

Ponta Delgada
São Miguel
Azores

October
02 | 04
2024

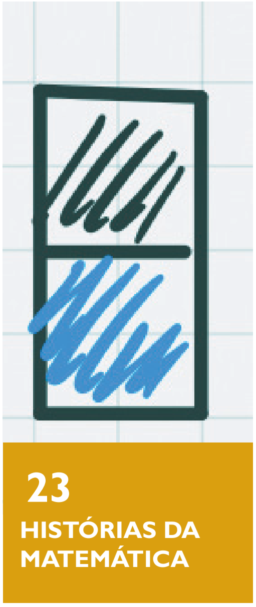
UAc UNIVERSIDADE DOS AÇORES

FCT FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE DOS AÇORES

NICA

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Real Sociedad Matemática Española


23
HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA


20
APANHADOS NA REDE


34
MATEMÁTICA PARA A INDÚSTRIA E INOVAÇÃO


03
RECREIO

ÍNDICE

EDITORIAL

PAULO SARAIVA
Universidade
de Coimbra
psaraiva@fe.uc.pt

O OFÍCIO MATEMÁTICO DE CONJETURAR

Formular e demonstrar conjeturas são tarefas centrais do labor matemático aos mais diversos níveis.

Logo na introdução da entrevista à matemática Claire Voisin (ver rubrica *Matemáticos na Primeira Pessoa* do presente número), pode ler-se que o seu nome está indubitavelmente ligado a diversas conjeturas, como a de Kodaira, a de Hodge e a de Green. Para quem não é especialista em Geometria Algébrica, é natural que tais nomes nada digam. No entanto, a curiosidade do leitor levá-lo-á a ficar minimamente elucidado acerca daquelas conjeturas, ao mesmo tempo que descobre que a segunda faz parte da lista dos sete Problemas do Milénio (com prémio atribuído pelo Clay Mathematics Institute). O que é seguramente percetível a qualquer um é a dedicação imensa, de anos, implícita na tarefa quotidiana de abordar os problemas subjacentes a tais conjeturas, o estudo necessário para dominar as ferramentas ou construir outras que eventualmente, um dia, permitam solucioná-las… ou refutá-las.

Formular conjeturas é algo inerente à investigação em matemática (e às ciências, em geral). Estas "proposições provisórias" podem resultar, por exemplo, da constatação de regularidades ou padrões ao lidar com objetos matemáticos, ou da tentativa de adaptar resultados conhecidos a novos contextos. Neste sentido, a construção de conjeturas e a tentativa de as "resolver" assume uma importância central no desenvolvimento da matemática. Além de constituírem um estímulo à investigação, frequentemente, novas áreas de estudo ou o aprofundamento de outras já existentes resultaram do esforço de muitos em torno destes desafios. Entre a formulação do conhecido Último Teorema de Fermat e a sua demonstração, por Andrew Wiles (o qual se apaixonou desde tenra idade por este resultado), passaram mais de três séculos. No seu excelente trabalho, Wiles foi beneficiário dos desenvolvimentos notáveis na teoria algébrica dos números (com Niels Abel, Sophie Germain e Ernst Kummer). A sua demonstração, finalmente aceite em 1995, combina técnicas matemáticas tão complexas como formas modulares, curvas elípticas e representações de Galois (entre outras), as quais ainda não tinham sido criadas ao tempo de Fermat. Considerações análogas poderiam certamente ser feitas a propósito de conjeturas ainda hoje não solucionadas, como a Hipótese de Riemann.

Tentar provar ou refutar uma conjetura implica seguramente desenvolver capacidades de pensamento crítico e de raciocínio lógico, características tão valiosas em matemática como em muitos outros campos. Este é um aspeto a destacar, entre outros motivos, pelas suas implicações pedagógicas. Simples enunciados numéricos, algébricos ou geométricos, permitem que o estudante se confronte com problemas que o levam a formular hipóteses e a explorá-las com recurso a diversas estratégias, técnicas e ferramentas matemáticas, e a avaliar as consequências da sua aplicação. Ao longo deste processo, o estudante aprende a lidar com naturais bloqueios nos momentos em que não há progressos, assumindo então o professor um papel fundamental, ao fornecer estímulos e pistas que o levem a ultrapassar uma eventual falta de confiança e a persistir, tentando abordagens alternativas. Desta forma, contribui-se para a estruturação do pensamento, ao promover a passagem do raciocínio intuitivo para o formal. Em última análise, experiências que impliquem formulação, formalização e prova de conjeturas têm o potencial de, num ambiente de aprendizagem baseada na descoberta, levar o estudante a *pensar como um matemático*.

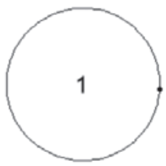
Hélder Pinto
Instituto Piaget,
Insight e CIDMA-UA
helder.pinto@ipiaget.pt

O CÍRCULO PARTICIONADO POR CORDAS: O PROBLEMA DO CÍRCULO DE MOSER

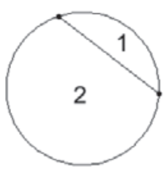
Em quantas partes se pode dividir um círculo usando as cordas definidas por *n* pontos na sua fronteira?

O problema do círculo de Moser [1, 2] consiste em determinar em quantas partes pode dividir-se um círculo usando todos os segmentos de reta formados por n pontos que estão na respetiva circunferência (exige-se ainda que não haja nenhum ponto dentro do círculo que seja a interseção de mais do que duas destas cordas).

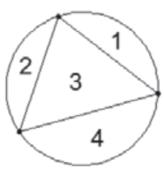
Como é fácil de observar, com $n = 1$, não existe nenhum segmento e, portanto, o círculo fica inteiro numa só parte.



Com $n = 2$, o círculo fica dividido em duas partes.

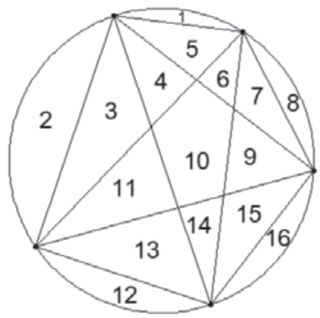


Com $n = 3$, o círculo divide-se em quatro partes.



Com $n = 4$, o círculo divide-se em oito partes.

Com $n = 5$, o círculo divide-se em 16 partes.



E com $n = 6$? A resposta: 32, que apetece dizer na sequência, não é a correta neste problema…

Faça o mesmo exercício para mais alguns valores naturais de n e encontre o termo geral desta sucessão.

Este é um bom exemplo para ilustrar que em matemática não basta verificar algum resultado para muitos exemplos, mas é sempre necessária uma "verdadeira" demonstração para provar para todos. Claro que podemos sempre recorrer a situações que vão ainda mais além em termos do número de exemplos que verificam a veracidade de uma determinada condição!... Por exemplo, o primeiro número natural para o qual a proposição "$\sqrt{1141n^2+1}$ não é um número inteiro" é falsa é $n =$30 693 385 322 765 657 197 397 208 (consultar [3] para outras curiosas coincidências em matemática)!

A MATEMÁTICA NAS NOTÍCIAS

1. A matemática da governabilidade e as coligações pré-eleitorais

Atravessámos mais um período de eleições legislativas, nas quais os deputados são eleitos pelo bem conhecido método de Hondt, aplicado em 22 círculos eleitorais. Como é sabido, este método beneficia os grandes partidos em relação ao que aconteceria se fosse aplicada uma simples proporcionalidade direta em função dos votos expressos a nível nacional.

Este método de eleição faz com que as potenciais coligações pré-eleitorais possam fazer diferenças, isto é, com este método a junção das partes pode ser (bem) maior do que a soma aritmética dessas mesmas partes (está-se a supor que quem vota num determinado partido vota sempre na coligação em que este está inserido, o que, como sabemos, não é verdade em Ciência Política…). Em [4] faz-se uma análise, por exemplo, do que teria acontecido se os partidos à esquerda do PS (o Partido Comunista, Os Verdes, o Bloco de Esquerda, o Livre e o PAN) se tivessem coligado antes das eleições de 2019 e de 2022, obtendo os seguintes resultados: 49 deputados coligados em 2019 (em vez dos 36 que efetivamente conseguiram separadamente) e 22 deputados coligados em 2022 (em vez dos 13 separadamente). Com esta opção, os restantes partidos teriam menos lugares e, por exemplo, o PS não teria tido maioria absoluta em 2022 (passaria de 120 deputados para apenas 114). O artigo de opinião [4] termina com a bem conhecida frase de António Guterres "é só fazer as contas…". Já em 2015, em [5], se fazia o mesmo tipo de contas para uma potencial coligação à direita (na eleição de 2011, a coligação PSD-CDS teria tido 137 deputados em vez dos separados $108+24$). E, de facto, a opção escolhida neste ano de 2024 foi pela coligação destes dois partidos (conjuntamente com o PPM).

2. Matemática e as Profissões

A seguir deixamos uma nota para uma notícia recente [6] acerca de uma escola que convidou profissionais de diferentes áreas para falar de matemática:

> *"O projeto Matemática e as Profissões, do Agrupamento de Escolas Afonso de Paiva, em Castelo Branco, convidou pais para falarem da sua profissão e do relacionamento com a matemática.*
> *(…)*
> *O Agrupamento de Escolas Afonso de Paiva conta que a aula começou com a apresentação de Susana Caio, que falou sobre os recibos de remunerações, onde mostrou aos alunos como calcular os abonos, descontos e outros conceitos no salário mensal de um trabalhador da função pública. Já Andreia Amaral abordou a profissão de consultora imobiliária, enunciando as quatro etapas que considera mais importantes no seu trabalho e como utiliza a matemática nele. Aprofundou com diversos exemplos essa temática, falando do cálculo de áreas e da determinação do valor de cada imobiliário.*
> *Face ao sucesso desta atividade, irá repetir-se no próximo período."*

Esta iniciativa merece louvores, pois, com poucos recursos e com a colaboração dos pais, consegue mostrar aos seus alunos que a matemática elementar é muito importante no dia a dia de muitos profissionais, mesmo em áreas que não estão diretamente ligadas ao conhecimento científico, tecnológico ou matemático.

3. Quebra-cabeças geométrico

Num dos últimos dias do ano passado (29 de dezembro), o jornal Folha de S. Paulo [7] lançou o seguinte desafio aos seus leitores (retirado originalmente de *https://portaldaobmep.impa.br)*:

> *"No último desafio do ano, você precisa encontrar o jeito certo de formar a figura geométrica.*
> *[Considere] Oito papéis quadrados, todos do mesmo tamanho [e diferentes cores], devem ser colocados em cima uns dos outros, para formar a figura abaixo.*
> *Em que ordem você colocaria os papéis?"*

É um bom desafio para trabalhar com crianças mais pequenas uma vez que é possível construir, por exemplo, os oito quadrados em cartolinas coloridas, e as crianças podem experimentar as diferentes figuras que se constroem até obter a solução pretendida. Facilmente, também podem pedir-se muitas outras figuras coloridas seguindo o mesmo princípio.

4. Descobrir a matemática no Museu Gulbenkian

Desde 2 de outubro e até ao próximo dia 30 de junho de 2024, pode visitar a Galeria Principal do Museu Calouste Gulbenkian com os seus alunos dos ensinos Básico e Secundário de modo a encontrar ligações entre a matemática e a arte.

> *"Será que a matemática e a arte estão assim tão afastadas? Ao longo da História sempre houve cruzamentos entre ciência e arte, como podemos constatar pela obra de alguns artistas que aplicaram a matemática no seu trabalho plástico.*
> *Reforçando alguns dos conteúdos abordados nos currículos escolares de cada nível de ensino, e introduzindo conceitos que habitualmente se encontram mais ausentes da esfera curricular, esta é uma visita excecional para o cruzamento interdisciplinar."*

Pode encontrar mais informações em [8].

SOLUÇÕES DOS DESAFIOS PROPOSTOS NO NÚMERO ANTERIOR:

A solução do problema original de Josefo é a seguinte: o sobrevivente está colocado na posição 31. A lista completa ordenada de mortes é a seguinte: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 1, 5, 10, 14, 19, 23, 28, 32, 37, 41, 7, 13, 20, 26, 34, 40, 8, 17, 29, 38, 11, 25, 2, 22, 4, 35, 16, 31.

No problema proposto a seguir, o sábio poderia ter afirmado: "*Vou morrer afogado!*" (em resposta a "*Se você disser uma verdade, será morto por enforcamento; se você disser uma mentira, morrerá afogado.*"). De facto, com esta frase, chega-se a um impasse irresolúvel:

- Se for enforcado, então o sábio disse uma mentira e, portanto, deveria ter sido afogado;
- Se for afogado, então o sábio disse uma verdade e, portanto, deveria ter sido enforcado.

No último problema proposto deve escolher-se a sala 3, uma vez que os leões que não comem há três meses estarão já mortos…

Até ao próximo número do nosso Recreio!

REFERÊNCIAS

[1] *https://mathworld.wolfram.com/CircleDivisionbyChords.html*

[2] *https://www.youtube.com/watch?v=YtkIWDE36qU*

[3] Davis, P. J. (1981). "Are There Coincidences in Mathematics?" *The American Mathematical Monthly*, 88, 311–320. doi:10.2307/2320105. *https://maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Davis311-320.pdf*

[4] *Público*, 6 de dezembro de 2023; *https://www.publico.pt/2023/12/06/opiniao/opiniao/matematica-governabilidade-coligacoes-preeleitorais-2072719*

[5] *Observador*, 8 de agosto de 2015; *https://observador.pt/2015/08/08/vantagem-psd-cds-irem-eleicoes-coligados-os-numeros*

[6] *Rádio Castelo Branco*, 16 de dezembro de 2023; *https://radiocastelobranco.sapo.pt/ae-afonso-paiva-convidou-pais-para-falar-das-suas-profissoes-relacionadas-com-a-matematica*

[7] *Folha de S. Paulo*, 29 de dezembro 2023; *https://www1.folha.uol.com.br/folhinha/2023/12/desafios-de-matematica-que-bre-a-cabeca-para-colocar-os-papeis-em-ordem.shtml*

[8] *https://gulbenkian.pt/agenda/descobrir-a-matematica-no-museu-gulbenkian*

Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

ARTE E RAZÃO DE OURO
PARTE 2

No último texto, vimos como vários matemáticos e físicos, como Luca Pacioli ou Kepler, enalteceram as propriedades matemáticas da razão de ouro, dando-lhes significados inesperados, transcendentes. Vamos agora ver como novos significados foram atribuídos a esta razão no século 19.

A grande atribuição de significados simbólicos à razão de ouro é habitualmente devida a Adolf Zeizing (1810-1876), psicólogo alemão. Este dá um destaque universalizante a esta razão, como estando ligada à natureza (nomeadamente, à filotaxia e à antropometria), à arte e à beleza, concluindo que se trata de uma lei universal. No seu livro *Nova Teoria das Proporções do Corpo Humano, Desenvolvido a Partir de uma Lei Morfológica Básica que Permaneceu Até Então Desconhecida e que Permeia Toda a natureza e a Arte, Acompanhada de um Resumo Completo dos Sistemas em Vigor* (1854), refere-se à razão de ouro do seguinte modo.

> *"Lei universal na qual está contido o princípio fundamental de todo o esforço formativo para a beleza e a completude nos reinos tanto da Natureza como da arte, e que permeia, como ideal espiritual primordial, todas as estruturas, formas e proporções, sejam elas cósmicas ou individuais, orgânicas ou inorgânicas, acústicas ou óticas; que encontra a sua plena realização, no entanto, na forma humana."*

As propostas de Zeizing são seguidas por Gustav Fechner, psicólogo experimental, um dos fundadores da psicologia moderna, que tentou verificar experimentalmente que o retângulo de ouro era considerado o mais belo, segundo a sua "visão de um mundo unificado de pensamento, espírito e matéria, ligados pelo mistério dos números".

Fechner publicou, no livro *Introdução à Estética* (1876), os resultados de uma análise experimental à apreciação estética de retângulos, na qual inclui medidas feitas a quadros, livros e outros objetos retangulares. Paralelamente, fez a seguinte experiência: colocou dez retângulos em frente a um grupo de voluntários, pedindo-lhes para indicar qual o mais esteticamente agradável. Nesta experiência, 76% das escolhas concentram-se nos retângulos de proporções 1.77, 1.6, 1.50, com o pico no retângulo de ouro (1.62).

Vários outros investigadores, nos séculos 19 e 20, tentaram reproduzir este efeito, sem o conseguirem de forma tão cabal, por vezes obtendo mesmo resultados completamente diversos. Um destes, Rafael de La-Hoz (1955-), arquiteto espanhol, tentou com uma equipa reproduzir o resultado em Córdova, na segunda metade do século 20. A preferência dos voluntários foi para outro retângulo, com proporção dada pelo raio de uma circunferência e o lado do octógono regular inscrito (a razão de ouro, como vimos, obtém-se entre o raio da circunferência e o lado do decágono regular inscrito). A esta razão chama-se hoje a razão cordovesa, com valor $1/\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 1.30656$.

Mesmo no início do século 20, a ideia de que a razão de ouro tinha um valor estético especial já era posta em causa. Theodor Lipps, filósofo que desenvolveu o conceito de empatia aplicado à estética, escreve o seguinte, no seu livro *Estética* (vol. 1, 1903).

> *"Pode agora considerar-se como um facto reconhecido [...] que a proporção da secção de ouro, em geral e neste caso [do retângulo de ouro], é totalmente desprovida de significado estético em si mesma, e que a presença desta proporção numérica não é, em parte alguma, a base de qualquer qualidade agradável. Deste modo, levanta-se a questão de saber de onde vem a indubitável agradabilidade dos retângulos que se aproximam dos da secção de ouro.*
>
> *Os retângulos em questão são apenas aqueles em que a dimensão mais pequena está claramente subordinada à maior. [...] Já foi indicado acima porque é que o retângulo que se aproxima demasiado do quadrado pouco agrada. Parece-nos estranho devido à sua ambiguidade. Por outro lado, o retângulo em que uma dimensão é demasiado pequena em relação à outra [...] parece insuficiente, fino, atenuado."*

Em concordância com Fechner, também Le Corbusier (1887-1965), arquiteto e teórico, defendia uma universalidade da razão de ouro na estrutura humana, tanto física como psicológica. Em *Vers une Architecture* (1923), afirma o seguinte.

> *"A Geometria é a linguagem do Homem. E ao decidir as distâncias entre vários objetos, descobriu ritmos, ritmos aparentes aos olhos e claros nas suas relações uns com os outros. E esses ritmos estão na raiz da atividade humana. Eles ressoam no Homem por uma inevitabilidade orgânica, a mesma inevitabilidade fina que causa o traçado da Secção de Ouro por crianças e velhos, selvagens e eruditos."*

Um dos maiores divulgadores da universalidade da razão de ouro na natureza e na arte foi Matila Ghyka (1881-1965), oficial de marinha, historiador e diplomata romeno. Durante a primeira metade do século 20, e ainda nos anos 50, escreveu vários livros sobre aplicação do número de ouro à arte, à antropometria e à natureza. Neles, faz uma recapitulação das propriedades matemáticas da razão de ouro, com relações aos polígonos, passando daí para questões de biologia (plantas e corpo humano), arte e arquitetura e daí para filosofia, cultura e misticismo. É em grande parte a este autor que devemos a divulgação da ideia da razão de ouro como algo com valor estético e natural especial.

Um autor que tentou analisar estas propostas de uma forma serena foi D'Arcy Thompson, biólogo escocês, que faz uma análise mais crítica destas em *On Growth and Form* (1917). Neste livro, que tem várias aplicações, da matemática à biologia, apresenta no capítulo sobre filotaxia uma relação entre o crescimento e a organização das plantas, usando os números de Fibonacci para descrever a distribuição de certos elementos nas plantas, no sentido de maximizar a ocupação do espaço ou a exposição ao sol, uma ideia que remonta ao naturalista Charles Bonnet (1754). No entanto, descarta outras ocorrências da razão de ouro no mundo natural.

De facto, há várias aplicações da razão de ouro a fenómenos naturais que estão obviamente erradas. Por exemplo, diz-se que a espiral da concha do *nautilus*, bem como as de algumas galáxias, seguem uma espiral de ouro, quando é simples de verificar que se trata, em ambos os casos, de espirais logarítmicas, mas com parâmetros distintos dos da espiral de ouro.

Quanto às aplicações à arte, há várias análises de quadros de pintores famosos, como Giotto, Da Vinci, Seurat, Mondrian, etc., que incluem a razão de ouro como elemento de análise. No entanto, outras mais atentas, e considerações sobre a época de cada artista, o seu estilo ou a escola de pintura a que pertencem, têm desacreditado estas análises.

Há, porém, alguns pintores, como Dalí ou Sérusier, que usaram de forma voluntária a razão de ouro e que nos deixaram provas claras desse uso – mas note-se que são pintores que trabalharam no final do século 19 e durante o século 20, quando já havia toda uma literatura estabelecendo uma ligação entre a razão de ouro e a estética. Como exemplo deste estatuto da razão de ouro referimos o coletivo Section d'Or, ativo de 1911 a 1914, que reuniu vários pintores, escultores, poetas e críticos associados ao cubismo e ao orfismo. Ainda que muito poucas obras deste grupo apresentem uma presença explícita da razão de ouro, o nome foi escolhido por esta razão já ter adquirido um estatuto estético especial, por um grupo que estava justamente à procura de afirmação no mundo artístico.

Terminamos com uma citação de Martin Kemp, professor de História da Arte em Oxford, e um dos maiores especialistas mundiais em Leonardo da Vinci, tirada do artigo "Divine Proportion and the Holy Grail" *(Nature,* 2004). Sendo muito curta, resume a nossa atitude acerca da relação entre a razão de ouro e a arte.

> *"O problema consiste em conceder um significado privilegiado à proporção [de ouro] no Renascimento, ou em qualquer período anterior ao final do século 19."*

REFERÊNCIAS

[1] Mario Livio, *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number*. Broadway Books, 2002.

[2] Roger Herz-Fischler, *A Mathematical History of the Golden Number*. Dover, 1998.

[3] George Markowsky, "Misconceptions About the Golden Ratio", *The College Mathematics Journal*, Vol. 23, Nº. 1, pp. 2-19, 1992.

[4] Martin Kemp, "Divine Proportion and the Holy Grail", *Nature*, Vol. 428, p. 370, 2004.

Alfredo Costa
Universidade
de Coimbra
amgc@mat.uc.pt

A FÓRMULA DE HERÃO

Pelas suas simplicidade e aplicabilidade no cálculo de áreas de triângulos, a fórmula de Herão sobressai como tópico adequado para o enriquecimento extracurricular de alunos do Ensino Básico.

1. INTRODUÇÃO

Não raramente, nomeadamente na Matemática Olímpica, um estudante do Ensino Básico é confrontado com a necessidade de calcular a área de um triângulo não retângulo, conhecendo apenas o comprimento dos seus lados. A fórmula de Herão permite enfrentar imediatamente esse desafio.

O nome desta fórmula deve-se ao matemático helénico Herão de Alexandria, do primeiro século depois de Cristo, que a deriva no seu livro *Métrica* [3].

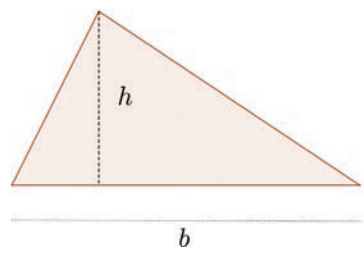
Damos aqui conta de uma aula do Delfos Júnior, lecionada pelo autor a 18 de novembro de 2023, sobre a fórmula de Herão.

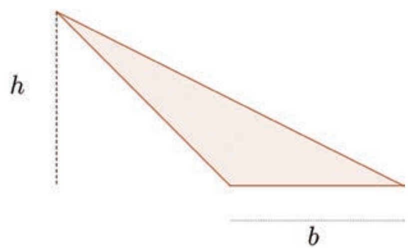
O Delfos Júnior é a secção da Escola Delfos destinada a alunos do 5.º ao 8.º anos de escolaridade. Os alunos desta secção visitam a Universidade de Coimbra num sábado de cada mês do período escolar. Aí participam em atividades que decorrem entre as 10h e as 16h, aproximadamente. Tipicamente, o programa contém duas aulas de duas horas. Foi essa a duração da aula a que nos reportamos. Durante a aula foi distribuída uma ficha com problemas sobre a fórmula de Herão. Uma discussão introdutória precedeu a resolução dos problemas. Além do acompanhamento do professor, os alunos tiveram no lugar o apoio de Dantas Serra, um estudante da Licenciatura em Matemática da Universidade de Coimbra.

2. ENUNCIADO DA FÓRMULA

De seguida, apresentamos a fórmula de Herão, transcrevendo o resumo que encabeçava a ficha distribuída aos alunos (texto entre aspas):

> "Comecemos por recordar que a área de um triângulo de base com comprimento b e altura com comprimento h é dada pela fórmula
>
> $$\acute{A}rea = \frac{bh}{2}.$$

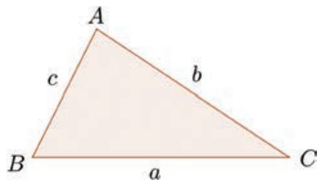




Vamos aprender uma fórmula alternativa para calcular a área de um triângulo. Dado um triângulo de lados com comprimentos a, b, c, o seu *semiperímetro* é

$$s = \frac{a+b+c}{2},$$

ou seja, s é a metade do perímetro do triângulo.



A fórmula de Herão é uma fórmula de cálculo para a área de um triângulo com lados de comprimentos a, b e c. A fórmula é a seguinte:

$$Área = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

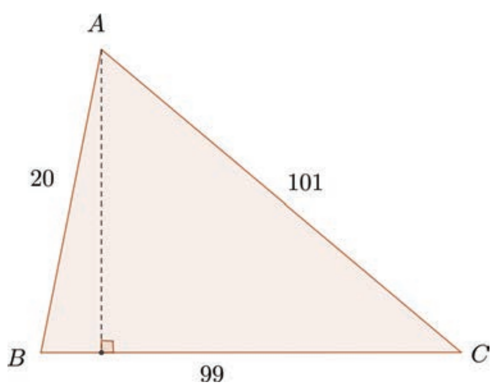
onde s é o semiperímetro do triângulo."

3. PROBLEMAS RESOLVIDOS

Os primeiros problemas da ficha distribuída eram meros exercícios nos quais se pedia que os estudantes calculassem as áreas de vários triângulos cujos lados eram conhecidos, usando a fórmula de Herão. Os alunos ultrapassaram facilmente esta etapa, fortalecendo a sua confiança para atacar os problemas seguintes.

O primeiro problema[1] não trivial foi o seguinte:

Um triângulo tem lados de comprimentos 20, 101 e 99. Determina as suas alturas.



A chave para a resolução consiste em calcular a área do triângulo de duas formas: com a fórmula de Herão e com a fórmula aprendida na escola, desse modo obtendo uma simples equação na variável "altura". O problema é instrutivo por colocar a ênfase na importância de relacionar diferentes formas de calcular a mesma coisa. Depois de o problema ter sido resolvido segundo esta abordagem, alguns alunos repararam que o triângulo é retângulo, o que suscitou um estimulante diálogo sobre o recíproco do Teorema de Pitágoras e sobre o desacordo entre uma figura e o que ela representa (na figura, os lados de comprimento 99 e 20 não aparentam formar um ângulo reto).

No exercício seguinte introduziu-se a fórmula de Brahmagupta, tendo no final da sua resolução havido uma pequena discussão em que se identificou a fórmula de Herão como um caso degenerado da fórmula de Brahmagupta.

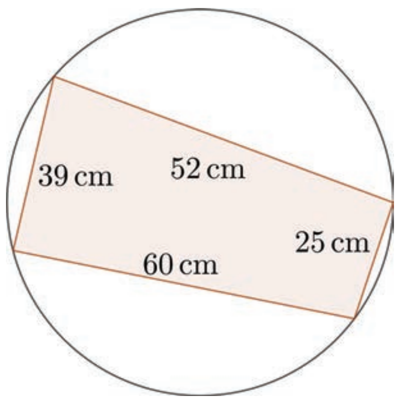
A área de um quadrilátero inscritível numa circunferência e que possui lados de comprimentos a, b, c e d é

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

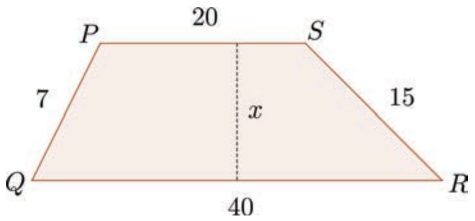
onde

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Esta fórmula, análoga à fórmula de Herão, é a chamada fórmula de Brahmagupta. Determina a área do quadrilátero do desenho abaixo.



Seguiu-se um problema[2] em que novamente se deu ênfase à técnica do relacionamento entre diferentes formas de calcular uma área:

> Na figura seguinte, o trapézio $[PQRS]$ tem o lado $[PS]$ paralelo ao lado $[QR]$. Além disso, temos $\overline{PQ} = 7$, $\overline{QR} = 40$, $\overline{RS} = 15$, e $\overline{PS} = 20$. Seja x a distância entre os lados paralelos $[PS]$ e $[QR]$. Qual é o valor de x?
>
> 
>

O último problema resolvido durante a aula era o mais abstrato e tinha um ligeiro perfume a Teoria dos Números:

> As medidas dos lados de um triângulo exprimem-se, em cm, por três inteiros consecutivos, e a sua área, em cm^2, é dada por um inteiro. Prova que o menor lado do triângulo tem comprimento ímpar, em cm.

4. SOBRE A DEMONSTRAÇÃO

Podemos encontrar na página *web* das Olimpíadas Brasileiras de Matemática uma demonstração algébrica da fórmula de Herão, escrita de um modo acessível aos alunos do 8.º ano de escolaridade, baseada apenas no Teorema de Pitágoras [2].

Mas acessibilidade não é o mesmo que rapidez ou facilidade de apreensão... Na aula que reportamos, optou-se por omitir a prova, de modo a conseguir-se respiração suficiente para a resolução de problemas.

Em maio de 2019, Carmeline Santos, então estudante do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário na Universidade de Coimbra, lecionou uma aula no Delfos Júnior sobre a fórmula de Herão, sob a orientação do autor deste texto. Alguns dos exercícios e problemas da aula de novembro de 2023 tinham já sido propostos nessa aula, mas uma parte muito substancial do tempo foi gasta na demonstração da fórmula de Herão. Tendo os alunos elevada motivação, foram pacientes e sentiram-se recompensados com a conclusão da prova. Mas foi patente a sua dificuldade em não perderem o fio à meada no longo caminho percorrido, não obstante a competência da sua professora.

REFERÊNCIAS

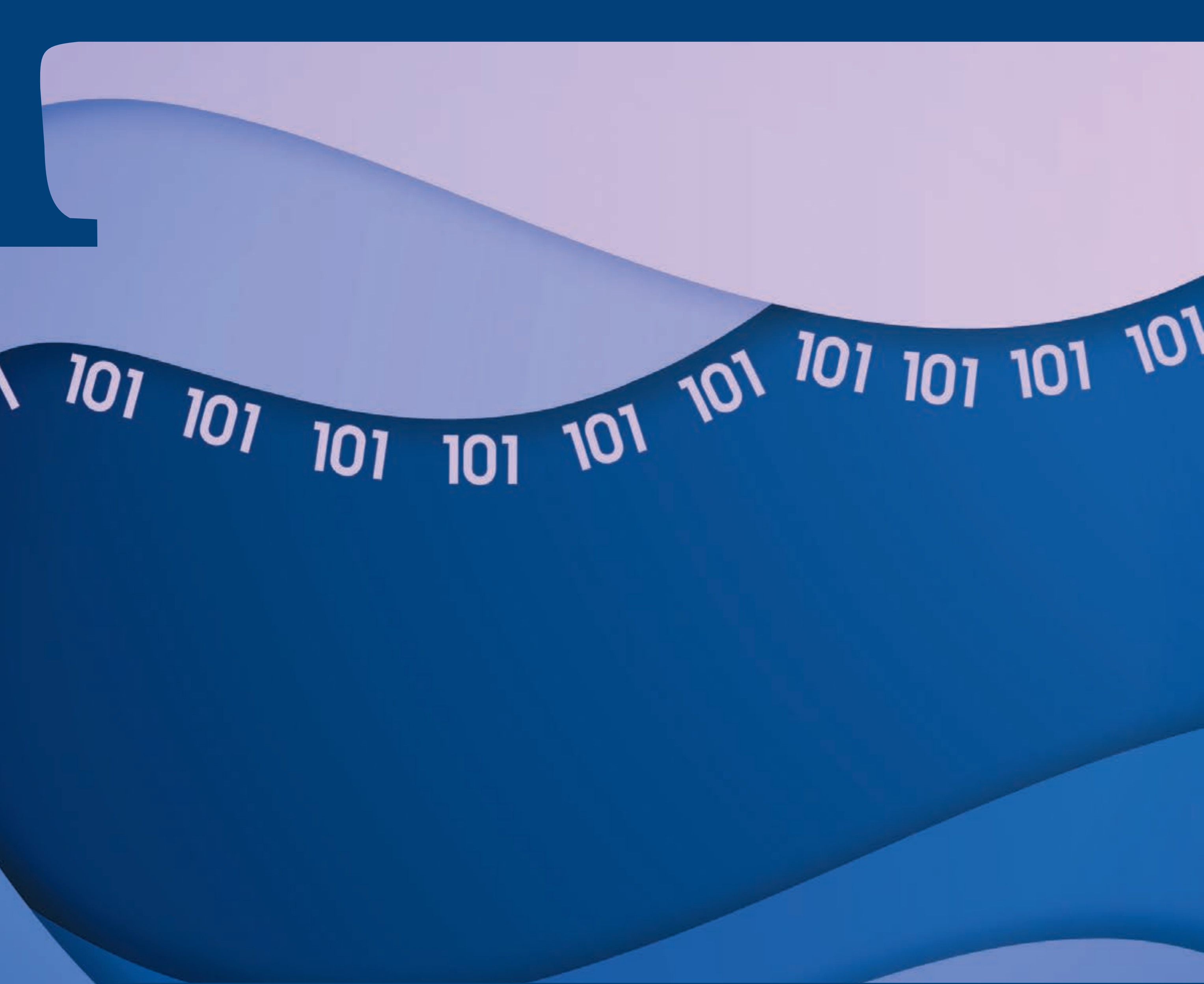
[1] *https://www.cemc.uwaterloo.ca/contests/past_contests.html.*

[2] *https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/areas_e_aplicacoes_ em_geometria.pdf.*

[3] Dirk J. Struik. *História Concisa das Matemáticas*. Gradiva, 1989. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro

[1] Problema 3.a) da 2015 Canadian Intermediate Mathematics Contest.

[2] Problema 3.b) da *2015 Canadian Intermediate Mathematics Contest*, cuja solução pode ser encontrada em [1].



NÚMEROS ONDULANTES NA FORMA 101...01

Eudes Antonio Costa[a] e Arthur Batista de Souza[b]
UFT, Arraias, Matemática[a] e UFT, PROFMAT, Arraias[b]
eudes@uft.edu.br[a] e souza.arthur@uft.edu.br[b]

Nestas notas consideramos um subconjunto dos números naturais chamados *números ondulantes* abordado por Pickover e outros. Especificamente tratamos dos números *suavemente ondulantes* formados apenas pelos algarismos 1 e 0. Sabe-se que exceto 101, nenhum número deste subconjunto é primo. Aqui mostramos também que nenhum número *suavemente ondulante* formado por aqueles algarismos é um quadrado perfeito. A análise apresentada é restrita a aritmética na base decimal. A nossa procura dos primos e quadrados perfeitos nos números ondulantes é motivada pelo estudo da classe dos números repunidades, um subconjunto dos números naturais formados pela repetição da unidade; e neste encontram-se alguns primos e nenhum quadrado perfeito.

1. INTRODUÇÃO

Nestas notas consideraremos o conjunto dos números inteiros não negativos (naturais) denotado por $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, e por conveniência diremos apenas que $m \in \mathbb{Z}_+$ é um número natural. A nossa discussão aqui preocupa-se exclusivamente com a aritmética na base decimal, assim $m = a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ indica um número inteiro não-negativo com k algarismos, em que $a_{k-1}, \dots, a_0$ são números inteiros (algarismos) de 0 a 9 e $a_{k-1} \neq 0$. As propriedades aritméticas dos naturais, os conceitos de máximo divisor comum entre dois naturais a e b, não ambos nulos, denotado por $mdc(a, b)$ e a definição 2.2 constituem a base teórica para o acompanhamento deste trabalho.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: na secção 2 apresentamos um problema para motivar a definição de números *suavemente ondulantes* compostos apenas pelos algarismos 0 e 1; na secção 3, além de variados exemplos, enunciamos os principais resultados acerca de primalidade e quadrados perfeitos dos números *suavemente ondulantes*, que serão demonstrados em subsecções separadas; enquanto na secção 4 mostramos que para um número repunidade (repetição das unidades) com uma quantidade ímpar de algarismos, existe um múltiplo suavemente ondulante compostos apenas pelos dígitos 0 e 1.

2. PRELIMINARES

Como motivação apresentamos um problema do Banco de Questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (BQ OBMEP):

Exemplo 2.1. (BQ OBMEP 2015 - Adaptada) Determine a soma do numerador e do denominador da fração irredutível que é igual a $\frac{a}{b}$, em que

$$a = \underbrace{11\dots11}_{2022} \text{ e } b = 2020\dots02,$$

em que o algarismo 2 aparece 1011 vezes alternado por 0.

Veja que

$$\underbrace{11\dots11}_{2022} = 11 \times \underbrace{1010\dots0101}_{2021} \quad \text{e}$$

$$\underbrace{2020\dots02}_{1011 \text{ algarismos } 2 \text{ e } 1010 \text{ algarismos } 0} = 2 \times \underbrace{1010\dots0101}_{2021}.$$

Portanto,

$$\frac{a}{b} = \frac{11 \times 1010\dots0101}{2 \times 1010\dots0101} = \frac{11}{2}.$$

Como $\frac{11}{2}$ é irredutível, pois $mdc(11, 2) = 1$, temos que $11 + 2 = 13$.

Definição 2.2. *Diremos que o número natural m é um número suavemente ondulante ou alternado do tipo UZ se for formado apenas pelos dígitos (algarismos) 0 e 1 e for uma sequência alternada dos dígitos 0 e 1, iniciada por 1.*

Exemplo 2.3. Os números 10, 101, 1010 e 10101010101, e o número

$$\underbrace{1010\dots0101}_{2021}$$

com 1011 algarismos 1 alternados por 1010 algarismos 0, que apareceu no exemplo 2.1, são exemplos de números *suavemente ondulantes* do tipo *UZ*.

De uma forma geral, seja $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ o conjunto de dígitos ou algarismos no sistema posicional decimal. Dizemos que um número natural m formado por $n > 2$ algarismos é *suavemente ondulante* ou *alternado* quando,

$$m = \underbrace{aba\cdots ab}_{n \text{ par}} \text{ ou } m = \underbrace{aba\cdots ba}_{n \text{ ímpar}}$$

com $a,\ b \in D,\ \ a \neq b$ e $a \neq 0$.

Observe que os números 3535353, 10101010101 e 9494 são *suavemente ondulantes*, conforme [1, 2, 3, 4]. Em [5] pode encontrar um estudo acerca dos números *suavemente ondulantes*, no qual se apresenta uma lista dos números primos *suavemente ondulantes* menores do que 10^{13}, para quaisquer $a \neq b$ em D.

3. RESULTADOS PRINCIPAIS

Por simplicidade (e conveniência), diremos apenas que m é um número *suavemente ondulante* do tipo UZ se $m \in UZ$. Para qualquer natural $m \in UZ$, usaremos a notação $m = uz(n)$ em que $n > 1$ indica a quantidade de dígitos (algarismos) no número *suavemente ondulante m*.

Consideremos alguns exemplos.

Exemplo 3.1. O número $uz(5) = 10101$, e possui três algarismos 1 alternados por dois algarismos 0. Já o número $uz(8) = 10101010$ possui quatro algarismos 1 alternados por quatro algarismos 0. Enquanto o número $uz(2022) = 1010\ldots01010$ possui 1011 algarismos 1 alternados por 1011 algarismos 0.

Os primeiros resultados são fáceis, mas apresentamos as demonstrações para que o trabalho fique o mais autocontido possível.

Proposição 3.2. [6] *Se n é par, então $uz(n)$ termina em 0, caso contrário $uz(n)$ termina em 1.*

Demonstração. Tomemos n par. Então, para algum $k \in \mathbb{Z}_+$ temos $n = 2k$, bastando agora ver que $uz(n) = uz(2k)$ é da forma

$$\begin{aligned} uz(2k) &= \underbrace{\underbrace{10}\,\underbrace{10}\cdots\underbrace{10}}_{k \text{ vezes}} \\ &= 10\cdot(\underbrace{101\ldots101}_{2k-1 \text{ algarismos}}) \\ &= uz(2k-1)\cdot 10\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

De igual modo, para n ímpar temos

$$uz(2k+1) = \underbrace{\underbrace{10}\,\underbrace{10}\cdots\underbrace{10}}_{k \text{ vezes}}1\,.$$

E obtemos o resultado. □

Dados os naturais n, k_1 e k_2 tais que $k_1 + k_2 = n$, seja $uz(n)$ um número suavemente ondulante com k_1 algarismos 1 alternados por k_2 algarismos 0 e escrevemos $uz(n) = 1_{k_1}0_{k_2}$. Segue da proposição 3.2 o seguinte resultado.

Corolário 3.3. *Se $n = 2k$ é par, então a quantidade de algarismos 1 e 0 em $uz(n)$ é igual e $uz(n) = 1_k0_k$.*

Demonstração. Utilizando indução sobre k. Para $k = 1$, temos $uz(2) = 10$, que tem um algarismo 1 e um algarismo 0, o que é verdadeiro. Suponhamos que para algum k tenhamos $uz(2k) = 1_k0_k$. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por 100 e adicionando 10, obtemos: $uz(2k+2) = uz(2k)\cdot 100 + 10 = (1_k0_k)\cdot 100 + 10$, como $uz(2) = 10$, podemos reescrever a igualdade da forma:

$$\begin{aligned} uz(2(k+1)) = uz(2k+2) &= uz(2k)\cdot 100 + uz(2) \\ &= (1_k0_k)\cdot 10^2 + 10 \\ &= 1_{k+1}0_{k+1}\,. \end{aligned}$$

O que garante que a asserção é verdadeira para $k+1$. Logo, obtemos que ela é válida para todo o k natural. □

Corolário 3.4. *Se $n = 2k+1$ é ímpar, então, em $uz(n)$, a quantidade de algarismos 1 é $k+1$ e a de algarismos 0 é k, ou seja, em $uz(n) = 1_{k+1}0_k$.*

Demonstração. Como $uz(2k+1) = uz(2k)\cdot 10 + 1$, temos, então, do corolário 3.3, que a quantidade de algarismos 1 e de algarismos 0 é igual a k, em $uz(2k+1)$ será então acrescentado um algarismo 1, logo $uz(n) = 1_{k+1}0_k$ □

Lembramos que um número natural m é um *quadrado perfeito* se existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $m = b^2$. O nosso principal resultado é mostrar o seguinte teorema.

Teorema 3.5. *Nenhum número suavemente ondulante $uz(n)$ é um quadrado perfeito.*

Apresentaremos uma demonstração do teorema 3.5 na secção 3.3.

Exemplo 3.6. Por inspeção direta nos divisores dos seis primeiros números *suavemente ondulantes UZ*, obtemos que:

1. O número $uz(2) = 10 = 2 \cdot 5$ não é primo.
2. O número $uz(3) = 101$ **é primo**.
3. O número $uz(4) = 1010 = 10 \cdot 101$ não é primo.
4. O número $uz(5) = 10101 = 111 \cdot 91$ não é primo.
5. O número $uz(6) = 101010 = 10 \cdot 10101$ não é primo.
6. O número $uz(7) = 1010101 = 101 \cdot (10^4 + 1)$ não é primo.

No exemplo 3.6 listamos apenas uma fatorização, quando o número $uz(n)$ é composto. Outro resultado interessante acerca dos números suavemente ondulantes $uz(n)$ é o seguinte:

Teorema 3.7. [6, Teorema 5] *Exceto 101, nenhum número ondulante $uz(n)$ é primo.*

Na próxima secção apresentaremos uma demonstração adaptada de [6]. Aqui este resultado vai ser-nos útil para demonstrarmos o teorema 3.5.

Em complemento ao exemplo 3.6, apresentamos também a tabela 1, com os números suavemente ondulantes $uz(n)$ e alguns fatores para n ímpar, com $5 \leq n \leq 21$.

3.1 Demonstração do Teorema 3.7

Segue da proposição 3.2 que o número *suavemente ondulante* $uz(2k)$ é múltiplo de 10 (par e múltiplo de 5) e portanto não é primo, justificando a seguinte propriedade:

Proposição 3.8. *Nenhum número suavemente ondulante $uz(2k)$ é primo.*

Para mostrarmos o caso em que n é ímpar, no número suavemente ondulante $uz(n)$, vamos precisar de mais ferramentas. Mas antes, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.9. Para qualquer x natural, temos que

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1.$$

De facto, vejamos

$$\begin{aligned}(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) &= \big((x^2+1) + x\big)\big((x^2+1) - x\big) \\ &= (x^2+1)^2 - x^2 \\ &= x^4 + 2 \cdot x^2 + 1 - x^2 \\ &= x^4 + x^2 + 1.\end{aligned}$$

Podemos generalizar essa ideia usando três somas de progressões geométricas (PG). Para quaisquer x e $q \geq 1$ natural a seguinte igualdade ocorre:

$$\begin{gathered}(x^{2q} + x^{2q-1} + x^{2q-2} + \cdots + x^2 + x + 1)\times \\ \times(x^{2q} - x^{2q-1} + x^{2q-2} - \cdots + x^2 - x + 1) = \\ = \frac{x^{2q+1} - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^{2q+1} + 1}{x + 1} = \frac{x^{4q+2} - 1}{x^2 - 1} = \\ = x^{4q} + x^{4q-2} + \cdots + x^2 + 1.\end{gathered}$$

Isto prova o seguinte resultado:

Tabela 1. Fatores.

n	$uz(n)$	Fatorização
5	$1_3 0_2$	$111 \times (10^2 - 10 + 1)$
7	$1_4 0_3$	$101 \times (10^4 + 1)$
9	$1_5 0_4$	$11111 \times (10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$
11	$1_6 0_5$	$10101 \times (10^6 + 1)$
13	$1_7 0_6$	$1111111 \times (10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$
15	$1_8 0_7$	$1010101 \times (10^8 + 1)$
17	$1_9 0_8$	$111111111 \times (10^8 - 10^7 + 10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$
19	$1_{10} 0_9$	$101010101 \times (10^{10} + 1)$
21	$1_{11} 0_{10}$	$11111111111 \times (10^{10} - 10^9 + 10^8 - 10^7 + 10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$

Lema 3.10. [6] *Para quaisquer x e $q \geq 1$ natural, a seguinte igualdade ocorre:*

$$x^{4q} + x^{4q-2} + \cdots + x^2 + 1 =$$
$$= (x^{2q} + x^{2q-1} + x^{2q-2} + \cdots + x^2 + x + 1) \times$$
$$\times (x^{2q} - x^{2q-1} + x^{2q-2} - \cdots + x^2 - x + 1).$$

Agora estamos em condições de apresentar a seguinte proposição:

Proposição 3.11. *Nenhum número suavemente ondulante $uz(n)$ é primo, com $n > 3$ ímpar.*

Demonstração. O caso em que n é ímpar será feito considerando dois casos, visto que $n > 3$ ímpar acarreta que existe um natural $q > 0$, tal que $n = 4q + 1$ ou $n = 4q + 3$.

Caso tenhamos $n = 4q + 1$, segue do lema 3.10, fazendo $x = 10$, que $uz(n)$ não é primo, visto que

$$\begin{aligned} uz(n) &= 10^{4q} + 10^{4q-2} + \cdots + 10^2 + 1 \\ &= (10^{2q} + 10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \cdots + 10^2 + 10 + 1) \\ &\quad (10^{2q} - 10^{2q-1} + 10^{2q-2} - \cdots + 10^2 - 10 + 1). \end{aligned}$$

Já no caso em que $n = 4q + 3$, o algarismo 0 ocupa a posição central, e assim escrevemos $n = 2k + 1$ para algum natural k ímpar. Bastando agora ver que

$$\begin{aligned} uz(n) &= \underbrace{101\cdots01}_{k \text{ dígitos}}0\underbrace{101\cdots01}_{k \text{ dígitos}} \\ &= uz(k)\ 0\ uz(k) \\ &= uz(k) \cdot 10^{k+1} + uz(k) \\ &= uz(k) \cdot (10^{k+1} + 1). \end{aligned}$$

Logo $uz(k)$ é um divisor de $uz(2k + 1)$.

Em ambos os casos obtemos que $uz(n)$ não é primo, quando n é ímpar. □

O teorema 3.7 é consequência direta das proposições 3.8 e 3.11.

3.2 Nenhum número repunidade é um quadrado perfeito

Para demonstrarmos o teorema 3.5, necessitamos de um resultado correlato sobre os números *repunidades*.

Os números *repunidades* (repetição da unidade) formam um subconjunto dos naturais, apresentando um padrão e algumas propriedades bem definidas, as quais despertam o interesse de matemáticos. O termo *repunidade* refere-se aos números naturais R_n que são escritos de forma única, no sistema decimal, com a repetição da unidade, ou seja, a justaposição do algarismo 1 n vezes. Assim, para todo o $n \geq 1$, $\mathbf{R_1} = \{1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \cdots,\ R_n, \cdots\}$ representa o conjunto dos números *repunidades*, veja [7, 8, 9]. Em língua portuguesa, um estudo e propriedades adicionais sobre as *repunidades* podem ser consultados em [10, 11, 12].

Proposição 3.12. [11, Proposição 9], [13, Problema 3.32] *Exceto $R_1 = 1$, nenhum outro R_n é um quadrado perfeito.*

Demonstração. Aqui utilizaremos os seguinte facto: um quadrado perfeito é da forma $4q$ (par) ou $4q + 1$(ímpar), e portanto nenhum quadrado perfeito pode ser da forma $4q + 3$, que pode ser consultado em [13].

Para $n \geq 2$ temos:

$$R_n = \underbrace{111\cdots111}_{n \text{ algarismos}} = 10^2(\underbrace{111\cdots1}_{n-2 \text{ algarismos}}) + 11\ .$$

Como 4 divide 10^2, e $11 = 4 \times 2 + 3$, obtemos que $R_n = 4q + 3$, para algum inteiro não negativo q. Como nenhum quadrado perfeito pode ser da forma $4q + 3$, então podemos concluir que, exceto R_1, nenhum outro número *repunidade* será quadrado perfeito. □

3.3 Demonstração do teorema 3.5

Nesta secção, para o caso em que n é ímpar vamos utilizar o clássico resultado conhecido como *algoritmo de Euclides* que determina o máximo divisor comum entre dois números inteiros.

Lema 3.13. [13, Algoritmo de Euclides] *Dados os inteiros a, b, com $b = aq + r$ para q e $0 \leq r < |b|$ inteiros. O máximo divisor comum entre a e b é dado por*

$$mdc(a, b) = mdc(a, r).$$

Para mostrar isso, deve-se provar que o conjunto dos divisores positivos comuns de a e b é o mesmo conjunto dos divisores positivos comuns de b e r, e portanto seus máximos também são iguais, o que deixamos como desafio ao leitor (ou consultar [13]). O Algoritmo de Euclides consiste na aplicação reiterada do lema acima. Como os restos formam uma sequência estritamente decrescente, o algoritmo para quando atingimos o resto 0. Se o mdc de dois números é igual a 1, dizemos que os números são coprimos ou primos entre si.

Ao modo da secção 3.1, vamos separar em dois casos, n par ou ímpar. E o teorema 3.5 será uma consequência direta dos próximos resultados.

Proposição 3.14. *Nenhum número ondulante $uz(n)$ é quadrado perfeito, para n par.*

Demonstração. Para todo o natural par $n > 1$ existe um natural $k > 0$, tal que, $n = 2k$. Segue da proposição 3.2 que $uz(2k)$ termina em 0, portanto $uz(2k)$ é par e se for um quadrado perfeito, será da forma $4q$ para algum inteiro q. Da equação 3.1 temos que $uz(2k) = uz(2k-1) \times 10$. E assim 10 é fator do número $uz(2k)$, e novamente pela proposição 3.2, segue que $10 = 2 \cdot 5$ (nem 2 e nem 5) não é fator de $uz(2k-1)$, pois $uz(2k-1)$ é ímpar terminando em 1. Logo, nenhum $uz(2k)$ é quadrado perfeito. □

Para organizar e facilitar a leitura, o caso em que n é ímpar será feito considerando dois subcasos, $n = 4q+1$ ou $n = 4q+3$. Em ambos, vamos mostrar que os fatores dados na proposição 3.11 são coprimos.

Proposição 3.15. *Nenhum número ondulante $uz(n)$ é quadrado perfeito, para n ímpar da forma $n = 4q+1$.*

Demonstração. Tomemos $n = 4q+1$, pela proposição 3.11 temos que $uz(n)$ não é primo, e temos a fatorização

$$\begin{aligned} uz(n) = (&10^{2q} + 10^{2q-1} + \ldots + 10 + 1)\times \\ &\times(10^{2q} - 10^{2q-1} + \ldots - 10 + 1). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que o

$$mdc(10^{2q} + 10^{2q-1} + \ldots + 10 + 1\ ,\ 10^{2q} - 10^{2q-1} + \ldots - 10 + 1) = 1.$$

Pelo Algoritmo de Euclides (lema 3.13), temos que

$$\begin{aligned} &mdc(10^{2q} + 10^{2q-1} + \ldots + 10 + 1, \\ &\qquad 10^{2q} - 10^{2q-1} + \ldots - 10 + 1) \\ &= mdc(10^{2q} - 10^{2q-1} + \ldots - 10 + 1, \\ &\qquad 2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \ldots + 2 \cdot 10) \\ &= mdc(10 \cdot 10^{2q-1} - 10 \cdot 10^{2q-2} + \ldots - 10 + 1, \\ &\qquad 2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \ldots + 2 \cdot 10). \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} &9 \cdot 10^{2q-1} + 9 \cdot 10^{2q-3} + \ldots + 9 \cdot 10 + 1 \\ &= 4 \cdot (2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \ldots + 2 \cdot 10) + \\ &\quad + 10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \ldots + 10 + 1. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} &mdc(10 \cdot 10^{2q-1} - 10 \cdot 10^{2q-2} + \ldots - 10 + 1, \\ &\qquad 2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \ldots + 10) \\ &= mdc(2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \ldots + 2 \cdot 10, \\ &\qquad 10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \ldots + 10 + 1) \\ &= mdc(10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \ldots + 10 + 1, \\ &\qquad 10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \ldots + 10 - 1). \end{aligned}$$

Veja que os números $10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \ldots + 10 + 1$ e $10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \ldots + 10 - 1$ são ímpares consecutivos, assim

$$\begin{aligned} &mdc(10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \ldots + 10 + 1, \\ &10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \ldots + 10 - 1)\ = 1. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} &mdc(10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \ldots + 10 + 1, \\ &10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \ldots + 10 - 1)\ =\ 1, \end{aligned}$$

concluímos que os fatores do número ondulante $uz(4q+1)$ não possuem fatores em comum e sendo o primeiro fator uma *repunidade* maior do que 1, a qual pela proposição 3.12 não é um quadrado perfeito, obtemos que $uz(4q+1)$ não é um quadrado perfeito. □

Proposição 3.16. *Nenhum número ondulante $uz(n)$ é quadrado perfeito, para o número n ímpar da forma $n = 4q+3$.*

Demonstração. Temos $n = 4q+3$, novamente pela proposição 3.11 temos que $uz(n)$ não é primo, reescrevendo $n = 2k+1$, obtemos a fatorização

$$\begin{aligned} uz(n) &= uz(2k+1) \\ &= (10^{2q} + 10^{2q-2} + \ldots + 10^2 + 1)(10^{2q+2} + 1). \end{aligned}$$

Primeiro, veja que

$$\begin{aligned} &(10^2 - 1)(10^{2q} + 10^{2q-2} + \ldots + 10^2 + 1) \\ &= 10^{2q+2} + 10^2 \cdot 10^{2q-2} + \ldots + 10^2 \cdot 10^2 + \\ &\quad + 10^2 - 10^{2q} - 10^{2q-2} - \ldots - 10^2 - 1 \\ &= 10^{2q+2} + 10^{2q} + \ldots + 10^4 + 10^2 - 10^{2q} - \\ &\quad - 10^{2q-2} - \ldots - 10^4 - 10^2 - 1 \\ &= 10^{2q+2} - 1. \end{aligned}$$

Como $10^{2q+2} + 1 = (10^{2q+2} - 1) + 2$, outra vez pelo Algoritmo de Euclides (lema 3.13), segue que

$$\begin{aligned} & mdc(10^{2q}+10^{2q-2}+\ldots+10^2+1,\ 10^{2q+2}+1) \\ = \ & mdc(10^{2q}+10^{2q-2}+\ldots+10^2+1,\ 2). \end{aligned}$$

Como o número $10^{2q}+10^{2q-2}+\ldots+10^2+1$ é ímpar, temos que $mdc(10^{2q}+10^{2q-2}+\ldots+10^2+1\ ,\ 2)=1$.

Como $mdc(10^{2q}+10^{2q-2}+\ldots+10^2+1,\ 2)=1$, concluímos que os fatores do número ondulante $uz(4q+3)$ não possuem fatores em comum e sendo o primeiro fator um número ondulante $uz(4q+1)$, o qual pela proposição 3.15 não é um quadrado perfeito, obtemos que $uz(4q+3)$ não é um quadrado perfeito.

□

4. MAIS RESULTADOS

Dados os números a e b, dizemos que b é um divisor de a, ou a é múltiplo de b, se existir um número c tal que $a=b\cdot c$.

O próximo resultado mostra uma relação entre os números *suavemente ondulantes* e os números repunidades.

Proposição 4.1. *Se $n=4q+1$ então $uz(n)$ é múltiplo de R_{2q+1}.*

Demonstração. No lema 3.10, fazendo $x=10$, basta ver que

$$R_{2q+1}=10^{2q}+10^{2q-1}+10^{2q-2}+\cdots+10^2+10+1.$$

□

E mais, observando a tabela 1, constatamos $uz(5)$, $uz(6)$, $uz(9)$ e $uz(11)$ são também múltiplos de 3. De uma forma geral, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.2. *Se $n=3k$ é par ou $n=3k+2$ é ímpar então $uz(n)$ é múltiplo de 3.*

Demonstração. Basta observar que no primeiro caso a quantidade de algarismos 1 é o inteiro $\frac{3k}{2}$, enquanto no segundo caso é $\frac{3(k+1)}{2}$. Portanto, nos dois casos a quantidade de dígitos 1 também é múltipla de 3. □

O mesmo argumento é válido para 9, e de modo similar para qualquer outra potência de 3.

Proprosição 4.3. *Se $n=9k$ é par ou $n=9k+8$ é ímpar então $uz(n)$ é múltiplo de 9.*

Agora vamos apresentar uma definição um pouco mais geral do que a definição 2.2.

Definição 4.4. *Diremos que o número ondulante m é do tipo AZ se for formado apenas pelos dígitos 0 e a e for uma sequência alternada dos dígitos 0 e a, iniciada por a, com $a\in\{1,2,\ldots,8,9\}$.*

Exemplo 4.5. Os números 10, 202, 3030, 20202 e 40404040404 são exemplos de números *ondulantes* do tipo AZ.

O seguinte resultado, cuja demonstração se deixa como desafio, é consequência do teorema 3.7.

Proposição 4.6. *Se $a\neq 1$ e $n\geq 2m$ então nenhum número suavemente ondulante $az(n)$ é primo.*

Por fim, o resultado seguinte é uma consequência do teorema 3.5. Fica como desafio provar que:

Proposição 4.7. *Nenhum número suavemente ondulante $az(n)$ é quadrado perfeito, para $n\geq 2$.*

5. CONSIDERAÇÕES

Uma abordagem sobre divisores, múltiplos e decomposição em fatores primos de um número inteiro ou natural pode ser feita na forma de desafio ou do estudo de propriedades aritméticas. Uma apresentação sobre alguns subconjuntos, tais como números *ondulantes* ou *repunidades* pode ser abordada num contexto de matemática recreativa ou com estudantes olímpicos. Nas várias possibilidades, o conhecimento específico, aliado ao fascínio que os números primos sempre despertam, pode ser utilizado tanto para fixar melhor o conteúdo ou assunto, quanto para despertar no estudante o gosto por problemas desafiadores em Teoria dos Números. Aqui compartilhamos o nosso estudo provocado pela conversa entre os autores, durante a disciplina de Aritmética (PROFMAT), que despertou a curiosidade sobre a existência (ou não) de primos ou quadrados perfeitos no conjunto de números *suavemente ondulantes* do tipo UZ. Apresentamos também tais questões a estudantes de matemática e esperamos assim despertar o gosto pelos números, bem como observar padrões, que são duas características típicas de um matemático.

REFERÊNCIAS

[1] Pickover, Clifford A. "Is There a Double Smoothly Undulating Integer?". *Journal of Recreational Mathematics*, v. 22, n. 1, pp. 52-53, 1990.

[2] Pickover, Clifford A. *Wonders of Numbers: Adventures in Mathematics, Mind, and Meaning*. (Chapters 52 and 88). Oxford University Press, 2003.

[3] Robinson, D. F. "There are no Double Smoothly Undulating Integers in Both Decimal and Binary Representation". *Journal of Recreational Mathematics*, v. 26, n. 2, pp. 102-103, 1994.

[4] Shirriff, Ken. "Comments on Double Smoothly Undulating Integers". *Journal of Recreational Mathematics*, v. 26, n. 2, pp. 103-104, 1994.

[5] Carvalho, F. S.; Costa, E. A. "Um Passeio pelos Números Ondulantes". *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, Bento Gonçalves, v. 8, n. 2, pp. e3001-e3001, 2022.

[6] Costa, E. A.; Costa, G. A. "Existem números primos na forma $101\cdots101$". *Revista do Professor de Matemática*, n. 103, pp. 21-22, 2021.

[7] Beiler, Albert H. *Recreations in the Theory of Numbers: the Queen of Mathematics Entertains*. 2nd ed. New York: Dover, 1966.

[8] Ribenboim, Paulo. *The Little Book of Bigger Primes*. 2nd ed. New York: Springer, 2004.

[9] Yates, Samuel. *Repunits and Pepetends*. Star Publishing Co., Inc. Boynton Beach, Florida, 1992.

[10] Carvalho, F. S.; Costa, E. A. "Escrever o Número $111\cdots111$ como Produto de Dois Números". *Revista do Professor de Matemática*, n. 87, pp. 15-19, 2015.

[11] Costa, E. A.; Santos, D. C. "Números Repunidades: Algumas Propriedades e Resolução de Problemas". *Professor de Matemática Online*, v. 8, n. 4, pp. 495-503, 2020.

[12] Costa, E. A.; Santos, D. C. "Algumas Propriedades dos Números Monodígitos e Repunidades". *Revista de Matemática*, v. 2, pp. 47-58, 2022.

[13] Hefez, Abramo. *Aritmética.* Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção PROFMAT, 2. ed. Rio de Janeiro-RJ. SBM, 2016.

Agradecimento: Os autores agradecem à PROPESQ/UFT pelo apoio à pesquisa.

SOBRE OS AUTORES

Eudes Antonio Costa (https://orcid.org/0000-0001-6684-9961) é professor adjunto no colegiado de Matemática da UFT, Arraias. Os seus interesses de investigação prendem-se com tópicos de álgebra e matemática recreativa.

Arthur Batista de Souza é estudante do Mestrado em Matemática (ProfMat) no Campus de Arraias, Universidade Federal do Tocantins, Brasil. Atualmente é professor substituto do IFTO, Campus Palmas.

UMA ESTRANHA AMIZADE

JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

A figura de Kurt Gödel vai-se tornando aos poucos cada vez mais familiar do grande público. No entanto, é ainda pouco conhecido o facto de Gödel e Einstein se terem tornado amigos chegados nos últimos anos de vida deste. Iremos ver alguns aspetos desta relação invulgar.

Albert Einstein (1879-1955) é o físico mais famoso do século XX e um dos mais célebres cientistas que jamais existiram. A sua aparência física (sobretudo na fase mais avançada da sua vida) torna-o uma figura muito facilmente reconhecível e tanto os seus trabalhos como a sua vida deram origem a numerosas obras de divulgação científica e de ficção.

Kurt Gödel (1906-1978) não é uma personagem tão conhecida. É um dos nomes mais proeminentes da história da Lógica e foi colega de Einstein no Instituto de Estudos Avançados de Princeton, a partir de 1940. Acontece que, embora houvesse uma grande diferença de idades entre eles e as áreas do conhecimento de que eram especialistas fossem bastante distintas, houve uma amizade muito intensa entre os dois, a qual merece ser conhecida.

Gödel nasceu em Brünn (atual Brno), no Império Austro-Húngaro, numa altura na qual Einstein já tinha formulado a Teoria da Relatividade. Após a Primeira Guerra Mundial, a sua cidade natal passou a fazer parte da Checoslováquia (atualmente é parte da Chéquia) e Gödel passou a ver-se a si próprio como um austríaco exilado naquele país (veja-se [3, cap. 1]). Segundo o seu irmão mais velho, Rudolf Gödel, quando Kurt Gödel completou o Ensino Secundário já dominava a Matemática universitária.

Gödel fez os seus estudos superiores na Universidade de Viena a partir de 1924. Inicialmente, revelou interesse sobretudo em Física. Mas frequentou um seminário dedicado à abordagem de Bertrand Russell à Matemática e começou a dar-se com pessoas ligadas ao Círculo de Viena.[1] Em particular, conheceu aí o seu futuro orientador de doutoramento, Hans Hahn. Gödel completou a sua tese, sobre Lógica, com apenas 23 anos, em 1929. No ano seguinte, obteve os seus resultados mais famosos, os teoremas da incompletude.[2]

Em 1933, Gödel tornou-se professor na Universidade de Viena. Nesse mesmo ano, fez a sua primeira deslocação aos Estados Unidos e foi aí que travou conhecimento com Einstein. Pouco tempo depois, Einstein descreveu Gödel usando uma expressão que ainda hoje é empregue: o maior lógico desde Aristóteles.

Outro evento importante que teve lugar em 1933 foi a chegada de Hitler ao poder na Alemanha. À partida, isso não devia afetar Gödel, que vivia então na Áustria. Mas este país foi anexado pela Alemanha em 1938 e a associação de Hans Hahn (que tinha antepassados judeus) com Gödel tornou a posição deste na Universidade de Viena difícil de manter. Mas já desde o ano anterior Gödel começara a obter informações sobre como conseguir um lugar em Inglaterra ou nos Estados Unidos (veja-se [1, cap. 7]). No entanto, levou tempo a tomar definitivamente a decisão de partir. Talvez o fator mais importante para essa tomada de decisão fosse o facto de ter sido agredido na rua por um grupo de jovens simpatizantes nazis. Mas entretanto a Segunda Guerra Mundial já tinha começado, o que tornava pouco viável viajar para os Estados Unidos pelo Atlântico. Gödel e a mulher acabaram por viajar na direção oposta: atravessaram a União Soviética no Transiberiano e, em seguida, navegaram do Japão até aos Estados Unidos (para mais detalhes, veja-se [2]).

Gödel foi trabalhar para o Instituto de Estudos Avançados de Princeton, que já visitara antes, onde se reencontrou com Einstein. Aos poucos, desenvolveu-se entre Gödel e Einstein uma forte amizade, que perduraria até à morte deste. Einstein reformou-se em 1944, mas continuou a ir regularmente ao Instituto, tendo afirmado que o fazia pois assim "tinha a honra de regressar a casa na companhia de Gödel".

Paul Oppenheim, um químico e filósofo, atribuiu a si próprio o mérito de desencadear aquela amizade. Segundo ele, sabendo que a timidez de Gödel tornaria difícil uma aproximação entre os dois, bateu às portas dos gabinetes de ambos no Instituto (que ficavam próximos) e, quando eles vieram à porta, disse "Einstein, este é Gödel. Gödel, este é Einstein." Mais tarde, Oppenheim descreveu este ato como a sua única contribuição para a Ciência.

A proximidade entre os dois era bem conhecida no Instituto. Freeman Dyson, que foi membro do Instituto, descreveu Gödel como "o único dos nossos colegas que caminhava e conversava com Einstein de igual para igual". Ernst Strauss, assistente de Einstein na década de 1940, foi da opinião de que Gödel era "certamente, de longe, o melhor amigo de Einstein". Quanto às suas personalidades, Strauss afirmou que "eram pessoas muito, muito, diferentes, mas, por algum motivo, compreendiam-se e estimavam-se muitíssimo um ao outro". Também disse:

> "Como pessoas, eram muito diferentes de praticamente todas as maneiras – Einstein era gregário, feliz, cheio de riso e de senso comum e Gödel era extremamente solene, muito sério, bastante solitário e desconfiava do senso comum como meio de chegar à verdade. Mas partilhavam uma qualidade fundamental: ambos iam diretamente e de todo o coração para o centro das coisas."

E o que é que eles pensavam um do outro? Einstein nunca se exprimiu longamente sobre Gödel, mas, pouco após a morte de Einstein, Gödel disse ao primeiro biógrafo deste, Carl Seelig:

Gödel e Einstein caminhando em Princeton.

> "Perguntei-me frequentemente porque é que Einstein tinha prazer em conversar comigo, e acredito que se devia ao facto de ter opiniões contrárias às dele e não fazer segredo disso."

Devia ser, do ponto de vista de Einstein, uma mudança positiva em relação às pessoas que o veneravam sem o perceber. E, naturalmente, Gödel ser suficientemente inteligente para discordar dele por boas razões também devia ajudar.

A mãe de Gödel, que achava Einstein uma pessoa fascinante, viu naturalmente com bons olhos a amizade que se formou entre os dois. Isto teve como consequência que Einstein lhe escreveu uma carta, o que a deixou encantada.

Uma pessoa que conviveu com Einstein e com Gödel por esta época foi Bertrand Russell, que mencionou na sua autobiografia [6] que, em 1944, teve diversas conversas com ambos e com o físico Wolfgang Pauli em casa de Einstein. Segundo Russell, essas conversas foram em parte dececionantes por constatar que, apesar de os seus três interlocutores serem judeus cosmopolitas,

[1] *Vienna Circle*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, *https://plato.stanford.edu/entries/vienna-circle/*

[2] Bruno Vaiano, *Kurt Gödel: o Filósofo Paranoico que Provou a Incompletude da Matemática*, *https://super.abril.com.br/especiais/os-teoremas-da-incompletude-de-godel*

tinham todos um preconceito a favor da metafísica alemã. Quando aquele livro foi publicado, Einstein e Pauli já tinham morrido há vários anos, mas Gödel ainda estava vivo e reagiu dizendo que não era judeu (acrescentando que, na sua opinião, isto não tinha qualquer importância) e que se recordava de ter tido somente uma conversa com Russell naquela época (veja-se [4, pp. 316-317]).

Em 1947, Gödel tornou-se cidadão dos Estados Unidos.[3] Era suposto cada candidato à naturalização levar consigo duas testemunhas e Gödel escolheu para tal Einstein e o economista Oskar Morgenstern. Gödel, sendo uma pessoa conscienciosa, achou por bem estudar o melhor possível o país do qual iria passar a ser cidadão e, em particular, a sua Constituição. E ficou perturbado ao concluir que era possível, sem nunca violar a Constituição, fazer-se dos Estados Unidos um regime fascista. Quer Einstein quer Morgenstern tentaram impedir Gödel de levantar este assunto ao falar ao juiz que devia dar-lhe a nacionalidade norte-americana (e que foi o mesmo que dera a nacionalidade norte-americana a Einstein). Não resultou. O juiz quis saber como era o regime político da Áustria e, quando Gödel lhe disse que era uma república mas que a sua Constituição estava feita de tal forma que acabou por se tornar uma ditadura, o juiz explicou-lhe, naturalmente, que isso não poderia ocorrer nos Estados Unidos. Como era de esperar, Gödel retorquiu-lhe que não era assim. Mas isso não causou problemas e a naturalização prosseguiu sem mais obstáculos.

Em 1951, foi criado o Prémio Albert Einstein, que se destinava a trabalhos em Física Teórica. A comissão encarregada de decidir a quem seria atribuído o prémio pela primeira vez consistia em Einstein, J. Robert Oppenheimer, John von Neumann e Hermann Weyl e o prémio acabou por ser repartido entre Gödel e o físico norte-americano Julian Schwinger. Que Schwinger, o qual viria a ser galardoado com o Prémio Nobel da Física, recebesse este prémio é algo que não surpreende. Mas porquê Gödel? Acontece que os únicos trabalhos publicados por Gödel em áreas além de Lógica e de Filosofia foram sobre Relatividade Geral. Gödel mostrou, entre outras coisas, que nada naquela teoria é incompatível com viagens no tempo (para mais detalhes, veja-se [5]). Einstein, ao entregar o prémio a Gödel, disse-lhe "Não precisas disto".

Como é natural, Gödel ficou muito abalado com a morte de Einstein, em 1955. Segundo escreveu à sua mãe, "é claro que, de um ponto de vista puramente pessoal, perdi muito com a morte dele, tanto mais que, em particular nos últimos tempos, ele era ainda mais simpático comigo do que antes e eu tinha a impressão de que ele queria abrir-se ainda mais a mim do que antes". Os membros do Instituto que foram encarregados de organizar os textos científicos deixados por Einstein no seu gabinete foram Gödel e a última assistente de Einstein, Bruria Kaufman.

A amizade entre Einstein e Gödel está, aos poucos, a tornar-se conhecida do grande público. Numa versão caricatural, Gödel surge como amigo de Einstein no filme *O Génio do Amor*, de 1994. E no filme *Oppenheimer*, de 2023, também se pode ver Gödel, num papel não falado, junto de Einstein.[4] É de esperar que a extraordinária ligação entre os dois vá ganhando visibilidade à medida que o tempo passa.

BIBLIOGRAFIA

[1] Stephen Budiansky, *Journey to the Edge of Reason: The Life of Kurt Gödel*, Oxford University Press, 2021

[2] John W. Dawson Jr., *Max Dehn, Kurt Gödel, and the Trans-Siberian Escape Route*, Notices of the AMS, **49** (9), 1068-1075[5]

[3] John W. Dawson Jr., *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*, A K Peters, 1997

[4] Solomon Feferman, John W. Dawson Jr. (eds.), *Kurt Gödel: Collected Works IV: Selected Correspondence, A-G*, Oxford Universiy Press, 2003

[5] Roger Penrose, *Gödel, Relativity, and Mind*, J. Phys.: Conf. Ser. 82 012002, 2007[6]

[6] Bertrand Russell, *Autobiography*, Routledge, 1998

[3] Oskar Morgenstern, *History of the Naturalization of Kurt Gödel*, *https://albert.ias.edu/entities/archivalmaterial/9fd45e83-9706-4c1f-92de-302efdc85561*. É afirmado aqui que o evento teve lugar em 1946, o que não está correto.

[4] K. W. Regan, *Kurt Gödel in the Movies*, *https://rjlipton.wpcomstaging.com/2023/11/11/kurt-gdel-in-the-movies/*

[5] Acessível em *https://www.ams.org/notices/200209/fea-dawson.pdf*

[6] Acessível em *https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/82/1/012002/pdf*

Jorge Nuno Silva
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

CONTAS EGÍPCIAS

As fracções unitárias, também conhecidas por fracções egípcias, eram as únicas utilizadas no Egipto Antigo, como atestam os vários papiros que nos chegaram de há quase quatro mil anos. Arquimedes usou estes números, assim como Fibonacci, pelo que a sua prática se prolongou por muitos séculos. Um documento célebre, o *Papiro de Rhind*, apresenta uma lista de decomposições em fracções unitárias que tem sido muito estudada, apresentando ainda alguns mistérios. De alguns deles daremos aqui conta.

Comecemos com um quebra-cabeças de origem árabe, muito popular (ver, por exemplo, Gardner 1978 e Tahan 2012, p. 21), em que ocorrem fracções unitárias: Um pai deixou aos seus três filhos a herança de 11 camelos, cabendo $1/2$ do total ao mais velho, $1/4$ ao filho do meio e um $1/6$ ao mais novo. Ao tentar fazer as partilhas, chocaram no facto de a nenhum caber um número inteiro de camelos... Um amigo juntou um camelo à herança e a divisão fez-se: seis para o mais velho, três para o do meio e dois para o mais novo. Como $6+3+2=11$, o amigo recuperou o camelo e todos ficaram contentes.

Há variantes desta recreação, mas nós vamos restringir-nos ao caso em que há três filhos e o amigo dispõe somente de um camelo. Nestas circunstâncias, quantos quebra-cabeças semelhantes podemos formar? Por exemplo, a herança podia constar de sete camelos e ser dividida segundo as fracções $1/2$, $1/4$, $1/8$. Aqui, também o problema não tem solução, mas com a adição de um camelo, passamos a ter oito camelos que dá origem à divisão 4, 2, 1 e, como $4+2+1=7$, o amigo recupera o seu camelo. Intuitivamente, o número de questões semelhantes pode parecer grande, mas só existem sete tais recreações.[1]

Qualquer fracção própria se pode escrever como soma de fracções unitárias de uma forma óbvia, por exemplo $2/5 = 1/5 + 1/5$. Mas os egípcios não admitiam tal repetição. O problema de obter uma decomposição em fracções distintas tem sempre solução e há um algoritmo, descrito por Fibonacci (ver Sigler 2012, pp. 119-126), muito natural. Dada uma fracção n/m, $(1 < n < m)$, subtraímos a n/m a maior fracção unitária possível e obtemos uma outra fracção própria. Como Sylvester provou muito mais tarde (ver Sylvester 1880), o numerador desta nova fracção é menor do que n, pelo que este método induz um processo que termina sempre. Vejamos um exemplo. Queremos decompor a fracção $4/5$. Temos

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

como a maior fracção unitária menor do que $3/10$ é $1/4$, calculamos

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

e, finalmente, obtemos

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}.$$

Este processo admite uma interpretação geométrica simples. Consideremos a divisão de quatro unidades (quatro rectângulos) por cinco.

[1] Representando as duas instâncias analisadas por (11, 2, 4, 6) e (7, 2, 4, 8), as outras são: (11, 2, 3, 12), (17, 2, 3, 9), (19, 2, 4, 5), (23, 2, 3, 8), (41, 2, 3, 7).

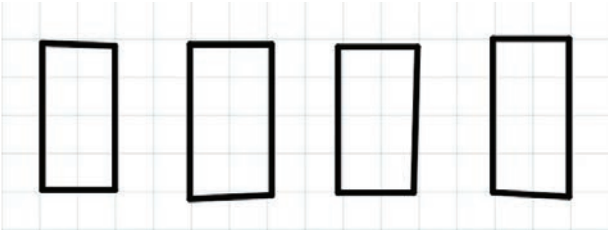


Figura 1. Quatro rectângulos para dividir por 5.

A maior porção que se pode distribuir é a de meio rectângulo. Representemos a azul a porção que cabe a um dos cinco destinatários (e a escuro a porção dos restantes quatro).

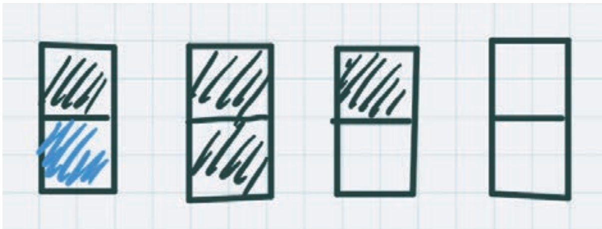


Figura 2. Para já, cabe meio rectângulo a cada um.

Sobraram três meios rectângulos, que são seis quartos de rectângulo, pelo que podemos distribuir cinco deles:

Figura 3. Cada um já recebeu 1/2+1/4.

Finalmente, falta distribuir um quarto de rectângulo por cinco recipientes:

Figura 4. Cada um recebe 1/2+1/4+1/20.

Uma fracção unitária também se pode decompor, nomeadamente mediante a identidade

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m(m+1)}$$

o que mostra que o número de representações de uma fracção em soma de fracções unitárias é ilimitado.

Para compreender o contexto em que as fracções surgem na aritmética egípcia, convém descrever sucintamente as suas técnicas de cálculo. Os egípcios usavam uma base de numeração decimal (não posicional). Tinham símbolos próprios para as potências de 10 e somavam e subtraíam segundo a lógica habitual das ordens de grandeza. Contudo, para multiplicarem dois números, seguiam um algoritmo exemplar. Vejamos um exemplo, retirado do *Papiro de Rhind (PR)* (ver Chace et al. 1929), 19×71. Vamos construir duas colunas de números, encimadas por 1 e pelo multiplicador. Cada linha a partir da segunda obtém-se por duplicação da linha anterior:

1	71
2	142
4	284
8	568
16	1136

Terminamos aqui porque o dobro de 16 já excede o multiplicando, 19.

Agora, marcamos os números da coluna da esquerda que somam 19:

$*$	1	71
$*$	2	142
	4	284
	8	568
$*$	16	1136
	19	

Então, a soma dos números correspondentes da coluna da direita dá o resultado do produto:

$*$	1	71
$*$	2	142
	4	284
	8	568
$*$	16	1136
	19	1349

Sim, os egípcios multiplicavam sem saber a tabuada! Bastava-lhes saber duplicar.

Aos nossos olhos, este processo não é mais do que o resultado de combinar a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição com a representação binária do multiplicando:

$$19 \times 71 = (1 + 2 + 16) \times 71 = 1 \times 71 + 2 \times 71 + 16 \times 71.$$

Note-se que os produtos obtidos, por envolverem potências de dois, calculam-se por duplicações sucessivas.

A divisão usa um método também surpreendente. De novo, recorremos a um exemplo do *PR*, $91 \div 7$. Tendo compreendido que a divisão é a operação inversa da multiplicação, o escriba do papiro sabe que procura um número, x dizemos nós, tal que $x \times 7 = 91$. Mas a multiplicação tem uma explanação conhecida:

$$\begin{array}{cc} 1 & 7 \\ 2 & 14 \\ 4 & 28 \\ 8 & 56 \\ \hline & 91 \end{array}$$

Parámos na quarta linha porque na seguinte, o dobro de 56 já excede 91.

Escolhamos agora os números da coluna da direita que somam 91. Os correspondentes da esquerda somarão o quociente pretendido ($91 \div 7 = 13$):

$$\begin{array}{ccc} 1 & 7 & * \\ 2 & 14 & \\ 4 & 28 & * \\ 8 & 56 & * \\ \hline 13 & 91 & \end{array}$$

Os egípcios dividiam e multiplicavam com essencialmente o mesmo algoritmo e sem usar tabuada!

Claro que as coisas se complicam quando a divisão não é exacta, mas o algoritmo permanece. Eis o cálculo de $35 \div 8$, onde usamos a notação $\overline{n}$ para $1/n$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 8 & \\ 2 & 16 & \\ 4 & 32 & * \\ \overline{2} & 4 & \\ \overline{4} & 2 & * \\ \overline{8} & 1 & * \\ \hline 4\,\overline{4}\,\overline{8} & 35 & \end{array}$$

As duplicações terminam na terceira linha e recorre-se a sucessivas passagens à metade, para produzir, na coluna da direita, um conjunto de números que some 35. A soma dos correspondentes da coluna da esquerda dá-nos o resultado pretendido: $4\,\overline{4}\,\overline{8} = 4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Não é fácil compreender a razão para usar somente este tipo de fracções (a única excepção era $2/3$) e este tipo de decomposições. Talvez um outro problema do *PR* ajude: dividir seis pães por dez pessoas. Um aluno de hoje responderia $3/5$. O escriba do nosso papiro respondeu $\overline{2}\,\overline{10}$. Pragmaticamente, esta resposta é superior, já que é muito mais natural partir cinco pães ao meio e um pão em 10 pedaços do que partir cada um dos seis pães em cinco partes iguais e dar três delas a cada pessoa.

A necessidade de determinar rapidamente dobros de fracções unitárias, representados como somas de fracções unitárias distintas, levou o escriba do *PR* a incluir uma tabela de tais decomposições, para as fracções $2/n$ para todos os valores ímpares de n, de 3 a 101:

$$\begin{array}{rcl} \frac{2}{3} & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ \frac{2}{5} & = & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \\ \frac{2}{7} & = & \frac{1}{4} + \frac{1}{28} \\ & \vdots & \\ \frac{2}{97} & = & \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} \\ \frac{2}{99} & = & \frac{1}{66} + \frac{1}{198} \\ \frac{2}{101} & = & \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}\,. \end{array}$$

Em geral, o escriba prefere poucas fracções e denominadores não muito grandes em cada decomposição.

Algumas expressões parecem-nos consequência natural das anteriores. Por exemplo, de

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

é fácil deduzir

$$\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$$

e assim ocorre o desenvolvimento

$$\frac{2}{63} = \frac{1}{42} + \frac{1}{126}\,.$$

Um procedimento semelhante, a partir das decomposições de $2/5$, $2/7$ e outras, gera expressões da nossa lista.

Outra abordagem, baseada na identidade

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\frac{m}{m}$$

combinada com escolha criteriosa de m, produz bons resultados. Por exemplo

$$\frac{2}{7} = \frac{2}{7}\frac{4}{4} = \frac{7+1}{28} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}\ .$$

Nas referências, o leitor interessado poderá encontrar aprofundamentos destas e doutras propostas para compreender a lista das decomposições.

Gostaria somente de chamar a atenção para a última entrada da lista:

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}\ .$$

O escriba, se quiser transmitir um método geral, só poderá fazê-lo mediante a apresentação de um exemplo generalizável, pois ele não dispõe de linguagem matemática adequada aos enunciados abstractos.

Esta última decomposição é facilmente generalizável:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}\ .$$

É como se o escriba estivesse a dizer que, para denominadores superiores a 100, à falta de uma decomposição conhecida, pode sempre recorrer-se a esta, que resolve o problema com quatro fracções...

Esta última identidade demonstra-se em poucos passos, reduzindo a uma só fracção o membro direito da igualdade. O numerador que se obtém é $6+3+2+1$ e o denominador é $6n$. Isto é, o numerador, que é a soma de 6 com os seus divisores próprios, é o dobro de 6. Isto significa que 6 é um *número perfeito*. É exactamente por 6 ser perfeito que tal decomposição funciona.

O primeiro a estudar números perfeitos foi Euclides, que deduziu uma expressão que gera números perfeitos pares (ver Fitzpatrick e Heiberg 2007, p. 277), mas aqui no documento egípcio vemos surgir uma sua aplicação: a cada número perfeito está associada uma decomposição em fracções unitárias distintas de qualquer fracção do tipo $2/n$.

Euler provou que a expressão de Euclides gera, de facto, todos os números perfeitos pares (ver Euler 1849), mas há ainda questões sobre estes números por esclarecer. Não sabemos se há uma infinidade de números perfeitos e nunca ninguém viu um número perfeito ímpar. Haverá algum?

Costuma dizer-se que a matemática nasceu na Grécia, por aí terem florescido os primeiros cultores da tradição dedutiva desta área do saber. Mas as suas raízes fazem-nos recuar vários milénios e deixam-nos apreciar o engenho dos antigos, que talvez não devamos considerar completamente ingénuos na matéria.

REFERÊNCIAS

[1] Abdulaziz, A.A. (2008). “On the Egyptian Method of Decomposing $2/n$ into Unit Fractions”. Em: *Historia Mathematica* 35.1, pp. 1–18. issn: 0315- 0860. doi: *https://doi.org/10.1016/j.hm.2007.03.002*.

[2] Chace, A.B. et al. (1929). *The Rhind Mathematical Papyrus. [British Museum 10 057 and 10 058]*. Mathematical Association of America.

[3] Clagett, M. (1989). "Ancient Egyptian Science: Ancient Egyptian mathematics". *Ancient Egyptian Science: A Source Book : Knowledge and Order*. American Philosophical Society. isbn: 9780871692320.

[4] Euler, L. (1849). “De Numeris Amicibilibus”. Em: *Commentationes arithmeticae*, pp. 627–36.

[5] Fitzpatrick, R. e J. L. Heiberg (2007). *Euclid’s Elements*. Richard Fitzpatrick. isbn: 9780615179841.

[6] Gardner, M. (1978). “Mathematical Games: Puzzles and Number-theory Problems Arising from the Curious Fractions of Ancient Egypt”. Em: *Scientific American*. Outubro, pp. 23–30.

[7] Gillings, R.J. (1982). "Mathematics in the Time of the Pharaohs". *Dover Classics of Science and Mathematics.* Dover. isbn: 9780486243153.

[8] Neugebauer, O. (1969). "The Exact Sciences in Antiquity". *Acta Historica Scientiarum Naturalium et Medicinalium*. Dover Publications. isbn: 978048- 6223322.

[9] O’Reilly, D. (1992). “Creating Egyptian Fractions”. Em: *Mathematics in School* 21.5, pp. 40–42. issn: 03057259.

[10] Robins, G. e C. Shute (1987). *The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text*. Trustees of the British Museum. isbn: 9780714109442.

[11] Sigler, L. (2012). *Fibonacci’s Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano’s Book of Calculation*. Sources and Studies in the History of Mathema-

tics and Physical Sciences. Springer New York. isbn: 9781461300793.

[12] Sylvester, J.J. (1880). “On a Point in the Theory of Vulgar Fractions”. Em: *American Journal of Mathematics* 3.4, pp. 332–335. issn: 00029327, 10806377.

[13] Tahan, M. (2012). *O homem que calculava.* Rio de Janeiro: Editora Record. isbn: 9788501061966.

[14] van der Waerden, B.L. (1965). *Science Awakening.* Noordhoff.

[15] — (1980). “The (2:n) Table in the Rhind Papyrus”. Em: *Centaurus* 23.4, pp. 259–274. doi: *https://doi.org/10.1111/j.1600-0498.1980.*tb00234.x. eprint: *https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1600-0498.1980.tb00234.x.*

QUANTAS CASAS DECIMAIS CORRETAS DE π PODERIA ARQUIMEDES TER CALCULADO SE TIVESSE TIDO ACESSO A FOLHAS DE CÁLCULO MODERNAS?

Pedro J. Silva

LAQV/REQUIMTE, BioSIM, Faculdade de Medicina, Universidade do Porto

pedro.dft@gmail.com

Arquimedes obteve uma estimativa para π entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$ usando um método de aproximação geométrica. Este resultado é frequentemente mencionado em resumos da História da Matemática, mas raramente é demonstrado aos alunos, apesar do seu potencial para estimular a exploração matemática. Neste trabalho, propõe-se uma modificação simples do método de Arquimedes que pode ser facilmente compreendida e executada por alunos do 11.º ano, e mostra-se como as limitações inerentes à natureza discreta das computações digitais impedem a obtenção de níveis de precisão arbitrariamente altos.

INTRODUÇÃO

Os livros de texto de matemática frequentemente mencionam a tentativa de Arquimedes de obter um valor numérico para π através da comparação do perímetro de polígonos inscritos e circunscritos num determinado círculo (Struik, 1954). No entanto, os detalhes do método geralmente não são fornecidos, o que transmite aos alunos apenas uma história matemática interessante, mas os priva das aprendizagens e intuições que poderiam ter obtido por meio de suas próprias tentativas de reconstruir o caminho de Arquimedes. Nesta comunicação, descrevo um método simples para calcular uma aproximação de π através da comparação das áreas de aproximações poligonais convenientes da área do círculo. Além do seu uso como motivador da exploração matemática, este método, que é facilmente explicado a estudantes de trigonometria, oferece uma aplicação prática das relações trigonométricas fundamentais e pode ser usado para introduzir as limitações da aritmética de precisão finita (tal como possibilitada por calculadoras e computadores).

MÉTODO

A área de um círculo com raio $r = 1$ é π. Cada quadrante deste círculo unitário tem, portanto, uma área de $\frac{\pi}{4}$. Para calcular uma aproximação desse valor, podemos bissetar sucessivamente um quadrante e medir as áreas dos triângulos inscritos OAB (definidos pelos pontos onde os ângulos intersetam a circunferência (verde-claro, na figura 1) e as áreas dos triângulos "transbordantes" OAC.

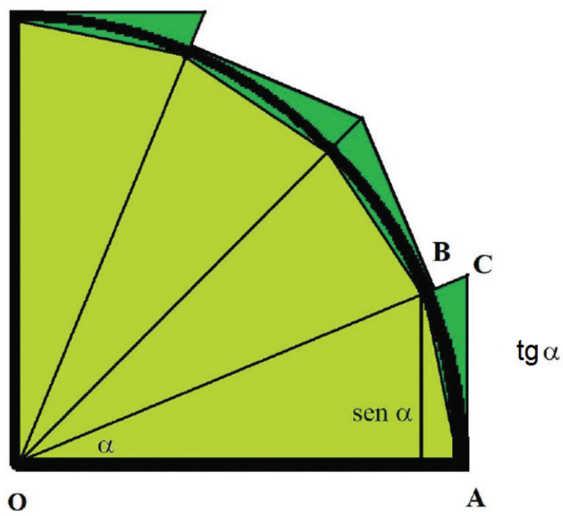


Figura 1. Construção de aproximações sucessivas da área de um quadrante circular através das suas bissecções sucessivas.

Após n bissecções do quadrante, temos 2^n triângulos OAB, cada um com área $\frac{1}{2}\,\text{sen}(\alpha)$, (onde α é o ângulo AOB, i.e., $\frac{\pi}{2^{n+1}}$) e 2^n triângulos OAC, cada um com área $\frac{1}{2}\,\text{tg}(\alpha)$. Como $\frac{\pi}{4}$ deve estar compreendido entre as áreas dos triângulos OAB e dos triângulos OAC, segue-se que

$$\frac{2^n\,\text{sen}(\alpha)}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{2^n\,\text{tg}(\alpha)}{2}.$$

Os valores de $\text{sen}(\alpha)$ e $\text{tg}(\alpha)$ podem ser calculados sucessivamente a partir das relações trigonométricas básicas, que já devem ser familiares aos alunos do 11.º ano, mas podem, no entanto, ser deduzidas diretamente das fórmulas do cosseno da soma de ângulos

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)$$

e da identidade pitagórica:

$$\cos^2(a) + \text{sen}^2(a) = 1.$$

Fazendo $a = b$, segue que

$$\cos(a+a) = \cos^2(a) - \text{sen}^2(a)$$
$$= \cos^2(a) - \left(1 - \cos^2(a)\right) = 2\cos^2(a) - 1$$

e portanto

$$\cos(2a) + 1 = 2\cos^2(a),$$

o que implica, para ângulos entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, que o cosseno, o seno e a tangente do ângulo dividido podem ser prontamente calculados a partir do cosseno do ângulo original usando as expressões

$$\cos(a) = \sqrt{\frac{\cos(2a)+1}{2}},$$
$$\text{sen}(a) = \sqrt{\frac{1-\cos(2a)}{2}}$$
$$\text{e } \text{tg}(a) = \frac{\text{sen}(a)}{\cos(a)}$$

Este algoritmo pode ser facilmente implementado numa folha de cálculo, e um gráfico das áreas dos triângulos OAB inscritos e dos triângulos OAC "transbordantes" mostra que, ao contrário do esperado, após cerca de 15 bissecções as áreas calculadas param de convergir (figura 2).

Os problemas de convergência não se devem a nenhuma falha do algoritmo, mas são uma consequência inevitável do uso da aritmética de precisão finita em computadores comuns, uma vez que os números geralmente são armazenados na memória com um número finito de dígitos e várias manipulações aritméticas conduzem inevitavelmente a uma degradação da sua qualidade. Essa degradação ocorre da seguinte forma: os números são armazenados utilizando a representação em vírgula flutuante como uma combinação de um número inteiro (o expoente) e um número decimal (ou binário) entre 0,1000000000... e 0,999999999...(chamado "mantissa"). Por exemplo, num computador que usa dez dígitos para a mantissa, o número exato 2 é representado como $0,2000000000 \times 10^1$. Este número, portanto, contém dez dígitos exatos na mantissa. Extraindo a sua raiz quadrada obtém-se, nesta notação, $0,1414213562 \times 10^1$. Se um número suficientemente próximo deste for subtraído desta representação de $\sqrt{2}$ (por exemplo, 1,4142), o resultado final é

$$0,1414213562 \times 10^1 - 0,1414200000 \times 10^1,$$

que contém apenas cinco algarismos significativos corretos. A conversão deste número para o formato interno $0,135620000 \times 10^{-4}$ produz uma mantissa com dez dígitos, mas crucialmente apenas os cinco primeiros desses dígitos são exatos. Cálculos subsequentes, portanto, incorrerão em custos de precisão significativos, e são necessários algoritmos engenhosos para evitar erros numéricos quando se realizam subtrações sucessivas de números quase iguais (como sucede no cálculo instantâneo de desvios-padrão de uma série de observações muito semelhantes, cf. Press et al., 2002).

No algoritmo apresentado acima, as subtrações de

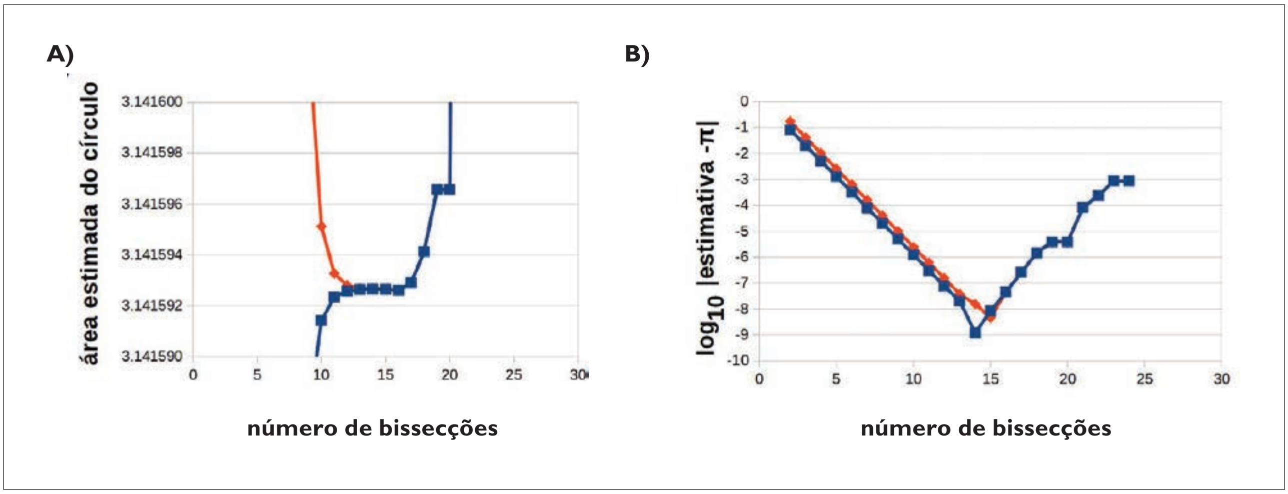


Figura 2. **A)** Evolução das estimativas calculadas da área do círculo à medida que o número de bissecções de um quadrante aumenta. Azul: estimativa com base nos triângulos internos da OAB; laranja: estimativa baseada nos triângulos OAC "transbordantes". **B)** Evolução do erro absoluto da estimativa de π, em escala semilogarítmica.

Tabela 1: Perda de precisão numérica à medida que os ângulos bissetados se tornam cada vez menores. Cálculos efetuados no LibreOffice Calc, que representa números internamente com uma mantissa de 15 dígitos decimais. Nos limites inferior e superior de π, os dígitos que não foram afetados pela perda de precisão estão destacados a negrito.

Número de bissecções	Triângulos em cada quadrante	cos α	Dígitos significativos perdidos ao calcular sen α usando a identidade pitagórica	Dígitos significativos perdidos ao calcular sen α usando a fórmula da bissecção	Limite inferior para π	Limite superior para π
	1	0	0	0	**2,00000000000000**	N/D
1	2	0,707106781186548	1	0	**2,82842712474619**	**4,00000000000000**
2	4	0,923879532511287	1	1	**3,0614674589207**2	**3,3137084989847**6
3	8	0,98078528040323	2	2	**3,121445152258**05	**3,182597878074**53
4	16	0,995184726672197	3	2	**3,136548490545**94	**3,151724907429**26
5	32	0,998795456205172	3	3	**3,14033115695**474	**3,14411838524**589
6	64	0,999698818696204	4	3	**3,14127725093**276	**3,14222362994**244
7	128	0,999924701839145	4	4	**3,1415138011**4415	**3,1417503691**6881
8	256	0,999981175282601	5	5	**3,141572940**36788	**3,141632080**70397
9	512	0,999995293809576	6	5	**3,141587725**27996	**3,141602510**25961
10	1024	0,999998823451702	6	6	**3,14159142**150464	**3,14159511**774302
11	2048	0,999999705862882	7	6	**3,14159234**561108	**3,14159326**967027
12	4096	0,999999926465718	7	7	**3,1415925**7654500	**3,1415928**0755978
13	8192	0,999999981616429	8	8	**3,141592**63346325	**3,141592**69121694
14	16384	0,999999995404107	9	8	**3,141592**65480759	**3,141592**66924601
15	32768	0,999999998851027	9	9	**3,14159**264532122	**3,14159**264893082
16	65536	0,999999999712757	10	9	**3,14159**260737572	**3,14159**260827812
17	131072	0,999999999928189	10	10	**3,1415**9291093967	**3,1415**9291116527
18	262144	0,999999999982047	11	11	**3,141**59412519519	**3,141**59412525159
19	524288	0,99999999995512	12	11	**3,141**59655370482	**3,141**59655371892
20	1048576	0,99999999998878	12	12	**3,14**159655370482	**3,14**159655370834
21	2097152	0,99999999999719	13	12	**3,14**167426502176	**3,14**167426502264
22	4194304	0,99999999999993	13	13	**3,1**4182968188920	**3,1**4182968188942
23	8388608	0,99999999999982	14	14	**3**,14245127249413	**3**,14245127249419
24	16777216	0,999999999999996	15	14	**3**,14245127249413	**3**,14245127249415

números que diferem em apenas 10^{-4} ocorrem muito rapidamente, após apenas oito bissecções sucessivas, ou seja, quando cada quadrante foi dividido em apenas 256 partes iguais. A estimativa neste ponto, portanto, perdeu cinco algarismos significativos. Após 15 bissecções sucessivas, a estimativa perdeu até dez algarismos significativos, e qualquer aumento na precisão que possa ser obtido por mais bissecções é completamente anulado pela perda de algarismos significativos (ver tabela 1). A análise desta tabela mostra que as limitações da aritmética de precisão finita impedem o uso deste método para calcular uma estimativa mais precisa de π do que $3,1415925 < \pi < 3,1415928$, que é obtida através da divisão de um quadrante do círculo em 4096 partes iguais. Podem obter-se melhores estimativas, no entanto, se se abandonar o uso de folhas de cálculo em favor de soluções mais elaboradas, como, por exemplo, as bibliotecas de precisão arbitrária (Fredrik Johansson, 2013) em Python, e pode alcançar-se a convergência mais rapidamente se abandonarmos a abordagem de Arquimedes e, em vez disso, calcularmos π usando somas apropriadas e rapidamente convergentes (Borwein & Borwein, 1987), como a expansão de Taylor da fórmula de Machin ou outras. Uma possibilidade mais simples consiste em evitar o cancelamento subtrativo através do cálculo das funções trigonométricas dos ângulos bissetados utilizando fórmulas que não incluam subtrações. Para isso, é necessário utilizar uma outra fórmula de cálculo do seno do ângulo bissetado, que pode ser deduzida da seguinte forma:

De (1) e do facto de a ser um ângulo do primeiro quadrante, resulta

$$\cos(2a) + 1 = 2\cos^2(a) \Leftrightarrow \sqrt{\cos(2a)+1} = \sqrt{2}\cos(a).$$

Multiplicando ambos os lados por $\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(a)$, obtém-se

$$\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(a)\sqrt{\cos(2a)+1} = 2\,\mathrm{sen}(a)\cos(a)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sen}(a) = \frac{2\,\mathrm{sen}(a)\cos(a)}{\sqrt{2}\sqrt{\cos(2a)+1}} \Leftrightarrow \mathrm{sen}(a) = \frac{\mathrm{sen}(2a)}{\sqrt{2}\sqrt{\cos(2a)+1}}.$$

Utilizando esta fórmula para o cálculo do seno e, por conseguinte, da tangente, evita-se a perda de precisão observada anteriormente e a estimativa de π converge sucessivamente para o valor correto de π (figura 3). Após 24 bissecções obtém-se $3,141592653589785 < \pi < 3,141592653589805$, bastante próximo da máxima precisão atingível numa representação de vírgula flutuante com 16 algarismos decimais na mantissa.

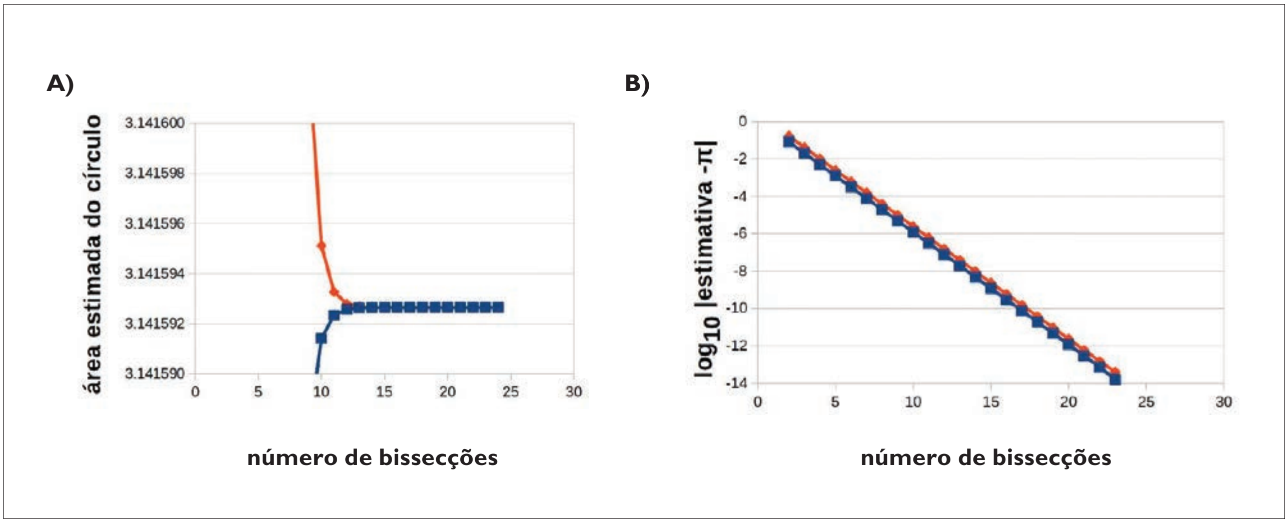


Figura 3: **A)** Evolução das estimativas calculadas da área do círculo à medida que o número de bissecções de um quadrante aumenta, utilizando fórmulas de bissecção que não sofrem de cancelamento subtrativo. Azul: estimativa com base nos triângulos internos OAB; laranja: estimativa baseada nos triângulos OAC "transbordantes". **B)** Evolução do erro absoluto da estimativa de π, em escala semilogarítmica.

Agradecimento

O autor agradece ao revisor deste trabalho, pela sugestão de utilização da fórmula não subtrativa do cálculo do seno do ângulo bissetado.

REFERÊNCIAS

[1] Struik, D. J. (1954). *A Concise History of Mathematics*. G. Bell and Sons, Ltd.

[2] Press W. H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and B.P. Flannery (2002). "Numerical Recipes" in *C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press.

[3] Borwein, J. M. e P. B. Borwein (1987). *Pi and the AGM*. John Wiley and Sons.

[4] Johansson, F. (2013). *Mpmath: a Python Library for Arbitrary-precision Floating-point Arithmetic*.

SOBRE O AUTOR

Pedro J. Silva licenciou-se em Bioquímica em 1996 na Universidade do Porto, tendo-se doutorado em Química em 2001 pela mesma universidade. É atualmente investigador no Grupo de Simulações Biomoleculares (BIOSIM) do Laboratório Associado para a Química Verde, onde estuda reatividade química e catálise enzimática com métodos de química computacional (química quântica e simulações de dinâmica molecular).

João M. Patrício
Centro de Investigação em Cidades Inteligentes
Instituto Politécnico de Tomar
jpatricio@ipt.pt

MATEMÁTICA NA ANIMAÇÃO GRÁFICA E NA INTERAÇÃO

A incorporação de elementos visuais, estáticos ou dinâmicos, que sugerem ao espetador de um filme ou a um videojogador estar na presença (virtual) de elementos a 3D é uma realidade omnipresente. Igualmente omnipresente neste contexto está um conjunto de modelos matemáticos. Não obstante estes modelos poderem ajudar a representar entidades de uma certa complexidade, acabam por ser baseados em conceitos matemáticos relativamente simples, que iremos apresentar neste texto.

1. INTRODUÇÃO

Os computadores têm vindo a revelar-se potentes ferramentas para a produção de gráficos de forma rápida e económica. Não há nenhuma área que não tenha tirado partido da visualização gráfica computacional, não sendo portanto de espantar que a computação gráfica tenha tido umas tão vastas disseminação e aceitação. Embora no seu início tenha sido necessário recorrer a equipamento caro e pouco prático, os avanços tecnológicos forneceram à computação gráfica meios práticos e bastante económicos, sendo possível encontrá-la em áreas como a medicina, engenharia, ciência, indústria, entretenimento, arte, educação e formação, entre outras.

Em muitas destas aplicações, os objetos são inicialmente representados através de estruturas em linhas, conhecidas por *wireframes*, que desvendam a forma genérica e as características internas do objeto em causa. Uma das virtudes desta abordagem consiste em permitir ao desenhador aperceber-se rapidamente dos efeitos dos ajustamentos interativos efetuados aos objetos. O *software* típico de CAD é composto por um ambiente multijanela, em que as várias janelas apresentadas permitem ter visões de partes e em escalas diferentes de um mesmo objeto.

Um outro contexto em que é suficiente o recurso a estruturas gráficas muito simples é o dos simuladores de túnel de vento, uma aplicação muito comum na indústria automóvel e na indústria aeroespacial.

Quando a fase de desenho do objeto se aproxima do seu final, são aplicados modelos de iluminação e de renderização de superfícies às estruturas anteriormente criadas, sendo assim mostrada a aparência do produto final.

Os métodos de computação gráfica são bastante usados na criação artística. Há várias formas de o fazer, mas uma das mais interessantes resulta do uso de uma combinação de programas de CAD e de construção e manipulação de imagens, que conjuntamente permitem desenhar objetos e o ambiente que os rodeia, recorrendo a todo o tipo de efeitos.

Um outro exemplo muito interessante consiste no recurso à visualização de relações matemáticas. Na figura 1, apresentamos uma criação artística que parte da fórmula $x^n + y^n = z^n$, com $n = 5$, um caso particular que deriva do Último Teorema de Fermat.

Os métodos da computação gráfica têm vindo a ser muito bem-sucedidos no campo do entretenimento, como em cinema, vídeos musicais e televisão. Dois bons exemplos combinam imagem real com produções gráficas virtuais: o filme *TRON: Legacy*[1] e a saga *Matrix*[2].

Modelos gerados em computador de sistemas físicos, económicos e financeiros têm sido usados como comple-

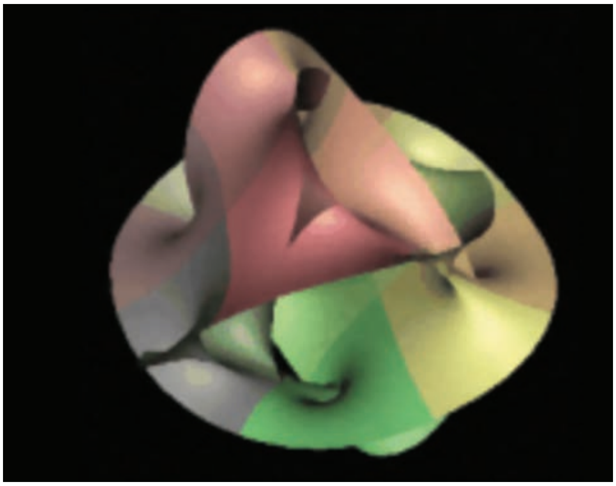


Figura 1. Criação a partir da superfície em $\mathbb{R}^3$ dada por $x^n + y^n = z^n$, com $n = 5$, decorrente do Último Teorema de Fermat.

mentos à aprendizagem nestas áreas. Uma outra área onde a computação gráfica tem vindo a ser protagonista são os chamados simuladores, sistemas que permitem simular, por exemplo aviões, comboios ou automóveis, usados para formação de pilotos ou condutores (ver figura 2).

Cientistas, engenheiros e médicos, entre outros, são muitas vezes confrontados com a necessidade de analisar grandes quantidades de informação ou de estudar o comportamento de determinados processos. A visualização dessa informação pode ajudar a perceber quais as tendências e características imanentes a estes fenómenos.

Embora haja intersecções entre a computação gráfica e o processamento de imagem, as duas áreas atuam sobre domínios distintos. Enquanto na computação gráfica o computador é usado para gerar a imagem, em processamento de imagem são usadas técnicas matemáticas e computacionais para analisar imagens previamente existentes, tais como fotografias ou imagens de televisão. No primeiro caso, temos as aplicações à tomografia computorizada, em que a partir da informação numérica se reconstroem secções tridimensionais da parte do corpo a ser observada. O interesse no segundo caso é sobretudo suscitado pela robótica.

Neste trabalho começamos por mostrar como as transformações geométricas mais simples podem ser formuladas matematicamente, revelando o papel preponderante que as matrizes e as suas operações têm neste contexto. Seguidamente apresentamos resumidamente alguns conceitos matemáticos necessários à descrição de trajetórias no espaço, desde contextos mais simples, como a aplicação na representação de órbitas de planetas de um sistema solar, aos mais complexos, como a representação da trajetória de um automóvel de competição numa pista. Terminaremos discutindo brevemente a questão das deformações de modelos tridimensionais, mostrando que os valores próprios – outra noção vinda da álgebra linear – são uma peça fundamental neste domínio.

Figura 2. Exemplos de simuladores de aviões, de automóveis e de comboios.

[1] *https://www.imdb.com/title/tt1104001*

[2] *https://www.imdb.com/title/tt0133093*

2. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

As transformações geométricas são usadas em computação gráfica para cumprir dois objetivos:

1. Modelar e construir cenários;

2. Navegar no interior de um espaço bi ou tridimensional.

Por exemplo, se quisermos representar um edifício com n janelas, podemos proceder segundo os passos seguintes:

1. Construir uma janela recorrendo a funções e variáveis gráficas básicas;

2. Replicar a janela n vezes;

3. Colocar cada janela na localização pretendida recorrendo a translações e rotações.

Assim se conclui que as transformações como as translações e as rotações podem ser consideradas como operações de modelação de cenários. Estas operações podem igualmente ser usadas para mover um *bot* ou um *avatar* num ambiente virtual como um jogo FPS (*First-Person Shooter*).

Podemos considerar a translação como o movimento de um ponto ou de um objeto que o desloca de uma certa distância ao longo de uma certa direção.

Por exemplo, se o ponto $A = (x, y)$ é deslocado Δx unidades ao longo do eixo dos XX' e Δy unidades ao longo do eixo dos YY', transforma-se no ponto

$$A' = (x + \Delta x, y' + \Delta y)$$

cujas coordenadas são dadas por

$$\begin{cases} x' &= x + \Delta x \\ y' &= y + \Delta y \end{cases} .$$

Na figura 3 apresentamos uma representação esquemática desta transformação.

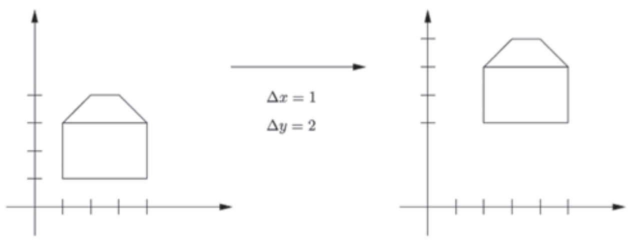


Figura 3. Representação de uma translação 2D.

Se representarmos matricialmente quer os pontos quer a translação propriamente dita, obtemos

$$A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \; A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

e portanto a translação pode ser expressa como

$$A' = A + T.$$

De uma forma genérica, aplicar uma translação a um objeto poligonal corresponde a aplicar a mesma translação aos seus vértices (por exemplo, os cantos ou os pontos extremos) de tal forma que as linhas ou os polígonos que constituem o objeto podem ser desenhados sobre os vértices transformados.

No que diz respeito às rotações em torno da origem, rodar um objeto segundo um ângulo θ corresponde a rodá-lo em torno da origem segundo esse mesmo ângulo θ. Usando coordenadas polares (r, φ), as coordenadas cartesianas de um ponto no plano são dadas pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases} .$$

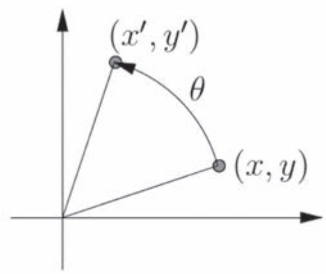


Figura 4. Representação de uma rotação 2D.

Após rodar o ponto de um ângulo θ em torno da origem, obtemos o seguinte ponto transformado:

$$\begin{cases} x' &= r\cos(\varphi + \theta) \\ y' &= r\,\mathrm{sen}(\varphi + \theta) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x' &= r\cos\varphi\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' &= r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta + r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} x' &= x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' &= x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

e em notação matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Se

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

denotar a matriz de rotação 2×2, então podemos escrever

$$A' = R(\theta)A.$$

Em resumo, a translação exprime-se através da adição de matrizes, enquanto a rotação em torno da origem recorre ao produto de matrizes. Isto quer dizer que podemos combinar um número arbitrário de translações recorrendo à soma de matrizes, bem como um número arbitrário de rotações recorrendo ao produto. Contudo, não é possível calcular da mesma forma combinações de translações e rotações. Nesse sentido, seria desejável recorrer a uma única operação, por exemplo, o produto, para representar quer as translações quer as rotações.

As coordenadas homogéneas são uma das formas possíveis de resolver este problema. Com este tipo de coordenadas será possível combinar um número arbitrário destas operações recorrendo ao produto de matrizes. Deste modo, translações e rotações definidas em coordenadas homogéneas são dadas por

Translação: $A' = TA$;
Rotação: $A' = RA$.

Em coordenadas homogéneas um ponto $P = (x, y)$ é representado pelo ponto homogéneo $P = (X, Y, W)$, $W \neq 0$, com

$$X = \frac{x}{W} \qquad \text{e} \qquad Y = \frac{y}{W}.$$

Em computação gráfica escolhe-se habitualmente $W = 1$ por questões de simplicidade. Usando coordenadas homogéneas, as transformações euclidianas são expressas recorrendo a matrizes 3×3 da forma seguinte:

Translação:

$$T(\Delta x, \Delta y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Rotação:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz de rotação que apresentámos é eficaz se pretendermos rodar um ponto em torno da origem. Vejamos agora qual o procedimento a seguir se pretendermos rodar um ponto em torno de um ponto arbitrário (x_0, y_0):

1. Transladar o ponto (x_0, y_0) até à origem, ou seja, aplicar $T(-x_0, -y_0)$;
2. Aplicar a rotação $R(\theta)$;
3. Transladar de novo o ponto para a localização original, ou seja, aplicar $T(x_0, y_0)$.

De notar, por outro lado, que a ordem das transformações geométricas representadas por estas matrizes é relevante, uma vez que o produto de matrizes, sendo associativo, ou seja, $ABC = (AB)C = A(BC)$ não é em geral comutativo, ou seja, nem sempre $AB = BA$. Usando este tipo de matrizes, a rotação em torno de um ponto arbitrário é representada pela seguinte matriz C:

$$C = T(x_0, y_0)R(\theta)T(-x_0, -y_0).$$

Multiplicando por um ponto P, obtemos

$$CP = T(x_0, y_0)R(\theta)T(-x_0, -y_0)P.$$

As transformações euclidianas são as que preservam a distância entre os pontos, sendo por isso também conhecidas por transformações rígidas. As transformações afins, que agora iremos abordar, caracterizam-se, por seu turno, por preservar o paralelismo. Isto quer dizer que duas linhas paralelas se mantêm paralelas após aplicação de uma transformação afim. Como consequência deste invariante, outras propriedades são preservadas. Por exemplo, uma transformação afim preserva a colinearidade (todos os pontos sobre uma linha mantêm-se nessa linha após a transformação), bem como as razões entre distâncias (o ponto médio de um segmento mantém-se como ponto médio após a transformação).

Há muitos exemplos de transformações afins. Podemos, contudo, afirmar que são todas elas composições de quatro transformações afins básicas: rotação, translação, variação de tamanho e cisalhamento. Analisemos agora estas duas últimas.

A variação de tamanho consiste na alteração da dimensão do objeto em causa. Escalar um ponto (x, y) segundo um fator λ_x segundo o eixo dos XX' e λ_y segundo o eixo dos YY' corresponde a multiplicar as suas coordenadas pelo respetivo fator de escalonamento:

$$\begin{cases} x' &= \lambda_x x \\ y' &= \lambda_y y \end{cases}$$

ou, usando notação matricial sobre coordenadas homogéneas,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O cisalhamento (*shearing*) é a transformação que goza da propriedade segundo a qual todos os pontos ao longo de uma dada linha I se mantêm fixos, enquanto que os restantes são deslocados ao longo de uma direção paralela a I numa distância que é proporcional à sua distância perpendicular a I. De notar que o cisalhamento sobre um objeto não altera a sua área. O cisalhamento é generalizável a três dimensões, considerando-se planos em vez de linhas.

Cisalhar um ponto (x, y) por um fator h_x ao longo do eixo dos XX' e por um fator h_y ao longo do eixo dos YY' corresponde a efetuar as seguintes operações:

$$\begin{cases} x' &= x + h_x y \\ y' &= y + h_y x \end{cases}$$

ou, usando notação matricial e coordenadas homogéneas,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_x & 0 \\ h_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. REPRESENTAÇÃO DE CURVAS

Representar curvas no plano ou no espaço reveste-se de grande importância neste contexto, por dois motivos: por um lado pela representação do objeto em si, mas também porque poderá corresponder à construção de uma trajetória de uma entidade numa cena a duas ou três dimensões. As parametrizações de curvas têm sido por este motivo bastante usadas no âmbito de sistemas com realidade virtual e aumentada, correspondendo, por exemplo, à trajetória ao longo das órbitas de planetas em torno da estrela do seu sistema planetário.

Assim, dá-se o nome de curva no espaço ao conjunto geométrico γ de pontos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ que são traçados no espaço à medida que um parâmetro real t (que habitualmente corresponde ao tempo) percorre um intervalo real $[a, b]$. Denomina-se parametrização de uma curva γ toda a função $s : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cujo contradomínio é o lugar geométrico da curva γ.

Iremos considerar algumas premissas no que à construção de parametrizações diz respeito. Deste modo, o traçado da curva tem de ser contínuo, ou seja, a função s tem de ser contínua no seu domínio $[a, b]$. A própria velocidade a que o traçado é levado a cabo terá também de ser contínua, ou seja, a função s terá de ser continuamente diferenciável em $[a, b]$.

Dentro do universo das curvas no espaço, estaremos interessados nas denominadas curvas regulares. Uma curva γ diz-se regular se admitir uma parametrização $s(t)$ com $t \in [a, b]$ tal que

- $s(t)$ percorre continuamente e a uma velocidade contínua a curva γ;
- não há paragens no traçado do gráfico definido por $s(t)$;
- nenhum ponto do espaço é percorrido mais do que uma vez.

Se, além disso, $s(a) = s(b)$, ou seja, se no final regressarmos ao ponto de partida, então a curva diz-se fechada.

Vejamos agora alguns casos particulares de parametrizações, começando pelo caso mais simples de um segmento de reta, que iremos considerar, sem perda de generalidade, contido no plano XOY, e que está representado na figura 5.

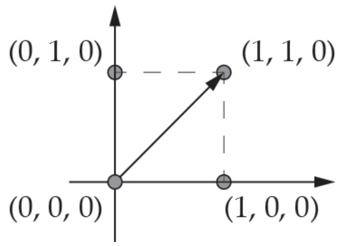


Figura 5. Um segmento de reta no plano *XOY*.

Aquela que provavelmente será a forma mais simples de parametrizar o segmento de reta da figura 5, admitindo um movimento a velocidade constante do ponto $P_0 = (0, 0, 0)$ ao ponto $P_1 = (1, 1, 0)$ será a seguinte:

$$s(t) = (1 - t)\,\overrightarrow{OP}_0 + t\,\overrightarrow{OP}_1,\ t \in [0, 1].$$

Consoante o tipo de movimento pretendido, nomeadamente no que toca à velocidade a que o segmento de reta é percorrido, podemos considerar parametrizações alternativas, como a seguinte:

$$s_2(t) = (2t, 2t, 0)\,,\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

em que o segmento de reta é percorrido no mesmo sentido, mas ao dobro da velocidade, ou então

$$s_3(t) = (1-2t, 1-2t, 0),\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

em que o segmento de reta é agora percorrido de P_1 para P_0, igualmente ao dobro da velocidade.

Uma outra trajetória muito comum em computação gráfica é a da circunferência. Uma parametrização para uma circunferência de raio 1, centrada na origem $(0,0,0)$, percorrida uma vez no sentido anti-horário com início no ponto $(1,0,0)$ e contida no plano XOY, tal como a representada na figura 6, poderá ser dada por

$$s(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0),\ t \in [0, 2\pi].$$

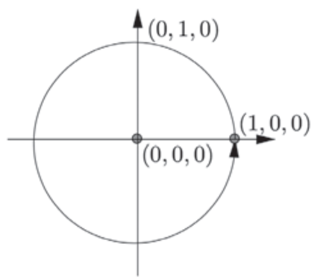


Figura 6. Uma circunferência no plano *XOY*.

Como caso particular, podemos estar interessados em construir uma trajetória correspondente a apenas um arco da circunferência, percorrido num dado sentido, tal como mostrado na figura 7, onde, sem perda de generalidade, é representado um arco de circunferência percorrido no sentido horário.

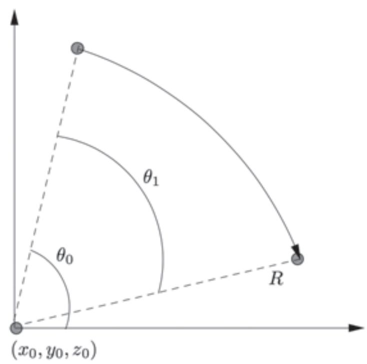


Figura 7. Um arco de circunferência no plano *XOY*.

De uma forma genérica, uma parametrização de um arco de circunferência com centro em (x_0, y_0, z_0), raio $R > 0$, com amplitude $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ e cujo ângulo inicial com o eixo dos XX' é $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, pode ser dada por

$$s(t) = (x_0, y_0, z_0) + R(\cos(\theta_0 \pm t), \operatorname{sen}(\theta_0 \pm t), 0),$$

com $t \in [0, \theta_1]$, em que o sinal "+" é escolhido para o sentido anti-horário e o sinal "–" para o sentido horário. Estamos a admitir, sem perda de generalidade, que o arco de circunferência está mergulhado num plano paralelo ao plano XOY e que contém o ponto $(0, 0, z_0)$.

Finalizamos esta secção com um caso particularmente interessante para a construção de uma trajetória de objetos planetários em sistemas solares, que é tipicamente uma elipse, que iremos admitir percorrida no sentido anti-horário. Este tipo de parametrização tem sido usada para construção de órbitas virtuais de planetas no âmbito de sistemas interativos com realidade aumentada, como o projeto PlanetarySystemGO, apresentado em [4].

Consideremos uma elipse centrada em (x_0, y_0) e eixos paralelos aos eixos coordenados, com focos nos pontos F_1 e F_2, como a representada na figura 8.

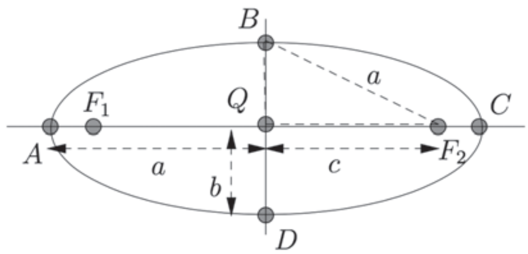


Figura 8. Uma elipse no plano *XOY*.

Se pretendermos escrever uma parametrização desta elipse, mas definida em relação ao foco $F_1 = (x_1, y_1)$, correspondente à localização da estrela em torno da qual orbitam os planetas do sistema solar, é possível demonstrar que se pode considerar

$$s(t) = (x_1 + c + a\cos t, y_1 + b\operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi],$$

com $c = +\sqrt{|a^2 - b^2|}$, expressão esta que pode ser usada em sistemas que simulem a órbita de planetas, como detalhado em [9]. Na figura 9 apresentamos um exemplo do uso deste tipo de trajetórias numa aplicação *mobile*, por um utilizador do já mencionado PlanetarySystemGO, um jogo em que um dos objetivos consiste na perceção, por parte dos estudantes do ensino básico, das escalas correspondentes aos objetos astronómicos, como planetas e estrelas.

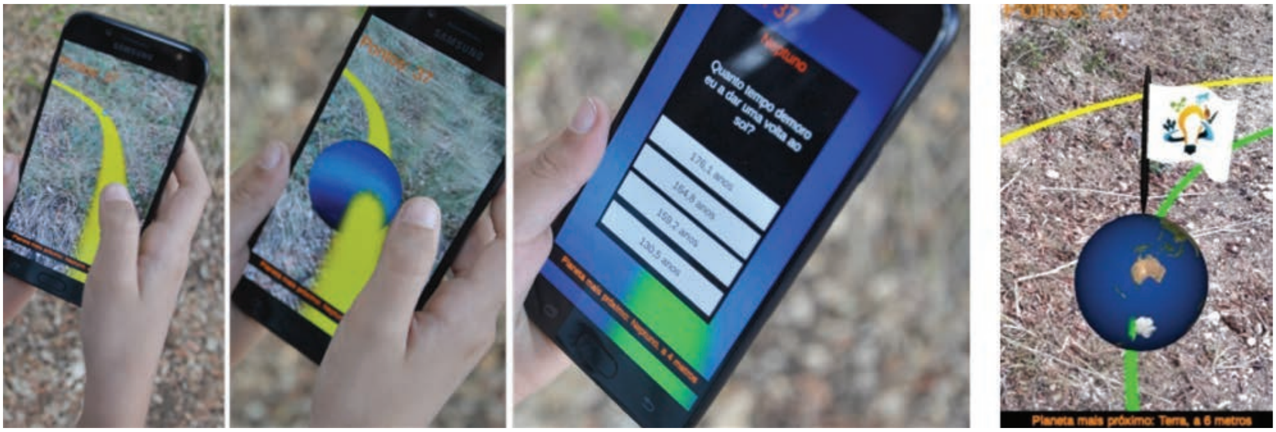


Figura 9. Algumas sequências do PlanetarySystemGO [3].

Na figura 10 apresentamos trajetórias dos planetas do nosso sistema solar, parametrizadas como elipses, tal como são apresentadas no ecrã do jogador do PlanetarySystemGO.

Uma aplicação diferente do conceito de trajetória foi utilizada no projeto BREUCA[3]. Este projeto consistiu numa parceria entre as empresas tecnológicas Sketchpixel e Bubblecode, o Instituto Politécnico de Tomar e a Universidade do Minho. O seu objetivo foi o desenvolvimento de um simulador de realidade virtual projetado para ser usado num ambiente de jogo, dando possibilidade aos seus utilizadores de competir em tempo real contra pilotos na pista. Procurou-se que os utilizadores estivessem imersos num ambiente tão real quanto possível, permitindo ajustes na condução e nas definições do automóvel por forma a obter o melhor tempo por volta.

Uma das componentes principais do sistema de simulação desenvolvido foi a descrição da pista. Tendo-se recorrido a pistas reais, como os autódromos do Estoril ou de Braga, a pista é descrita à custa da curvatura κ como função da parametrização s da trajetória correspondente ao percurso da pista feito na sua zona central. A posição do carro é então dada por s, pelo vetor $\overrightarrow{n}$ de translação do centro da pista e pelo rumo α relativo à direção da linha central da pista, tal como está esquematizado na figura 11.

Uma pista de automóveis, considerada como um objeto 3D, pode ser modelada à custa de sete variáveis:

- A posição central da pista $C(s) = (x(s), y(s), z(s))$;
- A largura da pista $r_w(s)$;
- A matriz de orientação $R(s)$ que é o produto de três matrizes de rotação em torno de cada um dos eixos:

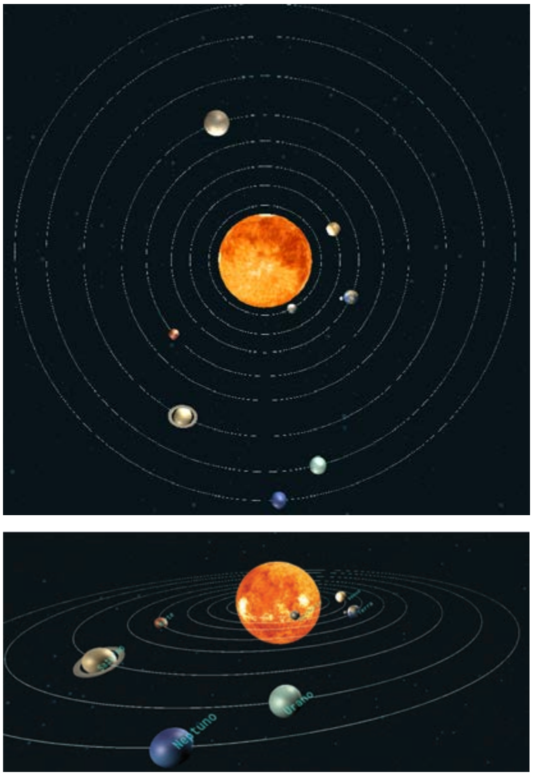


Figura 10. Perspetivas distintas do sistema solar.

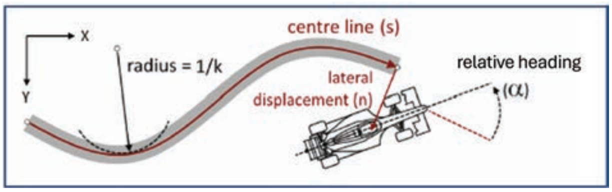


Figura 11. Modelo de representação da pista.

$$R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma \\ 0 & \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix};$$

$$R_y(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & -\operatorname{sen}\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix};$$

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma & 0 \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta informação é depois usada para construir trajetórias ótimas, no sentido de proporcionar os melhores tempos por volta, recorrendo a algoritmos de controle ótimo [6] e de otimização [12].

4. MODELAÇÃO DE CURVAS E SUPERFÍCIES

Seja f uma função real de variável real definida no intervalo real $[a, b]$, e suponhamos que os valores desta função são conhecidos nos pontos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. O nosso problema consiste em tentar obter uma aproximação do valor da função f num ponto $\overline{x}$ distinto dos pontos x_i, $i = 0, \ldots, n$.

A aproximação de funções arbitrárias em intervalos fechados recorrendo a polinómios tem várias vantagens, tais como a facilidade de criação de estruturas de dados para representar polinómios interpoladores. No entanto, a natureza oscilatória dos polinómios de grau elevado, bem como o facto de uma flutuação dos dados, por muito pequena que seja, poder induzir uma grande alteração nos valores do polinómio, restringe de alguma forma o seu uso. Uma mitigação desta dificuldade reside no uso de aproximações lineares nos intervalos definidos pelos pontos x_i, com $i = 0, \ldots, n$, o que, do ponto de vista geométrico, quer dizer que esta função não é "suave". Esta "suavidade" é muitas vezes um requisito do contexto físico do problema. Nesta secção iremos abordar uma técnica de interpolação polinomial segmentada "suave" que não requer qualquer derivada. A forma mais comum de obter estas aproximações consiste em considerar polinómios de terceiro grau entre cada par de nós, obtendo-se os denominados splines cúbicos segmentados [7]. Um polinómio cúbico tem quatro coeficientes, pelo que há bastante margem de flexibilidade para garantir o cumprimento de um dado número de condições, como, por exemplo, a existência de primeiras e segundas derivadas contínuas, de modo a assegurar a pretendida "suavidade".

Apresentamos seguidamente a definição de spline interpolador cúbico.

Dada a função f nas condições referidas no início desta secção, o spline interpolador cúbico S de f no intervalo $[a, b]$ é uma função que satisfaz as seguintes condições:

1. A restrição de S ao intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ é definida, para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$, pelo polinómio cúbico $S_j(x)$, no intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para todo $j = 0, 1, \ldots, n-1$;

2. $S(x_j) = f(x_j)$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n$;

3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

5. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

6. Uma das seguintes condições de fronteira é satisfeita:

   (a) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (fronteira livre ou natural);

   (b) $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$ (fronteira ligada).

Os polinómios B-spline correspondem geometricamente a curvas no espaço, sendo dos tipos de spline mais usados em várias aplicações. Tipicamente são construídos aproximando um conjunto de pontos, tendo, no entanto, duas importantes vantagens:

1. O grau de um polinómio B-spline é independente (até certo ponto) do número de pontos de controle considerados;

2. Os B-splines permitem algum controlo sobre a forma da curva construída.

Como contrapartida a estas duas vantagens, os B-splines são de alguma forma mais complexos do que outros tipos de splines bastante usados, como os de Bézier [10].

O cálculo das coordenadas das posições ao longo de um B-spline pode ser feito a partir da expressão

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} p_k B_{k,d}(u), \tag{4.1}$$

com $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$, $2 \leq d \leq n+1$, em que p_k são os pontos de controle, com $k = 1, \ldots, n$. As funções $B_{k,d}$ são definidas através das denominadas fórmulas recursivas de

[3] https://breuca.com

Cox-de Boor [2].

Assim como os B-splines que acabámos de apresentar nos permitem representar curvas, é possível estender este conceito para a representação de superfícies. Em vez de termos um conjunto de pontos de controle p_k, com $k = 0, \dots, n$, passamos a ter um retângulo formado por pontos p_{kj}, com $k = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$, obtendo-se

$$P(u,v) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} p_{kj} B_{k,d}(u) B_{j,d}(v) \tag{4.2}$$

Na figura 12 apresentamos um exemplo de uma superfície B-spline. Esta representação foi feita com recurso à biblioteca OpenGL [8], introduzindo efeitos de iluminação em tempo real para uma melhor perceção da tridimensionalidade do objeto representado.

A representação de uma superfície como a da figura 12

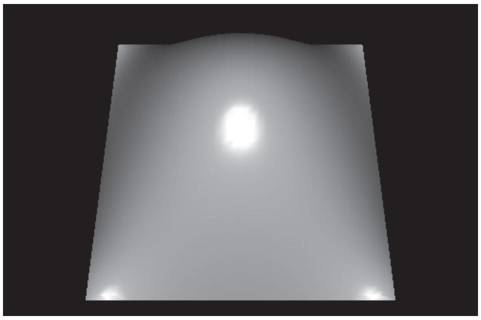


Figura 12. Exemplo de uma superfície B-spline.

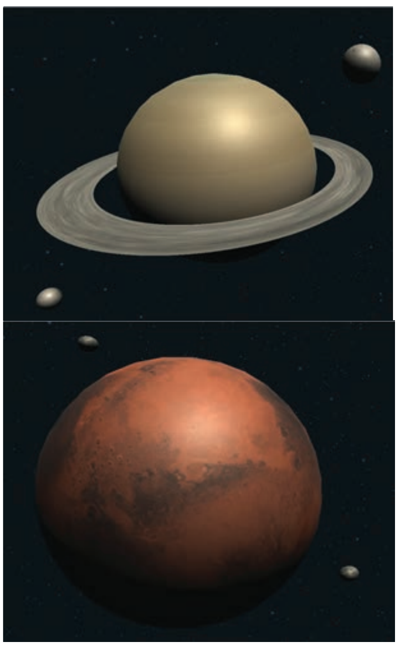


Figura 13. Representação 3D de planetas.

é pouco cativante do ponto de vista do utilizador final. Este aspeto pode ser melhorado recorrendo a modelos de iluminação mais sofisticados ou à aplicação de texturas sobre a superfície [11], que corresponde ao mapeamento de uma imagem bidimensional à superfície 3D, dando-lhe assim maior realismo e atratividade. As representações 3D dos planetas no PlanetarySystemGO são um caso de aplicação, e na figura 13 são apresentados exemplos.

5. ANIMAÇÃO, DEFORMAÇÃO E MOVIMENTO

Uma das aplicações fundamentais da computação gráfica tem a ver, como já foi demonstrado, com a criação de modelos tridimensionais e sua animação. Associado a estes conceitos, há necessariamente a considerar a noção de deformação, que consiste em alterar de forma dinâmica as dimensões e posições relativas de objetos presentes na cena interativa, como, por exemplo, em jogos de vídeo de combate corpo a corpo. Há um vasto conjunto de conceitos matemáticos necessários para a criação de modelos de deformação e de animação, além da breve análise que fizemos sobre modelos de movimentação [1]. Entre estes conceitos contam-se os de valor e de vetor próprio.

Recordemos que, se A é uma matriz quadrada (real ou complexa) de ordem n, então diz-se que o escalar λ (real ou complexo – mesmo para matrizes reais) é um valor próprio de A se existir um vetor x de ordem n diferente do vetor nulo tal que

$$Ax = \lambda x.$$

Ao vetor x que satisfaça esta condição dá-se o nome de vetor próprio de A associado ao valor próprio λ.

No contexto da animação e deformação em computação gráfica, os valores próprios são frequentemente utilizados para analisar e controlar a deformação de modelos 3D, particularmente no campo de animação de personagens [5]. Seguidamente apresentamos alguns campos concretos de aplicação.

Os modelos de personagens em animação são frequentemente representados como malhas. Os valores próprios de matrizes associadas a essas malhas podem ser usados para analisar como a malha se deforma quando submetida a várias transformações, como, por exemplo, na animação esquelética ou em processos de metamorfose (*morph targets*). Por outro lado, os valores próprios permitem compreender a influência das intersecções da malha – as articulações esqueléticas do modelo de uma personagem – durante o processo de animação. Trata-se de uma questão crucial para obter deformações realistas e de aparência natural.

Por outro lado, os vetores próprios estão associados a formas de representação da deformação de uma estrutura ou de um modelo. Neste sentido, podem ser usados para criar *eigenskeletons*, que são formas de recuperar, pelo menos parcialmente, o realismo da personagem original, que poderá ter-se perdido ao representá-la por uma malha, tal como é exemplificado na figura 14, onde mostramos deformações sobre o modelo original, mais à esquerda.

Figura 14: Movendo o braço de Neptuno usando deformações [5].

6. CONCLUSÕES

Nestas breves páginas pretendemos mostrar ao leitor como muito do que se vê, no que à Realidade Virtual diz respeito, depende da qualidade dos modelos tridimensionais que se criam, que por sua vez recorrem fortemente a modelos e conceitos matemáticos. Neste trabalho não tivemos a pretensão de elaborar sobre os conceitos mais avançados, mas sim mostrar como até os conceitos mais conhecidos do cálculo e da álgebra linear estão presentes e ajudam a descrever o mundo virtual. Por outro lado, tivemos a preocupação de mostrar estes conceitos em ação em dois projetos em que estivemos envolvidos, o projeto PlanetarySystemGO, que visou a produção de um sistema de realidade virtual e aumentada, e o projeto BREUCA, que conduziu ao desenvolvimento de um simulador de corridas de automóveis, destinado ao treino fora de pista de pilotos profissionais, mas também a análise do seu desempenho, considerando a trajetória e as demais características da pista.

REFERÊNCIAS

[1] K. Anjyo, H. Ochiai, and B.A. *Barsky. Mathematical Basics of Motion and Deformation in Computer Graphics: Second Edition.* Synthesis Lectures on Visual Computing: Computer Graphics, Animation, Computational Photography and Imaging. Morgan & Claypool Publishers, 2017.

[2] R. L. Burden. *Numerical analysis.* Brooks/Cole Cengage Learning, 2011.

[3] M. C. Costa, A. Manso, and J. M. Patrício. "Design of a mobile augmented reality platform with game-based learning purposes". *Information*, 11(3), 2020.

[4] M. C. Costa, P. Santos, J. M. Patrício, and A. Manso. An interactive information system that supports an augmented reality game in the context of game-based learning. *Multimodal Technologies and Interaction*, 5(12), 2021.

[5] T. K. Dey, P. Ranjan, and Y. Wang. "Eigen deformation of 3D models". *Vis Comput*, 28:585–595, 2012.

[6] Donald E Kirk. *Optimal control theory: an introduction.* Courier Corporation, 2004.

[7] G. D. Knott. *Interpolating Cubic Splines*. Birkhauser, 2000.

[8] S. Kosarevsky and V. Latypov. *3D Graphics Rendering Cookbook: A comprehensive guide to exploring rende- ring algorithms in modern OpenGL and Vulkan*. Packt Publishing Ltd, 2021.

[9] V. Marçal and H. Simões. *Planetary system frontoffice.* Technical report, Instituto Politécnico de Tomar, 2020.

[10] H. Prautzsch, W. Boehm, and M. Paluszny. *Bézier and B--Spline Techniques.* Mathematics and Visualization. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[11] G. Sellers, R. Wright, and N. Haemel. *OpenGL superBible: comprehensive tutorial and reference.* Addison-Wesley, 2013.

[12] Jan A Snyman, Daniel N Wilke, et al. *Practical mathematical optimization.* Springer, 2005.

SOBRE O AUTOR

João Patrício é Professor Adjunto do Instituto Politécnico de Tomar (Unidade Departamental de Matemática e Física) e membro integrado do Centro de Investigação em Cidades Inteligentes do IPT. Os seus interesses de investigação dividem-se entre os métodos numéricos para problemas de grande dimensão, a otimização e análise de dados e os modelos matemáticos e computacionais para computação gráfica e realidade virtual. Foi diretor da Escola Superior de Tecnologia de Tomar do IPT e presentemente é pró-presidente do Instituto Politécnico de Tomar.

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação *pt-maths-in@spm.pt*

ANA MENDES
Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Politécnico de Leiria
aimendes@ipleiria.pt

TERESA MONTEIRO FERNANDES
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
mtfernandes@fc.ul.pt

CLAIRE VOISIN
A MATEMÁTICA ENQUANTO ESPAÇO PRIVADO: DO DESVENDAR DE CONJETURAS AO RECONHECIMENTO MUNDIAL

Claire no seu escritório de casa, em 2004

Claire Voisin (França, 1962) é considerada uma das mais importantes especialistas em geometria algébrica dos nossos tempos e uma das personalidades mais relevantes na cena matemática internacional.

Já depois de esta entrevista ter sido realizada, em novembro de 2023, foi-lhe atribuído, no final do mês de janeiro, o Crafoord Prize em Matemática de 2024. Este prémio é conferido pela Academia Real das Ciências da Suécia e pela Fundação Crafoord (Lund, Suécia) e tem por objetivo galardoar áreas científicas não abrangidas pelo Prémio Nobel. Ao sabermos desta maravilhosa notícia, permitimo-nos, com a sua autorização, acrescentar algumas perguntas no final da entrevista. Para que todos a conheçamos, respondemos com este texto à pergunta que surge na cabeça daqueles que nos leem: afinal quem é Claire Voisin?

Claire Voisin doutorou-se na Université de Paris-Sud XI – Orsay em 1986. Ao longo da sua carreira de investigadora do CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique), trabalhou na Université de Paris – Orsay, no Institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ), no Institut des Hautes Études Scientifiques (Bûres-sur--Yvette), na École Polytechnique (Palaiseau) e, mais recentemente, ocupou a cátedra de Geometria Algébrica no Collège de France, sendo a primeira mulher a ocupar este cargo extremamente honroso. Atualmente é *directrice de recherches* (CNRS) do IMJ.

Claire Voisin abordou e resolveu problemas com longa história. O seu nome está indubitavelmente ligado a conjeturas famosas, como a conjetura de Kodaira, a conjetura de Hodge, a conjetura de Green e a simetria espelho. Foram-lhe atribuídos vários prémios, dos quais destacamos o Prémio Shaw (2017), conhecido como o Prémio Nobel do oriente. Destacamos também, entre outros, o prémio da European Mathematical Society (1992), o prémio Servant da Académie des Sciences (1996), o prémio Ruth Lyttle Satter em Matemática (2007), o Clay Research Award (2008), a medalha de ouro do CNRS (2016) e, mais recentemente, o prémio L'Oréal-Unesco (2019). Foi oradora convidada no Congresso Internacional de Matemáticos (ICM) em 1994.

Em reconhecimento da sua contribuição para a ciência, é membro de várias sociedades científicas incluindo a Académie des Sciences, a Academy of Sciences Leopoldina (Alemanha), a Royal Society of London e a American Academy of Arts and Sciences.

GAZETA DE MATEMÁTICA Claire, impressionou-nos muito saber que cresceu no seio de uma família de 12 irmãos e irmãs. É difícil imaginar como é que os seus pais organizaram a vida e como é que conseguiu ter sossego para se tornar a pessoa que é.

CLAIRE VOISIN Não foi bem assim. Na prática, nunca vivemos os 12 em casa ao mesmo tempo, porque a família cresceu ao longo de 22 anos entre o mais velho e o mais novo (o último nasceu em 1968). As minhas várias irmãs mais velhas saíram de casa muito cedo e eu sou a décima. Nas minhas primeiras memórias, já só havia cinco ou seis irmãos em casa. O pior era não dispor de um quarto só para mim. A casa era grande e as divisões amplas, mas não eram numerosas.

GAZETA Estavam superlotadas...

CLAIRE A este propósito ocorre-me com muita simpatia a escritora Virginia Woolf, que escreveu sobre esta necessidade de espaço privado (*A Room of One's Own*) como condição de liberdade e criatividade. Só no meu último ano de Ensino Secundário é que tive direito a um quarto só para mim, o que me deixou excelentes recordações. Agora possuo um amplo apartamento em Paris onde me sinto muito bem e à vontade.

GAZETA Além do sossego como condição para criatividade, diríamos que o que conseguiu realizar é tão impressionante que deverá ter tido início na sua infância, talvez desencadeado por alguma espécie de estímulo familiar. Como eram os seus pais neste aspeto?

CLAIRE Os meus pais nasceram em 1917 (pai) e 1922 (mãe). A minha mãe já tinha 40 anos quando nasci. Com uma prole tão grande, não se preocuparam especialmente em estimular os filhos. No entanto, em 1972 o meu pai (engenheiro de profissão) ficou desempregado, o que foi dramático, por um lado, mas permitiu-lhe dedicar tempo à minha formação matemática. Tal foi possível porque a maioria dos irmãos mais velhos já tinha saído de casa, e o meu irmão a seguir em idade não tinha o menor interesse por matemática. O meu pai tinha uma vasta cultura matemática que me transmitiu (geometria dos triângulos, algum cálculo infinitesimal, equação da elipse) à moda antiga, pois a sua formação fora realizada antes da II Guerra Mundial. Passei mais tarde por uma fase de crítica, pois na escola a abordagem era completamente diferente, a das matemáticas ditas modernas, por exemplo, a teoria dos conjuntos, axiomas, operações abstratas, escrita de números na base 2 [risos]... A bagagem aprendida com o meu pai foi excelente.

Um outro pormenor: o meu irmão mais velho (mais dez anos) foi estudar para Paris e deixou um livro escolar em alemão, um livro de álgebra, que comecei a estudar. Foi uma sorte.

GAZETA Pois então começou sozinha..., mas podemos dizer que o seu pai a influenciou. Por ocasião do prémio Shaw mencionou também numa entrevista que o espírito dos anos sessenta tinha muito peso no seu ambiente familiar. Pode ser mais precisa?

CLAIRE Não foram os anos 60, mas sim o final dos anos 60, os Beatles já eram passado.

Os meus pais eram muito intelectuais, fortemente interessados pela política mundial. Cerca de 1968, falava-se à mesa de assuntos como a morte de Martin Luther King. De tal forma que o meu irmão mais novo se chama Martin. Preocupavam-se com os problemas do chamado terceiro mundo: a fome, a falta de liberdade, etc.

Por outro lado, o meu irmão mais velho, que tinha cerca de 16 anos, estava muito presente nas discussões porque participava na agitação pública geral.

Os meus pais falavam muito sobre os filósofos do Collège de France, sobre Sartre e Beauvoir. Mas o que os preocupava mais eram as implicações morais, daí interessarem-se por Luther King e também pelo Abbé Pierre. Conhecem-no? Foi um sacerdote dedicado ao combate contra a pobreza. Os meus pais seguiam de perto estes assuntos e eu escutava-os, assim como os pontos de vista dos meus irmãos politicamente ativos. Era uma maneira de lhes chamar a atenção...

GAZETA A preocupação social influenciou-a? Ou teve o efeito oposto (como as crianças, por vezes, reagem por oposição aos pais)?

Claire (3.ª em baixo a contar da esquerda) com a família, em 1966

CLAIRE Os meus pais eram muito intensos, preocupados com os grandes problemas mundiais. Não havia espaço para uma atenção individualizada. De certa forma, não tínhamos direito de nos queixar face aos males do mundo. Não era suposto sermos importantes. Isto não foi uma coisa boa. Havia uma total falta de ambição para nós, com tantas outras coisas mais importantes. Tive a sorte de escapar a este caminho totalmente desprovido de ambição.

Esta visão era excessiva face ao trabalho individual. As matemáticas para mim foram uma maneira de chamar a atenção do meu pai, por contraste.

GAZETA Em Paris, nos anos 70, era habitual, para cientistas ou não, frequentar os seminários no Collège de France dos grandes pensadores da época, por exemplo, Rolland Barthes. Será que este hábito se mantém?

CLAIRE Não, muito menos, perdeu-se esse hábito. Nenhum professor atual do Collège de France tem a influência dos filósofos desses anos. Em maio de 68 havia uma mistura e uma partilha de diferentes formas de pensar que não existe agora.

GAZETA Lemos que a matemática para si não apareceu como primeira escolha precocemente. Como foi esta escolha?

CLAIRE Considerei todas as possibilidades. O diretor da minha escola aconselhou-me a inscrever-me nas classes preparatórias do Lycée Louis-le-Grand, que frequentei dos 17 aos 19 anos. Foi uma decisão excelente. O ensino era muito bom. Eu era boa a matemática, mas não via a sua profundeza. Era como que um jogo, ora eu não gosto de jogos, sou uma pessoa muito séria. Recordo que também tive aí excelentes professores de literatura.

Aprendi matemática muito sólida, mas era como que um conjunto finito de regras, faziam-se uns cálculos... Faltava-me qualquer coisa, era demasiado prática… Sim, a prática é boa para perceber as definições.

GAZETA No fundo, considera que na escola a matemática é ensinada como um conjunto de regras e deve-se jogar segundo estas, mas não há lugar para criar coisas novas, falta a criatividade?

CLAIRE Foi ao fazer investigação que passei a levar a matemática mais a sério. Estava diante de algo muito prometedor, muito sério. Percebi que havia tanto para descobrir, tanta coisa que não sabemos! Não se trata, de todo, de um mero jogo.

GAZETA É como levantar um véu. Tem-se um mundo para descobrir. Mas, para tal, precisamos de bases...

CLAIRE Por volta dos 21 anos, perguntei-me se devia estudar filosofia. Foi no tempo em que não sabia ainda o que era fazer matemática. Atualmente não lamento ter deixado a filosofia.

GAZETA A Claire disse numa entrevista algo como "tenho a nostalgia do período em que a minha vida era sobretudo centrada em casa e dividida entre a investigação e a educação dos meus filhos". Por que razão?

CLAIRE Eu amo os meus filhos, e mais ainda em adultos. Agora que saíram de casa, a minha vida não é vazia, viajo mais, vejo mais pessoas, participo em mais comissões. No passado, a minha vida era mais concentrada: em casa. Fazia matemática em casa, tinha menos viagens e isso talvez lamente, embora considere que viajar pelo mundo e discutir com pessoas sejam mais distrações do que outra coisa. O que me trouxeram?… Concluir que o mais importante para mim é ficar dentro de mim. Pessoalmente, não acho fundamental interagir com muita gente. Portanto, o que quis dizer foi que até certo momento, estive muito concentrada: tinha apenas a matemática e a vida familiar. O contraste da vida familiar com a matemática era crucial. A matemática era o meu espaço, só meu.

GAZETA Em Portugal, na universidade, damos muitas aulas, o que sobrecarrega a vida das mães. O cuidado das crianças recai muito sobre a mãe.

CLAIRE Em França, se bem que não tanto como há 30 anos, o apoio às crianças é bastante bom. A escola é obrigatória aos 3 anos e antes disso há creches para as crianças a partir dos 3, 4 meses. Eu tinha muita ajuda! O que era mais complicado era convencer as pessoas de que era importante fazer matemática em casa. Às vezes, tentava ter uma das crianças comigo, mas era muito difícil.

GAZETA Então não há nada a lamentar...

CLAIRE Agora tenho mais tempo, mas não faço mais... Naquela altura vivia apenas para os aspetos centrais, de maneira focada.

Claire e os filhos no jardim de casa, em 1998

GAZETA Claire, sabe que é um exemplo de como a maternidade não é um impedimento para um grande sucesso na investigação. Fora a partilha de tarefas com o seu marido, ele mesmo um reconhecido matemático, haverá algum segredo para aproveitar tão bem o tempo?

CLAIRE A matemática era o meu espaço. Recomeçava rapidamente após cada nascimento. Por vezes, tive de lutar pela minha vida matemática... Porque é a minha maneira de me expressar.

Não era tanto por sermos organizados, se bem que fôssemos bem organizados. Vivíamos numa terra pequena, sem necessidade de usar carro, era tudo perto e simples.

GAZETA Sabemos que a pintura e a música têm um lugar especial na sua vida. Comecemos pela pintura.

CLAIRE Cerca dos 19, 20, até aos 22 anos, pintava muito. Mas apenas como complemento da matemática. A minha vida social era praticamente vazia. Não está na minha natureza relacionar-me...

GAZETA No entanto encontrou o seu marido!

CLAIRE [Risos] O encontro com o meu marido foi quase por milagre, ele era na altura professor em Orsay, onde eu estava a preparar o meu doutoramento, mas não foi aí que nos conhecemos. Foi uma sorte. Tive imensa sorte! Na verdade, ao longo da vida nunca tomei grandes decisões, foi acontecendo.

GAZETA Agora tem mais vida social, com tantos prémios, com a fama pelos resultados espetaculares que obteve...

Mudando de assunto, uma de nós tem a pretensão de pintar. Será que podemos ver alguma das suas produções e depois incluí-la na publicação da entrevista?

CLAIRE Sim, vou mostrar-vos um quadro que considero ser o meu melhor. Gosto muito dele e por isso conservo-o. Foi pintado quando era muito nova. Agora estou mais virada para o desenho, desenho pequenas coisas, árvores, coisas simples.

No passado, com os meus filhos, fazia muitas coisas, modelagem… Não eram muito talentosos. Mentira, dois deles sim. Eram muito bons momentos! Também tinha gosto em educar e fazer atividades, mas para brincar ao faz de conta não.

No IHES, em 2007

GAZETA Ajudava os seus filhos em matemática?

CLAIRE Não era uma tarefa fácil. A princípio tentava ensinar, mas eram coisas demasiado abstratas. As crianças com 9, 10 anos, têm facilidade em aprender, mas não têm capacidade de abstração. Acabei por ensinar coisas simples, sistemas de duas equações com duas variáveis, por exemplo.

Dois dos meus 5 filhos são matemáticos: quando eram *teenagers*, era difícil discutir matemática com eles e quanto mais crescidos, pior. Queriam descobrir por eles mesmos, talvez eu fosse demasiado rápida. Os outros meus filhos não se interessam por matemática. Um dia, a minha terceira filha, quando estava na classe preparatória para o curso de Gestão (pelos seus 18 anos), precisou de ajuda, mas sem real interesse. Tive muita dificuldade em convencê-la a manter o telemóvel desligado. Não tenho muito boas recordações desse período.

GAZETA Sabemos que todos os seus filhos tocam um instrumento. Que papel teve a música na vossa vida familiar?

CLAIRE Sim! Fagote, oboé, viola, piano... São bastante bons. Eu comecei tarde a tocar violino. Creio que não tenho bom som, é só por divertimento. Nunca os forcei a estudar, achava que isso tinha de partir deles. Mas incitei-os a aprender um instrumento porque é ótimo para criar disciplina, uma vez que têm de tocar todos os dias. Acabaram por ser todos bons músicos.

GAZETA Algum dos seus filhos é músico profissional?

CLAIRE Não... O problema é que é difícil ter-se uma boa vida. Tem de se dar concertos, mas também ensinar. A Leila Schneps tem quatro filhos e um deles é músico profissional, bastante impulsionado por ela, mas eu não fiz isso com os meus. Acho que é uma vida muito difícil, há muitas deceções, o mérito não é facilmente reconhecido. Enquanto na universidade podemos ensinar e fazer investigação, e é-se reconhecido de forma mais justa.

GAZETA É preciso ter-se paixão pelo que se faz… Pode dizer-se que ama Paris?

CLAIRE Sim, sem dúvida! É verdade. Passámos 23 anos em Bourg-la-Reine, que é uma cidade pequena muito simpática, muito prática para criar os filhos. Há 11 anos, mudámos para Paris, quando eles estavam a terminar o Secundário. Sinto-me muito melhor em Paris, onde ando muito a pé pensando em matemática. Trabalhar em Bourg-la-Reine não era tão eficaz. Em Paris estou mais concentrada.

GAZETA Paris será mais excitante?

CLAIRE É uma cidade muito intensa, a arquitetura, o ambiente, é entusiasmante.

GAZETA Outros dos seus interesses de juventude foram a filosofia e a poesia. Como é no presente? Poderia partilhar connosco autores da sua preferência?

CLAIRE Em poesia, gostava muito de Mallarmé, Baudelaire, Rimbaud, e dos clássicos em geral. Mais recentes, René Char, Gérard de Nerval, Philippe Jaccottet. Atualmente não leio poesia, mas a poesia ficou marcada em mim. Por exemplo, Baudelaire ficou-me na memória. Assim como no caso da filosofia, recordo, por exemplo, Jean Cavaillès. Há 40 anos, a minha lista de autores era longa. De facto, atualmente os meus gostos mudaram, leio mais romances, biografias, ensaios, livros de História. Continuo a ler bastante.

GAZETA Voltando à questão do ensino, sabemos que fez "speed dating" com jovens estudantes no Institut de France. Apesar de o ensino não fazer parte das suas obrigações, é algo que lhe agrada?

CLAIRE É difícil de dizer. Não creio ter paciência para ensinar, sobretudo a *teenagers*. Apesar de algumas experiências correrem bem.

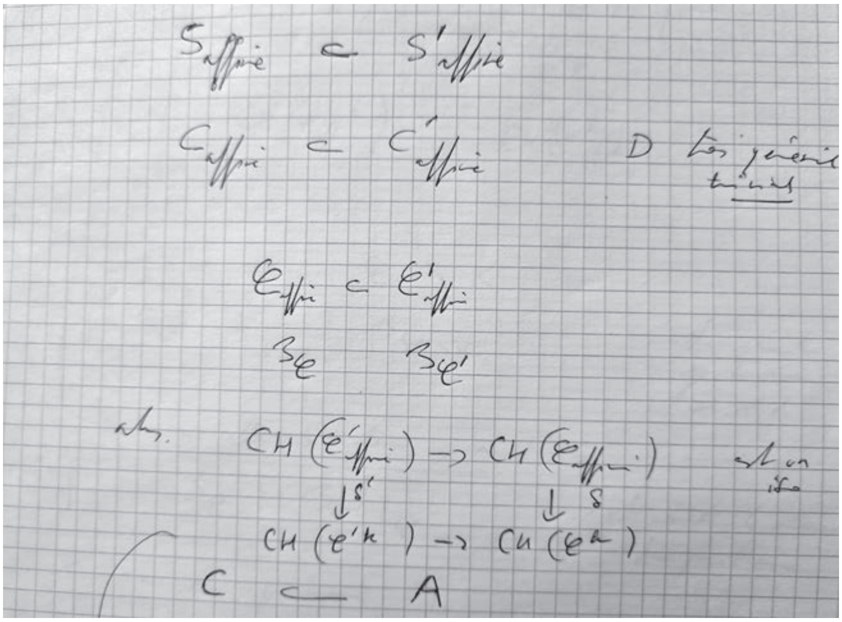
Gosto mais de ensinar cursos de mestrado e tive de o fazer quando estava no Collège de France. Neste caso, tem de se ser muito organizado, procurar estimular. É muito exigente introduzir de modo eficaz utensílios, por vezes muito sofisticados, necessários à investigação. Não é como fazer um seminário em que se tem de ser um pouco vago por vezes. Os alunos têm de perceber tudo desde o princípio. É muito exigente para mim, mas tenho interesse em dar cursos de tempos a tempos.

GAZETA Observámos que a Claire não evita a discussão pública em torno da matemática, dando um conjunto de entrevistas, conferências, etc. Numa destas, apreciamos particularmente uma afirmação que fez: "*Tous les puissants outils théoriques que nous développons trouveront tôt ou tard une application.*" (Todos as poderosas ferramentas teóricas que desenvolvemos encontrarão aplicação mais cedo ou mais tarde.)

CLAIRE Isto leva-nos à questão do porquê. Se calhar, porque trabalho em matemática pura, em particular, em geometria algébrica, em que há muitas questões que queremos responder, mas cujas aplicações parecem vazias. E, muitas vezes, somos confrontados por nós e por outros, sobre porque é que o fazemos. Sinceramente, acho que essa questão é errada, primeiro porque o fazemos por estarmos profundamente interessados num tema, em segundo lugar, porque esta é a forma segundo a qual a matemática se desenvolve. Desenvolve-se criando ferramentas para nós, mas que no futuro servirão para outros propósitos. Eu não acredito que aquilo que faço seja inútil.

GAZETA Claro que não… Não se pergunta a um músico porque faz música e qual a sua utilidade.

No seu escritório, em 2022



Quadro de Claire

Apontamentos de Claire

CLAIRE Esse é outro aspeto, mas não é a isso que me refiro. Claro que essa é uma boa resposta porque se trata de uma atividade essencial. O ser humano gosta de abstração. E a matemática é a única ciência onde a encontra com o maior rigor baseando-se na lógica. Penso que a matemática é a ciência mais importante para o desenvolvimento do pensamento humano. No entanto, o que queria era salientar a importância da matemática que estamos neste momento a fazer. Os teoremas que estou a provar podem não ter aplicação direta, mas as ferramentas que estou a desenvolver e a criar são com certeza úteis para o desenvolvimento da ciência.

GAZETA Arnaud Beauville, seu orientador de doutoramento, falou em 2003 sobre a sua prova da conjetura de Green no famoso Seminário de Bourbaki. Ele era um sénior e a Claire era uma júnior. Parece uma espécie de inversão de papéis. Como se sentiu na altura?

CLAIRE Eu já não era assim tão júnior. Já andava nos 40. Mas, antes disso, já ele tinha falado do meu trabalho num seminário quando eu era muito jovem. De facto, quando deu essa palestra sobre o meu trabalho, já eu estava nos quarentas. Nessa altura, eu já não me considerava uma júnior. Ainda assim, foi de facto muito simpático da parte dele tê-lo feito. Eu sofro com o facto de que Arnaud Beauville, apesar de ser uma pessoa tão famosa e conceituada em França, não seja membro da Academia. Ele é tão forte e tão bom! Não entendo como é que eu sou e ele não é. Pode haver um conjunto de razões políticas para ele não ser e eu ter obtido título apenas por ser mulher. Atualmente fica bem dar estes títulos a mulheres. Eu não gosto desta situação e considero-a muito injusta.

GAZETA Isto leva-nos a outra questão. Como lida com o facto de ser a única mulher que ganhou o Prémio Shaw?

CLAIRE Pessoalmente, sempre fui uma pessoa solitária e, como disse antes, vivi sobretudo em casa, sem socializar. Ou seja, nunca sofri com o facto de estar num mundo maioritariamente masculino. Eventualmente, se tivesse estado mais envolvida na vida universitária, talvez tivesse sentido mais essas condicionantes. Portanto, nunca pensei muito nisso de ser a única mulher. Foi, de facto, um grande reconhecimento. Confesso que tive e tenho um bocado de receio de que me tivessem dado o prémio exatamente por isso, por ser mulher. E essa ideia para mim é dolorosa.

GAZETA Nós não acreditamos nisso. É seu o prémio porque o mereceu!!!

CLAIRE Olhem o que fazem os *media*… Aquilo que dizem, a única coisa que dizem, quando se recebe um grande prémio, é que se é uma mulher. Não falam do trabalho. E não falo só por mim, falo em geral. Quando a Karen Uhlenbeck ganhou o Prémio Abel, a única coisa que os jornais referiam é que se tratava de uma mulher. É absolutamente dramático que apenas se foquem nesse aspeto. Quando se é uma mulher que passa por esta situação, quando se trabalha, não se quer saber se o nosso género importa. E, infelizmente, concluímos que o mais importante para as pessoas é o facto de sermos mulheres. Mais do que o nosso trabalho.

GAZETA É triste que ainda tenhamos de falar disto. O facto de sermos mulheres. Devíamos já estar noutra fase…

CLAIRE Às vezes, sinto-me apanhada numa armadilha. Eu tornei-me uma mulher matemática. Não simplesmente uma matemática. Sou vista como uma mulher matemática. Não queria que isto fosse assim. Não queria que a matemática que faço fosse apreciada ou avaliada segundo o ponto de vista de que sou uma mulher.

GAZETA Se calhar, insistem nessa visão porque a Claire tem uma família numerosa e a vida familiar normalmente é limitativa no alcançar de grandes sucessos.

CLAIRE Conhecem o Christopher Hacon? Ele faz geometria algébrica como eu e tem seis filhos! E a mulher dele trabalha. Para ele não há contradição entre ser um excelente matemático e a vida familiar.

GAZETA É como disse: há que estar concentrada no que se faz. Percebemos que, para a Claire, é mais importante o trabalho que faz do que os prémios em si. Mas não resistimos a perguntar-lhe: qual é o seu trabalho (não como mulher), que mais gostou de ver reconhecido?

CLAIRE Para mim, talvez o reconhecimento que mais apreciei tenha sido a comunicação no Seminário Bourbaki sobre o meu trabalho. Primeiro, por estar orgulhosa do meu trabalho e, segundo, porque o Seminário Bourbaki é uma instituição em França.

Devo dizer que, de certeza, é para mim o melhor reconhecimento que tive. Alguém de quem gostamos falar do nosso trabalho… Claro que também é agradável receber prémios, mas não têm o mesmo significado. Reconhecendo eu que os mesmos nos dão mais visibilidade, mas esta não é tão fácil de gerir. Depois dos prémios, da sua envolvência e das consequências, torna-se mais difícil voltar ao nosso canto e à matemática. É algo perturbador.

GAZETA Tem imensos alunos. Como os gere? Dá um problema a cada um? Segue-os de perto?

CLAIRE Sigo-os de perto, dou-lhes problemas que geralmente são desenvolvimentos do meu próprio trabalho, que mais ou menos sei onde irão parar. Tenho as minhas estratégias. Os melhores alunos têm mais liberdade para fazerem o que querem, mas habitualmente aos outros dou bastantes pistas. Agora as teses de doutoramento são apenas de três anos, incluindo um relatório; os meus alunos têm de ter dois ou três trabalhos escritos. Nunca lhes dou problemas completamente abertos onde não sei onde vão parar. Nestes três anos é quando aprendem muito, é a fase em que se tornam investigadores, o que aprendem escrevendo artigos, fazendo demonstrações. Normalmente, vou à universidade pelo menos uma vez por semana para dar o meu seminário e acompanhar os meus alunos.

GAZETA Nesta fase, tem algum problema com que esteja mais obcecada? Podemos sugerir que fale um pouco do seu trabalho em simetria espelho?

CLAIRE Já não trabalho nisso há muito. Parei por duas razões, uma porque havia já muita gente a trabalhar no assunto e outra porque não conseguia acompanhar os físicos. Eles trabalhavam muito depressa e eu não conseguia acompanhar com demonstrações rigorosas. Simultaneamente, tinha a sensação de que estava a afastar-me do meu próprio caminho. Preferi seguir os meus próprios questionamentos. Sobre a outra pergunta, trabalho agora num assunto que me interessa muito, muito bonito, que são as variedades Hyperkähler. São variedades Kähler compactas que não têm de ser algébricas, a geometria é mais abstrata, não contêm em geral subvariedades complexas interessantes. Claro que as compreendemos melhor via teoria da deformação graças ao teorema de Kodaira: muitas são algébricas, muitas não são. Um pouco como os tori complexos e as variedades algébricas. O tema faz apelo a diferentes áreas da matemática, como geometria diferencial complexa, distância associada à métrica de Kähler e, é claro, geometria algébrica. Os seus espaços moduli são conhecidos graças ao teorema de Torelli. Os ciclos algébricos são muito especiais. Estas variedades são um pouco como as variedades abelianas, mas mais misteriosas, pois não têm uma estrutura de grupo.
Trabalho nisto há dois ou três anos. Recebemos uma ERC Synergy Grant para isso. Trabalho com os professores

Durante a cerimónia de entrega de prémios do EMS. Entre outros laureados, a começar da direita: Labourie, Hirzebruch, Karoubi, Jacques Chirac, Claire, Franke, Goncharov, Kontsevich

Debarre, Macri e Huybrechts. O projeto de 8.5 milhões [de euros] consiste em testar algumas das conjeturas fundamentais da matemática moderna nas variedades Hyperkähler. É um assunto sobre o qual já escrevi um conjunto de artigos em colaboração, ao passo que habitualmente publico sozinha. É algo novo para mim que se tornou bastante agradável.

Recentemente, investigo a teoria dos ciclos algébricos, quero percebê-los como em topologia. Consideramo-los subvariedades de uma variedade algébrica e introduzimos certas relações no grupo abeliano gerado. Aparecem assim os grupos de Chow.

GAZETA Próximo da teoria dos motivos?

CLAIRE Sim, são uma teoria muito relacionada com os motivos, do ponto de vista da geometria algébrica complexa, da teoria de Hodge e da conjetura de Hodge. Os grupos de Chow são o que computamos num motivo. É claro que os motivos são mais gerais.

GAZETA Para terminar, quais foram os matemáticos que a influenciaram ou inspiraram?

CLAIRE Claramente, quando comecei, Philip Griffiths. Ele influenciou-me muito. Trabalhava na teoria de Hodge. Quando comecei a estudar, escrevi uma série de artigos influenciados pelo seu trabalho. Nessa altura não o conhecia. Só o conheci mais tarde. E foi porque começámos a discutir sobre os grupos de Chow. Ele escreveu um livro fantástico chamado *Intersection Theory* em que introduziu os grupos de Chow, o que foi essencial e valioso na resolução de muitos problemas. Existe também um outro livro sobre tais grupos que veio completar o trabalho do Griffiths, o qual sempre utilizou geometria complexa. Ora neste livro há uma abordagem via geometria algébrica. Há outros matemáticos que considero muito importantes na minha área e que me influenciaram, como Jean-Pierre Serre e Alexander Grothendieck, mas esses nunca tive oportunidade de conhecer.

GAZETA Claire, para concluir: há alguma questão que nunca lhe tivessem dirigido e que gostasse que lhe fizessem acerca da sua vida como matemática?

CLAIRE Na proposta de entrevista que me enviaram, há uma pergunta a que gostaria de responder, que é: de que é que mais me orgulho na vida? Pensei bastante nessa pergunta e diria que estou muito orgulhosa por não ter perdido a minha paixão pela matemática. De facto, acho que é ao contrário: quanto mais trabalho, mais investigo, e quanto mais sei da minha área, mais interessante é para mim tudo o que estudo. Talvez isto tenha sido um pouco diferente quando estava por volta dos 40. Era uma questão de vida ou morte. Talvez fosse um pouco demais. Agora sinto que gosto disto profundamente. É tão interessante, há tantas questões, há tantos caminhos a seguir! Estou muito satisfeita por não ter perdido o meu gosto!

CLAIRE VOISIN GALARDOADA COM O CRAFOORD PRIZE

GAZETA Claire, uma pergunta filosófica: acha que este prémio [o Crafoord Prize] lhe foi atribuído no momento certo?

CLAIRE É difícil de responder...É difícil dizer que se merece um prémio. Deste ponto de vista, quanto mais cedo, melhor. Não sei se é o momento certo, mas é um prémio muito importante e farei o máximo para estar ao nível desse reconhecimento e para convencer as pessoas de que o mereço.

GAZETA Mas a Claire já está num pedestal! A sua resposta parece-nos ter uma nuance feminina correspondente à eterna necessidade de as mulheres terem de provar sempre o que merecem.

CLAIRE Mas não é bem acento feminino. A questão está na área da minha investigação, geometria algébrica, onde se afirmaram vários matemáticos fortíssimos como Serre, Grothendieck, Deligne. Fazem-nos sentirmo-nos tão pequenos... Noutra área mais recente seria diferente. A geometria algébrica e a teoria de Hodge têm uma longa história. Lembro, por exemplo, Riemann e a teoria dos integrais hiperelípticos.

No curso de mestrado que ensino atualmente, gasto imensa energia a explicar a força destes resultados e a extrema importância da geometria algébrica. Muitos investigadores masculinos nesta área desistem de fazer investigação por causa da sua sofisticação e da sua profundidade.

GAZETA Como reagem os seus alunos ao seu prémio?

CLAIRE Não devem estar a par porque não falam disso. E eu prefiro não ser embaraçada com muitas manifestações.

GAZETA Pegando nessa ideia, sabemos que muitos matemáticos fazem uma festa quando são premiados. Como vai ser?

CLAIRE Farei uma festa apenas com os meus filhos e será depois de concluir o curso de que falei, que me gasta muitas energias.

GAZETA O prémio abrange toda a sua obra matemática ou põe em evidência algum resultado?

CLAIRE O prémio refere-se ao meu trabalho no seu todo. Pessoalmente, destaco o artigo sobre a conjetura de Green, o artigo sobre o problema de Kodaira e também o artigo sobre a estabilidade da racionalidade das variedades algébricas por métodos de deformação.

Voltando à questão do tempo certo, às vezes acontece os prémios chegarem quando estamos deprimidos, num impasse, a investigação não avança e o que fazemos parece não servir para nada, mas não foi este o caso. Estou muito feliz com o trabalho recente com János Kollár que responde a um problema dos anos 60, é um trabalho muito importante e agradável, ainda não publicado. O resultado principal é relativamente fácil de enunciar e a prova muito elegante. Incluo este trabalho no conjunto dos que são mais importantes.

GAZETA A sua vida vai mudar?

CLAIRE Como disse antes, continuarei a trabalhar muito, mas não propriamente por causa do prémio, cada um de nós tem um mestre íntimo com as suas próprias orientações e criticismos.

GAZETA Tenciona ir à Suécia receber o prémio?

CLAIRE Claro! Gosto de ser bem-educada. Este prémio representa um suporte financeiro da ciência. Devemos ser gratos e bem-educados. Os nossos governantes, na sua maioria, não são muito respeitosos em relação à ciência. É um dever de educação para com os que são.

Nuno Camarneiro
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

O FIM DO MUNDO

É assim que o mundo acaba
Sem estrondo, num gemido.[1]

Poucos temas exercem tanto fascínio sobre a Humanidade como a hipótese do fim do mundo. Quando será? Como será? Podemos evitá-lo? Estaremos nós a fabricá-lo? Quase todas as áreas de actividade humana dedicam ou dedicaram tempo e pensamento à questão escatológica – o estudo do fim dos tempos: a religião, a filosofia, a política, a literatura, as artes e também a ciência, já que nada do que é humano lhe pode ser estranho.

Diz-se que toda a literatura é sobre a morte e a finitude, mesmo (ou até sobretudo) a que não parece ser. Poderíamos talvez considerar que a ficção apocalíptica é apenas mais uma forma de explorar o tema, alargando a escala do indivíduo para a espécie inteira, multiplicando a angústia de uma única personagem (na verdade, do seu autor) pelos quase oito mil milhões de seres que habitam o planeta.

Mas, quando falamos de "fim do mundo", a que mundo nos referimos? O mundo de cada um de nós termina no momento exacto em que morremos, quando deixamos de estar nele e só a nossa memória poderá perdurar, talvez umas décadas, talvez um século, talvez mais, se deixarmos obra que nos faça recordar. Temos depois um outro "mundo" mais alargado, o da família, dos amigos, das pessoas que conhecemos e das que vemos na televisão, o nosso país, a sociedade que reconhecemos como nossa. Também esse mundo irá terminar, mais cedo ou mais tarde, à semelhança de todas as outras sociedades e países e povos do passado que desapareceram ou passaram a ser outros. Temos então a espécie humana, e aí a questão complica-se, sobretudo a partir do momento em que adquirimos os meios de nos autodestruirmos. Na segunda metade do séc. XX fabricámos um arsenal de bombas nucleares capaz de extinguir toda a vida sobre a Terra; daí para cá, aumentámos as nossas opções, com a manipulação de microorganismos patológicos, o aquecimento global promovido pelas emissões de CO_2 e, mais recentemente, a ameaça das máquinas (super)inteligentes que possam suplantar-nos e dominar-nos. É esse o mundo que normalmente encontramos nas ficções apocalípticas, o fim da espécie e da memória humana, talvez mais difícil de suportar do que o nosso próprio fim.

Se pensarmos no mundo para lá de nós, nas outras espécies, no planeta, no sistema solar ou mesmo no Universo, o fim parece mais longínquo e até abstracto. O Sol tem ainda alguns milhares de milhões de anos até se tornar uma gigante vermelha e tornar o nosso planeta um lugar pouco confortável. Do Universo sabemos menos, mas presumimos que continuará a expandir-se e a arrefecer, cumprindo escrupulosamente a segunda lei da termodinâmica. Nenhuma vida resistiria a isso, e, mesmo que resistisse, não haveria nada de muito interessante para fazer. Não sei que conhecimentos científicos possuía T. S. Eliot, mas talvez tenha sido essa hipótese a inspirar-lhe os versos que escolhi para epígrafe. É provável que o mundo não acabe com um estrondo, mas sim com um gemido, ou até mesmo sem ele.

[1] Excerto de *Os Homens Ocos*, de T. S. Eliot, tradução de Caetano W. Galindo

BARTOON

Luis Afonso

Publicado originalmente no jornal Público, em 06/12/2023. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Paulo Saraiva Universidade de Coimbra

EDITORES:
Patrícia Beites Universidade da Beira Interior
Rui Santos Politécnico de Leiria
Sandra Bento Universidade da Beira Interior

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Carlos Farias** E. S. Campos Melo, Covilhã • **Helder Vilarinho** Universidade da Beira Interior • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Maria de Natividade** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Sílvia Barbeiro** Universidade de Coimbra • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
FR Absolut Graphic
Rua Professor Egas Moniz n 38 4º Dto - 2620-138 Póvoa Sto. Adrião

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO
Sociedade Portuguesa de Matemática
SEDE: Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt
NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: http://gazeta.spm.pt/politica

TIRAGEM **1350 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

PRÉMIO PEDRO MATOS - 16.ª EDIÇÃO / 2024

MATEMÁTICA EM MOVIMENTO é o tema da 16.ª edição do Prémio Pedro Matos, promovido pelo Politécnico de Leiria, que pretende desafiar a comunidade escolar para a reflexão e a perceção da Matemática como ferramenta dinâmica, poderosa, capaz de descrever o movimento e a evolução dos fenómenos de diferentes naturezas.
O prémio está dividido em duas categorias, Prémio Pedro Matos e Prémio Pedro Matos Júnior, às quais podem candidatar-se estudantes do Ensino Secundário e estudantes do 3.º ciclo do Ensino Básico, respetivamente. Os estudantes podem concorrer individualmente ou em grupo, com um máximo de três estudantes por grupo, e ser auxiliados por um professor orientador.
Regulamento, prémios, datas importantes e todas as informações estão disponíveis em:
www.premiopedromatos.ipleiria.pt

6.ª EDIÇÃO DO CAMPEONATO NACIONAL MULTIPLI

O Campeonato Nacional Multipli está de volta. A competição, a decorrer exclusivamente online, é dirigida aos alunos dos 3.º, 4.º, 5.º e 6.º anos de escolaridade. Serão admitidos a concurso 2500 alunos por ano letivo, num total de 10 000 candidatos. A competição é composta por sete semifinais regionais, que decorrerão de 3 a 14 de maio, e por uma grande final, que terá lugar a 5 de junho.
As inscrições estão abertas até 27 de abril. Nesta edição de 2024 há uma novidade, a modalidade Minicampeonatos, cujo acesso é exclusivo para escolas/professores!
Saiba mais: *https://campeonato.multipli.pt*

9TH IBERIAN MATHEMATICAL MEETING

A 9.ª edição do Iberian Mathematical Meeting irá decorrer na Ilha de São Miguel, nos Açores, de 2 a 4 de outubro de 2024. Seguindo a tradição dos encontros anteriores, o evento está estruturado em torno de três áreas científicas principais. Nesta edição, as áreas científicas são: Matemática e Medicina, Matemática em Sustentabilidade e Mudanças Climáticas, e Matemática Recreativa. As inscrições estão abertas até 24 de setembro de 2024. Até 10 de setembro de 2024, as inscrições beneficiam de um desconto por antecipação. A chamada para comunicações está aberta até 30 de junho de 2024. Saiba tudo em: *https://acores9imm.spm.pt.*

DIA INTERNACIONAL DA MATEMÁTICA 2024

As celebrações do Dia Internacional da Matemática 2024 (IDM) decorreram, a 14 de março, sob o tema Brincar com a Matemática. Na página oficial do evento, *www.idm314.org*, foi lançado o Math Remix Challenge, um desafio criativo para o envio de uma foto em que a matemática estivesse misturada com objetos ou lugares do quotidiano. É possível visitar uma galeria e um mapa interativo para descobrir as propostas de 67 países.

A Unesco promoveu ainda, durante as comemorações do IDM, o webinar Playing with Maths for Society, que abordou as muitas maneiras pelas quais a matemática pode contribuir para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

LANÇAMENTO DO 2.º VOLUME DO LIVRO *RAPARIGAS NA CIÊNCIA*

A Ciência Viva lançou, no dia 17 de fevereiro, o 2.º volume do livro *Raparigas na Ciência*, um projeto que dá a conhecer os rostos de mais de 100 estudantes, de norte a sul do País e do primeiro ciclo ao ensino universitário, que têm demonstrado o seu interesse pelas áreas da ciência e da tecnologia, participando em projetos científicos durante o seu percurso escolar.

A par do projeto Mulheres na Ciência, criado em 2016, este livro destina-se a alargar o debate sobre a participação de mulheres e raparigas na ciência, nas engenharias e nas tecnologias, para inspirar as novas gerações para percursos académicos e profissionais nestas áreas.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA CPLP

A 12.ª edição da Olimpíada de Matemática da Comunidade de Países de Língua Portuguesa (OMCPLP) decorrerá de 23 a 28 de julho de 2024, em Oeiras, Portugal. O evento é organizado pela Sociedade Portuguesa de Matemática em conjunto com o Ministério da Educação e conta ainda com a colaboração da Câmara Municipal de Oeiras. Foram convidados a participar nesta competição internacional jovens dos oito países de expressão portuguesa: Angola, Brasil, Cabo Verde, Guiné-Bissau, Moçambique, Portugal, São Tomé e Príncipe e Timor-Leste.

Cada país convidado tem direito a estar representado por uma equipa de até quatro estudantes, um professor chefe de delegação e um tutor dos alunos.

Esta competição anual tem como objetivos a melhoria da qualidade do ensino e a descoberta de talentos em matemática e fomentar o estudo da matemática nos países lusófonos, através da partilha de experiências entre os diversos países participantes.

17.º CAMPEONATO NACIONAL DE JOGOS MATEMÁTICOS

Mais de 1800 alunos dos ensinos Básico e Secundário, de todo o País estiveram na Universidade de Aveiro para participar na final do 17.º Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos! Este ano o evento decorreu no dia 14 de março, data em que se celebra o Dia do Pi e o Dia Internacional da Matemática. A competição é dividida em quatro categorias (1.º, 2.º e 3.º ciclos e Ensino Secundário) e consta de seis jogos: Gatos & Cães, Rastros, Produto, Dominório, Atari Go e NEX.

PROFESSOR FERNANDO PENA RECEBE O PRIMEIRO PRÉMIO ÁLVARO BATISTA GONÇALVES

O Prémio Álvaro Batista Gonçalves foi entregue pela primeira vez, no passado dia 5 de março, numa cerimónia na Biblioteca da Fundação Champalimaud, a Fernando Pena, professor no Colégio Planalto e na Escola Superior de Educação Jean Piaget.

O Prémio visa reconhecer e motivar a excelência no ensino da Matemática nos ensinos Básico e Secundário, e por isso é entregue anualmente a um professor que se distinga pelo seu esforço, pela sua dedicação e pelo trabalho desenvolvido com os alunos.

Os alunos do professor Fernando Pena descrevem-no como um docente exigente, com sentido de humor e que "ensina imensa Matemática quase sem darem conta". De acordo com os estudantes, é um professor que está sempre disponível para os acompanhar.

Criado em 2022, pela Associação Álvaro Gonçalves e pela Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), o Prémio Álvaro Batista Gonçalves prevê a atribuição de cinco mil euros ao vencedor.

O júri justificou a atribuição do prémio ao professor Fernando Pena pela "profundidade como pensa o que é a excelência no ensino da Matemática, como vê a sua contribuição para o ensino e as inovações que introduziu".

O Prémio foi entregue pelo presidente do júri, o general Ramalho Eanes, antigo Presidente da República. Do júri faziam ainda parte os ex-ministros da Educação Eduardo Marçal Grilo e Nuno Crato, o antigo presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática João Araújo, a copresidente da Fundação Gaudium Magnum, Maria Cortez de Lobão, e o filho de Álvaro Batista Gonçalves, Fernando Pires Gonçalves.

MICHEL TALAGRAND VENCE PRÉMIO ABEL 2024

A Academia Norueguesa de Ciências e Letras atribuiu, no dia 20 de março, o Prémio Abel 2024 ao matemático francês Michel Talagrand, do Centro Nacional Francês de Investigação Científica (CNRS), em Paris, França.

Michel Talagrand, de 72 anos, foi distinguido pelas suas contribuições inovadoras para a teoria das probabilidades e para a análise funcional, com excelentes aplicações em física matemática e estatística.

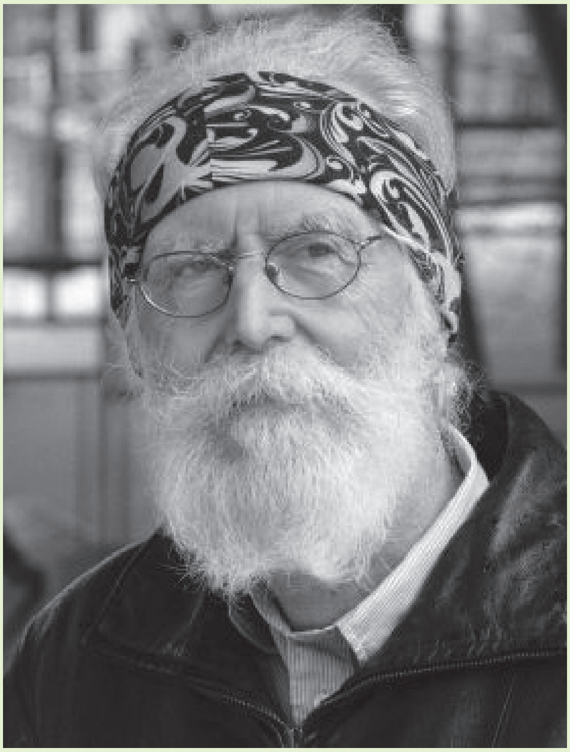
De acordo com o presidente do Comité do Prémio Abel, Helge Holden, "Talagrand é um matemático excecional e um formidável solucionador de problemas. Fez contribuições profundas para a nossa compreensão dos processos aleatórios e, em particular, dos processos gaussianos. O seu trabalho remodelou diversas áreas da teoria das probabilidades. Além disso, a sua demonstração da célebre fórmula de Parisi para a energia livre dos vidros giratórios é um feito incrível".

O tema comum nas descobertas inovadoras de Talagrand é trabalhar e compreender os processos aleatórios que vemos ao nosso redor. Tornou-se agora evidente que uma compreensão completa dos fenómenos aleatórios é essencial no mundo de hoje. Grande parte do trabalho de Michel Talagrand envolve a compreensão e a utilização da "distribuição Gaussiana ", muitas vezes mais conhecida como "distribuição normal".

O matemático francês ficou muito surpreendido pela distinção, tendo declarado: "Eu nunca pensei que isto fosse possível, foi incrível receber a notícia." Chegando mesmo a dizer ao *The New York Times*: "Não ficaria mais surpreso se visse uma nave extraterrestre pousar em frente à Casa Branca."

Michel Talagrand perdeu o olho direito quando tinha apenas 5 anos, devido a uma doença congénita, e aos 15 anos sofreu vários descolamentos de retina, ficando hospitalizado alguns meses. Foi aí que começou a estudar matemática, com a ajuda do pai, que era professor da disciplina, para se distrair. Diz que foi nessa época que aprendeu a valorizar o pensamento abstrato.

O matemático cresceu em Lyon, onde estudou na universidade local. Em 1974 tornou-se investigador no Centro Nacional de Investigação Científica (CNRS), em Paris, ao qual esteve ligado até ao dia em que se reformou em 2017. Doutorou-se em Matemática em 1977, pela Universidade de Paris VI, tendo passado alguns anos na Ohio State University, nos EUA, onde conheceu a sua mulher. É membro da Academia Francesa de Ciências e ao longo da sua carreira recebeu diversos prémios, entre eles o Prémio Loève em 1995, o Prémio Fermat em 1997 e o Prémio Shaw em 2019. Depois de receber o dinheiro relativo ao Prémio Shaw, Talagrand convidou a comunidade matemática a ganhar recompensas resolvendo quebra-cabeças que publicou no seu site sob o título "Fique rico com os meus prémios".



A cerimónia de entrega do Prémio Abel decorrerá em Oslo, no dia 21 de maio. Juntamente com galardão, Talagrand receberá um prémio pecuniário no valor de 7,5 milhões de coroas norueguesas, o equivalente a 645 mil euros.

Isabel Hormigo
Vice-presidente da SPM
ishormigo@gmail.com

POLÍTICAS EDUCATIVAS DESAJUSTADAS

Portugal voltou atrás na aprendizagem da Matemática, esquecendo o precioso histórico que permitiu avanços notáveis.

No dia 5 de dezembro de 2023, a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE) anunciou os resultados obtidos na última aplicação, em 2022, do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA). O PISA é um teste internacional que avalia, de três em três anos, o desempenho em Matemática, Leitura e Ciências, dos alunos de 15 anos de vários países e regiões de todo o mundo.

Em Portugal, as pontuações obtidas no PISA em 2022 caíram consideravelmente em todos os domínios, mas foi na área de Matemática que a queda se revelou mais acentuada – 20 pontos. Note-se que esta queda, relativamente a estes alunos, equivale, segundo estimativas habituais, a cerca de um ano letivo a menos de aprendizagem.

A pandemia provavelmente contribuiu para esta situação, mas há outros fatores a considerar, pois, já antes, neste e noutros estudos, se notou a tendência de declínio: no PISA 2018 (verificou-se um ligeiro declínio a Matemática e sérios declínios nas duas outras áreas do PISA), no TIMSS 2019 (a queda foi de 16 pontos) e agora no PISA 2022 (a queda é de 20 pontos). A mesma tendência é observada nos desempenhos de alunos que iniciaram o seu percurso escolar depois das perturbações provocadas pela pandemia: é o caso dos alunos que em 2023 estavam no 2.º ano do Ensino Básico e realizaram a prova de aferição[1], obtendo resultados confrangedores. Se compararmos os seus desempenhos com os dos colegas que realizaram a mesma prova em 2022, notamos uma acentuada redução do número daqueles que conseguem resolver plenamente tarefas em temas fundamentais do 1.º Ciclo[2].

No dia 9 de dezembro, a SPM, no parecer que emitiu sobre os resultados PISA 2022[3], explicitou a sua apreensão perante tal retrocesso dos resultados. Depois de, em 2015, Portugal se ter destacado por ser o único país participante no PISA que tinha evoluído em todas as suas edições, agora o PISA 2022 apresenta-nos o seguinte panorama:

1. Os alunos portugueses de 15 anos mostraram um desempenho aproximadamente equivalente ao dos alunos de 14 anos que realizaram em 2018 e em 2015;
2. Numa perspetiva temporal mais alargada, o retrocesso foi significativo: as pontuações obtidas em 2022 são próximas das obtidas em 2006. Note-se: 16 anos depois, as pontuações voltam para níveis próximos das de 2006;
3. Comparando o desempenho e a descida de vários países após a pandemia, verificou-se uma queda de 15 pontos na média da OCDE, uma tendência que já vinha a revelar-se antes, no entanto, a queda de Portugal foi maior: 20 pontos.

Infelizmente, estes resultados eram de esperar, e a curto prazo, uma vez que:

1. Foram interrompidas as provas de avaliação de final de ciclo;
2. Foram abandonados os currículos ambiciosos que valorizavam o conhecimento e o desenvolvimento de capacidades;
3. Foram suspensas as medidas e os meios para apoiar os alunos às primeiras dificuldades, assim como cessou a recolha de dados fiáveis sobre o estado da aprendizagem.

Todas estas medidas eram pilares fundamentais para a ação dos professores e, por isso, para a melhoria da aprendizagem, observada tanto no PISA 2015 como no TIMSS 2015.

Foram vários os pareceres em que a SPM alertou o Ministério da Educação para os efeitos previsíveis que teriam as alterações inoportunas e desajustadas que foram introduzidas no sistema. Em particular, no parecer que emitiu no dia em que se conheceram os resultados PISA 2015, congratulando-se com os resultados, sublinhava[4]:

> "… já não há Certificação de manuais de Matemática (…) já não há provas de avaliação no final dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico e está em curso uma reforma que tem por objetivo reduzir em 25% os conteúdos curriculares a ensinar aos alunos. Porquê desmantelar o que está a dar tão bons resultados?"

De facto, a abolição de provas finais de 4.º e 6.º anos[5], mudanças curriculares radicais que menosprezaram o conhecimento[6], a interrupção de horas de crédito proporcionadas às escolas[7] – o que impediu o apoio a estudantes com dificuldades ou a criação de medidas de recuperação no pós-pandemia –, a suspensão da avaliação de manuais escolares a meio de ciclos avaliativos, foram medidas que, após 2015, causaram perturbações no ensino e, consequentemente, na aprendizagem, como agora bem se vê.

Percebe-se que as atuais políticas educativas, aproximadas das vigentes antes de 2006, conduziram-nos em 2022 – 17 anos passados – a resultados idênticos no PISA! Tal seria de esperar pois, por exemplo, voltou-se às provas de aferição sem efeito, menosprezando-se tanto o incentivo ao estudo, que as provas finais de ciclo incrementam, como a informação do estado da aprendizagem.

Nos anos de 2006 e de 2022 as pontuações PISA são semelhantes, tais como eram semelhantes as políticas em vigor que conduziram a esses resultados. No entanto, no primeiro caso, perante resultados estagnados – PISA 2006 –, procuraram-se medidas suscetíveis de fomentar uma melhoria da aprendizagem; no segundo, depois dos melhores resultados de sempre – PISA 2015 e TIMSS 2015 –, tomaram-se medidas em sentido contrário.

Repare-se, por exemplo, que em 2007, logo depois de se conhecerem os resultados PISA 2006, identificou-se a necessidade de no 9.º ano a prova de aferição ser substituída por uma prova final de ciclo, constituindo-se esta como um avanço nos resultados PISA de 2009[8].

---

[1] Cf. Parecer da SPM – "Provas de aferição 2023 – resultados" *https://www.spm.pt/images/Parecer%20resultados%20da%20afericao%202023%20fev%202024.pdf*

[2] Por exemplo, em 2023 os alunos que conseguiram resolver problemas no tema Números e Operações, foram apenas um quarto dos que conseguiram problemas equivalentes em 2022.

[3] Cf. Parecer da SPM – Resultados PISA 2022 *https://www.spm.pt/images/Resultados%20PISA%202022%20SPM%2010dez2023_.pdf*

[4] Cf. Parecer "SPM felicita alunos e professores pelos melhores resultados de sempre no PISA 2015" *https://www.spm.pt/2660SPM*

[5] Cf. Carta enviada aos líderes de todos os Grupos Parlamentares da XIII Legislatura e ao deputado do PAN – Posição da SPM sobre proposta de "Eliminação dos Exames Nacionais do 1.º Ciclo do Ensino Básico" *https://www.spm.pt/2570SPM*

Parecer sobre os documentos "Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário" *https://www.spm.pt/parecer-sobre-os-documentos-aprendizagens-essenciais-do-ensino-secundrio*

Cf. Parecer sobre os documentos "Aprendizagens Essenciais" *https://www.spm.pt/parecer-sobre-os-documentos-aprendizagens-essenciais-matemtica-consulta-pblica-at-462018*

Cf. Parecer relativo ao projeto de decreto-lei Currículo dos Ensinos Básico e Secundário *https://www.spm.pt/parecer-relativo-ao-projeto-de-decreto-lei-currculo-dos-ensinos-bsico-e-secundrio*

Cf. "Grupo de Trabalho de Matemática – Carta Aberta à Tutela" *https://www.spm.pt/files/carta_GTM.pdf*

[6] Cf. "Novos programas de Matemática, sucesso escolar e o currículo para o século XXI" *https://www.spm.pt/2663SPM*

[7] Cf. Comunicado da SPM sobre as provas de aferição de Matemática dos 2.º, 5.º e 8.º anos, dando conta também da necessidade de que sejam proporcionados às escolas os meios humanos e materiais essenciais para que as estratégias de recuperação que forem definidas tenham possibilidade de ser implementadas *https://www.spm.pt/2615SP*

[8] Cf. Parecer "Avaliação da Sociedade Portuguesa de Matemática sobre os Resultados do PISA2009" https://files-arch.spm.pt/resultados_pisa2009.pdf

Nesta análise deve ser recordado que:

> "A Sociedade Portuguesa de Matemática sempre defendeu a existência de exames nacionais e continua a defender a sua existência e o seu alargamento. Neste momento, praticamente não existem exames. Em todos os nove anos de escolaridade obrigatória, os alunos apenas são avaliados por exames nacionais a duas disciplinas (Português e Matemática), apenas uma vez e apenas no final do 9º ano, o que muitas vezes é tarde para recuperar deficiências que deviam ser detetadas muito mais cedo.
> Para reverter este quadro, será necessário instituir exames em passos intermédios, possivelmente nos 4º e 6º anos, e a mais disciplinas."

É inegável a pertinência desta frase no presente, embora escrita em 22 de maio de 2007, na Tomada de Posição da Sociedade Portuguesa de Matemática sobre as provas de aferição[9].

Em suma, voltámos atrás na aprendizagem da Matemática, esquecendo o precioso histórico que nos permitiu avanços notáveis.

Após o PISA 2015, o próprio diretor da OCDE afirmou que "Portugal [foi] a maior história de sucesso da Europa no PISA"[10].

É pena, mas o mesmo não se pode afirmar agora.

A SPM orgulha-se de sempre ter apontado críticas que se revelaram justas e soluções que se revelaram acertadas. Assim continuaremos.

[9] Cf. "Tomada de Posição da Sociedade Portuguesa de Matemática sobre as provas de aferição" https://www.spm.pt/files/Microsoft%20Word%20--%20afericao2007.pdf

[10] Andreas Schleicher em declarações ao Diário de Notícias, de dia 10 de fevereiro de 2017 https://www.dn.pt/portugal/andreas-schleicher-portugal-e-a-maior-historia-de-sucesso-da- europa-no-pisa-5659076.html/

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2024

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3º esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*

VISITE A LOJA SPM EM *WWW.SPM.PT*

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia