N. 0200

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXXIV | Jul. 2023 | 4,20€

ARTE E MATEMÁTICA

Ladrilhos Inesperados

Pedro J. Freitas

HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA

Yupana – O Ábaco Inca

Jorge Nuno Silva

MATEMÁTICOS NA PRIMEIRA PESSOA

Alícia Dickenstein

Matemática no Feminino: Quando o Labor Ganha Notoriedade

Ana Mendes e Teresa Monteiro Fernandes

42.as Olimpíadas Portuguesas de Matemática

spm — Sociedade Portuguesa de Matemática

Renova

Inscrições Mini-Olimpíadas até
17 de janeiro de 2024
mopm.mat.uc.pt/MOPM

CATEGORIA
MINI-OLIMPÍADAS
(3.º e 4.º Anos do Ensino Básico)

PROVA ÚNICA
24 de janeiro de 2024

Inscrições Olimpíadas até
31 de outubro de 2023
registo.olimpiadas.spm.pt

CATEGORIA
PRÉ-OLIMPÍADAS
(5.º Ano)
JÚNIOR
(6.º e 7.º Anos)
A
(8.º e 9.º Anos)
B
(10.º, 11.º e 12.º Anos)

1.ª ELIMINATÓRIA
08 de novembro de 2023

2.ª ELIMINATÓRIA
10 de janeiro de 2024

FINAL NACIONAL
21 a 24 de março de 2024

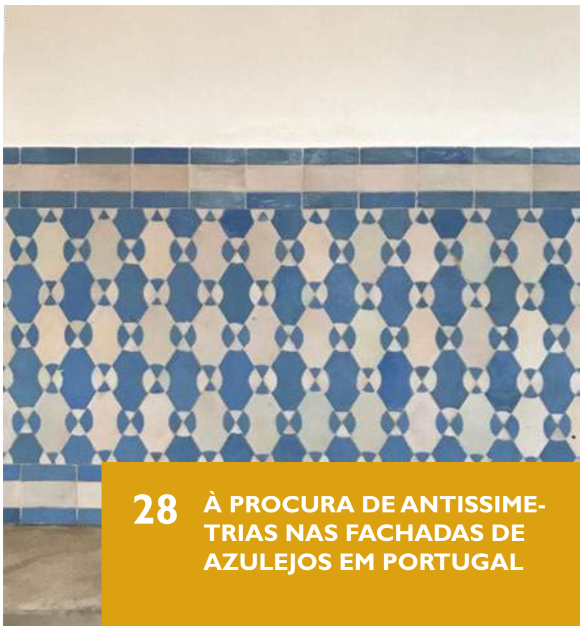
Julho 2024 · 65.as Olimpíadas Internacionais de Matemática (Reino Unido)
Julho 2024 · 12.ª Olimpíada de Matemática da CPLP (Portugal)
Setembro 2024 · XXXIX Olimpíadas Ibero-americanas de Matemática (Bolívia)
CONTACTOS: www.spm.pt · 217 986 353 · 960 130 506 · opm@spm.pt

dm.uc Departamento de Matemática · República Portuguesa Educação · Ciência Viva Agência Nacional para a Cultura Científica e Tecnológica · Fundação Calouste Gulbenkian

ÍNDICE

22 ARTE E MATEMÁTICA
Ladrilhos Inesperados

18 NÃO COLOQUE TODOS OS OVOS NO MESMO CESTO: UMA NOTA ACERCA DE DUAS ESTRATÉGIAS DE TRANSPORTE



28 À PROCURA DE ANTISSIMETRIAS NAS FACHADAS DE AZULEJOS EM PORTUGAL

EDITORIAL

Paulo Saraiva
Universidade
de Coimbra
psaraiva@fe.uc.pt

FRUSTRAÇÃO E RESILIÊNCIA NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

O que pode contar-nos quem ensina ou faz Matemática acerca do seu percurso de aprendizagem quando teve de enfrentar temas em que a Matemática, de repente, pareceu tornar-se difícil? Que mitos e estereótipos importa desconstruir? Boas questões para iniciar o n.º 200 da *Gazeta de Matemática*.

Aprender Matemática é frequentemente percecionado por muitos como uma tarefa difícil; mas também podem sê-lo atividades como aprender violino ou chinês. O que acontece é que há uma certa tendência das pessoas para recuar ou criar bloqueios à aprendizagem quando enfrentam dificuldades em Matemática, chegando a pensar que não são suficientemente inteligentes. Assumimos que é perfeitamente natural que a aprendizagem do violino implique muitas e muitas horas de sons estridentes horríveis, e que aprender a falar chinês signifique cometer erros após erros e não ser compreendido, mas, de certo modo, quando se trata de Matemática, temos medo de cometer erros. Imaginamos que existem pessoas para quem tudo é transparente, chamemos-lhes "pessoas matemáticas", e que, se não entendermos imediatamente um tema matemático, é porque seguramente não pertencemos a esse grupo. Na realidade, quem obteve sucesso em Matemática, à semelhança daqueles que se dedicam a aprender um instrumento musical ou um novo idioma, em algum momento passou pelo sentimento de frustração. O caminho para a compreensão da Matemática envolve, necessariamente, estar "disposto a lutar", algo que é comum a muitos outros campos da atividade humana. Na obra *Living Proof: Stories of Resilience Along the Mathematical Journey*[1], uma edição conjunta da American Mathematical Society e da Mathematical Association of America, podemos encontrar 41 testemunhos de gente – maioritariamente, professores universitários em diversas áreas da Matemática (entre os quais Terence Tao, Medalha Fields em 2006, que partilha o seu próprio quase desaire em *A Close Call: How a Near Failure Propelled Me to Succeed*) – que, a dada altura do seu percurso de estudo da Matemática, viveu a frustração, mas enfrentou-a com afinco, porque percebeu que a persistência diante da dificuldade conduz às recompensas da aprendizagem e do crescimento. Neste sentido, são o exemplo vivo de que a existência de "pessoas matemáticas", aquelas para quem tudo é fácil e óbvio, se reduz a um mito. As pessoas que rotulamos de "boas em Matemática" são simplesmente aquelas que dedicaram tempo e se deram ao trabalho de se empenhar, através do estudo produtivo e do esforço, mais profundamente do que outras. Vontade e persistência diante das dificuldades podem ser muito mais importantes do que qualquer eventual talento inato para a aprendizagem da Matemática.

O tema deste livro entrelaça-se com o da "Matemática para Todos", escolhido para enquadrar as comemorações deste ano do Dia do Pi (Dia Internacional da Matemática). Citando Marco Rotairo, aluno filipino que (entre outros) propôs este tema, "*todos nós temos capacidade matemática, mas apenas numa extensão e num grau diferentes. Além disso, devemos deixar que todos desfrutem das maravilhas da Matemática. A noção de que a Matemática é apenas para os dotados e os génios deve mudar. (…) O acesso à Matemática deve ser democratizado, para todos, pois, tradicionalmente, acredita-se que é apenas para aqueles que possuem certos tipos de capacidades de resolução de problemas. E a investigação, principalmente em Educação Matemática, demonstrou que a Matemática é imprescindível em todo o mundo porque contribui para a formação de cidadãos competentes*".

No prefácio à obra acima referida, Stephen Kennedy, do Carleton College (Minneapolis, EUA), alerta ainda para as perigosas consequências associadas ao mito do "talento" no que ao ensino da Matemática se refere. A procura e o incentivo do "talento" podem conduzir o professor de Matemática a erguer barreiras à entrada na Matemática de grupos de pessoas que não se "parecem" com a maioria dos matemáticos (claro, tal não se restringe a esta disciplina). Evidentemente, todos lutamos para que tais barreiras não existam, por dificultarem o acesso de muitos à Matemática. Por outro lado, a transmissão, explícita ou implícita, voluntária ou inconsciente, de uma expectativa de insucesso pode ter efeitos profundos sobre os alunos. O reverso disso é que os professores podem igualmente causar um profundo impacto positivo através de uma simples observação ou de um comentário encorajador. Assim, faz sentido reforçar a necessidade de reconstruir a imagem de referência que os docentes podem assumir (particularmente no nosso país). Por fim, é também possível encontrar neste livro testemunhos que refletem a luta e a persistência perante o desânimo de não se sentir bem acolhido pela comunidade matemática (nalguns casos, especula-se até sobre a quantidade de indivíduos que, perante a hostilidade, podem ter abandonado prematuramente a Matemática). Felizmente, há também relatos de pessoas que, face às dificuldades, procuraram auxílio (na família e entre os seus mestres), ilustrando o poder que a orientação e a simples compaixão humana podem assumir.

Em parte, é também de episódios de resiliência na aprendizagem da Matemática (e da sua linguagem), e na necessidade de a tornar acessível, que nos fala a matemática argentina Alicia Dickenstein, com quem Ana Mendes e Teresa Fernandes conversaram para a rubrica "Matemáticos na Primeira Pessoa" do presente número. Entre vários outros pontos de interesse, queremos ainda destacar o artigo "Ladrilhos Inesperados", com o qual Pedro Freitas inaugura a coluna "Arte e Matemática" (incluindo descobertas bem recentes nesta temática), assim como o texto "Yupana – O Ábaco Inca", por Jorge Nuno Silva, nas "Histórias da Matemática".

Por fim, como indicado na capa, a *Gazeta de Matemática* atinge na presente edição o seu número 200. Quem acompanha a *Gazeta* ou já teve curiosidade de pesquisar os números antigos no seu arquivo *online* sabe que esta viagem, empreendida pela vontade de matemáticos portugueses de uma geração fértil como foi a dos anos 40 do século passado, nos conta igualmente uma história de resiliência (em particular, no panorama das publicações matemáticas em Portugal). Longe de sermos exaustivos (a seu tempo, verá a luz do dia um trabalho mais apurado sobre a *Gazeta*), quisemos assinalar este facto através de um texto especial a cargo de antigos diretores da revista, e incluindo uma linha do tempo em que destacámos dez dos seus números, aqui propostos como convite à (re)leitura.

[1] Henrich, A. K., Lawrence, E. D., Pons, M. A., & Taylor, D. G. (2019). *Living Proof: Stories of Resilience Along the Mathematical Journey*. AMS.

HÉLDER PINTO
Instituto Piaget,
RECI e CIDMA-UA
helder.pinto@ipiaget.pt

CONTAR NEM SEMPRE É UMA COISA FÁCIL

Contar objetos nem sempre é uma tarefa fácil, principalmente quando alguns desses objetos podem estar "escondidos" ao olho desatento e apressado.

Contar objetos é um problema simples que todos os povos, por mais primitivos que fossem, solucionaram criando os seus sistemas de numeração. Relembre-se que, apesar de atualmente existir uma uniformização do mesmo sistema decimal posicional em quase todos os locais do mundo, muitas soluções e muitos sistemas foram criados ao longo dos séculos (posicionais e não posicionais; decimais, vigesimais e sexagesimais, etc.). No que se segue, a dificuldade não está em proceder à contagem, mas sim em reconhecer/descobrir os objetos propriamente ditos…

Há cerca de um ano, no jornal espanhol *El Confidencial* [1], era lançado o seguinte desafio de contagem de "quadrados" (o mesmo desafio foi lançado mais tarde no jornal português *Observador* [2]):

Na notícia era apresentada a solução para o quadrado 2x2 (podem ser observados quatro quadrados pequenos e um quadrado 2x2) e perguntava-se, como desafio, quantos quadrados podem ser observados no quadrado 3x3 (recorde-se que existem nove quadrados pequenos, "vários" quadrados 2x2 e um quadrado 3x3). No final era dada a resposta desta segunda questão, mas não se ia mais além…

A pergunta que nos interessa (um matemático gosta de generalizações…) é o que aconteceria se tivéssemos um quadrado 4x4? E se fosse 5x5?... E se fosse um quadrado *n*x*n*, onde *n* é um número natural qualquer?

Um outro problema similar pode ser consultado em [3], mas agora relativo à contagem de triângulos (figura 2).

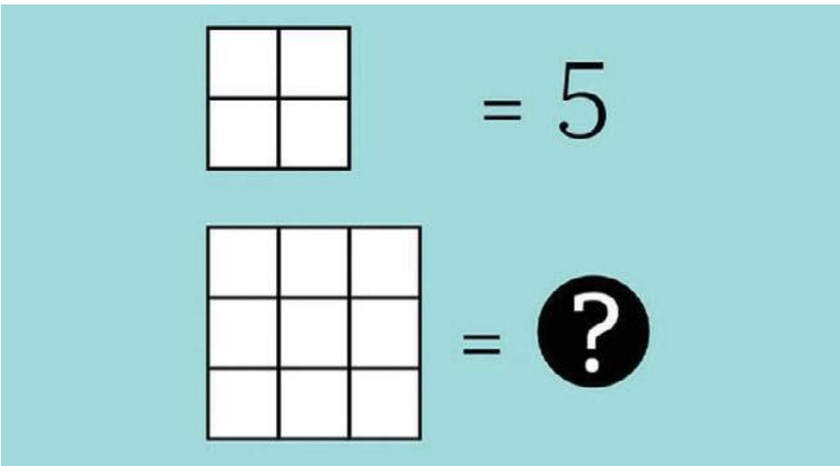


Figura 1: Quantos quadrados vê aqui?

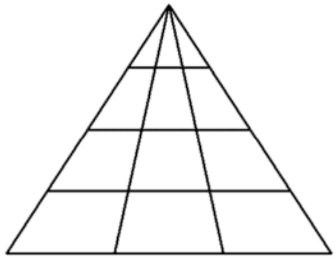


Figura 2: Quantos triângulos vê aqui? [3]

Mais uma vez, podemos tentar generalizar: e se a figura tivesse n "linhas" e m "colunas" (com n e m números naturais)?

Estes problemas são relativamente simples, pois existe uma certa "regularidade" nas figuras.

O pior é quando se têm figuras estranhas como as que se apresentam a seguir…

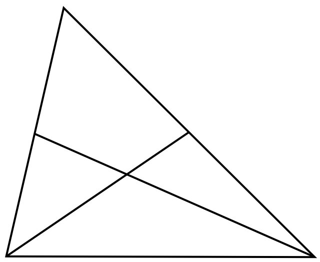


Figura 3: Quantos triângulos vê aqui?

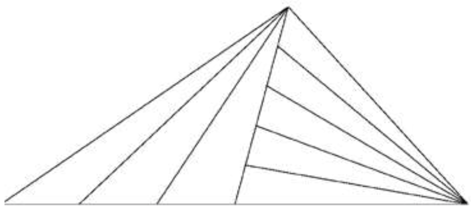


Figura 4: Quantos triângulos vê aqui?

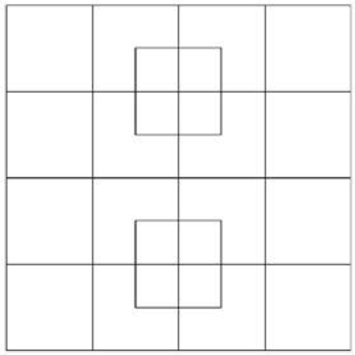


Figura 5: Quantos quadrados vê aqui?

Para finalizar, deixo ainda uma última nota para três notícias recentes onde a matemática foi utilizada, relembrando que a matemática permite obter uma medida para aferir, de facto, o que é ou não uma coincidência incomum (uma notícia alegre e outra absolutamente trágica…), mas também que, como se costuma dizer, a idade nada mais é do que um simples número no Cartão de Cidadão… (O Pepe e o Cristiano Ronaldo que o digam…)

1. Lennon, uma menina, nasceu a 18 de dezembro – no mesmo dia que a mãe e que o pai, Cassidy e Dylan Scott.

> "Este é um momento emocionante para qualquer família, mas é muito especial para esta família porque todos celebram o aniversário no mesmo dia", escreveu o hospital.
>
> "Isso mesmo! No domingo, 18 de dezembro, uma hipótese em 133 000 ocorreu quando Lennon nasceu", pode ler-se.
>
> Segundo a Fox News, a probabilidade de fazer anos no mesmo dia em que um dos pais é de 1 em 365. Segundo o hospital, no mesmo dia de ambos os pais, é de 1 em 133 000. [4]

Deixa-se como desafio ao leitor verificar se as probabilidades dos acontecimentos apresentados na notícia estão corretas ou não.

E já que está a trabalhar com aniversários, recordamos o famoso paradoxo dos aniversários: Qual o número mínimo de pessoas que deve ter uma sala para se ter uma probabilidade superior a 50,0% de duas delas fazerem anos no mesmo dia? (Note que neste tipo de problemas está a supor-se 365 dias no ano e, como é obvio, que as 365 datas possíveis são equiprováveis de acontecer, o que não acontece na realidade.)

2. A ciência pode estar prestes a provar a inocência da "pior assassina em série da História". Há "dúvida razoável" sobre se Kathleen Folbigg matou os quatro filhos.

> Vinte anos depois de ter sido condenada a 30 anos de prisão pela morte dos seus quatro filhos, a australiana Kathleen Folbigg, apelidada de "a pior assassina em série da Austrália", vê a revisão do seu caso, promovida pela cientista Carola García de Vinuesa e outros colegas, a ponderar que as crianças possam ter morrido por causas naturais. (…)
>
> Na acusação de 2003, altura em que foi condenada, foi invocada a lei de Meadow, assim chama-

> da por causa do pediatra britânico Roy Meadow, que teorizou que uma morte súbita é uma tragédia, duas são suspeitas e três são assassínios até que se prove o contrário – o que foi considerada uma falta de conhecimento sobre genética pela cientista García de Vinuesa.
>
> “Meadow disse que a chance [de mortes naturais] era de uma em 73 milhões e isso não era verdade. Se você tem uma mutação dominante, é uma chance em duas em cada filho. Com quatro filhos, seria uma chance em 16. Dizer que é um em 73 milhões é não entender de genética”, argumentou em entrevista ao El País. [5]

Engraçado como num site de notícias de Portugal se utiliza o termo “chance”…

3. Sul-coreanos vão ficar mais novos: nova lei pode retirar-lhes um a dois anos de idade.

> A Coreia do Sul vai eliminar o método até agora utilizado no país para a contagem da idade e adotar o padrão internacional. A mudança foi aprovada pela Assembleia Nacional na quinta-feira e irá retirar um ou dois anos de idade nos documentos oficiais dos cidadãos.
>
> Quando nascem, considera-se que os sul-coreanos têm um ano de idade e, a cada 1 de janeiro, é acrescentado um ano. Um bebé nascido na véspera de Ano Novo, por exemplo, faz dois anos assim que a meia-noite chega.
>
> (…)
>
> A nova lei, que estipula o uso do padrão internacional, deverá entrar em vigor em junho de 2023. [6]

Aproveite e veja a idade que teria se tivesse nascido na Coreia do Sul…

E já que estamos a comemorar o n.º 200 da nossa *Gazeta de Matemática*, como transformar o número 188 abaixo em 200, utilizando apenas um segmento de reta?

Soluções dos desafios propostos no número anterior:

O interposto de mercadorias

Uma das distribuições possíveis é a seguinte:

– 1.º *interposto:* Três vagões com dois contentores cada, um vagão com um contentor e três vagões vazios;

– 2.º *interposto:* Três vagões com dois contentores cada, um vagão com um contentor e três vagões vazios;

– 3.º *interposto*: Um vagão com dois contentores, cinco vagões com um contentor e um vagão vazio.

A ordem de serviço

O comboio deverá sair às 10h e seguir a uma velocidade constante (com aceleração desprezável) de 96 km/h. As duas estações estão a uma distância de 240 km entre si.

CAN 2000

Camarões-Gana (1-1); Costa de Marfim-Togo (1-1); Camarões-Costa de Marfim (3-0); Camarões-Togo (0-1); Gana-Togo (2-0); Gana-Costa de Marfim (0-2).

Os marcadores de golos

Arquimedes marcou 30 golos; Euclides marcou dez golos; Tales marcou cinco golos; Descartes marcou três golos.

A venda de jogadores

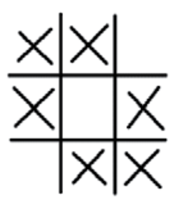
Dinic foi o jogador que não foi vendido (caso tenha tido dificuldade em resolver este desafio, note que o dinheiro total recebido pelo clube terá de ser divisível por 3…).

Os jogadores de râguebi

O Henrique conhece sete jogadores: dois têm apenas o braço esquerdo partido, três têm apenas o braço direito partido e dois têm ambos os braços partidos.

Desafios simples:

1. Como colocar seis cruzes no jogo do galo sem ganhar o jogo?



2. Efetua uma adição usando oito vezes o algarismo 8 de modo a que o resultado seja o número 1000.

$$888 + 88 + 8 + 8 + 8$$

3. Quanto pesa uma criança, se ela pesa mais dez quilos do que a metade do seu peso?

20 kg

4. Com apenas um traço, transforma os quatro algarismos abaixo num número de apenas um algarismo!

O I I O
O I T O

Até ao próximo número do nosso Recreio!

[1] *https://www.elconfidencial.com/alma-corazon-vida/2022-05-22/acertijo-cuantos-cuadrados-hay-imagen_3426044/.*

[2] *https://observador.pt/2022/05/20/um-teste-visual-para-fazer-na-praia-ou-no-parque-quantos-quadrados-existem/?cache_bust=1682518204802/.*

[3] *https://blog.science4you.pt/curiosidades/quantos-triangulos-ves-temos-a-solucao-do-enigma/.*

[4] *https://www.noticiasaominuto.com/mundo/2139769/eua-bebe-nasce-no-dia-de-anos-da-mae-e-do-pai/.*

[5] *https://cnnportugal.iol.pt/australia/oceania/a-ciencia-pode-estar-prestes-a-provar-a-inocencia-da-pior-assassina-em-serie-da-historia-ha-duvida-razoavel-sobre-se-kathleen-folbigg-mat-ou-os-quatro-filhos/20230427/644a9b83d34ed4d514fade83/.*

[6] *https://expresso.pt/internacional/2022-12-09-Sul-coreanos-vao-ficar-mais-novos-nova-lei-pode-retirar-lhes-um-a-dois-anos-de-idade-e33c965c/.*

PALAVRA AOS DIRETORES

Desde a sua génese, a *Gazeta de Matemática* teve um largo conjunto de equipas editoriais. Na atual equipa, entendemos que era oportuno aproveitar a ocasião da edição n.º 200 para ouvir os que assumiram a função de diretor da *Gazeta* e que ainda se encontram entre nós. O convite pedia que cada um refletisse acerca do papel que a *Gazeta* assumiu no período em que a dirigiu, e que mencionasse os desafios que ela pode/deve enfrentar atualmente e nos próximos anos. Além disso, pedia-se que fosse destacado algum número e/ou artigo em particular que lhe tivesse dado particular satisfação publicar. Os contributos aí estão, convidando-nos à leitura e à reflexão.

GRACIANO DE OLIVEIRA

Diretor do n.º 139 ao n.º 153

Aproxima-se o número 200 da *Gazeta de Matemática*. O meu telemóvel soou e tive o gosto de ouvir o doutor Paulo Saraiva, solicitando-me um contributo para o notável acontecimento. Sendo a aposentação uma espécie de "eutanásia social" (palavras que ouvi a Bagão Félix), dá grande satisfação constatar que ainda há quem note que existo e assim atrevo-me a pensar que a minha senilidade ainda me permite dizer algo aproveitável.

Comecei por perguntar-me: quando terei ouvido falar da *Gazeta* pela primeira vez? Penso que terá sido na longínqua era de cinquenta (talvez em 1957 ou 1958) e quem dela me deu conhecimento foi o Ernesto Koenig um colega e amigo de Cabo Verde, já falecido. Tornei-me assinante nessa altura através da funcionária da época, D. Olinda, que recordo com saudade. Na altura, frequentaria eu o 1.º ou o 2.º ano da licenciatura, nunca me ocorreu que, um dia, viria a desempenhar o cargo de director por cerca de dez anos e que em 2023 ainda estaria capaz de receber tão honroso convite do atual director.

A publicação da *Gazeta* esteve interrompida por muitos anos, mas fez sempre parte do imaginário de várias gerações de matemáticos e só no ano 2000, Ano Mundial da Matemática, se criaram condições para que revivesse. Desde então, tem sido sempre publicada com extraordinária regularidade, desempenhando um papel de grande importância na comunidade matemática portuguesa.

Depois deste introito, passo às questões sugeridas pelo Doutor Saraiva. A primeira embaraçou-me logo e foi esta: *Existe algum número, publicado durante o seu mandato, que o tivesse impressionado particularmente?* Comecei por pensar que não, mas, depois de uma curta reflexão, cheguei a uma conclusão diferente. O número 138 foi de particular relevância porque marcou o renascimento da *Gazeta* depois de um interregno prolongado. O número 139 também foi interessante porque marcou o ano 2000, Ano Mundial da Matemática. Enquanto no 138 foi mantido o aspecto gráfico tradicional com a intenção de salientar que aquela revista era a *Gazeta*, no 139 alterou-se ligeiramente com uma referência a cores na capa ao Ano Mundial da Matemática. No seguinte, 140, houve alterações mais profundas, tanto no grafismo como nas dimensões, mas tendo o cuidado de manter um aspecto que não deixasse dúvidas de que estávamos perante a continuação da mesma *Gazeta* de sempre.

Há ainda outro volume que me ficou na memória: o 143, que comemorou o quinto centenário de Pedro Nunes. Em primeiro lugar pelo seu significado e pelo seu conteúdo, e em segundo por razões de ordem financeira. Havia problemas com os custos, e não eram poucos, mas para este número conseguiu-se, com grande esforço, um volume de publicidade fora do comum, o que muito contribuiu para a sua boa execução.

Ao falar de publicidade e das dificuldades financeiras, a minha memória presenteou-me com projectos, já um tanto obscurecidos pelo passar dos anos, que defendia aquando do meu mandato como director da *Gazeta*. Desconheço o que se passa no presente, mas talvez algumas ideias que tinha ainda mereçam consideração e por isso as exponho, mesmo correndo o risco de dizer o que já não interessa. Ei-las:

A *Gazeta* sempre despertou um interesse razoável no Brasil e por isso fiz esforços, sem sucesso, para angariar por lá leitores, bem como noutros países de língua oficial portuguesa e até espanhola.

O recurso à publicidade foi uma fonte de financiamento apreciável e penso que pode voltar a sê-lo.

Seria vantajoso que a *Gazeta* se distanciasse mais da SPM. Apesar de ser sua propriedade, uma maior e visível distanciação seria benéfica, evitando que pudesse ser encarada como a revista da SPM, sendo antes considerada uma revista de todos os que têm algum interesse na Matemática. Poderia assim alargar mais facilmente o âmbito dos seus assinantes, sendo de admitir que os associados da SPM (bem como os de outras associações congéneres) tivessem um desconto na assinatura.

O conteúdo da *Gazeta* deveria ser dirigido a uma audiência alargada que englobasse todos os que lidam com a Matemática como, por exemplo, professores de todos os graus de ensino, engenheiros, economistas, estudantes, etc. Provavelmente (não fiz um estudo exaustivo do que se tem publicado) a *Gazeta* já cumpre este desígnio, mas creio que não exagero insistindo.

Além da *Gazeta*, existe o *Boletim da SPM*. Penso que, frequentemente, não se distingue bem da *Gazeta*. Deveria fazer-se uma melhor e mais rigorosa definição do que é o *Boletim* (a *Gazeta* parece-me bem definida) e quais os seus objetivos. Já encontrei artigos no *Boletim* que, na minha opinião, deveriam cair no âmbito da *Gazeta*, parecendo-me que havia, por isso, desperdício de recursos. E quero relembrar o *Jornal de Mathematica Elementar*, mantido durante muitos anos pelo Dr. Sérgio Macias Marques. É pena que a SPM não tenha podido dar-lhe continuidade pois, ao que parece, desapareceu com o seu fundador. Aproveito para homenagear a memória do Dr. Sérgio Macias Marques que muito fez pela divulgação da Matemática.

JORGE BUESCU
Diretor do n.º 154 ao n.º 162

Em 2007 o meu amigo Nuno Crato, presidente da SPM, desafiou-me para dirigir a *Gazeta de Matemática*. A *Gazeta* era então dirigida pelo Prof. Graciano de Oliveira, que depois de vários anos de trabalho pretendia passar o testemunho. Encontrei-me assim perante uma proposta que não podia recusar.

A decisão, no entanto, não podia tomar-se com ligeireza, pois a herança era de peso. A *Gazeta* foi a primeira revista da SPM. De facto, precedeu mesmo a existência da SPM: o primeiro número foi publicado em Janeiro de 1940, ao passo que a Sociedade foi fundada a 12 de Dezembro de 1940. No primeiro número dizia pretender "ser um instrumento de trabalho e um guia para os estudantes de Matemática das escolas superiores portuguesas". Teve uma vida atribulada, tendo mesmo deixado de ser publicada entre 1975 e 2000 (com um número isolado em 1990). Nesta sua segunda encarnação houve bastante a reformular, pois havia muitas coisas que 60 anos depois da sua fundação deixaram de fazer sentido.

Quando tomei o testemunho da *Gazeta*, em 2007, era claro que teria de haver uma evolução. A SPM tinha (e tem) três publicações periódicas: a *Gazeta*, o *Boletim* e a *Portugaliae Mathematica*. Se o papel desta última estava perfeitamente definido enquanto publicação científica de nível internacional, por vezes havia indefinições entre os papéis do *Boletim* e da *Gazeta*. Durante o meu mandato à frente da *Gazeta*, e mais tarde enquanto vice-presidente e presidente da SPM, entre 2012 e 2018, houve uma redefinição dos papéis destas publicações.

Enquanto o *Boletim* assumia definitivamente um carácter mais dirigido à comunidade científica (os seus artigos são referenciados no *MathSciNet* e no *Zentralblatt)*, a *Gazeta* assumia definitivamente um papel de divulgação científica de alto nível. O objectivo era o de funcionar como cartão-de-visita da SPM. Apostou-se forte num grafismo moderno e atraente (o primeiro número sob a minha direcção foi o 154, dedicado ao "2007: o ano de Euler"; o arquivo global pode ser consultado em *https://gazeta.spm.pt/arquivo*). A extraordinária equipa editorial na qual tive a felicidade de me apoiar tinha como vice-editores Adérito Araújo, Rogério Martins e Pimentel Nunes, que foram um verdadeiro *dream team;* e a Renata Ramalho tomava conta das ocorrências que não nos ocorriam.

Entre 2007 e 2010 a *Gazeta* consolidou assim a sua imagem como veículo de divulgação matemática de elevado nível, contando sempre com colaborações de elevadíssimo nível de matemáticos da nossa comunidade científica, que para não ser injusto não irei mencionar individualmente. Posso, contudo, dizer que foi com enorme satisfação que verifiquei que, no número imediatamente a seguir à minha saída de director (n.º 163), o editorial do Rogério Martins se intitulava "O orgulho de publicar na *Gazeta*".

Missão cumprida!

A forma como vejo o futuro da *Gazeta*, 16 anos depois de ter assumido a sua direcção, não é muito diferente daquela como via no início, sobretudo depois da passagem do *Boletim* a formato digital de acesso aberto (tendência de resto global: a European Mathematical Society, por exemplo, fez recentemente o mesmo com o EMS Magazine). A *Gazeta* tem de ser essencialmente um veículo que funcione como elemento agregador das comunidades matemática e educativa, com artigos de divulgação de elevado nível e notícias relevantes sobre a vida da Sociedade e da comunidade científica.

A forma concreta de atingir estes objectivos será um desafio para as futuras direcções da *Gazeta*, e estou seguro de que serão atacados com sucesso. Saberemos ser dignos dos matemáticos da Geração de 40.

ROGÉRIO MARTINS*

Diretor do n.º 163 ao n.º 171

Tendo integrado a equipa editorial de Jorge Buescu, Rogério Martins, autor e apresentador do programa televisivo *Isto é Matemática*! (SIC notícias), viria a assumir o cargo de diretor da *Gazeta* no mandato seguinte. Na continuidade do trabalho iniciado anteriormente, à sua equipa se deve o atual aspeto gráfico da *Gazeta*, tendo procurado que a revista se tornasse mais apelativa, gráfica e tematicamente, para uma maior generalidade e uma maior diversidade de públicos interessados na matemática, entre os quais, os docentes do Ensino Secundário, através de um equilíbrio entre artigos convidados e artigos submetidos. Assumido herdeiro da responsabilidade de dar continuidade aos propósitos originais da *Gazeta*, tem uma necessidade natural de inovar que incluiu o lançamento de uma versão digital *online* e a criação de um *website* da *Gazeta*. Consciente das dificuldades de passar a mensagem matemática pela via televisiva, Rogério Martins entende que "a matemática é uma coisa complexa feita de muitas coisas simples. Por isso, quando queremos explicar uma coisa complicada, temos de explicar uma série de coisas simples".

*Fruto da sua agenda sobrecarregada, não foi possível obter o contributo de Rogério Martins para o presente artigo.

ADÉRITO ARAÚJO

Diretor do n.º 171 ao n.º 180

Sou um grande fã da *Gazeta de Matemática*, muito por culpa do entusiasmo cativante de Graciano de Oliveira enquanto diretor e responsável pela sua reabilitação, no ano 2000. Desde essa data, sou um dos seus muitos leitores assíduos e não me canso de elogiar a qualidade da publicação.

A minha relação com a *Gazeta* estreitou-se a partir do ano 2008, quando Jorge Buescu me convidou para assumir o cargo de vice-diretor. Com o Jorge, a revista sofreu uma profunda renovação gráfica e de conteúdos, tendo sido iniciadas várias secções que se afirmaram como imagem de marca de qualidade: a secção *Atractor*, pela forma como se relaciona com aspetos interativos da matemática; a *Na Linha de Frente*, sempre muito bem escrita por Fabio Chalub (para quando a compilação em livro?); a *Recreio*, assinada por Jorge Nuno Silva que nos desafia, todos os números, com interessantes problemas; etc.

Quando, em 2014, assumi a direção da *Gazeta* com Sílvia Barbeiro e Daniel Pinto, foi fácil a decisão de manter a estrutura existente, adaptando, aqui e ali, conforme nos pareceu contribuir para aumentar o sucesso da revista. Foi nessa altura que Nuno Camarneiro começou com a sua *Matemática e Literatura* e que Gonçalo Morais deu início a um conjunto de entrevistas na sua *Conversa com...* É um prazer percorrer as páginas da *Gazeta* e encontrar depoimentos de Gil Strang, Cédric Vellani, Stephen Smale, André Neves, Henrique Leitão, entre muitos outros.

No centro das preocupações da equipa editorial de então esteve sempre a ideia de mobilizar a "imensa energia intelectual da juventude", tal como manifestado pela geração de matemáticos que, na década de 40 do século XX, fundaram a revista. Hoje reconheço que o sucesso não foi o esperado. Procurámos construir uma revista que estimulasse o gosto pela matemática e que fomentasse a discussão viva em torno dos textos publicados e dos desafios propostos, mas não tivemos capacidade para a fazer chegar aos alunos universitários e pré-universitários como ambicionámos.

Gostei de todos os números que publicámos. Se tivesse de destacar algum, referiria o número 173, dedicado ao problema das longitudes, publicado no ano em que se comemorou o tricentésimo aniversário do *Longitude Act*. Convido os leitores da *Gazeta* a regressar a esse número e a perceber a forma como o esforço conducente à resolução do problema das longitudes marcou, indelevelmente, toda a ciência moderna.

A riqueza da *Gazeta de Matemática* reside, sem dúvida, na qualidade dos seus autores. Seria injusto distinguir algum, mas não resisto a referir um artigo que, talvez por ter sido publicado no primeiro número em que assumi o cargo de diretor, li com particular satisfação. Refiro-me ao "A Terra é um Pião", escrito por Eduardo Marques de Sá, no número 172. É uma delícia ler este texto, onde o autor, de forma breve e muito leve, descreve um assunto matemático de dificuldade técnica elevada: a precisão dos equinócios.

Foi durante o período em que dirigi a *Gazeta de Matemática* que terminou o processo de digitalização da revista. Graças ao apoio da Fundação Calouste Gulbenkian e ao empenho de toda a equipa da Sociedade Portuguesa de Matemática, com particular destaque para Sílvia Dias, assistente editorial da *Gazeta*, é hoje possível aceder a todos os conteúdos publicados na revista desde a sua fundação, em 1940. Gerações de matemáticos e pedagogos contribuíram para enriquecer este importante acervo, que constitui um motivo de orgulho para toda a comunidade científica nacional.

A *Gazeta de Matemática* tem uma história riquíssima e um futuro promissor. Gostaria de ver a revista em todas as escolas do País, em todas as universidades, nas bibliotecas e nos cafés. Gostaria de ver os nossos melhores alunos como autores, os artigos da *Gazeta* referenciados nos trabalhos escolares, os desafios propostos a serem discutidos nos transportes públicos. Uma utopia! Mas é precisamente nessa utopia que considero residir a energia que permitirá à empenhada equipa que agora dirige os destinos da nossa *Gazeta* vencer os desafios do futuro.

SÍLVIA BARBEIRO

Diretora do n.º 181 ao n.º 198

Dirigi a *Gazeta de Matemática* de 2017 a 2022, dando continuidade ao projeto em que já participava como elemento da equipa editorial. A preocupação em publicar artigos que valorizassem a diversidade e a abrangência do pensamento matemático esteve sempre presente, havendo lugar não só para os temas fundamentais mas também para as novas ideias, áreas emergentes e aplicações da matemática. Dessa vontade surgiu a ideia de criar uma coluna coordenada pela Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação, que ainda se mantém, onde têm sido publicados artigos muito interessantes que ilustram a utilização da matemática na resolução de problemas reais de empresas, de organizações e societais.

Sinto muito orgulho em todos os números publicados durante os anos em que fui diretora. O talento, a generosidade e o empenho de cada autor e autora tornaram-nos a todos especiais. Consigo talvez destacar o número 185, de julho de 2018, porque tive oportunidade de o apresentar durante o Encontro Nacional da SPM que se realizou em Bragança. Aí, pude partilhar com alguns autores o gosto de olhar pela primeira vez para os seus artigos impressos.

Foi muito difícil terminar o número 194, de julho de 2021. Depois de um grande período de resiliência à pandemia COVID-19, o cansaço foi fazendo conquistas e nem todos os artigos com que contávamos ficaram prontos a tempo. Não comprometemos a qualidade, mas fizemos uma revista um bocadinho mais curta do que o habitual. Tivemos também dificuldades na edição impressa dos números seguintes. Estava a viver-se um período de escassez de matérias-primas, entre as quais o papel. A empresa gráfica que faz a impressão da *Gazeta* não dispunha do papel adequado nem tinha previsões de o conseguir num curto espaço de tempo. Tendo Portugal um posicionamento internacional significativo na indústria de pasta de papel e papel, esta foi uma dificuldade completamente inesperada. Para não atrasar a saída da revista por tempo incerto, optámos pontualmente por fazer a impressão no papel disponível, diferente do habitual com alterações no brilho e gramagem inferior.

A *Gazeta de Matemática* enfrenta grandes desafios. Em primeiro lugar, precisa de continuar a contar com artigos de grande qualidade. Até agora tem sido possível, mas por ser uma revista afastada dos *rankings*, é fácil vislumbrar adversidades. Uma conquista muito relevante seria conseguir chegar a uma audiência mais alargada, aumentando o número de leitores, quer em Portugal quer nos restantes países da CPLP. Finalmente, numa perspetiva de constante renovação, é importante desafiar continuamente os jovens estudantes a proporem o seu contributo para a revista.

Alfredo Costa
Universidade
de Coimbra
amgc@mat.uc.pt

TERNOS PITAGÓRICOS E TIJOLOS DE EULER

O título deste *Canto Délfico* é o mesmo de uma jornada da Liga Delfos, cujos problemas aqui apresentamos. Começando por explicar o que é a Liga Delfos, introduzimos de seguida o que são os tijolos de Euler. Estes objetos matemáticos constituem um análogo espacial do familiar conceito de terno pitagórico. Destacamos o problema em aberto sobre a existência ou não de tijolos de Euler perfeitos.

1. INTRODUÇÃO

A *Escola Delfos*[1] organiza-se em torno de estágios de dois dias, congregando na Universidade de Coimbra estudantes dos ensinos Básico e Secundário, com uma regularidade aproximadamente mensal. Estes estudantes são referidos como sendo os *délficos*.

Uma atividade-farol da Escola Delfos é a *Liga Delfos*. A Liga Delfos é uma competição entre equipas de délficos, decorrendo nos seus estágios. Cada edição corresponde a um ano letivo, e está dividida em cerca de sete jornadas, garantindo que a maioria dos estágios conte com uma jornada na sua programação. Em geral, cada jornada tem a duração de duas horas e meia, e cada edição tem cinco equipas. A Liga Delfos foi criada em 2004 por Jorge Neves, o qual por largos anos a organizou e moldou. Contou ainda com vários outros organizadores ao longo da sua história.

O autor destas notas pode testemunhar o quão entusiasmante é a Liga Delfos para os seus participantes. A Liga Delfos fomenta a partilha de conhecimentos, facilitada pela camaradagem. A competição entre as equipas é amigável e bem humorada, como o demonstram os nomes que as equipas escolhem para si, frequentemente associados a objetos, conceitos e problemas matemáticos com que os délficos se deparam. Exercendo o seu habitual bom humor, vários délficos pediram a certa altura ao autor destas notas que preparasse uma jornada envolvendo de alguma forma a palavra "Tijolo", a qual já fazia parte do nome de uma equipa. Acedeu com gosto, organizando uma jornada intitulada *Ternos Pitagóricos e Tijolos de Euler*, que decorreu a 7 de outubro de 2017. Neste *Canto Délfico*, espreitamos um pouco a Liga Delfos, propondo ao leitor os problemas dessa jornada. Antes disso, fazemos uma breve contextualização dos problemas.

2. TIJOLOS DE EULER

Figura 1. Leonard Euler [2] (1707-1783).

[1] *https://www.uc.pt/fctuc/dmat/delfos*

[2] Imagem do domínio público, retirada de *https://www.nndb.com/people/954/000048810*

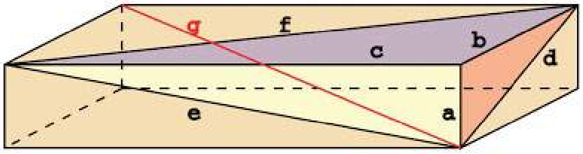


Figura 2. Ilustração[3] de um tijolo com dimensões a, b, c, diagonais faciais d, e, f, e diagonal espacial g.

Um paralelepípedo retangular (i.e., um prisma de base e faces retangulares) é um *tijolo de Euler* se todas as suas arestas e diagonais faciais têm comprimentos inteiros. Estes objetos matemáticos devem o seu nome às investigações sobre eles feitas pelo afamado matemático suíço Leonard Euler (1707-1783). O tijolo de Euler de menor volume tem dimensões 44, 117 e 240.

Um tijolo de Euler *perfeito* é um tijolo de Euler cuja diagonal espacial também é um inteiro. O problema da existência de um tijolo de Euler perfeito traduz-se em saber se o sistema de equações

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = d^2 \\ a^2 + c^2 = e^2 \\ b^2 + c^2 = f^2 \\ a^2 + f^2 = g^2 \end{cases}$$

tem uma solução apenas em inteiros (cf. figura 2). Não se sabe se existe algum tijolo de Euler perfeito [7].

Mais geralmente, um paralelepípedo (não necessariamente retangular) diz-se *perfeito* se todas as suas arestas, e todas as suas diagonais faciais e espaciais têm comprimento inteiro. Em 2011, Jorge F. Sawyer e Clifford A. Reiter provaram que existem paralelepípedos perfeitos (mas não retangulares), exibindo vários exemplos concretos, encontrados com recurso a força bruta computacional [11]. Num artigo de 2014, Sokolowsky et al. demonstraram a existência de uma família infinita de paralelepípedos perfeitos, dois a dois não semelhantes, cada um dos quais com exatamente duas faces não retangulares [12]. Nesta família, os ângulos das faces não retangulares podem ser tomados tão próximo de 90º quanto se queira. Nesse mesmo artigo, com base nos argumentos de prova aí utilizados, os seus autores conjeturam que não existe um tijolo de Euler perfeito.

Fazemos notar que a expressão "Tijolo de Euler" é de facto usada na literatura, no sentido técnico que aqui apresentamos (a expressão "cuboide racional" também aparece na literatura, com o mesmo significado). Isso facilitou muito a tarefa de descobrir um tema que fosse ao encontro do desejo dos délficos!

3. TERNOS PITAGÓRICOS

Uma equação *diofantina* é uma equação em várias variáveis no domínio dos inteiros. A resolução de equações diofantinas é um dos tipos de problemas mais abordados pelos délficos. Naturalmente, uma das equações que estudam é a equação $x^2 + y^2 = z^2$, que exprime o problema de achar triângulos retângulos de lados inteiros, os chamados *triângulos pitagóricos*. Um *terno pitagórico* é um terno (u, v, w) de inteiros positivos tal que $u^2 + v^2 = w^2$. Diremos também que o terno (a, b, c) é um terno de um tijolo de Euler, ou simplesmente que é um tijolo de Euler, se for o terno das três dimensões de um tijolo de Euler. Portanto, um terno de um tijolo de Euler é um terno pitagórico.

Um terno de inteiros positivos (a, b, c) diz-se *primitivo* se o máximo divisor comum de a, b, c é 1. Note-se que se $a^2 + b^2 = c^2$, então $\mathrm{mdc}(a, b, c) = 1$ se e só se cada par de inteiros no conjunto $\{a, b, c\}$ é primo entre si. Acresce que todas as soluções inteiras da equação $x^2 + y^2 = z^2$ são da forma (ka, kb, kc) em que k é um inteiro e (a, b, c) é um terno pitagórico primitivo.

É um bom exercício de iniciação verificar que se (u, v, w) é um terno pitagórico, então u ou v é par. A chave está em observar que os quadrados perfeitos pares são múltiplos de 4, enquanto que os quadrados perfeitos ímpares dão resto 1 quando divididos por 4.

A seguinte caracterização dos ternos pitagóricos primitivos é regularmente aprendida pelos délficos. Note-se que, sem perda de generalidade, basta-nos considerar ternos pitagóricos primitivos (u, v, w) em que u é par, pela observação feita no parágrafo anterior.

Teorema. *Seja (u, v, w) um terno de inteiros positivos em que u é par. O terno (u, v, w) é um terno pitagórico primitivo se e só se $u = 2st$, $v = s^2 - t^2$ e $w = s^2 + t^2$, para alguns inteiros positivos s, t primos entre si e tais que $s - t$ é ímpar e positivo.*

Demonstração. Sejam s, t inteiros positivos primos entre si tais que $s - t$ é um número positivo ímpar, e sejam

$$u = 2st, \quad v = s^2 - t^2 \quad \text{e} \quad w = s^2 + t^2.$$

Verifica-se diretamente que $u^2 + v^2 = w^2$. Se existe um primo p que divide u e v, então tal primo divide $v + w = 2s^2$ e $w - v = 2t^2$. Como $\mathrm{mdc}(s, t) = 1$, teremos então $p = 2$. Mas $s - t$ é ímpar, pelo que $v = (s - t)(s + t)$ é ímpar. Logo $\mathrm{mdc}(u, v) = 1$, e portanto (u, v, w) é um terno pitagórico primitivo.

Reciprocamente, suponhamos que (u, v, w) é um terno pitagórico primitivo tal que u é par. Então v, w são ímpares. Daí decorre que $u^2 = w^2 - v^2 = (w+v)(w-v)$ é um múltiplo de 4, pelo que temos a seguinte fatorização de inteiros:

$$\left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{w+v}{2} \cdot \frac{w-v}{2}$$

Se d é um divisor positivo comum dos inteiros $\frac{w+v}{2}$ e $\frac{w-v}{2}$, então d divide

$$\frac{w+v}{2} + \frac{w-v}{2} = w \quad e \quad \frac{w+v}{2} - \frac{w-v}{2} = v$$

pelo que $d = 1$. Logo, a fatorização que obtivemos para $(\frac{u}{2})^2$ permite-nos concluir que existem inteiros positivos s, t primos entre si tais que

$$\begin{cases} \frac{w+v}{2} = s^2 \\ \frac{w-v}{2} = t^2 \end{cases}$$

e $u = 2st$. Resolvendo o sistema, obtemos

$$\begin{cases} w = s^2 + t^2 \\ v = s^2 - t^2 . \end{cases}$$

Como $v^2 = (s-t)(s+t)$ é ímpar, necessariamente o número positivo $s - t$ é ímpar. □

Este teorema é um exemplo de uma solução *paramétrica* de uma equação (ou sistema de equações) em inteiros, neste caso expressa em função dos parâmetros s, t. Existem muitas soluções paramétricas parciais do problema do Tijolo de Euler (cf. [9, 5]). Na secção seguinte referimos a solução do matemático inglês Saunderson (1682-1739), porventura a mais famosa, e que foi redescoberta por Euler [6]. A título de exemplo, temos a seguinte solução parcial paramétrica, obtida por Euler, distinta da atribuída a Saunderson:

$$\begin{cases} a = 2st(3s^2 - t^2)(3t^2 - s^2) \\ b = 8st(s^4 - t^4) \\ c = (s^2 - t^2)(s^2 - 4st + t^2)(s^2 + 4st + t^2) \end{cases}$$

onde s, t são inteiros (admitindo que a, b, c possam ser negativos).

4. UMA JORNADA DA LIGA DELFOS

Nesta secção o leitor pode apreciar a lista dos sete problemas que surgiram no enunciado da jornada de 7 de outubro de 2017 da Liga Delfos. O enunciado incluía uma breve contextualização do tópico. Os problemas foram extraídos de diversas fontes. Os seus graus de dificuldade são variados, sendo alguns deles meros exercícios introdutórios, enquanto o último problema é bastante mais difícil do que os precedentes.

Cada problema é um requerimento formulado na segunda pessoa do plural, refletindo o facto de que as respostas são trabalhadas em equipa.

Problemas de 7/10/17 da Liga Delfos

1. a) Determinem todos os ternos pitagóricos primitivos da forma $(40, v, w)$.

   b) Determinem todos os ternos pitagóricos (u, v, w) tais que u, v e w estão em progressão aritmética.

   c) Determinem todos os triângulos pitagóricos de área igual ao perímetro.

2. Provem que, para todo o inteiro n maior do que 12, existe um inteiro estritamente entre n e $2n$ que é a área de um triângulo pitagórico.

3. Mostrem que o raio da circunferência inscrita num triângulo pitagórico é sempre um inteiro.

Figura 3. Nicholas Saunderson[4] (1682-1739).

[3] By Gfis - *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler_brick.svg*, CC BY-SA 4.0, *https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0*

[4] Imagem do domínio público, cf. *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nicolas_Saunderson.jpg*

4. O matemático inglês Nicholas Saunderson (1682-1739) descobriu que se (u, v, w) é um terno pitagórico então

$$\left(|u(4v^2 - w^2)|, |v(4u^2 - w^2)|, |4uvw|\right)$$

é um terno de um tijolo de Euler (designemos estes ternos por ternos de Saunderson).

a) Verifiquem o resultado de Saunderson.

b) Verifiquem que se (u, v, w) é um terno pitagórico primitivo, então o terno

$$\left(|u(4v^2 - w^2)|, |v(4u^2 - w^2)|, |4uvw|\right)$$

é primitivo.

c) Sabendo que a equação diofantina $x^4 + 18x^2y^2 + y^4 = z^2$ não tem solução se $xy \neq 0$, provem que não existem tijolos de Euler perfeitos cujas dimensões sejam ternos de Saunderson.

5. Mostrem que o terno $(85, 132, 720)$ define um tijolo de Euler que não é um tijolo cujas dimensões são dadas pela fórmula de Saunderson.

6. Mostrem que, num qualquer tijolo de Euler, para cada $n \in \{5, 9, 11, 16\}$, existe pelo menos uma aresta cujo comprimento é divisível por n.

7. Provem que a equação diofantina

$$x^4 + 18x^2y^2 + y^4 = z^2$$

não tem solução se $xy \neq 0$.

5. UM PROBLEMA SOBRANTE

Por regra, o enunciado de uma jornada da Liga Delfos tem sete problemas, de igual pontuação. Na preparação do enunciado sobram naturalmente problemas, ao almejar-se uma prova equilibrada em duração e composição. Eis um problema sobrante cujo enunciado nos dá mais informações sobre os tijolos de Euler:

Verifiquem que se (x, y, z) é um tijolo de Euler então (xy, xz, yz) também é um tijolo de Euler, e que se (x, y, z) é um tijolo de Saunderson, então (xy, xz, yz) não é um tijolo de Saunderson.

Curiosamente, se repetirmos duas vezes a operação descrita neste problema, obtemos um tijolo de Euler semelhante ao inicial, pois a função $f(x, y, z) = (xy, xz, yz)$ satisfaz a igualdade $f^2(x, y, z) = xyz(x, y, z)$. Em 1977, E. Z. Chein provou que se (x, y, z) é um tijolo de Saunderson (não sendo, portanto, perfeito), então $f(x, y, z)$ também não é um tijolo de Euler perfeito [4].

6. ONDE PROCURAR SOLUÇÕES

O problema 1 é um conjunto de exercícios de aquecimento sobre ternos pitagóricos. Estes e outros exercícios semelhantes podem ser encontrados no livro de Burton [3], onde também encontramos uma solução do problema 3 como um exemplo de aplicação da solução paramétrica da equação diofantina $x^2 + y^2 = z^2$.

O problema 2 apareceu na final das Olimpíadas Coreanas de Matemática de 1993 (cf. [1, 2]).

Como referência para os problemas 4, 6 e 7, temos o apêndice de um artigo de Knill [8]. Spohn observou em 1972 que a parametrização de Saunderson não produz tijolos de Euler perfeitos [13], aplicando o resultado enunciado no problema 7 e obtido em 1912 pelo inglês Henry Cabourn Pocklington [10].

REFERÊNCIAS

[1] *https://imomath.com/othercomp/Kor/KorMOf93.pdf.*

[2] *https://math.stackexchange.com/questions/568547/korea-math-olympiad-1993.*

[3] David M. Burton. *Elementary Number Theory*. McGraw-Hill, 7th edition, 2011.

[4] E. Z. Chein. "On the Derived Cuboid of an Eulerian Triple". *Canadian Mathematical Bulletin. Bulletin Canadien de Mathématiques*, 20(4): 509–510, 1977.

[5] W. J. A. Colman. "Some Observations on the Classical Cuboid and its Parametric Solutions". *The Fibonacci Quarterly. The Official Journal of the Fibonacci Association*, 26(4): 338–343, 1988.

[6] Leonard Eugene Dickson. *History of the Theory of Numbers. Vol. II: Diophantine Analysis*. Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[7] Richard K. Guy. *Unsolved problems in Number Theory.* Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, third edition, 2004.

[8] Oliver Knill. *The Babylonian Graph*, May 2022. arXiv:2205.13285v1 [math.CO].

[9] Maurice Kraitchik. *Théorie des Nombres. T. 3: Analyse Diophantine et Applications aux Cuboïdes Rationnels*. Paris: Gauthier- Villars, 1947.

[10] Henry C. Pocklington. "Some Diophantine Impossibilities". *Proceedings Cambridge Philosophical Society*, 18: 110–118, 1912.

[11] Jorge F. Sawyer and Clifford A. Reiter. "Perfect Parallelepipeds Exist". *Mathematics of Computation*, 80(274): 1037–1040, 2011.

[12] Benjamin D. Sokolowsky, Amy G. VanHooft, Rachel M. Volkert, and Clifford A. Reiter. "An Infinite Family of Perfect Parallelepipeds". *Mathematics of Computation*, 83(289): 2441–2454, 2014.

[13] W. G. Spohn. "On the Integral Cuboid". *American Mathematical Monthly*, 79: 57–59, 1972.

NÃO COLOQUE TODOS OS OVOS NO MESMO CESTO
UMA NOTA ACERCA DE DUAS ESTRATÉGIAS DE TRANSPORTE

Miguel de Carvalho
Universidade de Edimburgo
Miguel.deCarvalho@ed.ac.uk

A sabedoria popular sugere que não coloque todos os ovos no mesmo cesto. Mas a Estatística revela que o problema de transporte esconde algumas subtilezas. Afinal quem tem razão?

SABEDORIA POPULAR

A sabedoria popular recomenda que não coloque todos os ovos no mesmo cesto. A ideia parece simples: se colocarmos todos os ovos no mesmo cesto e se o cesto cair, então perdemos todos ovos;[1] mas se repartirmos os ovos por cestos diferentes, e se cair um cesto, só perdemos os ovos desse cesto. Parece simples, mas não se iluda pois este provérbio esconde algumas surpresas.

UM PROBLEMA DE TRANSPORTE, DUAS ESTRATÉGIAS

Consideremos o problema de transporte referido anteriormente.[2] Este consiste em transportar n ovos em cestos entre dois locais e o nosso objetivo em seguida será comparar o retorno e o risco de duas estratégias de transporte; o retorno deve ser entendido neste contexto como o número de ovos que se consegue transportar em média. As estratégias que vamos comparar são as seguintes:

- Estratégia C(oncentrada): colocamos todos os ovos no mesmo cesto.
- Estratégia D(iversificada): repartimos os ovos por vários cestos; note que o número de ovos por cesto não é necessariamente igual.

Suponhamos que a probabilidade de um cesto cair (p) é a mesma para todos os cestos, independentemente da estratégia.

O RETORNO É O MESMO PARA AS ESTRATÉGIAS C E D

O primeiro ponto de destaque é que é possível demonstrar matematicamente o seguinte:

Resultado 1. *As estratégias C e D permitem transportar o mesmo número de ovos, em média.*

Isto talvez possa parecer surpreendente à primeira vista. O que tal quer dizer é que, se repetíssemos várias vezes a experiência de transportar ovos entre dois locais, então umas vezes ganhava a estratégia C outras vezes a D mas ambas as estratégias permitiriam transportar aproximadamente o mesmo número de ovos em média (ou seja, np).

O RISCO É MENOR PARA A ESTRATÉGIA D

A sabedoria popular recomenda que não se coloque todos os ovos no mesmo cesto e, afinal, a Estatística prova que, em média, podemos transportar o mesmo número de ovos em ambas as estratégias. Então, em que ficamos? O segundo ponto de destaque apresentado em seguida vai responder a esta questão e clarifica que a Estatística e a sabedoria popular estão completamente de acordo; de facto, é possível demonstrar matematicamente o seguinte:

Resultado 2. *A estratégia D é "menos arriscada" que a estratégia C (uma vez que apresenta uma menor variância).*

MORAL DA HISTÓRIA

Da próxima vez que transportar ovos (isto é, investir), não diga que não avisei. Não olhe só para os retornos! As estratégias C e D têm o mesmo retorno esperado, mas a estratégia C é mais arriscada!

DIVERSIFICAÇÃO DO RISCO

Como vimos anteriormente, este ditado ilustra cabalmente a diferença entre retorno e risco. E resume também na perfeição o princípio da diversificação do risco, o qual é célebre em Matemática Financeira (Petters and Dong, 2016, §3.2.3). No provérbio em discussão, os ovos são o objeto de interesse. Troquemos as palavras “cesto” por “aplicação financeira” e "ovos" por "dinheiro" e o provérbio converte-se em: "Não coloque todo o dinheiro na mesma aplicação financeira."

Mas as estratégias que visam diversificar o risco vão muito além de recomendar que não se invista apenas

[1] Para facilitar, vou supor ao longo desta nota que se um cesto cair, então partem-se todos os ovos desse cesto.

[2] Existem vários problemas matemáticos relacionados com ideias de transporte os quais são fundamentais em aplicações tais como, por exemplo, o *problema do caixeiro viajante* (Winston, 2004, §9,6) ou o *problema de transporte ótimo de Monge-Kantorovich* (Villani, 2009; Santambrogio, 2015).

numa só aplicação financeira.[3] Por exemplo, um princípio básico de diversificação do risco é que se deve evitar investir em dois ativos financeiros cujos preços são "correlacionados"; a intuição é de que quando investimos em dois ativos cujos preços tendem a mover-se na mesma direção, então é como se apenas tivéssemos investido num só ativo, ou seja, é quase como se estivéssemos a investir numa única aplicação financeira.

DETALHES TÉCNICOS E DEMONSTRAÇÕES

Objetivo e hipóteses

Recordemos que o objetivo é transportar n ovos entre dois pontos e suponhamos, para facilitar, que se um cesto cair, então partem-se todos os ovos desse cesto. Suponhamos também que a probabilidade de um cesto não cair ao chão (p) é a mesma para todos os cestos, em ambas as estratégias, e que a queda de um cesto não influencia a possibilidade de queda de outro cesto (independência).

Número de ovos que chegam ao destino final

O *número de ovos que chegam ao destino final usando a estratégia C* é

$$C = n\,I, \tag{1}$$

onde I é uma variável Bernoulli(p) que vale "1" se o cesto não cair e "0" caso contrário. Conforme se pode ver através da equação (1), se o cesto não cair, conseguimos transportar até ao destino final $C = n$ ovos; se cair, então $C = 0$ e portanto, nesse caso, não chega nenhum ovo ao destino final. Para a estratégia D, o transporte é feito usando m cestos, com $1 < m \leq n$. O *número de ovos que chegam ao destino final usando a estratégia D* é

$$D = \sum_{i=1}^{m} n_i I_i, \tag{2}$$

onde n_i é o número de ovos no i-ésimo cesto e I_i uma variável semelhante à anterior, ou seja, que vale "1" quando o i-ésimo cesto não cai, e "0" caso contrário, para $i = 1, \ldots, m$. O número total de ovos a transportar é o mesmo independentemente da estratégia, ou seja, $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$.

Demonstrações

Tendo em conta as hipóteses referidas, demonstram-se os resultados 1 e 2.

Demonstração do resultado 1. Usando (1), o facto de que $I \sim \text{Bernoulli}(p)$ e propriedades elementares do valor esperado, obtemos

$$\mathrm{E}(C) = \mathrm{E}(nI) = n\mathrm{E}(I) = n\,p.$$

De modo semelhante,

$$\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i I_i\right) = \sum_{i=1}^{m} n_i \underbrace{\mathrm{E}(I_i)}_{p} = p \sum_{i=1}^{m} n_i = n\,p.$$

□

Demonstração do resultado 2. Usando (1), o facto de que $I \sim \text{Bernoulli}(p)$ e propriedades elementares da variância, obtemos

$$\mathrm{var}(C) = \mathrm{var}(nI) = n^2\,\mathrm{var}(I) = n^2 p(1-p). \tag{3}$$

De modo semelhante,

$$\mathrm{var}(D) = \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i I_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{var}(n_i I_i) = \sum_{i=1}^{m} n_i^2\,\mathrm{var}(I_i) = \sum_{i=1}^{m} n_i^2 p(1-p). \tag{4}$$

Da comparação das equações (3) e (4) resulta que

$$\mathrm{var}(C) = \left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)^2 p(1-p) \geq \sum_{i=1}^{m} n_i^2 p(1-p) = \mathrm{var}(D),$$

sendo a desigualdade uma consequência do facto de que $(\sum_{i=1}^{m} x_i)^2 \geq \sum_{i=1}^{m} x_i^2$, se $x_i \geq 0$.[4]

REFERÊNCIAS

[1] Linton, O. (2019), *Financial Econometrics*, Cambridge: Cambridge University Press.

[2] Markowitz, H. M. (1952), "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*, 7, 77–91.

[3] Petters, A. O. and Dong, X. (2016), *An Introduction to Mathematical Finance with Applications*, Nova Iorque: Springer.

[4] Rubinstein, M. (2002), ""Markowitz's" portfolio selection": A fifty-year retrospective", " *The Journal of Finance*, 57, 1041–1045.

[5] Santambrogio, F. (2015), *Optimal Transport for Applied Mathematicians*, Nova Iorque: Birkäuser.

[6] Villani, C. (2009), *Optimal Transport: Old and New*, Nova Iorque: Springer.

[7] Winston, W. L. (2004), *Operations Research: Applications and Algorithms*, Belmont, CA: Thomson.

[3] Um dos modelos matemáticos mais afamados neste contexto é o modelo média-variância, o qual foi desenvolvido pelo economista financeiro Harry Markowitz (Markowitz, 1952), um dos laureados com o prémio Nobel da Economia em 1990. Este modelo esteve na origem da fundação da teoria moderna da gestão de carteiras de investimento e, apesar de ter sido desenvolvido em meados do século XX, é ainda uma referência-chave na indústria financeira. Para mais detalhes acerca deste modelo consultar, por exemplo, Rubinstein (2002) e Linton (2019, §1.6).

[4] Para demonstrar esta desigualdade basta notar que $(\sum_{i=1}^{m} x_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i x_j = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j \geq \sum_{i=1}^{m} x_i^2$, sendo o último passo válido, dado que $x_i \geq 0$ por hipótese.

SOBRE O AUTOR

Miguel de Carvalho é *reader* em Estatística no Departamento de Matemática da Universidade de Edimburgo. Exerce neste momento a função de presidente da Sociedade Portuguesa de Estatística *(https://spestatistica.pt)*. As suas trajetória e investigação foram condecoradas com vários prémios de prestígio internacional na área da Estatística Matemática (por ex: Lindley Prize - International Society for Bayesian Analysis) e é ainda editor associado de revistas científicas líderes nessa área, tais como *The American Statistician* e *Annals of Applied Statistics*.

INTERNATIONAL DAY OF MATHEMATICS
MARCH 14

LADRILHOS INESPERADOS

PEDRO J. FREITAS
Universidade de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

Este ano foi cheio de surpresas no campo das pavimentações não periódicas do plano

É com muito gosto que dou início, neste número da *Gazeta de Matemática,* a uma coluna dedicada às relações entre arte e matemática – que é também o tema de uma disciplina que leciono, há cinco anos, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Apesar de já ter planeado um tema para este primeiro texto, inesperadamente (como o título diz), apareceu uma novidade extraordinária no mundo das pavimentações: descobriu-se um ladrilho, único, que pavimenta o plano de forma *necessariamente* não periódica, isto é, evitando simetrias de translação.

A história, contada com detalhe em [Kl23], começa com David Smith, um técnico de impressão reformado, de Yorkshire, e entusiasta de puzzles e fractais. Smith havia desenhado, em computador, uma forma especial de ladrilho poligonal, e foi tentando ver que área conseguiria cobrir usando esse ladrilho. Não só este ladrilho parecia poder pavimentar áreas cada vez maiores, como parecia igualmente não formar nenhum padrão. Depois de ter recortado alguns destes ladrilhos em cartão, ficou convencido de que estava perante algo especial e contactou um seu amigo, Craig Kaplan, da Universidade de Waterloo, no Canadá, para juntos investigarem as propriedades desta forma. Juntaram-se a eles Joseph Myers, um entusiasta de matemática recreativa, de Cambridge, no Reino Unido, e Chaim Goodman-Strauss, matemático americano ligado ao Museu da Matemática, em Nova Iorque, no sentido de demonstrar aquilo que Smith havia intuído: que esta forma pavimentava o plano, de forma não periódica, sendo apenas necessário, por vezes, tomar a sua imagem refletida. Os resultados encontrados, que confirmam estas suspeitas iniciais, foram publicados no artigo [SMKG23], que descreve o problema e a sua solução de maneira muito clara e acessível, e que, portanto, recomendo vivamente.

A figura 1 mostra uma destas pavimentações, os ladrilhos que são imagem em espelho dos outros estão a azul-escuro.

A figura 1 mostra também a estrutura simples do ladrilho: é formado por papagaios, isto é, quadriláteros com simetria de reflexão em relação a uma diagonal. Vê-se também que a pavimentação que usa estes ladrilhos pode obter-se a partir da pavimentação do plano por hexágo-

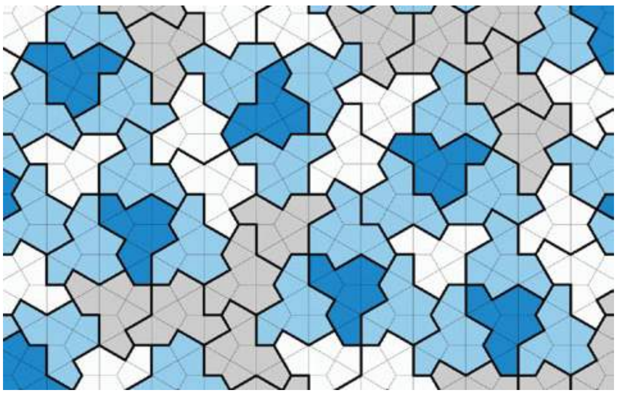


Figura 1. Pavimentação com ladrilho não periódico, do site [Ka23a].

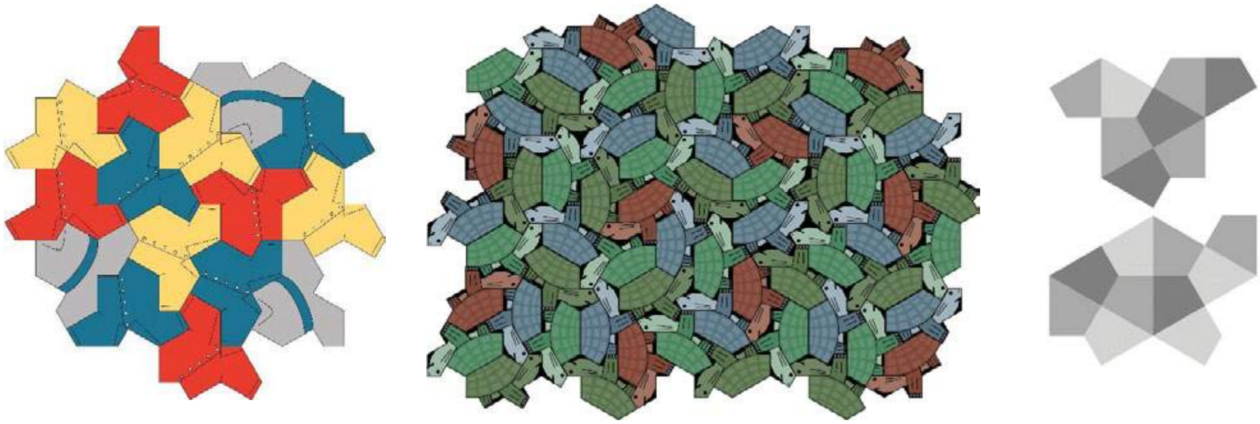


Figura 2. "Camisas e chapéus", por Robert Fathauer, "tartarugas", por David Richeson, e um esquema dos dois ladrilhos usados, do site [L23].

nos regulares, uma simplicidade inesperada para uma solução de um problema em aberto, pelo menos, desde os anos 60. E este é apenas um de uma família de ladrilhos que tem esta propriedade, como veremos a seguir.

Esta notícia espalhou-se a grande velocidade pela internet, a partir do passado dia 21 de março. Craig Kaplan construiu o site [Ka23a], o qual recolhe a informação mais central acerca desta descoberta, Christian Lawson-Perfect construiu outro site, [L23] com o ladrilho numa grande variedade de formatos, tanto gráficos como prontos para impressão 3D ou corte a laser. E surgiram também designações coloridas para o ladrilho: o "chapéu" e a "camisa", para o ladrilho descrito acima, ou a "tartaruga" para outro dos ladrilhos que tem a mesma propriedade (ver figura 2). Foi também chamado um "einstein", palavra composta com "ein" e "stein" (que certamente levará a confusões sobre a autoria da descoberta do ladrilho) e que reflete a sua capacidade de, sozinho, pavimentar o plano sem repetições.

Os desenvolvimentos deram-se igualmente a grande velocidade: já depois de ter escrito e enviado este texto, foi anunciada a 30 de maio uma nova forma, o "espectro", que consegue pavimentar o plano de forma necessariamente não periódica, mas desta vez sem necessitar de reflexões do ladrilho! A figura 3 apresenta uma dessas pavimentações, para mais informação, consulte-se [Ka23b].

Esta história tem alguns paralelos com a da descoberta de várias pavimentações, estas periódicas, usando ladrilhos pentagonais, nos anos 70 – nomeadamente, terem aparecido de forma inesperada pela mão de matemáticos amadores. A protagonista desta história é Marjorie Rice, uma dona de casa de San Diego, entusiasta da coluna de Martin Gardner no *Scientific American*. Em 1975, um dos

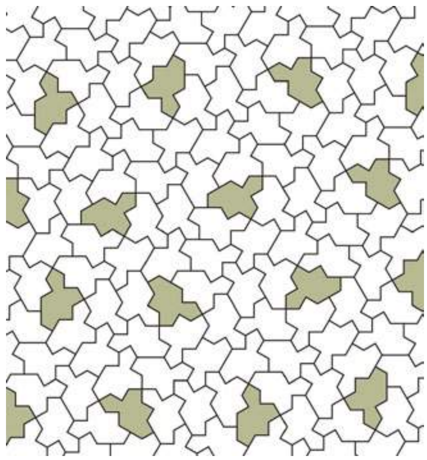


Figura 3. Pavimentação com ladrilho não periódico, do site [Ka23b]

textos desta coluna versava sobre pavimentações com ladrilhos pentagonais congruentes: Gardner anunciava que, em 1967, todas as pavimentações possíveis tinham sido encontradas, com a descoberta de três pavimentações que tinham escapado até então. No entanto, um mês depois, um dos leitores do *Scientific American* enviou a Gardner uma nova pavimentação, mostrando que a classificação, afinal, não estava completa.

Rice sentiu-se então motivada a fazer pesquisas por si própria. Nos seus tempos livres, no Natal de 1975, fez inúmeros desenhos de pavimentações com pentágonos, tendo mesmo inventado notação para as restrições entre os ângulos e lados dos pentágonos. Em fevereiro de 1976, Rice enviou uma nova pavimentação a Martin Gardner, que a reenviou a Doris Schattschneider, uma especialista em pavimentações. Esta, depois de alguma hesitação inicial, validou a descoberta, e a partir daí começou a corresponder-se com Rice. Rice prolongou os seus trabalhos ao longo de vários anos, tendo vindo a descobrir dezenas de novas pavimentações com pentágonos. Estas pavimentações são hoje agrupadas em 15 classes, das quais quatro foram apresentadas por Rice. As suas descobertas foram publicadas num artigo de Schattschneider, "In Praise of Amateurs", [S81], no qual aparecem várias das suas pavimentações. Na figura 4 vemos dois exemplos.

Também estas pavimentações foram adaptadas para criação de padrões com animais ou plantas, ao estilo de Escher. Rice havia concluído metade de um curso por correspondência em arte comercial antes de se casar, e, à medida que ia descobrindo pavimentações, explorava

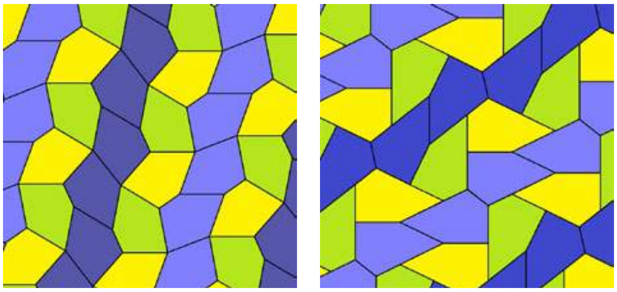


Figura 4. Duas pavimentações com pentágonos descobertas por Marjorie Rice. Imagens de Tomruen (own work, CC BY-SA 4.0).

igualmente formas de as utilizar como grelhas para sobrepor flores, conchas, borboletas ou abelhas. No entanto, não é necessária esta referência à figuração para que estas pavimentações tenham interesse artístico: em 1999, uma destas pavimentações descobertas por Rice foi instalada no chão do foyer da sede da Mathematical Association of America, em Washington.

Também aqui, em Portugal, podemos admirar uma pavimentação por pentágonos, esta já conhecida há muito – foi um dos cinco tipos de pavimentações descritas por Karl Reinhardt em 1918. Tal como os ladrilhos aperiódicos, também esta pode ser obtida a partir da pavimentação do plano em hexágonos. Podem ver-se algumas fotos na figura 5 e, para a ver ao vivo, basta ir até à estação de metro de Arroios.

Agradecimentos

Agradeço a Robert Fathauer e a David Richeson pela amável cedência das imagens da figura 2. O autor recebeu financiamento da FCT, I.P./MCTES através de fundos nacionais (PIDDAC): UIDB/00286/2020 e UIDP/00286/2020.

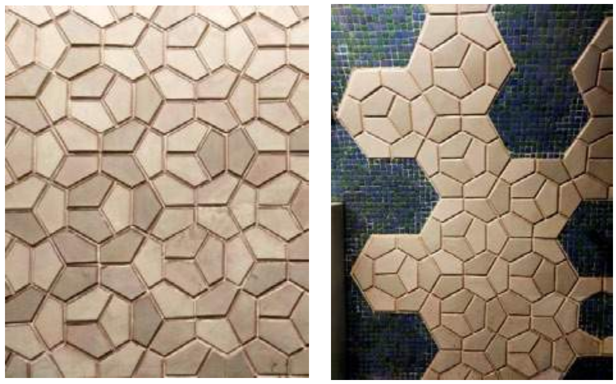


Figura 5. Pavimentação por pentágonos na estação de metro de Arroios (fotos do autor).

REFERÊNCIAS

[L23] *christianp/aperiodic-monotile*, no GitHub. *https://github.com/christianp/aperiodic-monotile*.

[Ka23a] *"An Aperiodic Monotile"*, *http://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat*.

[Ka23b] *"A chiral aperiodic monotile" https://cs.uwaterloo.ca/~csk/spectre/*

[Kl23] Erica Klarreich, "Hobbyist Finds Math's Elusive 'Einstein' Tile", *Quanta Magazine*, 4 de abril de 2023. *https://www.quantamagazine.org/hobbyist-finds-maths-elusive-einstein-tile-20230404*.

[S81] Doris Schattschneider, "In Praise of Amateurs". In: Klarner, D.A. (eds) *The Mathematical Gardner* (1981). Springer, Boston, MA. *http://doi.org/10.1007/978-1-4684-6686-7_16*.

[SMKG23] Smith, Myers, Kaplan, Goodman-Strauss, *"An Aperiodic Monotile, Preprint"*, *https://arxiv.org/abs/2303.10798*.

[W] *"Pentagonal Tiling"*, Wikipedia. *https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_tiling*.

SOBRE O AUTOR

Pedro J. Freitas é professor no departamento de História e Filosofia das Ciências da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Coordenação do espaço ARTE E MATEMÁTICA:
Pedro J. Freitas, Universidade de Lisboa, *pjfreitas@fc.ul.pt*

José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

SOBRE A REALIDADE DOS NÚMEROS COMPLEXOS

É geralmente afirmado que os números complexos são essenciais para formular a Mecânica Quântica, mas será mesmo assim? Foi feita uma experiência para responder a esta pergunta e o resultado parece ter sido conclusivo.

1. NÚMEROS COMPLEXOS: MATEMÁTICA

Os números complexos surgiram pela primeira vez em 1545, no livro *Ars Magna* (veja-se [2]), de Girolamo Cardano[1]. Mais precisamente, surgem quase no fim do livro, quando o autor resolve o seguinte problema: encontrar dois números cuja soma seja 10 e cujo produto seja 40. E a resposta dada é esta: os números em questão são $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$. Logo em seguida, Cardano faz referência à "tortura mental" que consiste em fazer operações aritméticas com quantidades desta natureza, que descreve como sendo "tão subtis quanto inúteis".

O *Ars Magna* também é famoso por conter a chamada *fórmula de Cardano*, que permite resolver equações de terceiro grau. Mas esta fórmula tem um problema: tem uma raiz quadrada de um número que, no caso de certas equações, é negativo, mesmo quando a equação tem uma solução (real). É razoável especular que foi isto que levou Cardano a pensar em raízes quadradas de números negativos, mas ele não menciona esta possibilidade no livro.

Essa ligação foi feita por Rafael Bombelli no seu *L'Algebra* que surgiu em 1572 (veja-se [1]). Aí, Bombelli explicou como levar a cabo operações aritméticas com números complexos e como é possível aplicar a fórmula de Cardano mesmo quando envolve tais números.

Esta foi a primeira aplicação encontrada para os números complexos: eram umas entidades estranhas que era preciso saber manipular para se poder empregar a fórmula de Cardano e, consequentemente, resolver equações de terceiro grau. Durante algum tempo, ninguém viu mais nenhuma utilidade para eles até que, em 1629, Albert Girard publicou *Invention Nouvelle en l'Algèbre*, onde explicou que uma equação polinomial de grau n tem, no máximo, n soluções (reais ou não). Consequentemente, se conseguirmos descobrir n soluções de uma equação polinomial de grau n, podemos ter a certeza de que não haverá mais (veja-se [4, §14.1]).

No século XVIII, Euler (que foi quem introduziu a notação i para a unidade imaginária) já usava os números complexos sem hesitar, tanto na Análise, onde, por exemplo, explicou que se tem, para qualquer número real α,

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha),$$

(a chamada *fórmula de Euler*) como na Álgebra, onde recorreu aos números complexos a fim de provar que qualquer polinómio com coeficientes reais pode ser escrito como produto de polinómios de grau 1 ou 2 com coeficientes reais.

Até aqui, os números complexos eram entidades puramente algébricas e não tinham qualquer interpre-

[1] Kleber Kilhian, "Os Números Complexos de Cardano a Hamilton", *https://www.obaricentrodamente.com/2022/01/os-numeros-complexos-de-cardano-a-hamilton.html*

tação geométrica. Aliás, Descartes afirmou mesmo que é impossível visualizar aqueles números. No entanto, por volta de 1800, dois matemáticos amadores, o norueguês Caspar Wessel e o suíço Jean-Robert Argand, explicaram como visualizar os números complexos como pontos do plano. Esta ideia foi reforçada pela mesma altura por Gauss (que é o autor da expressão "número complexo"), o que ajudou à aceitação daqueles números. E, naturalmente, a possibilidade de visualizar ajudou à divulgação deste conceito.

2. NÚMEROS COMPLEXOS: FÍSICA E ENGENHARIA

À partida, poderá ser difícil ver como é que os números complexos possam ter utilidade na Física, mas tais aplicações já existem desde a primeira metade do século XIX. Em 1823, o físico francês Augustin Fresnel publicou um artigo sobre Ótica no qual estudava o comportamento de um raio de luz polarisada quando atinge a superfície que separa dois meios transparentes. Aí, ele viu-se numa situação semelhante à de Cardano: obteve uma expressão analítica na qual surgia a raiz quadrada de um número que, por vezes, é negativo. Mais precisamente, quando o número sob o sinal de raiz quadrada é maior do que 0, parte do sinal luminoso é refletido e parte passa para o novo meio. Quando aquele número é 0, o sinal é totalmente refletido. Mas como interpretar a fórmula quando o valor é negativo? Fresnel poderia pura e simplesmente ter pensado que, nesse caso, a fórmula não se aplicava. Em vez disso, resolveu aplicar um princípio metafísico, que se deve a Leibniz, a chamada lei da continuidade, e escreveu (veja-se [3]):

> "[...] segundo a lei geral da continuidade, se existe uma expressão exata para as leis da reflexão até ao limite considerado, ela deveria permanecer válida após este; mas a dificuldade reside em interpretar o que a análise afirma relativamente a estas quantidades imaginárias. É, no entanto, isto que iremos fazer, talvez não por raciocínios rigorosos, mas ao menos pelas induções mais naturais e mais prováveis."

Naturalmente, o limite atrás referido é a altura a partir da qual o número sob o sinal de raiz quadrada é igual a 0. E como é que Fresnel lida com o caso em que o número é negativo? Obtém-se então um número complexo com valor absoluto 1 e, portanto, um número da forma

Figura 1. Augustin Fresnel.

$e^{i\alpha}$ (ou, o que é a mesma coisa em virtude da fórmula de Euler, um número da forma $\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)$), para algum número real α. E este número α é, segundo Fresnel, a diferença de fase entre o sinal luminoso (que, note-se, é uma onda) antes de tocar na superfície e depois de ser refletido. E Fresnel conseguiu confirmar experimentalmente esta hipótese.

Algumas décadas mais tarde (veja-se [5, cap. 5]) surgiu a primeira aplicação dos números complexos à Engenharia. Isto começou em 1869, quando o físico britânico John William Strutt (mais conhecido como Lorde Rayleigh) empregou números complexos para explicar o funcionamento de circuitos elétricos. Esta abordagem à Engenharia Eletrotécnica foi muito desenvolvida e ampliada pelo engenheiro alemão (naturalizado norte-americano) Charles Steinmetz, que ficaria conhecido como "o feiticeiro que gerou eletricidade a partir da raiz quadrada de menos um". Aliás, o primeiro texto que Steinmetz publicou (em 1894) sobre este assunto tinha um título que anunciava logo ao que vinha: "Quantidades complexas e o seu uso na Engenharia Eletrotécnica."

3. MECÂNICA QUÂNTICA

É provavelmente na Mecânica Quântica que se podem ver as mais conhecidades aplicações dos números complexos à Física. A equação de Schrödinger é uma equação diferencial que descreve o comportamento de uma função de onda Ψ, a qual toma valores complexos. Uma questão natural é a de saber como é que podem ser interpretados, em termos físicos, aqueles valores complexos. Acontece que o que tem uma interpretação física são os valores absolutos daqueles números; estão sempre entre 0 e 1 e dão a probabilidade de uma partícula estar numa determinada posição. Mas o próprio Erwin Schrödinger escreveu (veja-se [6]; este artigo também está disponível *online*[2]) numa carta dirigida a Hendrik Lorentz em 1926 (o mesmo ano em que publicou a sua equação):

> "O que é desagradável aqui, e de facto mesmo digno de contestação, é o uso de números complexos. Ψ tem que ser fundamentalmente uma função real."

Surgiram no início deste século propostas de maneiras de formular a Mecânica Quântica que só envolvem números reais[3]. Muitos dos fenómenos típicos da Mecânica Quântica podem ser explicados a partir de tais formulações. Mas, embora tais ideias parecessem promissoras, ficou provado que nenhuma destas abordagens funciona. O processo não foi simples, pois já tinha sido provado que as formulações reais permitiam descrever as situações mais simples da Mecânica Quântica. Os autores de [6] tiveram de conceber uma experiência suficientemente complexa para testar a ideia de que certos fenómenos da Mecânica Quântica não são passíveis de ser descritos por qualquer das versões reais da teoria, mas também suficientemente simples para poder ser levada à prática. E conseguiram! Publicaram a sua experiência imaginária e já houve diversos grupos de investigadores que a levaram à prática. E a conclusão foi de que, de facto, as formulações reais da Mecânica Quântica são incompatíveis com os resultados das experiências.

Assim sendo, parece que os números complexos estão aí para ficar, quer se goste deles quer não.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Bombelli, *L'Algebra*, Feltrinelli, 1966.

[2] G. Cardano, *The Rules of Algebra (Ars Magna)*, Dover Publications, 1993.

[3] A. Fresnel, *Mémoire sur la Loi des Modifications que la Réflexion Imprime a la Lumière Polarisée, in* Œuvres Complètes d'Augustin Fresnel (tome premier), pp. 763-799, Johnson Reprint Corporation, 1965.

[4] V. J. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Addison-Wesley, 2009.

[5] P. J. Nahim, *An Imaginary Tale: The story of* $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, 1998.

[6] M.-O. Renou, D. Trillo, M. Weilenmann et al., "Quantum Theory based on Real Numbers can be Experimentally Falsified", *Nature* **600**, pp. 625-629, 2021.

[2] *https://www.nature.com/articles/s41586-021-04160-4*

[3] Veja-se (além de [6]) A. Avella, *Quantum Mechanics Must Be Complex*, *https://physics.aps.org/articles/pdf/10.1103/Physics.15.7* e M.-O. Renou *et al.*, *Quantum Physics Falls Apart Without Imaginary Numbers*, *https://www.scientificamerican.com/article/quantum-physics-falls-apart-without-imaginary-numbers/*

À PROCURA DE ANTISSIMETRIAS NAS FACHADAS DE AZULEJOS EM PORTUGAL

Andreia Hall[a], João Nunes[b], António Pereira[c] e Paolo Vettori[d]

CIDMA – Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações,
Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro[a, b, c, d]

andreia.hall@ua.pt[a], nunes.joaol@gmail.com[b], antoniop@ua.pt[c] e pvettori@ua.pt[d]

A simetria (e seus derivados, como é o caso da antissimetria) é uma característica muito importante na perceção visual do mundo que nos rodeia, tanto na natureza como nas construções humanas. A azulejaria faz parte da cultura portuguesa e muitas são as fachadas de edifícios revestidas de azulejos, com os mais variados motivos. Fomos à procura de padrões de azulejos com antissimetria e encontrámos exemplos muito diversos, não apenas no estilo/época como também nas propriedades matemáticas (grupos de antissimetria).

INTRODUÇÃO

Portugal tem uma longa tradição de utilização de azulejos no revestimento de fachadas de edifícios. A maioria das fachadas é revestida de forma regular, formando-se padrões periódicos em duas direções. Além das simetrias de translação inerentes a qualquer padrão periódico, a maior parte das fachadas apresenta também outros tipos de simetria (de reflexão, de rotação ou de reflexão deslizante).

Sempre que um padrão (ou figura) é construído apenas com duas cores, é possível existirem antissimetrias que não são mais do que simetrias acopladas a uma troca das cores que deixam o padrão invariante. Muitos dos azulejos usados nas fachadas portuguesas envolvem apenas duas cores, sendo o azul e branco uma combinação muito frequente. Decidimos ir à procura de padrões com antissimetria nas fachadas de azulejos e encontrámos exemplos em várias localidades portuguesas. Uma primeira recolha deu origem ao artigo de Nunes et al. (2022). No presente trabalho, que tem por base essa primeira recolha complementada com outros exemplos, apresentamos os padrões que encontrámos e que revelam uma grande diversidade quer no que respeita ao tipo de antissimetria quer no que respeita ao estilo e à época.

ANTISSIMETRIA

A simetria é uma característica muito importante na perceção visual de imagens e tem sido um elemento recorrente na arte, na arquitetura e noutros artefactos da construção humana desde há milénios (Westphal-Fitch et al., 2012, pp. 2007-2008). A simetria em si incorpora a noção de repetição, regularidade ou congruência. Como diz Wade (2006, p. 1), a simetria é um princípio universal e "é tão importante para matemáticos quanto para artistas, e tão relevante para a física quanto para a arquitetura". No entanto, excesso de repetição e regularidade provoca monotonia e faz perder o interesse, pelo que não é de estranhar que qualquer noção de simetria esteja intrinsecamente entrelaçada com a de assimetria ou quebra de simetria. Uma maneira de perturbar a simetria sem a destruir completamente é usando a antissimetria. Assim como a simetria, a antissimetria pode ser encontrada em produções humanas desde tempos pré-históricos (Radovic & Jablan, 2001, p. 58).

Em geometria, uma simetria de uma figura é uma isometria que a deixa invariante. O conjunto de simetrias de uma figura *F*, juntamente com a operação composição de isometrias, forma um grupo que é conhecido como o grupo de simetria de *F*. Um grupo de simetria pode ser discreto ou contínuo. A maioria das figuras que nos interessa tem grupos discretos. No plano, existem apenas três categorias de grupos de simetria discretos: rosáceas (que têm um número finito de simetrias que só podem ser rotações ou reflexões); frisos (que têm simetria de translação em apenas uma direção) e padrões (que têm simetria de translação em duas direções). Existem dois tipos de grupos de simetria de rosáceas, sete tipos de grupos de frisos e 17 tipos de grupos de padrões. Na literatura, podemos encontrar diferentes notações para os vários grupos de simetria. Neste trabalho, denotamos por C_n os grupos cíclicos de rosáceas, que contêm n rotações, múltiplas de $360°/n$ (C_1 é a identidade), e por D_n os grupos diedrais de rosáceas, constituídos pelas rotações de C_n e por n reflexões (por exemplo, D_4 é o grupo de simetria de um quadrado). A figura 1 mostra alguns exemplos de rosáceas e respetivos grupos de simetria.

No que respeita aos padrões, neste trabalho iremos usar a notação cristalográfica: *p1, p2, pm, pg, pmm, pmg, pgg, cm, cmm, p4, p4m, p4g, p3, p3m1, p31m, p6, p6m*. A classificação do grupo de simetria de um padrão pode ser feita usando o fluxograma proposto por Washburn e Crowe (1988) e que se encontra na figura 2. Mais detalhes sobre grupos de simetria podem ser encontrados

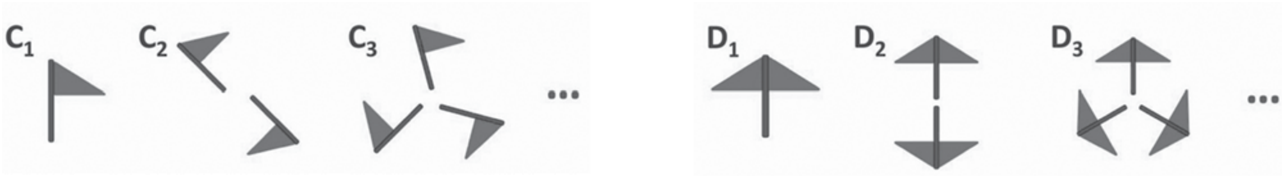


Figura 1: Exemplos de rosáceas com grupos de simetria C_n e D_n.

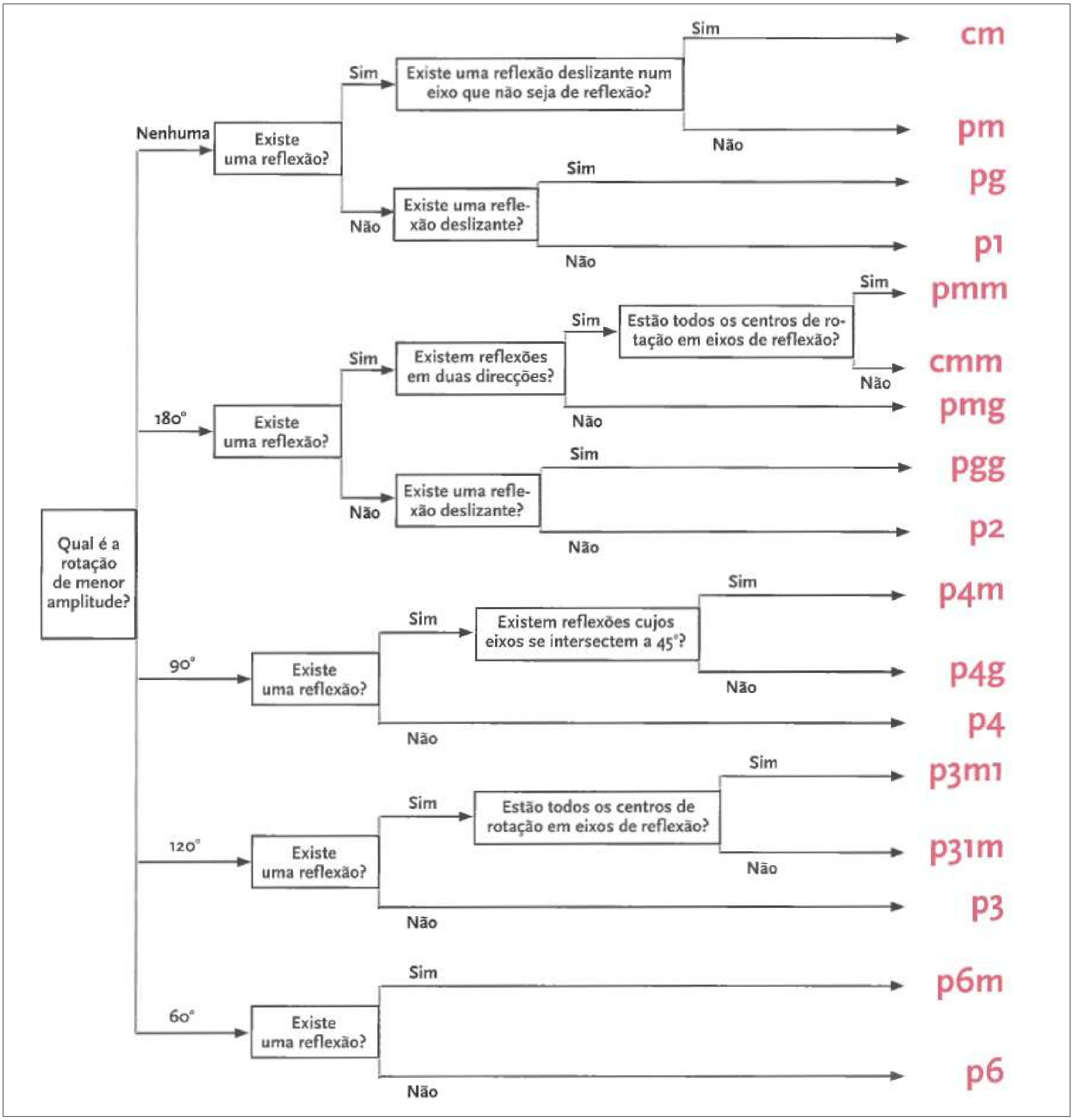


Figura 2: Fluxograma de Washburn e Crowe para classificação de padrões (Veloso,2012, p. 128).

em Martin (1982) ou em Veloso (2012).

A antissimetria (também conhecida como simetria bicolor) está intimamente ligada ao conceito de simetria e pode ocorrer sempre que cada ponto de uma figura ou de um objeto tenha associada uma característica dicotómica, como uma de duas cores, uma de duas cargas elétricas, etc. Uma antissimetria pode ser definida como uma simetria acoplada a uma troca de cores (ou troca do valor da variável dicotómica) que deixa a figura ou o objeto invariante. Como existem quatro tipos possíveis de simetria no plano, também existem quatro tipos possíveis de antissimetria no plano. O conjunto de todas as antissimetrias e simetrias de uma figura também forma um grupo. Os grupos de antissimetria podem ser derivados dos grupos de simetria acoplando um grupo de permutação com apenas dois elementos, a transformação de mudança de cor (ver Radovic e Jablan (2001) para mais detalhes sobre antissimetria). A classificação e designação dos grupos de antissimetria pode ser feita através da análise do grupo de simetria da figura sem coloração (apenas com contornos), G_u, e do grupo de simetria da figura colorida, G_c. A designação do grupo de antissimetria é simplesmente $G_u|G_c$. A figura 3 ilustra este processo através do bem conhecido símbolo yin-yang, que é um exemplo de uma figura antissimétrica. O símbolo yin-yang exibe algum tipo de apelo simétrico

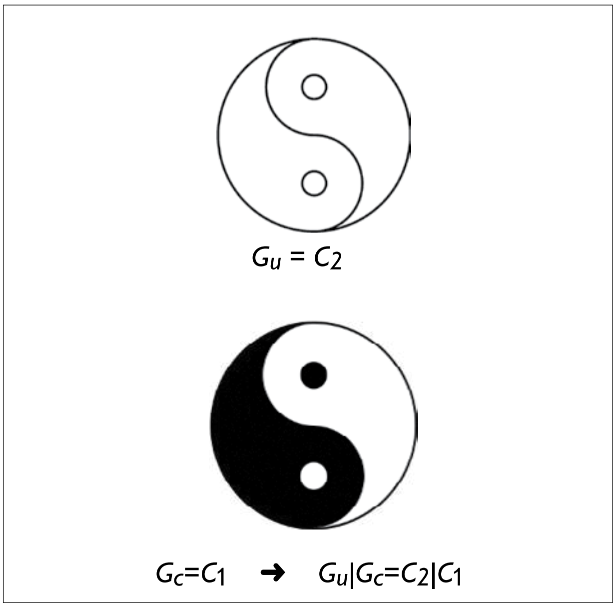


Figura 3: Exemplificação do processo de classificação do grupo de antissimetria a partir do símbolo yin-yang: em cima, figura sem coloração; em baixo, figura com coloração.

(dado pela antissimetria de rotação) apesar de não ter simetria. Sem coloração, o grupo de simetria é C_2 enquanto com a coloração o grupo de simetria é C_1. Portanto, o grupo de antissimetria é $C_2|C_1$.

Grunbaum e Shephard (1987, pp. 402-413) fornecem uma descrição dos grupos de antissimetria, com exemplos para cada grupo. Estes grupos são mais diversos do que os de simetria: existem 17 grupos de antissimetria de frisos e 46 grupos de antissimetria de padrões. Quanto aos grupos de antissimetria de rosáceas, podem ser dos tipos $D_n|C_m$, $D_n|D_m$ e $C_n|C_m$, sendo m necessariamente divisor de n.

FACHADAS DE AZULEJOS COM ANTISSIMETRIA EM PORTUGAL

Portugal tem uma longa tradição em azulejos, não só em painéis artísticos (igrejas e outros monumentos), mas também em fachadas de edifícios. Existem já alguns estudos sobre a matemática das fachadas de azulejos, entre os quais destacamos o realizado pelo Atractor (2018) com ligação ao programa GeCla que permite criar e classificar padrões, frisos e rosáceas.

Alguns azulejos usados nas fachadas portuguesas são antissimétricos e facilmente produzem padrões antissimétricos. Um desses azulejos é o azulejo de Truchet, composto por um quadrado dividido por uma das diagonais em dois triângulos de cores diferentes. O nome Truchet remonta ao século XVIII, em homenagem ao padre francês Sébastien Truchet, que explorou vários padrões feitos a partir deste motivo. No entanto, muito antes de Truchet utilizou-se este motivo em diversos exemplos de arte ornamental humana. Por exemplo, Radovic e Jablan (2001, p. 60 e 64) dão exemplos de frisos e padrões do período Neolítico. O azulejo de Truchet é ele próprio antissimétrico e tem grupo de antissimetria $D_2|D_1$. Dependendo da disposição dos azulejos, diferentes rosáceas/frisos/padrões, e, portanto, diferentes grupos de simetria e antissimetria podem ser obtidos.

Nunes et al. (2022) apresentam alguns exemplos de painéis de azulejos de artistas portugueses utilizando azulejos de Truchet. Neste trabalho iremos focar-nos apenas nas fachadas de edifícios com padrões periódicos. Os azulejos de Truchet mais tradicionais utilizados em fachadas de edifícios habitacionais em Portugal são geralmente azuis e brancos (em Espanha são verdes e brancos). As figuras 4 a 9 mostram fotos de fachadas com azulejos de Truchet, exibindo padrões antissimétricos, em várias localidades portuguesas.

Figura 4: Fachadas portuguesas no Porto, em Guimarães e em Gaia, com o mesmo padrão de azulejos de Truchet, do tipo *cmm|cm.*

Figura 5: Fachada no Porto com azulejos de Truchet e padrão *cmm|cm.*

Figura 6: Fachada no Porto com azulejos de Truchet e padrão *p4m|p4g.*

Na figura 4 podemos ver várias fachadas com azulejos de Truchet colocados todos na mesma posição. O padrão assim formado classifica-se como tendo grupo de antissimetria *cmm|cm*.

Nas figuras 5 a 8 podemos ver fachadas com azulejos de Truchet cuja região fundamental é composta por quatro azulejos em diversas posições.

As casas das figuras 4 a 7 datam muito provavelmente da primeira metade do século XX. Na figura 8 podemos ver uma habitação posterior, da segunda metade do século XX.

A figura 9 apresenta uma fachada com azulejos de Truchet cuja região fundamental é composta por 16 azulejos.

Figura 7: Fachada em Cabeceiras de Basto com azulejos de Truchet e padrão *p4m|p4m.*

Figura 8: Fachada no Porto com azulejos de Truchet e padrão *cmm|pmg.*

Figura 9: Fachada perto de Aveiro com azulejos de Truchet e padrão *p4m|p4m.*

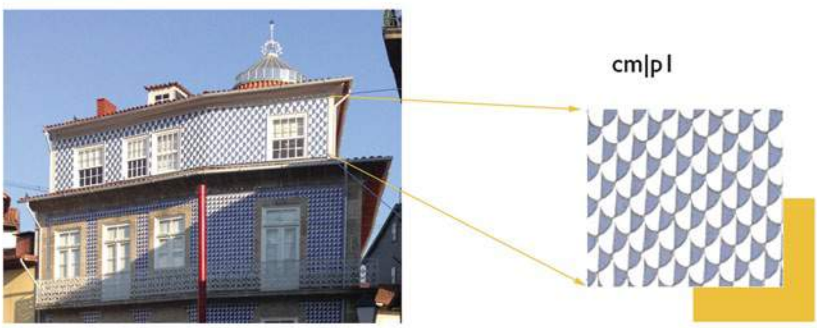


Figura 10: Fachada em Guimarães com padrão *cm|p1* no topo do edifício.

Figura 11: Barra de azulejos no Palácio de São Marcos, perto de Coimbra, padrão *cmm|pmm*.

Figura 12: Edifício no Porto com padrão *cm|pm*.

Figura 13: Edifício no Porto com padrão *pm|pm*.

Nas fachadas de edifícios revestidos com azulejos quadrados, o grupo de simetria que se encontra com maior frequência é o grupo $p4m$, possivelmente por apresentar muitas simetrias. Não é por isso de estranhar que o grupo de antissimetria $p4m|p4m$ tenha surgido em diferentes padrões, como se pode verificar nas figuras apresentadas ao longo deste trabalho. Note-se, no entanto, que o padrão da figura 4, de tipo $cmm|cm$, é o mais frequente, muito provavelmente pelo facto de envolver o azulejo sempre na mesma posição, o que facilita a sua construção do ponto de vista prático.

Destacamos, ainda assim, a variedade de grupos de antissimetria encontrados: ao todo, temos dez grupos distintos.

As figuras 10 a 16 mostram fotos de fachadas com azulejos sem ser de Truchet que também exibem padrões antissimétricos. Novamente os registos provêm de várias localidades portuguesas.

Figura 14: Fachada em Aveiro com padrão p2|p2.

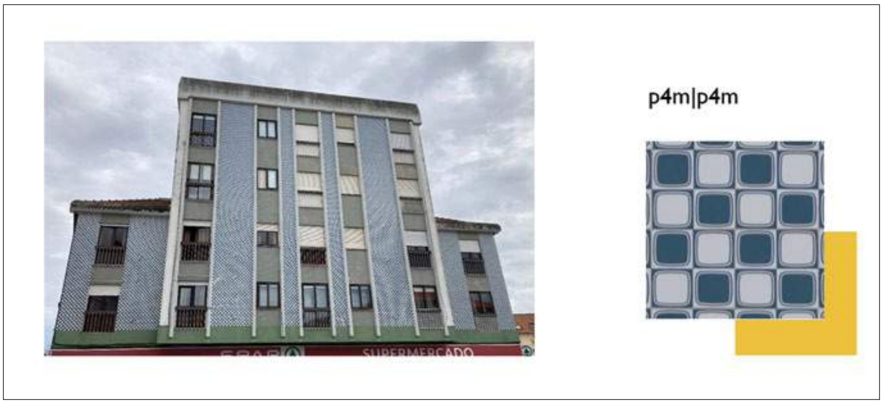


Figura 15: Fachada em Aveiro com padrão p4m|p4m.

Figura 16: Fachada em Aveiro com padrão pmm|pmm.

UMA FERRAMENTA DIDÁTICA PARA EXPLORAR A SIMETRIA E A ANTISSIMETRIA:

Tanto a simetria como a antissimetria têm sido utilizadas pelos seres humanos não só nas fachadas de azulejos mas também noutros elementos decorativos e em obras de arte. Entrelaçar a matemática com a arte na sala de aula pode ser uma maneira bem-sucedida de promover o interesse pela matemática como mostram, por exemplo, os trabalhos Hall & Pais (2021, 2018), Hall & Teixeira (2018).

O conceito de antissimetria pode ser utilizado no ensino para ajudar a consolidar o conceito de simetria. Nunes et al. (2022) apresentam alguns exemplos didáticos neste sentido. Mais recentemente, os autores do presente trabalho desenvolveram uma aplicação no site *Wolfram Demonstrations Project*, intitulada "*Symmetries and Antisymmetries of Truchet Rosettes*" (Hall et al., 2023) que permite aos utili-

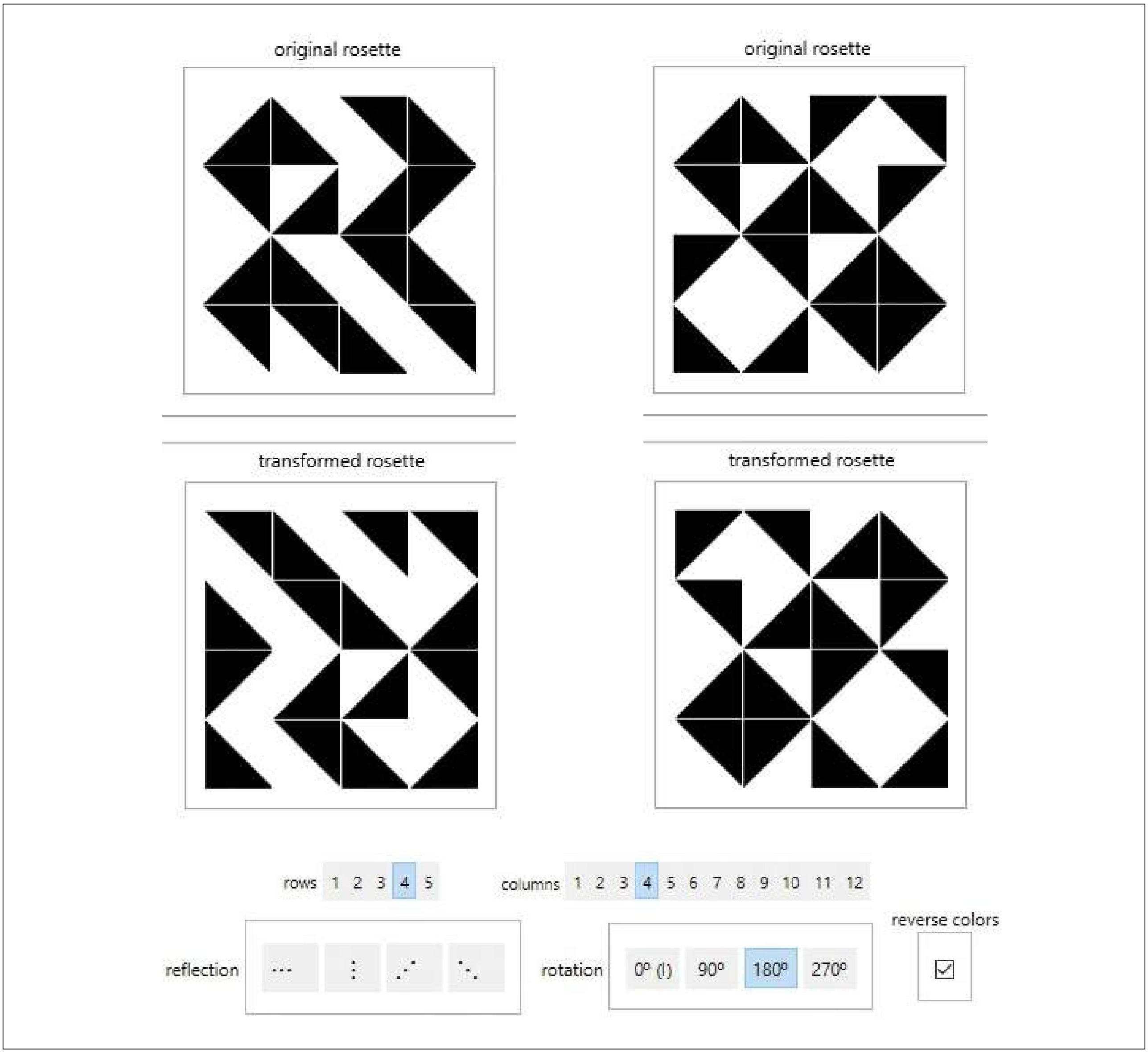


Figura 17: Exemplos de rosáceas criadas com a aplicação de Hall et al. (2023). À esquerda, rosácea rodada 180° com troca de cores; à direita, rosácea refletida sobre um eixo vertical. Em baixo, os botões de opção usados para a rosácea da esquerda.

zadores explorarem os conceitos de simetria e antissimetria de forma interativa. É pedido ao utilizador que crie livremente uma rosácea retangular com azulejos de Truchet e paralelamente são disponibilizadas várias transformações geométricas (isometrias e troca de cores) que permitem analisar as simetrias e as antissimetrias da rosácea. Terminamos este artigo apresentando algumas imagens de rosáceas produzidas com essa aplicação (figura 17).

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito dos projetos UIDB/04106/2020 e UIDP/04106/2020 do Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA).

REFERÊNCIAS

[1] Atractor (2018) "A Matemática dos Azulejos", *Gazeta de Matemática*, 186, 3-9. *https://gazeta.spm.pt/fichaartigo?id=1484*

[2] Grunbaum, B. & Shephard, G. C. (1987) *Tilings and Patterns*, Freeman and Company.

[3] Hall, A., Almeida, P., & Teixeira, R. (2019) "Exploring Symmetry in Rosettes of Truchet Tiles", *Journal of Mathematics and the Arts*, 13(4), 308-335. *https://doi.org/10.1080/17513472.2019.1581963*

[4] Hall, A., Pereira, A., Nunes, J., e Vettori, P. (2023) "Symmetries and Antisymmetries of Truchet Rosettes", *Wolfram Demonstrations Project*, *http://demonstrations.wolfram.com/SymmetriesAndAntisymmetriesOfTruchetRosettes*

[5] Hall, A., & Pais, S. (2021) "Using an Interdisciplinary Approach to the Teaching of Solid Geometry in a Professional Development Course for Preschool and Primary School Teachers", *Indagatio Didactica*, 13(3), 449-471. *https://doi.org/10.34624/id.v13i3.25584*

[6] Hall, A., & Pais, S. (2018) "Learning and Teaching Symmetry by Creating Ceramic Panels with Escher Type Tessellations", *Indagatio Didactica*, 10(2), 85-107. *https://doi.org/10.34624/id.v10i2.11311*

[7] Hall, A., & Teixeira, R. (2018). "Interlacing Mathematics and Culture: Symmetry in Traditional Pavements and Crafts". *Journal of Mathematics and Culture*, 12(1), 28-46.

[8] Martin, G. (1982) *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*. New York: Springer-Verlag.

[9] Nunes, J., Hall, A., & Vettori, P. (2022) "Antisymmetry in Portuguese Ceramic Tile ". Em Viana, V., Nagy, D., Xavier, J., Neiva, A., Ginoulhiac, M., Mateus, L. & Varela, P. (Eds.), "Symmetry: Art and Science", *Journal of the International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry*, 12th SIS-Symmetry Congress [Special Issue], 34-39. *https://doi.org/10.24840/1447-607X/2022/12-03-034*

[10] Radovic, L., and Jablan, S. (2001) "Antisymmetry and Modularity in Ornamental Art". *Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science, Conference Proceedings*, 55-66.

[11] Veloso, E. (2012) "Simetria e Transformações Geométricas". *Textos de Geometria para Professores.* APM.

[12] Wade, D. (2006) *Symmetry: The Ordering Principle.* Wooden Books.

[13] Washburn, D., & Crowe, D. (1988) *Symmetries of Culture Theory and Practice of Plane Pattern Analysis*. University of Washington Press.

[14] Westphal-Fitch, G., Huber, L., Gomez, J. C., & Fitch, W. T. (2012) "Production and Perception Rules Underlying Visual Patterns: Effects of Symmetry and Hierarchy". *Phil. Trans. R. Soc. B*, 367, 2007-2022. *https://doi.org/10.1098/rstb.2012.0098*

SOBRE OS AUTORES

Andreia Hall, Doutorada em Probabilidade e Estatística, é Professora Associada no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro desde 2005. Tem interesse em Educação Matemática, Matemática e Arte, e Análise Estatística de Dados.

João Nunes, licenciado em Matemática (1992) e duas vezes Mestre em Matemática (2009 e 2020), é professor do ensino secundário desde 1992. Atualmente é aluno do programa doutoral em Matemática (ramo Educação) da Universidade de Aveiro. Está interessado em Geometria, Álgebra, Arte e suas aplicações na Educação Matemática.

António Pereira, Doutorado em Matemática, é Professor Auxiliar no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro desde 2007. Tem interesse em Teoria da Computação, Algoritmos e Computação Quântica.

Paolo Vettori, Doutorado em Teoria dos Sistemas Matemáticos, é Professor Auxiliar no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro desde 2008. A sua atividade de investigação centra-se principalmente nas aplicações da Álgebra Linear à Teoria do Controlo e à Teoria de Códigos.

GAZETA DE MATEMÁTICA: BREVE LINHA DO TEMPO

A *Gazeta de Matemática*, que nasceu como "Jornal dos concorrentes ao exame de aptidão e dos estudantes de Matemática das Escolas Superiores"[1], contava também entre os seus propósitos a publicação, entre outros, de textos de caráter didático sobre assuntos de matemáticas elementares ou superiores. A *Gazeta* viveu transformações várias ao longo dos seus 83 anos de existência e é atualmente, no seio da Sociedade Portuguesa de Matemática, a revista cuja missão primordial é a divulgação da cultura matemática, o estímulo do gosto pelo estudo da Matemática, bem como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou se interessa pela matemática (como se pode ler nos seus estatutos). Chegando agora ao número 200, é bom recordar que este percurso foi iniciado por António Monteiro, Bento Caraça, Hugo Ribeiro, Silva Paulo e Zaluar Nunes, membros de uma geração fértil que, nas palavras de J. Buescu[2], se empenhou na concretização da vontade de organizar a ciência moderna no nosso país. O que aqui se apresenta é uma linha do tempo com uma limitada amostra de dez números representativos de épocas, momentos ou trabalhos, propostos como convite à (re)leitura. Tarefa arriscada, pois quem aprecia a *Gazeta* fá-lo a partir dos seus gostos e perspetivas pessoais sobre a matemática, e do seu envolvimento com a *Gazeta*. Neste sentido, todas as escolhas são legítimas!

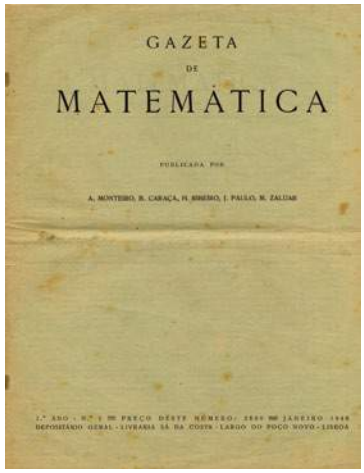
[1] Em rigor, este subtítulo apenas passou a figurar entre os números 3 (junho de 1940) e 133-136 (1975-76).

[2] Buescu, J. (2016). *Matemática em Portugal, Uma Questão de Educação*. Fundação Francisco Manuel dos Santos.

Nasce a Gazeta de Matemática

1940

#1

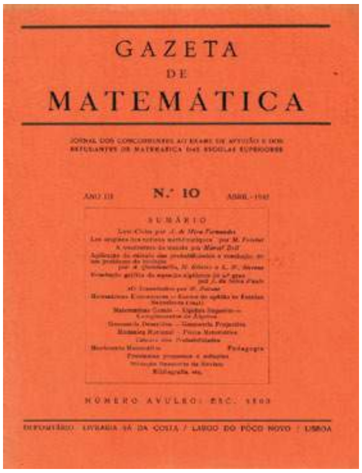


N.º 1 • JAN. 1940
No primeiro número, os editores da *Gazeta* elencam os propósitos da revista: constituir-se como instrumento de trabalho e guia para os estudantes de Matemática das Escolas Superiores portuguesas, por um lado, e, por outro, para preparar os candidatos à admissão nas Escolas Superiores. Assim, até 1975/76, a *Gazeta* publicará enunciados de frequências e exames de disciplinas de Matemática de Escolas Superiores (e, frequentemente, as suas soluções e/ou resoluções), bem como modelos de exames de admissão a tais instituições.
O primeiro artigo de caráter didático (outro dos propósitos da revista) deve-se a António Monteiro e trata da noção de contingente.

Movimento Matemático

1942

#10


GAZETA
DE
MATEMÁTICA

N.º 10

N.º 10 • ABR. 1942
É neste número que António Monteiro publica o impactante artigo "Movimento Matemático"[3], no qual dá conta da autêntica efervescência de atividade no campo das ciências matemáticas no nosso país (ilustrada com o aparecimento de diversas publicações e seminários, e a formação de centros de investigação), contribuindo para um ressurgimento da cultura matemática portuguesa. António Monteiro aponta ainda para a necessidade de uma remodelação completa do ensino das matemáticas, dos programas de estudo, da organização da licenciatura em Ciências Matemáticas, da preparação dos professores do ensino secundário, das provas de doutoramento e dos métodos de recrutamento do pessoal docente universitário.

[3] Expressão que já surgia no N.º 9, vindo a constituir-se como rubrica da *Gazeta*, e pela qual veio a ser conhecido o conjunto de iniciativas aqui resumidas, levadas a cabo no período 1937-1947 por um destacado grupo de cientistas (sobretudo matemáticos).

A Gazeta em Democracia

1975/76

#133-136


GAZETA
DE
MATEMÁTICA

N.º 133-136

SUMÁRIO

N.os 133-136 • 1975-76
Os quatro números da *Gazeta* correspondentes aos anos 1975-76 são publicados num único volume (o que já acontecia desde 1967). A redação contava então com J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo. Na carta intitulada "À guisa de explicação…", o primeiro dá conta dos esforços feitos para a obtenção de verbas que permitissem manter a publicação da *Gazeta*, os quais, contudo, se revelariam infrutíferos. Mantendo-se regularmente durante cerca de 38 anos (apesar da conhecida expulsão do ensino oficial, em 1947, de vários colaboradores da revista), e entrando no quarto ano em tempo de democracia, a publicação da *Gazeta* irá cessar. Destaca-se naquele volume uma "Introdução aos processos estocásticos", por J. Tiago de Oliveira. Deve-se entre outros a Gaspar Teixeira uma primeira tentativa de reativação da *Gazeta* (setembro de 1990).

A Gazeta Recomeça

2000

#138


GAZETA
DE
MATEMÁTICA

ANO LXI — N.º 138 — JANEIRO 2000

SUMÁRIO
Editorial
Artigo convidado
Sejamos dignos dos matemáticos portugueses da década de 40
F.R. Dias Agudo, 7
Duas ou três histórias da História da Matemática
João Filipe Queiró, 13
Uma intersecção surpreendente
João Queiró e Rosa Amélia Martins, 25
Sobre a questão do Algoritmo para o Problema do Caixeiro Viajante
Ana Maria de Almeida e Maria Rosália Dinis Rodrigues, 29
O teorema do coseno e do seno na geometria esférica
D.A. Catalano, 41
Pentágono inscrito numa circunferência
A.J.M. Antunes, 47
Exames nacionais do ensino secundário. Algumas notas
Arsélio Martins e Jaime Carvalho e Silva, 51
Considerações sobre o LaTeX2e
António Batel Anjo e Delfim F. Marado Torres, 59
Exames nacionais do ensino secundário
Ponto 135 — 12.º ano de escolaridade, 1999
(Decreto n.º 286/89 de 29 de Agosto), 67
Exames do 1.º ano do ensino superior
Exame de Análise Infinitesimal I
Luísa Mascarenhas, 83

N.º 138 • JAN. 2000
Após dois períodos de interregno, a *Gazeta de Matemática* ressurge, devendo-se a Graciano de Oliveira (mas também a Gaspar Teixeira, falecido em maio de 1999, que sempre procurou que a *Gazeta* ficasse na posse da SPM) a iniciativa de a resgatar. Destaca-se neste número o artigo "Sejamos dignos dos matemáticos portugueses da década de 40", no qual F. R. Dias Agudo evidencia o entusiasmo de que estiveram imbuídos os fundadores e colaboradores da *Gazeta*. O autor destaca ainda a variedade e a riqueza de temas nela abordados, com ênfase para os que foram publicados até 1947. A responsabilidade de pegar em tão relevante obra, para dar continuidade às ações e propósitos da geração de 40, foi bem assumida pelos autores que colaboraram neste número.

2000: Ano Mundial da Matemática

2000

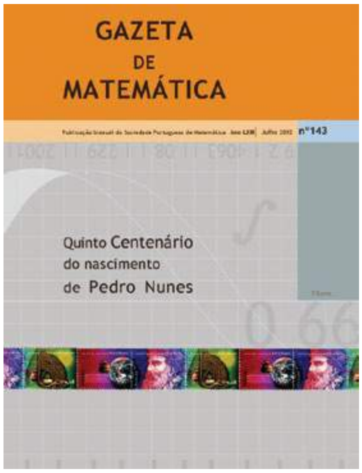
#139

N.º 139 • JUL. 2000
No Ano Mundial da Matemática, o número 139 permite revisitar os números poligonais ou figurados da aritmética pitagórica e, em particular, os números triangulares. Nesta visita, conduzida por José Morgado, são deduzidas diversas propriedades desta antiga, mas sempre interessante, aritmética. Noutro artigo, Paula Cerejeiras introduz os "desconhecidos quaterniões", a sua origem nos trabalhos de Hamilton (1805 - 1865), algumas das propriedades da álgebra e da análise quaterniónicas, bem como a interpretação geométrica associada. Deste modo, destaca a adequação da utilização dos quaterniões na descrição de certos modelos físicos. Estes artigos analisam tópicos deveras distintos, mas ambos despertam o interesse de qualquer curioso pela Matemática.

5.º Centenário de Pedro Nunes

2002

#143



N.º 143 • JUL. 2002
Em 2002 celebrou-se o 5.º centenário do nascimento de Pedro Nunes (1502 - 1578), um dos mais notáveis matemáticos da nossa história. O número 143 da *Gazeta* é integralmente dedicado à sua obra, com a republicação de "O Nónio de Pedro Nunes" do comandante António Estácio dos Reis e da tradução do artigo intitulado "Pedro Nunes and the discovery of the loxodromic curve" de W. G. L. Randles. Contém, ainda, mais seis artigos destacando aspetos distintos da obra ímpar de Pedro Nunes, um deles do dinamarquês Jens Høyrup – "Pedro Nuñez: Innovateur bloqué, et dernier témoin d'une tradition millénaire". Este número permite conhecer um pouco da história de Pedro Nunes e, deste modo, compreender a sua relevância para a Matemática e para a navegação astronómica, nomeadamente na época dos Descobrimentos.

Nasce o Canto Délfico

2008

#155

N.º 155 • JUL. 2008
Neste número da *Gazeta* inaugura-se o *Canto Délfico*. A par da divulgação do Projeto Delfos, esta coluna é apresentada ao leitor por Amílcar Branquinho, Alexander Kovacek, Jorge Neves, Eduardo Marques de Sá e António Salgueiro, que estabelecem desde logo o seu público-alvo: os alunos do ensino não superior e os seus professores. A partir desta data, os leitores do Canto Délfico são desafiados a resolver alguns problemas matemáticos e a enviar as suas soluções, mas não sem antes terem o privilégio de ficarem a conhecer alguns conceitos e resultados matemáticos muito interessantes que ficam habitualmente fora dos currículos dos ensinos básico e secundário.

Matemática do Planeta Terra

2013

#169

N.º 169 • MAR. 2013
2013 foi o Ano da Matemática do Planeta Terra. Em Portugal foram diversas as iniciativas que divulgaram e celebraram a contribuição da Matemática para a preservação do Planeta e para a qualidade de vida de todos os seus habitantes. A *Gazeta* também se associou a esta celebração no número 169. O artigo "Observar golfinhos… com trigonometria", de Pedro M. Duarte, Telmo Peixe e Teresa Caissotti, cumpre o duplo papel de divulgar o papel da Matemática na monitorização da biodiversidade, explicando do ponto de vista geométrico o processo de localização dos golfinhos no Sado no "polígono" de interseção dos ângulos de observação de dois observadores, e de o fazer recorrendo a conhecimentos de geometria euclidiana e de trigonometria acessíveis a qualquer estudante do ensino secundário.

Arte e Matemática

2016

#178

N.º 178 • MAR. 2016
Em março de 2016 é bem provável que a maior parte dos leitores da *Gazeta* desconhecesse o Ponto da Bauhütte. Pode acontecer que, sem o saber, alguns já o tivessem visto ao contemplar o painel "Começar", obra última de José de Almada Negreiros, à entrada do edifício-sede da Fundação Calouste Gulbenkian. No seu artigo "O Ponto da Bauhütte, ontem e hoje", Pedro Freitas e Inez Wijnhorst falam-nos sobre este enigmático ponto, sua história e construção, bem como da paixão e estudo da geometria ligada à arte que maravilharam Almada Negreiros ao longo de décadas, bem como de outras construções que problemas geométricos interessantes sempre suscitam.

Matemática em Tempo de Pandemia

2020

#192

N.º 192 • NOV. 2020
Ainda não conhecemos todos os efeitos que a pandemia da COVID-19 teve e terá na Humanidade, mas em 2020 os cientistas saltaram para a ribalta. Os meios de comunicação convidavam regularmente médicos, biólogos e matemáticos para tentar ajudar a gerir a ansiedade e o medo. O lugar de destaque dado à ciência veio desmistificar, perante a opinião pública, a forma como se produz conhecimento científico. No artigo "Aplanar a curva", na secção *Linha da Frente*, Fabio Chalub conta-nos, de forma apelativa, e muito interessante do ponto de vista cultural, a História dos modelos matemáticos que ajudaram a estudar e a compreender outra epidemia, a de tifo, causa oficial da criação do gueto judaico de Varsóvia durante a ocupação Nazi. Como o autor refere, "a matemática mostra como medidas simples [o autoisolamento, o distanciamento social e uma rede de assistência médica] podem impedir grandes tragédias", pois então, mesmo em circunstâncias precárias, foi evitada uma segunda onda de infeções.

CLÁUDIA REIS,
School of Civil and Construction Engineering, Oregon State University;
Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa
claudia.reis@tecnico.ulisboa.pt

STÉPHANE CLAIN,
Centre for Mathematics, University of Coimbra
clain@mat.uc.pt

ANDRÉ R. BARBOSA,
School of Civil and Construction Engineering, Oregon State University
andre.barbosa@oregonstate.edu

MATEMÁTICA APLICADA À GESTÃO DE RISCO COSTEIRO

A gestão de risco costeiro é uma ferramenta fundamental no âmbito das políticas de desenvolvimento sustentável. No entanto, para os perigos naturais extremos, como os tsunamis, há uma escassez de dados reais devido ao seu caráter infrequente. A matemática assume um papel essencial na geração de dados sintéticos complementares, que contribuem para entender a física dos fenómenos e para desenvolver estratégias de mitigação de risco. No âmbito da expansão do *hub* de carga contentorizada do porto de águas profundas de Sines, e em resposta à Administração dos Portos de Sines e do Algarve (APS), foi desenvolvida, validada e aplicada uma metodologia numérica que prevê:

Como garantir que o porto permanece em serviço na eventualidade de um evento tipo sismo e tsunami de 1755?

1. INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

O porto de águas profundas de Sines deve ter um desempenho estrutural que permita, mesmo que em condições extremas, receber e acolher ajuda de outras regiões (aspetos sociais) e manter o fluxo de trocas comerciais potenciando a recuperação económica (aspetos económicos).

Eventos passados, como o sismo e tsunami de 1755, mostram que Sines se encontra numa região que pode ser afetada por perigos naturais de origem tectónica. Embora Portugal se encontre numa região com atividade tectónica carateristicamente moderada, existem documentos históricos e dados mais recentes, já registados na rede acelerográfica nacional, como o sismo e tsunami de 1969, que mostram a possibilidade de ocorrência de sismos de elevada magnitude, com origem no mar e próximo da costa, que podem originar tsunamis.

Sabe-se que a geração destes sismos de elevada magnitude está associada a um complexo sistema de estruturas geológicas a sudoeste da Península Ibérica e no golfo de Cádis. Sabe-se também que a rutura destas falhas localizadas no mar e relativamente perto da costa gera sismos e tsunamis que afetam principalmente as costas portuguesa, espanhola e marroquina. Uma das formas mais eficazes de mitigação de risco tsunamigénico é baseada no dimensionamento e na construção de estruturas com capacidade para resistir aos efeitos em cascata devidos aos movimentos intensos do solo provocados pelo sismo e aos efeitos hidráulicos induzidos pelo tsunami.

No entanto, o regulamento europeu para dimensionamento de estruturas, Eurocódigo [3], não prevê a ação do tsunami nem fornece recomendações explícitas para o dimensionamento de estruturas críticas, como os portos. Os critérios de desempenho estrutural incluem princípios de segurança e limite de danos, mas a tendência global de regulamentação de estruturas críticas já inclui critérios mais exigentes de ocupação imediata ou mesmo de ope-

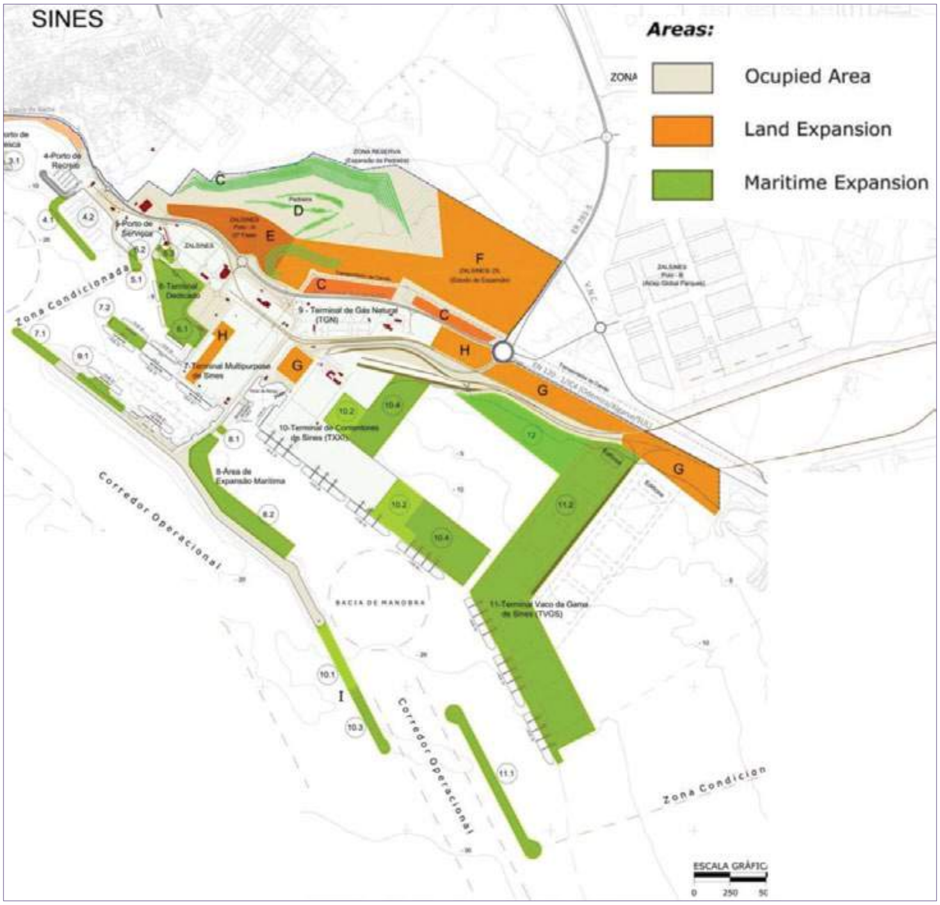


Figura 1. O plano estratégico para aumentar o volume de carga contentorizada movimentada no Porto de Sines prevê: 1) a expansão do terminal de contentores existente, o Terminal XXI, e 2) a construção de um novo terminal de contentores, o Terminal Vasco da Gama.

racionalidade. A comissão COM2: Analysis and Design da International Federation of Structural Concrete, FIB, conta com um grupo de trabalho, TG2.13 – Design and assessment for tsunami loading, atualmente a desenvolver investigação no âmbito da engenharia de tsunami [4]. O objetivo deste grupo é criar conhecimento para introduzir critérios e recomendações de dimensionamento no Eurocódigo que prevejam a resiliência estrutural à ação do tsunami. Por enquanto, a engenharia de tsunamis com aplicabilidade em portos está prevista apenas no regulamento japonês [14] e no regulamento geral da *World Association for Waterborne Transport Infrastructure*, PIANC [5], que se encontra também em fase de revisão [6].

No âmbito da expansão do *hub* de carga contentorizada do porto de águas profundas de Sines, foi desenvolvida uma metodologia numérica para caracterizar a perigosidade tsunamigénica e o respetivo comportamento de resposta do sistema geoestrutural que compõe o terminal de contentores, incluindo configurações correntes e futuras, i.e., após expansão do Terminal XXI e após construção do novo Terminal Vasco da Gama.

O porto de Sines, com a sua atual capacidade de 1.8 milhões de TEU movimentados (unidade equivalente a vinte pés, Twenty Equivalent Feet, que representa as dimensões padrão de contentor e constitui a unidade de medida da carga contentorizada), consolidou a sua posição como líder nacional em volume de carga e detém a 14.ª posição na lista dos maiores portos de contentores da União Europeia, de acordo com a *PortEconomics*. Após as primeiras obras de expansão do Terminal XXI, a APS prevê a possibilidade de operar mais navios em simultâneo, duplicando a capacidade de movimentação anual para 4.1 milhões de TEU. Após a construção do Terminal Vasco da Gama, a APS espera conseguir atingir mais 3.5 milhões de TEU adicionais. Com o volume total de carga contentorizada em cerca de 7.6 milhões de TEU, o porto de Sines garantirá o posicionamento entre os quatro portos europeus com maior movimentação de carga contentorizada [13]. A figura 1 mostra a expansão prevista para o *hub* de carga contentorizada do porto de Sines.

2. OBJETIVOS E METODOLOGIA

O objetivo do trabalho é identificar, caracterizar e fornecer informação para tomadas de decisão informadas no que diz respeito a medidas estruturais que aumentem a resiliência dos terminais de contentores perante eventos tsunamigénicos extremos. Estas estratégias de caráter preventivo perante um sismo e tsunami, como o passado evento de 1755, incluem reforço de estruturas existentes e considerações de projeto para as novas infraestruturas.

A metodologia adotada para garantir critérios de desempenho estruturais que evitem a disrupção das atividades do porto é baseada numa aproximação numérica que visa reproduzir a física associada ao fenómeno natural e à respetiva resposta da estrutura. Em tese, esta aproximação tira partido das similaridades entre as fases de geração, propagação e chegada/interação das ondas sísmicas e de tsunami com as infraestruturas costeiras (neste caso, o *hub* de carga contentorizada). Como cada fase, do maior para o menor domínio, aceita esquemas numéricos de crescentes sofisticação e exigência computacional, o acoplamento através de condições de fronteira do tipo Dirichlet entre domínios permite manter a qualidade das soluções numéricas e controlar os custos computacionais. A figura 2 mostra o esquema geral da metodologia numérica. Por

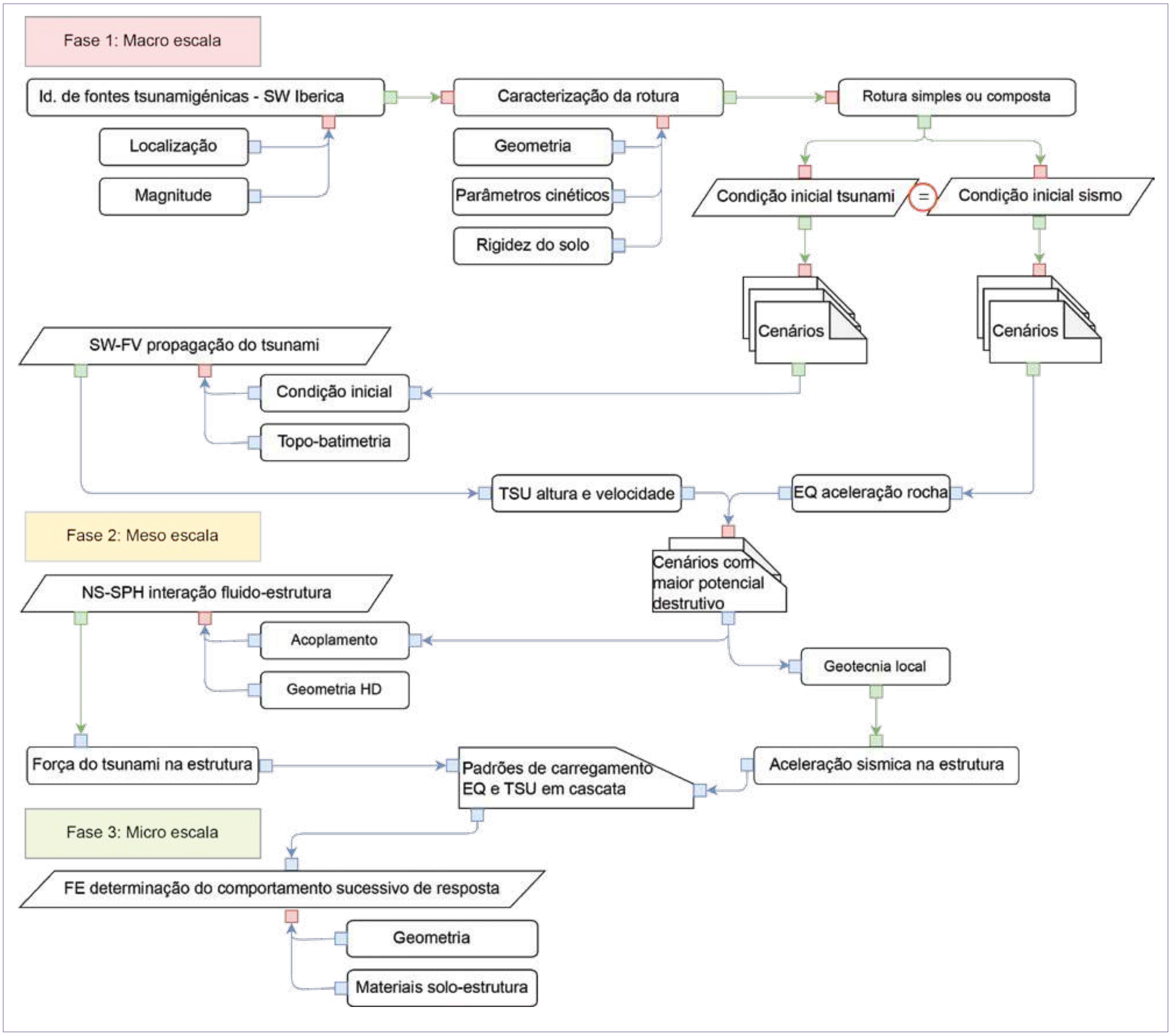


Figura 2. Infografia da metodologia numérica desenvolvida para determinar multi-perigosidade tsunamigénica, respetivos padrões de carregamento em cascata e sucessiva resposta estrutural.

uma questão de síntese, a descrição dos vários esquemas numéricos é remetida para a respetiva literatura.

A primeira fase de geração e propagação das ondas engloba um domínio com escalas espaciais e temporais de centenas de quilómetros e até várias horas, respetivamente. A macroescala é baseada em:

- Aproximações estocásticas baseadas em *Ground Motion Prediction Equations*, GMPE, que englobam parâmetros da fonte sísmica, atenuação na propagação das ondas e possíveis efeitos de sítio devidos a características geotécnicas dos solos acima do substrato rochoso, com potencial para amplificar as acelerações impostas à infraestrutura [9, 10];

- Sistema de equações não lineares *Shallow-Water* discretizado pelo método dos Volumes Finitos, SW-FV, para quantificar alturas de onda e velocidades de corrente [2,11].

A simulação das ondas na chegada ao porto engloba um domínio com escalas espaciais e temporais de centenas de metros e alguns minutos, respetivamente. Na mesoescala são adotadas:

- Aproximações estocásticas baseadas em GMPE com consideração das características geotécnicas locais do sítio de interesse, para quantificar a aceleração transmitida ao sistema solo-estrutura [9, 10];

- Acoplamento do domínio resolvido através do esquemas SW-FV com o domínio altamente não linear resolvido pelo esquema numérico que considera as equações Navier-Stokes discretizadas através do método de partículas *Smoothed Particle Hydrodynamics*, para caracterização da interação fluido-estrutura e quantificação da ação hidrodinâmica do tsunami [12,14].

Após a caracterização do padrão de carregamento em cascata referente às acelerações sísmicas e a força do tsunami, o comportamento do sistema solo-estrutura é simulado pelo método clássico dos elementos finitos aplicado à resolução das Leis de Movimento de Newton complementadas com os Princípios de D'Alembert e tendo em consideração as relações constitutivas não lineares que definem o comportamento dos materiais [7]. A microescala representa uma ordem de grandeza espacial correspondente à estrutura em análise (edifícios com alguns metros, estruturas de portos até alguns quilómetros ou pontes com vários quilómetros) e uma escala temporal de alguns segundos.

3. PROVA DE CONCEITO

Os vários esquemas numéricos que compõem a metodologia numérica (e as respetivas técnicas de acoplamento) foram sujeitos a um exaustivo processo de verificação e validação antes da aplicação ao caso de estudo. Este processo assenta na correlação entre as soluções numéricas e os dados analíticos e instrumentais, registados durante campanhas experimentais e eventos reais. A realização abrange os diversos modelos que reproduzem os vários fenómenos físicos, desde a génese do sismo e tsunami até à respetiva resposta da estrutura costeira. Por uma questão de síntese, as figuras 3 e 4 mostram alguns dos testes de validação representativos de macro, meso e microescalas.

4. CASO DE ESTUDO

A aplicação da metodologia numérica ao caso do porto de Sines, em particular ao terminal de contentores, foi desenvolvida para caracterizar: 1) a multiperigosidade de sismo e tsunami em cascata no porto de Sines; 2) o comportamento sucessivo do terminal de contentores do porto de Sines perante um evento extremo do tipo sismo e tsunami de 1755. A figura 5 exibe as macro, meso e microescalas que compõem o domínio numérico.

No domínio da macroescala, foram identificadas as falhas do sistema geológico com potencial para gerarem tsunamis regionais ou locais. A caracterização de todas as possíveis fontes incluiu geometria e parâmetros cinéticos da rutura e a rigidez do solo. Cada rotura de falha (simples ou composta) representa as condições de um cenário de sismo e tsunami. As simulações de ondas de sismo e de tsunami de todos os cenários foram então realizadas para obter acelerações sísmicas de pico ao nível do substrato rochoso e quantidades hidrodinâmicas das ondas de tsunami em Sines, respetivamente.

Na mesoescala são consideradas as influências locais para refinar as soluções numéricas. Nas simulações das ondas sísmicas é incluído um termo a representar a potencial ampliação das acelerações, a depender das características dos solos locais, negligenciáveis em caso de solos muito rígidos. Nas simulações do tsunami na fase de inundação são tidas em consideração as configurações da linha de costa, com geometria corrente e após cada fase de expansão.

No total foram efetuadas 1000 simulações para prever o comportamento das ondas sísmicas para que fossem tidas em consideração as incertezas relacionadas com a fonte de geração dos eventos e com a atenuação da propagação das ondas sísmicas. Para o modelo de tsunami foi

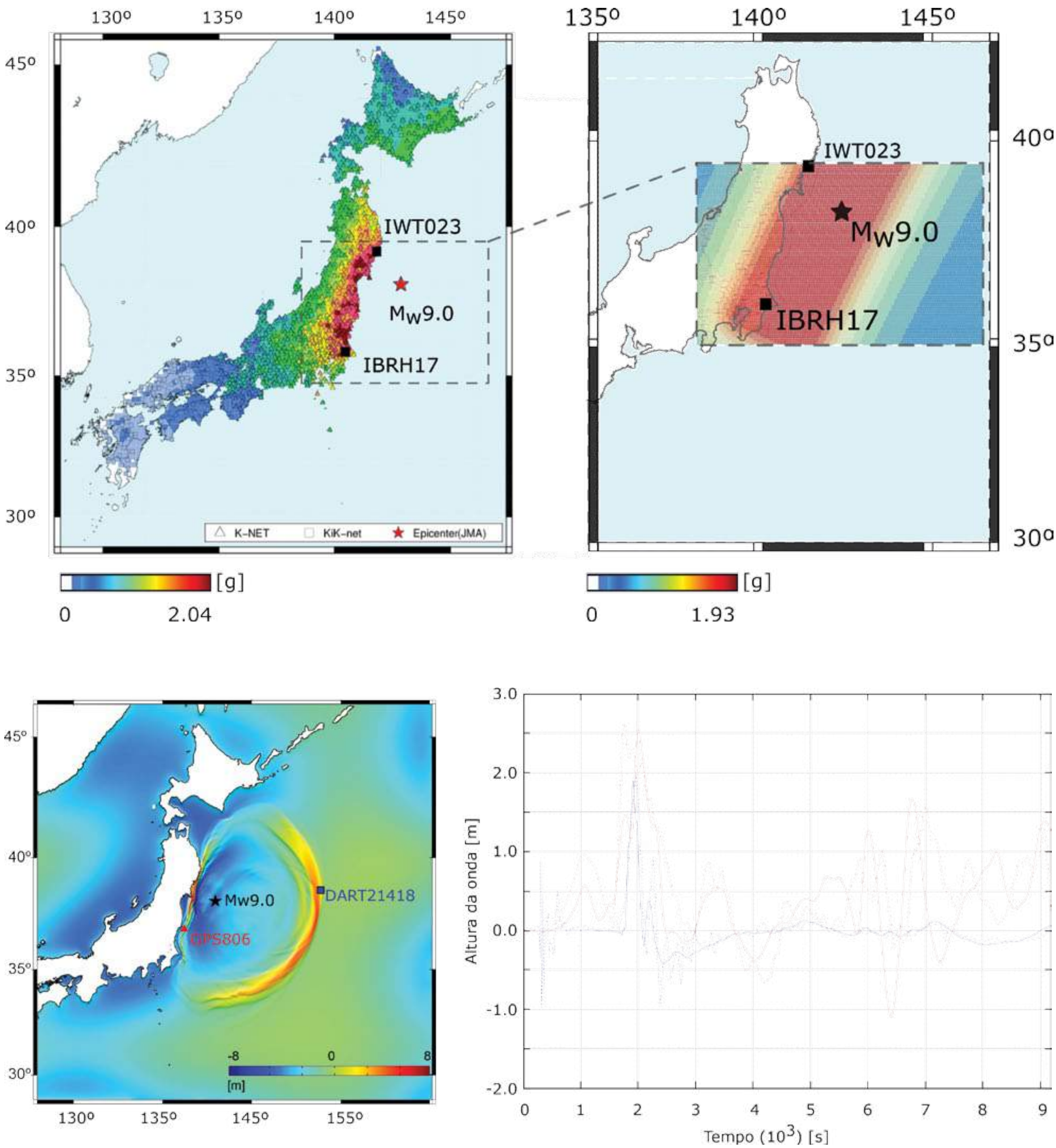


Figura 3. Validação dos modelos da macroescala com recurso a registos do sismo e tsunami do Japão, 2011, registados pelos sistemas de instrumentação que monitorizam o território japonês. Distribuição do pico de aceleração sísmica no território (em cima). Registo das ondas do tsunami (em baixo). Tempo de chegada à costa do Japão, cerca de meia hora após o sismo (à esquerda) e altura das ondas de tsunami (à direita). Linhas azuis e vermelhas representam registo em mar alto e perto da costa do Japão, respetivamente. Linhas tracejada e cheia representam registo instrumental e solução numérica, respetivamente.

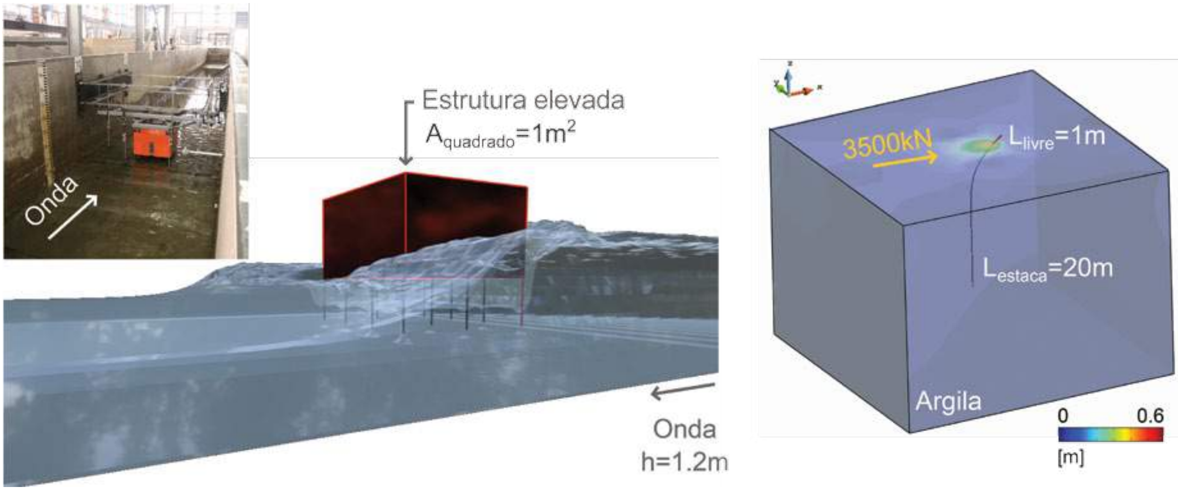


Figura 4. Validação do modelo fluido-estrutura (à esquerda) [13, 14]: comparação entre soluções numéricas obtidas pelos métodos SW-FV, NS-SPH e acoplado, e dados registados numa campanha experimental que decorreu na Oregon State University. A correlação inclui quantidades hidrodinâmicas (altura da onda e velocidade da corrente) e forças e pressões exercidas numa estrutura elevada, nas direções horizontal e vertical. Validação do modelo solo-estrutura (à direita): força lateral aplicada na extremidade livre de uma estaca de 21 m cravada em 20 m de solo argiloso.

ainda adicionada a variação das diferentes configurações da infraestrutura com o objetivo de aferir a variabilidade das forças do tsunami em função da mudança da linha de costa correspondente à configuração atual do terminal, e após as primeira e segunda fases de expansão. Para determinar as cargas de tsunami durante o período de vida útil da estrutura foram realizadas mais de 100 simulações de tsunami.

Com os modelos e várias simulações ao nível de macro e mesoescalas são obtidos os padrões de carregamento para dimensionamento da estrutura que consideram os efeitos de sismo e tsunami em cascata.

Após o estudo paramétrico, foi feita uma análise para determinar o cenário com maior potencial de infligir dano na infraestrutura. Verificou-se que o pior cenário variava de acordo com a medida de intensidade. O cenário que gerava as maiores acelerações sísmicas no sistema solo-estrutura não correspondia ao cenário que gerava as maiores forças de tsunami. O cenário que gerava as maiores ondas de tsunami também não correspondia ao cenário que gerava as ondas de tsunami com maior velocidade. Assim, ao invés de uma carga de dimensionamento em cascata, foram definidos padrões de ações de dimensionamento variando as medidas de intensidade "líder". Por exemplo, um dos padrões é deduzido do cenário que induz a maior aceleração sísmica (intensidade líder) e respetivas medidas de tsunami. Estes padrões são compostos por séries temporais de acelerações sísmicas impostas às fundações da infraestrutura, e forças de tsunami aplicadas aos componentes horizontais e verticais da infraestrutura durante as fases de chegada, inundação e recuo das ondas do tsunami. A figura 6 exibe a forma genérica de aplicação dos padrões de carregamento.

O comportamento sucessivo do sistema solo-estrutura a estes padrões de carregamento em cascata foi caracterizado via análise dinâmica não linear (figura 7). A possível resposta do sistema geoestrutural a cada padrão de carregamento é uma combinação entre três estados, de elasticidade, plasticidade e colapso. Se a aceleração de pico do sismo se mantiver abaixo do valor de cedência dos materiais, o sistema mantém a resistência original para suportar o tsunami subsequente, que pode igualmente ser insuficiente para modificar o estado de regime elástico dos materiais ou, pelo contrário, pode danificar ou mesmo levar ao colapso do sistema. Se o sismo exceder os valores de cedência, o sistema pode ficar danificado e ter a sua resistência comprometida para suportar o tsunami. Se as ações do sismo ou tsunami ou da combinação de ambos excederem os valores últimos de resistência, o terminal de contentores colapsa.

Figura 5. Infografia da metodologia numérica desenvolvida para determinar a multi-perigosidade tsunamigénica, respetivos padrões de carregamento em cascata e sucessiva resposta estrutural.

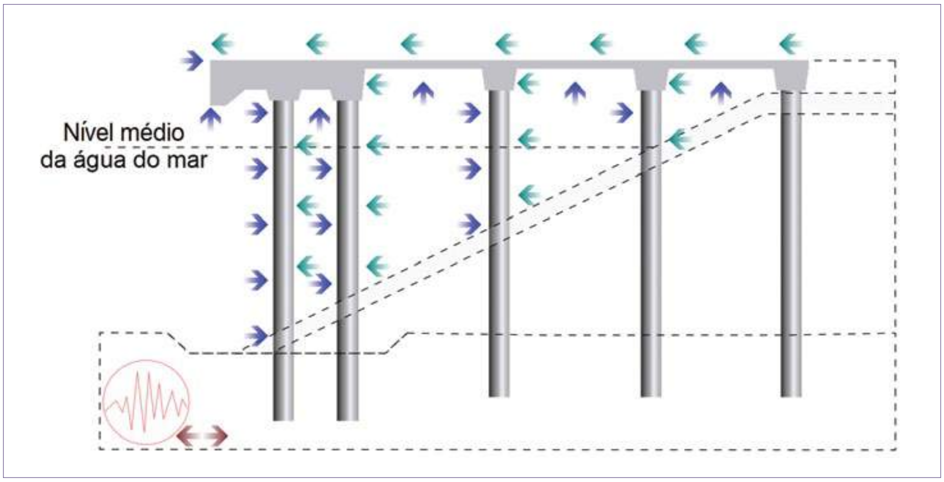


Figura 6. O padrão de cargas em cascata para dimensionamento estrutural engloba a aceleração sísmica aplicada nas fundações seguida pelos efeitos hidráulicos do tsunami nos elementos verticais e horizontais da estrutura, durante as fases de chegada, inundação e recuo das ondas de tsunami.

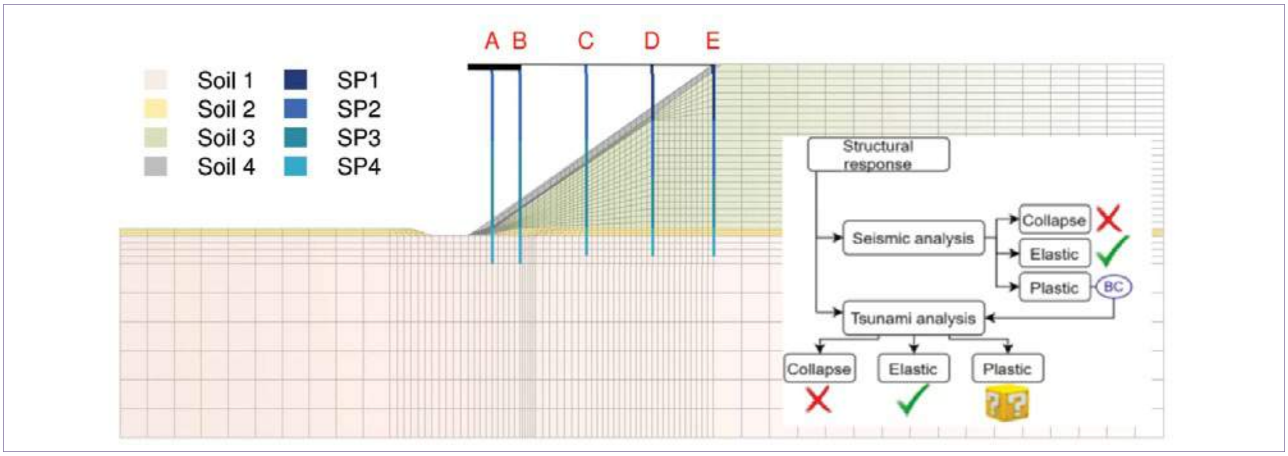


Figura 7. Modelo de discretização usado para prever a resposta sucessiva do sistema geo-estrutural ao padrão de cargas em cascata. O comportamento do sistema pode assumir uma das combinações ilustradas no esquema. As respostas possíveis do sistema são baseadas na comparação entre esforços atuantes.

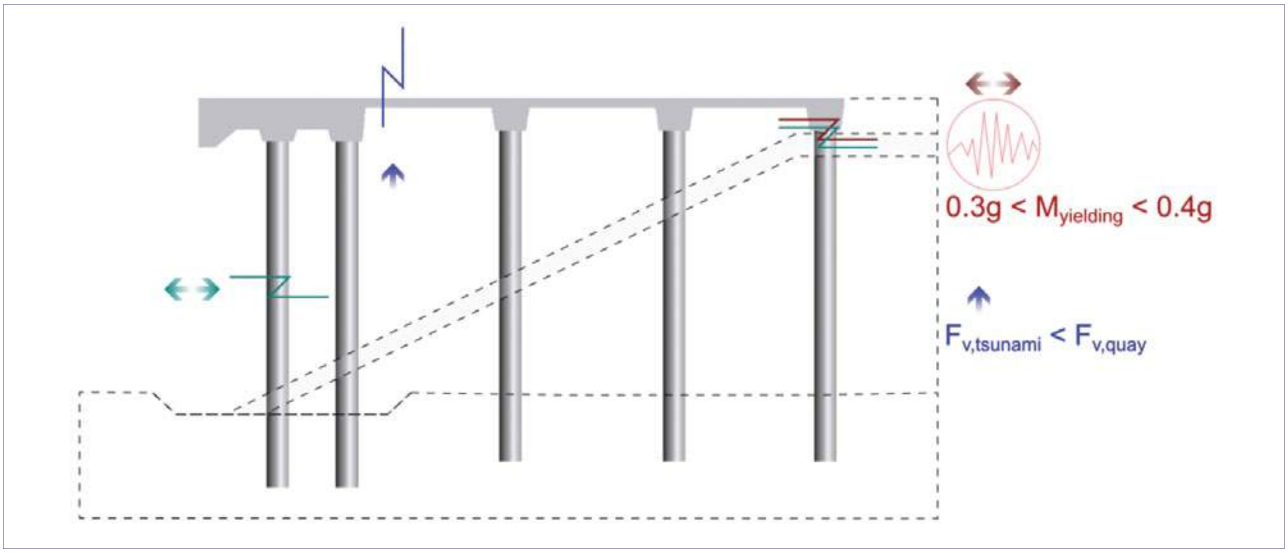


Figura 8. Comportamento sucessivo do sistema geoestrutural ao padrão em cascata de ações de sismo e tsunami.

O sistema geoestrutural mostra ter resistência à maioria dos cenários tsunamigénicos considerados neste estudo. No entanto, os cenários mais extremos mostraram que há potencial de dano e colapso se o dimensionamento das novas infraestruturas mantiver as características do atual Terminal XXI. A análise sísmica mostrou que os pontos de vulnerabilidade do cais de estacas estão na cabeça das estacas mais curtas. Conforme ilustrado na figura 8, a resistência estrutural fica comprometida a partir de acelerações de 0.3g (similar ao recomendado pelo Anexo Nacional do Eurocódigo 8) e evolui rapidamente para colapso quando o terminal de contentores é exposto a acelerações sísmicas da ordem dos 0.4g. As simulações numéricas mostraram acelerações a exceder valores de 0.5g. O tsunami evidenciou a fragilidade das lajes mais finas do terminal de contentores devido a fenómenos de elevação. As lajes, originalmente dimensionadas para carregamento devido ao peso próprio da estrutura, dos equipamentos e de sobrecarga descendentes, não têm armadura superior para resistir à deformação para uma curvatura invertida, levando ao colapso destes elementos.

5. COMENTÁRIOS FINAIS

Em resumo, as estratégias estruturais de mitigação de risco de sismo e tsunami para o *hub* de carga do Porto de Sines incluem:

- Caracterização multiperigosidade de sismo e tsunami orientada à infraestrutura para determinação de padrões de carga de dimensionamento em cascata (em vez de mapa genérico de perigosidade sísmica);
- Lajes dimensionadas com reforço superior da armadura e/ou aberturas de escoamento para alívio da pressão à chegada da onda do tsunami;
- Redução da altura da manga metálica que envolve as estacas que suportam o cais de contentores para conferir maior ductilidade à estrutura, evitando o rápido progresso de regime plástico para colapso;
- Técnicas de ancoragem do sistema geoestrutural para compensar o deslocamento privilegiado do sistema na direção do mar devido à geometria triangular do aterro e à não linearidade dos materiais para resistir a compressões e trações.

REFERÊNCIAS

[1] ASCE 7-2022. *Minimum Design Loads and Associated Criteria for Buildings and Other Structures*. American Society of Civil Engineers.

[2] Clain, S., Reis, C., Figueiredo, J., Baptista, M. A., Miranda, J. M. (2016). "Second-Order Finite Volume with Hydrostatic Reconstruction for Tsunami Simulation". *Journal of Advances in Modeling Earth Systems,* 8, pp. 1691-1713. doi.: 10.1002/2015MS000603.

[3] EN 1998-1, 2004. *Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance.* 1st ed. Brussels: BSi.

[4] International Federation of Structural Concrete, FIB, TG2.13 – *Design and Assessment for Tsunami Loading. https://fib-international.org/commissions/com2-analysis-design.html.*

[5] MarCom WG 112. *Mitigation of Tsunami Disasters in Ports. Technical Report 112*, World Association for Waterborne Transport Infrastructure, PIANC, 2010

[6] MarCom WG 239. World Association for Waterborne Transport Infrastructure, PIANC. *https://www.pianc.org/uploads/publications/reports/ToR-MarCom-WG-239-Mitigation-of-tsunami-disasters-in-ports.pdf.*

[7] McKenna, Frank (2011). *OpenSees: A Framework for Earthquake Engineering Simulation.* Computing in Science and Engineering, 4 13, pp. 58-66. doi.: 10.1109/MCSE.2011.66.

[8] MLIT 2570. *Technical Advice Nº.* 2570. Ministry of Land, Infrastructure, Transport and Tourism, Tokyo, Japan. MLIT, 2011.

[9] Motazedian, Dariush and Atkinson, Gail M. (2005). "Stochastic Finite-Fault Modeling Based on a Dynamic Corner". *Bulletin of the Seismological Society of America* 3, 95 pp. 995-1010. doi.: 10.1785/0120030207.

[10] Pagani, M., and Monelli, D.,Weatherill, G., Danciu, L., Crowley, H., Silva, V., Henshaw, P., Butler, L., Nastasi, M., Panzeri, L., Simionato, M., Vigano, D. (2014). "Openquake Engine: an Open Hazard (and Risk) Software for the Global Earthquake Model". *Seismological Research Letters*, 3, 85, pp. 692-702. doi.: 10.1785/0220130087.

[11] Reis, C., Figueiredo, J., Clain, S., Omira, R., Baptista, M. A. Miranda, J. M. (2018). "Comparison Between Muscl and Mood Techniques in a Finite Volume Well-Balanced Code to Solve Swe. The Tohoku-Oki, 2011 Example". *Geophysical Journal International*. doi.: 10.1093/gji/ggy472.

[12] Reis, C., Clain, S., Figueiredo, J. Barbosa, A. R., Baptista, M. A., Lopes, M. (2021). "Experimentally Validated Numerical Models to Assess Tsunami Hydrodynamic force on an Elevated Structure". *Engineering Structures*, 249. doi.: 10.1016/j.engstruct.2021.113280.

[13] ShipHub. *https://www.shiphub.co/top-container-ports-in-the-eu-2021.*

[14] Reis, C., Barbosa, A.R., Figueiredo, J., Clain, S., Lopes, M., Baptista, M.A. (2022). "Smoothed Particle Hydrodynamics Modeling of Elevated Structures Impacted by Tsunami-Like Waves" *Engineering Structures*, 270. doi.: 10.1016/j.engstruct.2021.114851.

[15] *Technical Standards and Commentaries for Port and Harbour Facilities in Japan. The Overseas Coastal Development Institute of Japan.* OCDI, 2020. Disponível em *https://ocdi.or.jp/en/download-pdf.*

SOBRE OS AUTORES

Cláudia Reis, Ph.D., P.E., é doutorada em Engenharia Civil pelo Instituto Superior Técnico (IST) e membro do grupo Civil Engineering Research and Innovation for Sustainability, IST, ULisboa. Desenvolve investigação como post-doctoral scholar no Departamento de Engenharia Civil da Oregon State University em áreas relacionadas com gestão multirrisco de infraestruturas costeiras no âmbito do projeto Cascadia CoPes Hub. É membro de equipas de consultoria para a indústria e de comités científicos para o desenvolvimento da engenharia de tsunamis, nomeadamente no TG2.13 – Design and Assessment for Tsunami Loading da FIB.

Dr Stephane Clain é professor catedrático no departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e diretor do Laboratório de Matemática Computacional do Centro de Matemática da mesma universidade. As suas áreas de investigação são a construção e a análise de esquemas numéricos com principal ênfase nas aplicações. Trabalha também na área de Machine Learning, mais especificamente, na integração de inteligência artificial na construção de métodos numéricos.

André Barbosa, Ph.D., P.E., é engenheiro de estruturas com 25 anos de experiência profissional e académica dedicada à caracterização da resposta estrutural a fenómenos naturais extremos, tais como sismos, tsunamis e furacões. É professor catedrático na Oregon State University, EUA, e professor adjunto na Washington State University, EUA, e na University of Bristol, UK. Atualmente faz parte da liderança do Center of Excellence for Community Resilience, financiado pelo National Institute of Standards and Technology, e de vários comités da American Society of Civil Engineering (ASCE), nomeadamente do ASCE 7-28.

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação *pt-maths-in@spm.pt*

Jorge Nuno Silva
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

YUPANA – O ÁBACO INCA

Um documento sul-americano do século XVII contém ilustrações de instrumentos de registo e, presumivelmente, de cálculo. A partir destas representações, várias teorias foram adiantadas quanto ao respectivo funcionamento. Apresentamos aqui a nossa opinião nesta matéria, ilustrando com alguns exemplos numéricos. Além das operações básicas da aritmética, o Yupana permite implementar algoritmos para as raízes e logaritmos, com naturalidade, assim como para a antifairese, útil na determinação do máximo divisor comum de dois números. As potencialidades do Yupana vão muito para além das dos ábacos mais conhecidos, nomeadamente o chinês *(Suanpan)* e o japonês (*Soroban*).

Em 1615, Felipe Guamán Poma de Ayala enviou um longo manuscrito ao rei Filipe III de Espanha (Filipe II de Portugal). Nele, descrevia a história dos povos andinos, a ascensão dos incas e o período da invasão espanhola no século XVI (ver [3] e [4]). Nesse manuscrito surge, entre várias outras, a ilustração seguinte.

Figura 1. *Contador Maior* e *Tesoureiro.*

O objecto nas mãos do contador é, sem dúvida, um *quipu*. Este artefacto destina-se fundamentalmente ao registo de informação quantitativa (ver, por exemplo, [7]).

No canto inferior esquerdo, surge um objecto que é natural supor destinar-se aos cálculos numéricos, o *yupana*. Em cada uma das cinco filas, há quatro quadrados, com, respectivamente e da direita para a esquerda, uma, duas, três e cinco pintas. Somos de opinião de que as filas se destinam a representar os diversos dígitos da numeração decimal, sendo a linha inferior destinada às unidades, a segunda às dezenas, e assim sucessivamente.

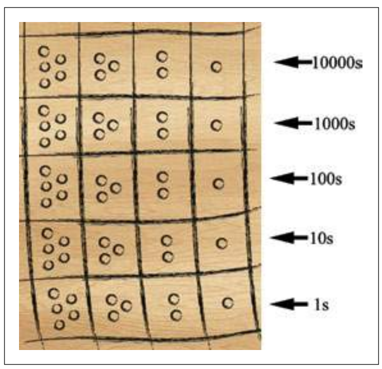


Figura 2. A ordem dos coeficientes decimais.

Uma marca colocada numa casa do *yupana* representará a quantidade gravada nesse local (1, 2, 3 ou 5). Se for na primeira fila tratar-se-á de unidades, se for na segunda de dezenas, etc.

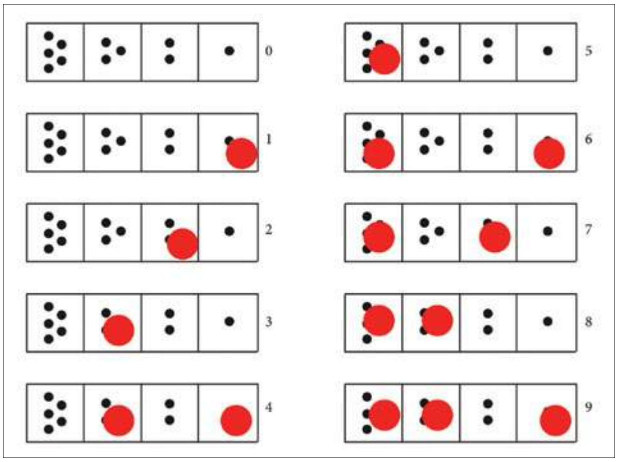


Figura 3. Os dígitos no *yupana*.

Há uma característica notável neste ábaco: podemos representar qualquer número sem necessitar de ter mais do que uma marca em qualquer casa. O leitor mais atento terá reconhecido nas denominações das células do *yupana* termos consecutivos da sucessão de Fibonacci...

A representação de cada número não é, em geral, única, mesmo com a restrição de não ter múltiplas marcas numa casa. Este facto permite reconhecer relações operatórias interessantes. As regras de transformação básicas são evidentes, pelo que as omito (tipo 3=2+1, 5+5=10, etc).

Vejamos como efectuar a soma de dois números. Para facilitar, vamos usar duas cores para introduzir as parcelas.

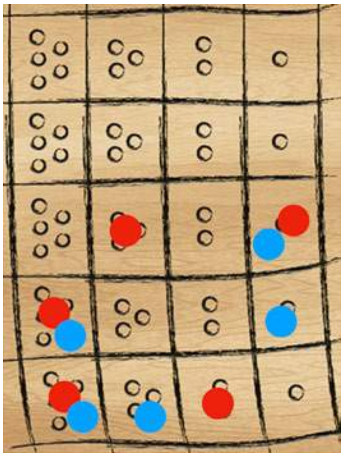


Figura 4. 457 + 168.

Usando somente uma cor e aplicando as regras de conversão, eliminando múltiplas marcas em cada casa e procurando a representação mais económica (que use menos marcas), obtemos, após alguns passos,

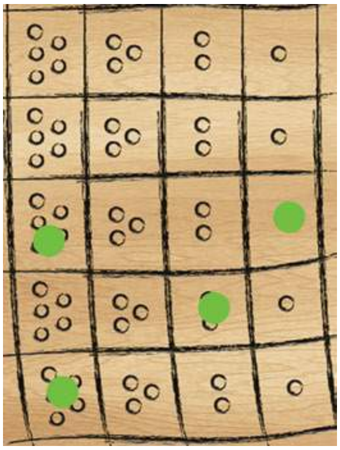


Figura 5. 457 + 168 = 625.

A subtracção implementa-se transformando a representação do aditivo de forma a podermos retirar do ábaco o subtractivo e uma cópia de si mesmo. Vejamos um exemplo.

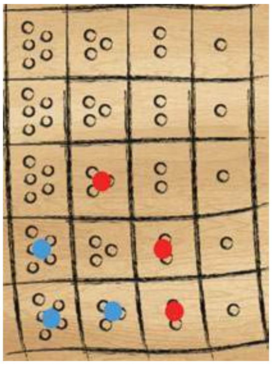


Figura 6. 322 – 58.

Transformando o aditivo convenientemente, obtemos:

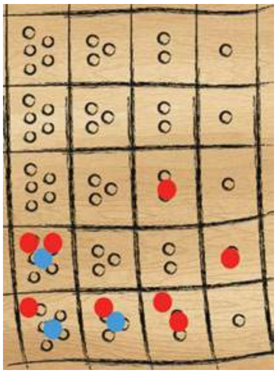


Figura 7. 322 – 58 (a caminho da resposta).

Agora, "rouba-se" o subtractivo ao aditivo e vê-se quanto sobrou:

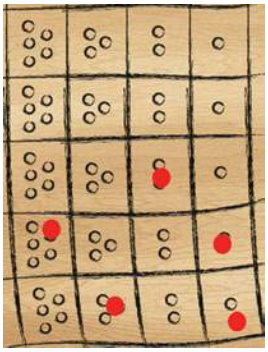


Figura 8. 322 – 58 = 264.

É fácil adaptar este método ao processo de subtracção recíproca iterada que nos dá o máximo divisor comum de dois números, isto é, o conhecido *Algoritmo de Euclides*.

A multiplicação torna-se simples, quando temos presente a lógica da representação numérica no *yupana*. Marcamos o multiplicando e, em cada casa ocupada nessa representação, colocamos o multiplicador. Depois, é só aplicar as regras de conversão. Vejamos um exemplo simples.

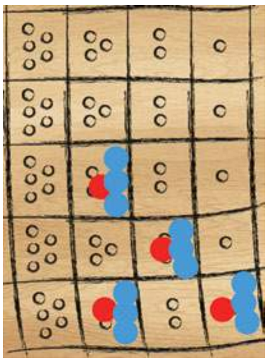


Figura 9. 324 × 3.

O resultado da operação já está representado no ábaco, falta somente simplificar essa representação para a tornar mais legível, tarefa para as regras de conversão.

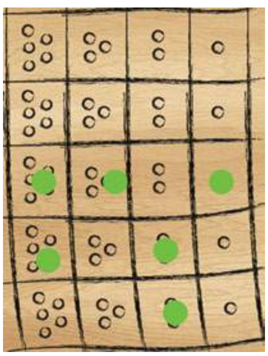


Figura 10. 324 × 3 = 972.

A divisão pode efectuar-se por subtracções sucessivas, procurando em cada momento o maior produto do divisor por uma potência de 10 que não exceda o dividendo. Visualmente, isto é fácil de conseguir, porque multiplicar por 10^n corresponde a mover as respectivas marcas n filas para cima.

Ilustremos o início de tal processo (uma divisão completa ocuparia muito espaço).

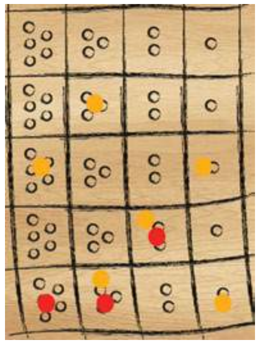


Figura 11. 3624 ÷ 28.

Multiplicando 28 por 100, obtemos:

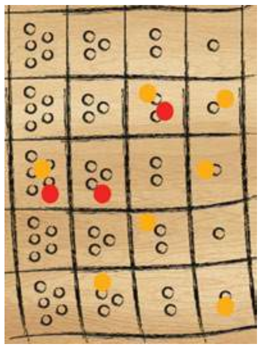


Figura 12. 3624 ÷ 28 (primeiro passo).

Após efectuar a subtracção 3624 – 2800, sabemos que o resto é menor do que 2800, pelo que contabilizamos 100 para o quociente e baixamos o dividendo uma linha (obtendo 280):

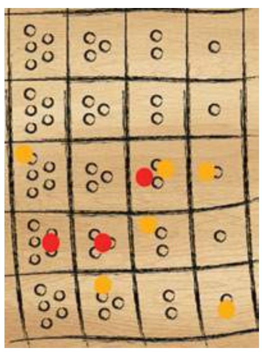


Figura 13. 3624 ÷ 28 (segundo passo).

Agora devemos subtrair 280 do dividendo tantas vezes quantas for possível. Por cada uma dessas subtracções contabilizamos dez unidades para o quociente. Procedendo deste modo, usando marcas negras no exterior do *yupana* para representar o quociente, chegaríamos à situação final:

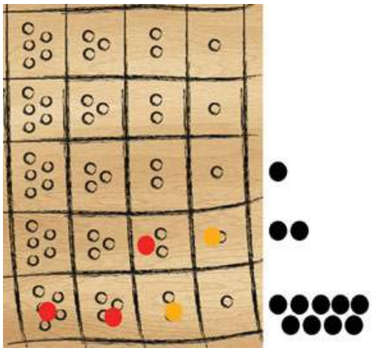


Figura 14. $3624 = 129 \times 28 + 12$.

Atendendo ao método descrito para efectuar multiplicações, não é difícil achar um procedimento para obter a parte inteira da raiz quadrada de um número: a partir da representação de um dado número m, procuremos o maior k tal que cada casa que intervém na representação de k contém k marcas. Ignoremos as sobras.

Procuremos $\sqrt{40}$.

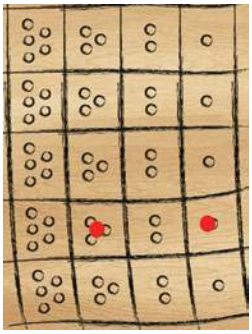


Figura 15. $\sqrt{40} = ?$

Manipulando as marcas, obtemos a seguinte representação de 40 (usamos duas cores para realçar a parte inteira):

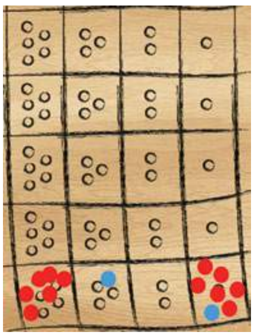


Figura 16. $40 = 6^2 + 4$.

As raízes de ordem superior tratam-se de forma análoga. Para obter $\sqrt[n]{m}$, procura-se o maior k de forma que cada casa que intervém na representação de k contenha k^{n-1} marcas.

Por exemplo, a seguinte configuração permite obter a parte inteira de $\sqrt[3]{70}$:

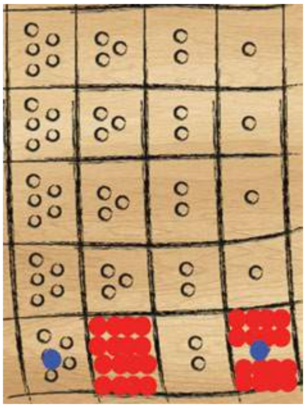


Figura 17. $70 = 4^3 + 6$.

Por fim, uma nota sobre logaritmos. Para obter $\log_n m$, introduzimos m no *yupana* e, manipulando as marcas, procuramos o maior k tal que cada casa da representação de n contém n^{k-1} marcas. Teremos então $k = \lfloor \log_n m \rfloor$. Ilustremos com $\log_4 100$:

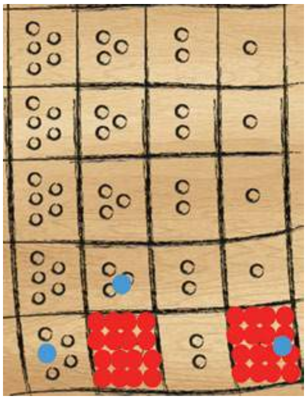


Figura 18. $100 = 4^3 + 36$.

Convidamos o leitor a experimentar este instrumento, fácil de implementar com papel, lápis e moedas, por exemplo. Gostaríamos de ter notícias de outras possibilidades do *yupana* que possam ter-nos escapado.

REFERÊNCIAS

[1] Altieri, R. A. e C. J. Mackey (1990). *Quipu y Yupana: Colección de Escritos.* Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologa, Ministerio de la Presidencia

[2] Ascher, M. e R. Ascher (2013). *Mathematics of the Incas: Code of the Quipu.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications. isbn: 9780486152707.

[3] Ayala, F. G. P. (1615). *El Primer Nueva Corónica y Buen Gobierno.*

[4] Ayala, F. G. P. e R. Hamilton (2010). *The First New Chronicle and Good Government: On the History of the World and the Incas up to 1615.* Joe R. and Teresa Lozano Long Series in Latin American and Latino Art and Culture. University of Texas Press. isbn: 9780292779266.

[5] Moscovich, V. R. (2006). "Yupana – Tabla de Contar Inca". Em: *Revista Andina* 43.

[6] Moscovich, V. R. (2008). *Del Número al Cálculo en el Imperio Inca*. Em: ed. por Paola González Carvajal e Tamara L. Bray. BAR International Series 1848, pp. 91-101.

[7] Moscovich, V. R. (2016). *El Khipu y la Yupana: Administración y Contabilidad en el Imperio Inca*. Ediciones El Lector. isbn: 9786124720543.

[8] Prem, Dhavit (2017). *Yupana Inka*. Lima, Peru: Saldívar Olazo, Carlos Gabriel.

[9] Prem, Dhavit (2021). *P'AWAQ YUPANA – El potente Neo-Awaku Andino*. Tawa Pukllay – Indoarábico.

[10] Setlak, M. et al. (2020). *Quipus and Quipucamayoc. Encoding and Administration in Ancient Peru.* EY, Ernst & Young Perú.

[11] Tun, Molly (2014). "Yupana". *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures.* doi: 10.1007/978-94-007-3934-5_10273-1.

[12] Wartensteiner, Gerald (2021). *Mysterious Yupana: Abacus + Game*. Kindle.

SOBRE O AUTOR

Jorge Nuno Silva. Doutor em Matemática por Berkeley. Professor aposentado da FCUL. Presidente da Associação Ludus. Tem desenvolvido atividade relevante na área da matemática Recreativa e dos Jogos Matemáticos, nomeadamente a nível de publicações.

Coordenação do espaço HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:
Jorge Nuno Silva, Universidade de Lisboa, *jnsilva@cal.berkeley.edu*

Ana Mendes
Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Politécnico de Leiria
aimendes@ipleiria.pt

Teresa Monteiro Fernandes
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
mtfernandes@fc.ul.pt

ALICIA DICKENSTEIN
MATEMÁTICA NO FEMININO: QUANDO O LABOR GANHA NOTORIEDADE

Don't cry for me Argentina é frase que não se pode aplicar à nossa entrevistada. Alicia Dickenstein nasce em 1955, em Buenos Aires, filha única de pai muito empreendedor que sonhava ser engenheiro e de mãe professora primária que aos 45 anos estudava num mestrado em Ciências da Educação.

Apesar da conturbada vida pública na Argentina, o seu percurso escolar desenrolou-se sem quebras, tendo realizado o Ensino Secundário numa escola pertencente à Universidade de Buenos Aires. Esta circunstância permitiu-lhe descobrir bem cedo o gosto pela Matemática. Ingressou na Universidade de Buenos Aires (UBA) como monitora em 1975, tornando-se professora em 1985 após o seu doutoramento (1982), dirigido por Miguel E. Herrera, brilhante matemático argentino infelizmente desaparecido ainda muito jovem.

Alicia é uma matemática com uma grande diversidade de interesses, especialmente conhecida pelo seu trabalho em geometria algébrica, geometria tórica, geometria tropical e suas aplicações em sistemas biológicos, e autora dos conhecidos MESSI systems (nome em homenagem ao jogador Lionel Messi).

A sua vida profissional caracteriza-se também pelo dinamismo e pela intervenção, criando laços entre áreas e pessoas nos vários cantos do mundo matemático.

Entre os seus numerosos cargos e distinções, salientamos que Alicia é atualmente professora emérita da Universidade de Buenos Aires e pesquisadora de topo do Conselho de Pesquisa Científica e Técnica da Argentina, membro da American Mathematical Society (AMS, 2019) e da Sociedade de Matemática Aplicada e Industrial (SIAM, 2020), ex-vice-presidente da International Mathematical Union (2015–2018). Em 2015 foi-lhe atribuído o prémio World Academy of Sciences e, em 2021, Alicia passou a integrar o SIAM Council e recebe o honroso prémio L'Oréal-UNESCO.

Na entrevista que se segue, descobriremos muito mais sobre a caminhada desta brilhante matemática, desde as primeiras dúvidas sobre o que fazer na vida até ao presente, marcado por solicitações e responsabilidades, mas também pelo reconhecimento internacional.

Alicia Dickenstein (Foto: ©fundação L'Oréal Unesco)

GAZETA [DE MATEMÁTICA] Começando pelas suas recordações de infância e juventude, poderá apontar-nos, caso existam, as razões determinantes que a despertaram para a matemática. Por exemplo, raízes familiares? Poderá contar-nos algum episódio ilustrativo da sua precoce propensão para a matemática?

ALICIA DICKENSTEIN Na minha infância não houve nada de especial que implicasse um interesse precoce. Não tive professores especialmente bons. Mas o meu pai era muito inteligente, multiplicava-se em atividades e, embora não tenha concluído estudos superiores, o seu sonho era ser engenheiro. Diria que sonhou que eu seguisse engenharia, mas teve de aceitar a minha preferência pela matemática.

A minha mãe era professora primária. Mais tarde, após o divórcio do meu pai, acabou por fazer um mestrado em Ciências da Educação e veio a ser diretora escolar.

A matemática para mim era fácil, divertida: na escola secundária adorava resolver problemas via equações ou sistemas de duas equações lineares. Não me achava especialmente dotada, mas na verdade acontecia frequentemente ajudar os colegas. Nesses tempos não me passava pela cabeça que iria ser matemática! Tinha mesmo o preconceito contrário.

Acontece que a minha escola secundária dependia da Universidade de Buenos Aires, e o Ensino Secundário durava seis anos, ao fim dos quais nos era proposto fazermos testes vocacionais. Foi uma sorte calhar-me uma psicóloga (julgo que se tornou professora universitária) muito interessada, a qual me fez testes muito variados, concluindo que eu era dotada de uma inteligência superior e vocacionada para a matemática.

Curiosamente, essa senhora via-se a si própria como uma matemática falhada! Talvez por isso foi tão persuasiva sobre a minha possível escolha. Dizia ela que eu devia ao menos experimentar e depois, caso não gostasse, poderia facilmente escolher outra alternativa. Eu teria cerca de 17 anos quando isto se passou.

GAZETA Alicia, pelo que conta, ocorreu consigo nessa ocasião uma interação entre psicologia e matemática. Que nos diz sobre isto?

ALICIA A psicologia tem métodos semelhantes aos da matemática, tem de se "ouvir" muito para encontrar relações e chegar ao essencial.

GAZETA A sua juventude foi contemporânea de períodos muito complicados para a Argentina, passando pelo peronismo e por um regime militar. Como foi viver esses anos?

ALICIA No meu primeiro ano de bacharelato, o governo era militar. Os tempos eram muito complicados. Vivia-se em estado de medo. A opressão instalou-se a pouco e pouco, quase não nos apercebíamos! Quando passei a assistente, as aulas decorriam em estrito silêncio, ninguém falava por puro medo de represálias, em grande parte inconscientemente.

Na escola que, como referi, dependia da universidade, havia um grande ativismo. Éramos cerca de 400 estudantes no meu ano, dos quais concluíram apenas 215, mas 17 foram assassinados pelos militares ou simplesmente desapareceram sob o regime. Tinham cerca de 20 anos!

Já quando entrei na universidade a democracia instaurou-se, mas por pouco tempo.

O tempo presente é muito melhor, conseguimos vencer a ditadura, no entanto diria que a Argentina, sendo um país maravilhoso, é também um país agressivo. Por exemplo, Buenos Aires é uma cidade magnífica, cheia de coisas interessantes para fazer, mas... tudo imprevisivelmente caro.

GAZETA Regressando ao passado, o que pode dizer-nos sobre o ensino da Matemática na Argentina?

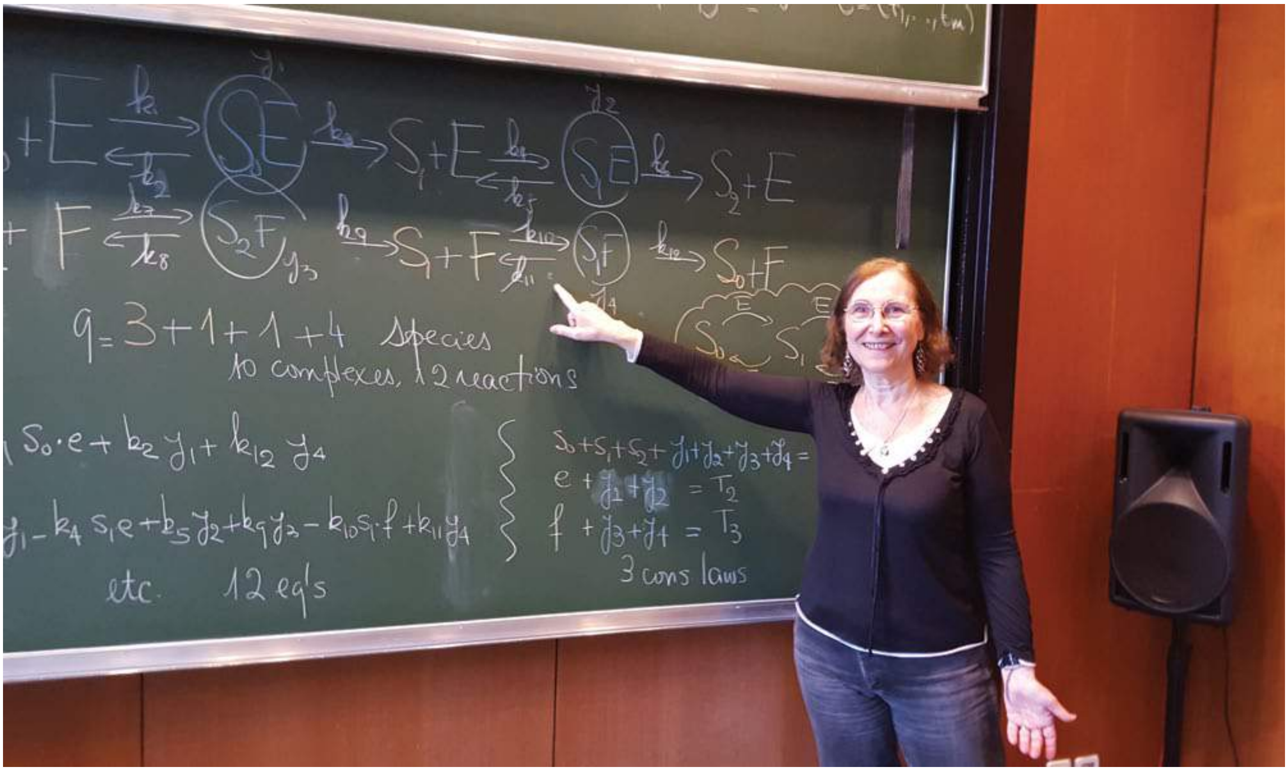
ALICIA O ensino era muito antiquado, não mobilizando a criatividade. Ignorava-se a necessidade de tornar acessível a linguagem da matemática. Lembro-me de que a minha mãe, quando preparava o seu mestrado em Ciências da Educação, fez cursos sobre como agilizar a aprendizagem, mas o material de estudo estava ele próprio escrito numa forma arcaica. Como é possível aprender a inovar mantendo ideias arcaicas?

As pessoas dizem que a matemática é uma linguagem, mas para mim a matemática tem uma linguagem. Os estudantes, à partida, devem percebê-la para poderem progredir. Apercebi-me disso quando ensinava os primeiros anos. E de que é preciso fazer um esforço para tornar claros os conceitos. Por exemplo, para um principiante, pode causar uma grande confusão o uso de termos da vida quotidiana em matemática com um sentido totalmente diferente.

Como sabem, a dada altura escrevi livros para crianças como o *Mate Max: La Matemática en Todas Partes*. Foi das tarefas mais difíceis da minha vida escrever de forma a chegar às crianças, de modo a que elas entendam!

Outro episódio revelador desta dificuldade em entender a linguagem matemática aconteceu numas férias em que alugámos uma casa para a família. Estava eu, um dia, a trabalhar com um colega e teremos usado termos como "limite de ... a tender para..." ou "dualidade". A minha filha pequena aproxima-se de nós e pergunta: "Desculpem, que língua estão a falar?" Sinceramente acho que no ensino temos de conseguir que os estudantes tenham prazer em estudar Matemática, e isso só é possível se perceberem a linguagem.

GAZETA A maioria dos alunos tem vergonha de mostrar que não percebe a linguagem... Na Europa, nas escolas secundárias, é comum separar os estudantes entre os que preferem ciências e os que preferem humanidades. A Alicia passou por uma fase semelhante? Sentiu-se dividida por diferentes inclinações, como são exemplo os livros que escreveu para crianças? Haverá mais do que uma Alicia?



The Oberwolfach photo collection - Photographs of Mathematicians from all over the world

ALICIA [Risos] Tentei sempre usar as duas partes do meu cérebro. Não soube logo que queria ser matemática. Senti-me dividida no fim da escola secundária, mas estou feliz por ter cedo optado pelas ciências, antes mesmo de ter optado pela matemática. E também estou feliz por ter estudado na escola de que vos falei, pois o ensino também tinha uma forte componente de humanidades. Eu acho que é muito importante que as pessoas tenham envolvimento com humanidades na sua educação.

GAZETA A Alicia entregou-se desde novinha à ciência e ao estudo, ou dividia o seu tempo com divertimentos de alguma espécie, como desporto, convívio, etc.? Por exemplo, tocava algum instrumento musical, como acontece frequentemente com matemáticos?

ALICIA Comecei a aprender guitarra, mas o professor era horrível, do estilo de martelar da-da-da… Desisti logo! Por volta dos meus 20 anos, comecei a cantar em grupos corais, o que fiz durante vários anos. Eram grupos não profissionais: começavam, cresciam e acabavam por morrer, pois era necessária muita energia para se manterem. Agora já não canto porque tive problemas com a minha voz. Comicamente, o maestro de um desses grupos estudava matemática e o grupo chamava-se Coro Lario. Foi num desses grupos que conheci o meu marido.

GAZETA E dança tango?

ALICIA Nem por isso. Quando era jovem, o tango era coisa de velhos, da geração da minha avó. Só mais recentemente é que se passou a ensinar tango a *teenagers*. No entanto, o tango está de alguma forma entranhado no meu corpo. Eu gosto de tango e se dançar com alguém que conduza bem, saio-me bem.

GAZETA Pode contar-nos algo sobre personalidades que a tenham impressionado e influenciado nas suas escolhas enquanto jovem estudante? Nessa altura, já tinha ideia da existência de matemáticos argentinos brilhantes?

ALICIA O meu orientador de tese foi Miguel Herrera e era muito jovem, recém-chegado de sítios como Princeton. Eu adorava o tipo de matemática que fazia, misturando geometria, análise, álgebra. Além disso, era um apaixonado pela vida, tinha seis filhos! Era muito atento e paternal, um bom amigo. Infelizmente morreu com 45 anos.

Quando lhe perguntei o que fazer para o meu doutoramento, ele disse-me que fosse para Minneapolis, mas eu recusei. Já conhecia o meu marido, tinha os meus coros, a minha vida... Comecei a minha tese em 78, já casada, e em breve tive a minha filha, logo depois o meu filho... e o meu orientador morre. Senti-me perdida! Foram tempos muito difíceis.

Felizmente tinha uma amiga e colaboradora que me apoiou muito, que me salvou em muitos aspetos.

GAZETA Compreende-se. A maternidade torna-se muito difícil quando se faz matemática, pois esta absorve-nos de manhã à noite e até durante o sono. Juntando-se a isso a perda do supervisor, numa fase em que mal se ganhou independência, pior ainda.

ALICIA O meu orientador procurava sempre integrar-me, tinha muitos contactos.

Ora, isso era muito importante porque a situação económico-social do país era terrível. Não saíamos, levei cerca de seis anos a encontrar o meu próprio caminho. A minha amiga seguiu Educação e eu mantive-me na matemática, embora tivesse de mudar um pouco. Entretanto, o meu grupo de investigação dissolveu-se. Tive mesmo de mudar e procurar o meu caminho.

Cerca de cinco anos após a minha tese, fiz a primeira viagem ao estrangeiro: fui para o ICTP de Trieste para participar em seis semanas dedicadas às superfícies de Riemann. Este evento tinha lugar num auditório maravilhoso, e podia assistir a cursos uns a seguir aos outros!

Foi como se tivesse uma iluminação: senti que se dispusesse de informação suficiente, eu poderia ser muito produtiva. Desde aí, a minha convicção sobre o poder da informação mantém-se.

GAZETA Logo a seguir a esse período, houve algum matemático que estimulasse a sua carreira?

ALICIA Sim, você conheceu-o, Eduardo Cattani. Eduardo tinha sido obrigado a deixar a Argentina em 1967. Durante uma licença sabática, regressou à Argentina vindo dos Estados Unidos para dar um curso sobre Teoria de Hodge e eu era uma boa aluna. Na altura já se usava o *email*, mas eu não sabia da existência do arXiv nem da www. Ia estando informada graças aos *reviews* que fazia para o *Math Reviews*. O Eduardo começou a mandar-me por *email* muitos artigos que ele mesmo imprimia, imensa informação sobre artigos e outras atividades. Fê-lo durante vários anos! E tal mudou a minha vida matemática.

Mais tarde, colaborámos profissionalmente. Encontrámo-nos num congresso e começámos uma colaboração. Em resumo, o Eduardo é o exemplo de um excelente matemático. Foi fundamental na minha vida pelo seu apoio e estou-lhe muito grata.

GAZETA Já percebemos que gosta muito de ensinar. Olhando para trás, prefere ensinar os mais jovens ou os mais maduros?

ALICIA Os estudantes na universidade estão, em geral, muito motivados. Quando acontece haver interação com algum deles, é fantástico. A matemática é muito democrática: pode-se comunicar em qualquer idade, nacionalidade, etc.

GAZETA Que outras ocupações lhe dão gosto?

ALICIA Como disse, já não posso cantar por causa de um problema de voz. Tenho quatro netos que me dão imenso prazer. Puro prazer, sem obrigações. E leio. Por outro lado, apesar da idade e de estar aposentada, trabalho muito: sou professora emérita, título muito raramente atribuído, tenho um gabinete e um posto de investigadora de topo no CONICET (Conselho Nacional de Pesquisas Científicas e Técnicas, organismo equivalente ao francês CNRS - Centre National de la Recherche Scientifique). Faço imensos relatórios. Mas não tenho de ensinar, a menos que queira.

GAZETA Pode agora dar-nos umas ideias do método "Messi" que desenvolveu e falar-nos um pouco dos seus interesses mais recentes na investigação?

ALICIA Essencialmente, trabalho em aplicações de álgebra e geometria computacionais.

Um pouco por sorte. Há muito tempo, cerca de 2003, visitei o MSRI (Mathematical Sciences Research Institute) de Berkeley, onde decorria um semestre sobre álgebra comutativa. Havia quadros pretos nas paredes ao longo dos corredores, e um dia, ia eu a passar por um deles e vi o Bernd Sturmfels a discutir num quadro com a jovem e ativa matemática Karin Gatermann (ela morreu muito jovem). Eu não fazia ideia do que ela estava a dizer, mas o Bernd disse-me: "Senta-te aqui, Alicia; ela faz a simulação e tu demonstras o teorema!" Questionei: "Mas que teorema?!" Sentei-me, sem fazer a menor ideia do que discutiam, não percebia as notações, etc. Mas tomei notas. Aca-


Membros da Internacional Mathematical Union

bei por entrar no assunto, e, por razões que não detalho, fizemos um artigo juntos ("Toric Dynamical Systems").

Logo a seguir, uma estudante (a Mercedes Pérez Millán) abordou-me, pedindo-me que fosse sua orientadora de tese de doutoramento. Conversámos sobre os seus interesses, contou-me que a mãe tinha estudado Biologia. Eu não estava dentro do assunto, mas pareceu-me muito interessante. Respondi-lhe que aceitava, que podíamos aprender juntas. E, enquanto ela trabalhava para a tese, eu também estudava. Acabei por ter uma ideia que se revelou errada, mas a busca do entendimento das diferenças entre certos conceitos conduziu-nos à publicação de um artigo que é muito citado.

Esta colaboração continuou mais tarde e resultou num trabalho onde definimos certos sistemas chamados MESSI, onde se provam resultados envolvendo várias redes biológicas distintas.

Em diferentes partes do mundo, não sei porquê, surgiram várias pessoas interessadas, e por diferentes razões, nas *sign conditions* associadas a problemas onde utilizavam Álgebra e Geometria. Algumas influenciaram-me e com outras trabalhei. Posso citar: o Jeremy Gunawardena, agora em Harvard, um livre-pensador com um forte *background* em Matemática, a Elisenda Feliu que é professora na Dinamarca, cuja forma de estruturar o pensamento é muito próxima da minha e cujos artigos são muito agradáveis de ler, e também um matemático muito simpático de Benin, Gilles Gnacadja, que trabalha para uma farmacêutica na Califórnia e que por causa do seu trabalho começou a fazer alguma matemática por sua conta relacionada com estes mecanismos.

Com a Mercedes, começámos a estudar redes enzimáticas. As enzimas são moléculas (proteínas) que produzem reações a uma velocidade compatível com a vida. Elas juntam-se a outra proteína (normalmente designada substrato) com a qual é fósforo-relacionada, isto é, adquire uma componente de fósforo que não é mais do que um processo de transferência de energia.

Pedi à Mercedes que frequentasse um curso de Biologia Molecular. Lemos imensos *papers* de várias áreas relacionadas para tentar entender. A verdade é que eles nunca escrevem a equação para que nós (matemáticos) consigamos entender o processo. Tudo o que é modelação matemática (o modelo matemático que eles usam) ou não está nos artigos destas áreas ou, quando está, aparece no material suplementar.

Em algum momento, porque há uns artigos mais matemáticos do que outros, fomos capazes de ver que neste mecanismo há um modelo com uma estrutura matemática subjacente e que, associado ao mesmo, havia um modelo que conhecíamos e que conseguíamos entender. E uma vez que entendes, consegues fazer e começas a provar teoremas. E isto aconteceu antes de o Lionel Messi ter sido considerado o melhor jogador do mundo, mas andávamos à procura do acrónimo para Modificações do tipo-Enzima-Substrato ou Troca com Intermediários. Estávamos muito perto de MESSI, cozinhámos ligeiramente o nome e, claro, demos o nome de MESSI em homenagem ao jogador.

Agora continuamos a trabalhar nesta área e comecei a trabalhar com um amigo de longa data, Reinhard Laubenbacher, que mudou de Matemática para Biologia. Trabalhamos em redes de genes, utilizando redes que generalizam as Booleanas. Propusemos um modelo novo que esperamos que resulte. Enfim, faço o que posso!!!

GAZETA Alicia, há alguma história curiosa que nos queira contar com algum matemático famoso?

ALICIA Em 2005, os físicos celebravam os 100 anos de quatro trabalhos famosos do Einstein sobre a Teoria da Relatividade e os 50 anos da sua morte. Os meus colegas físicos daqui da universidade, dois anos antes de 2005, começaram a organizar uma série de palestras; foi-me pedido para dar a palestra de matemática neste enquadramento e colocaram-lhe um título: *Dez Anos Aprendendo Matemática: Einstein e as Geometrias Não Euclidianas.* Sinceramente eu não sabia quase nada do que ia dizer porque nunca tinha trabalhado na área em que trabalhou o Einstein, mas aceitei e disse-lhes: "Vou estudar até lá".

Comecei a ler uma série de artigos e, a dada altura, pedi a um amigo para me enviar um livro da Dover (*The Theory of Relativity*) onde havia um artigo principal sobre o Einstein e o seu trabalho General Theory of Relativity, publicado nos *Annalen der Physik* de 1916. Simultaneamente, nas minhas pesquisas, apercebi-me de que a Universidades de Jerusalém tinha todos os manuscritos do Einstein onde pude ver o manuscrito desse artigo.

Apesar de não falar alemão, consigo ler um pouco e vi um conjunto de nomes matemáticos escritos na primeira página que na versão traduzida para o inglês não aparecia. Isso deixou-me curiosa.

Na verdade, a versão traduzida começava na página seguinte. A introdução faltava. Pedi a uma amiga de origem alemã aqui da universidade que me traduzisse essa primeira página. Segundo ela, o que Einstein fazia era agradecer a um conjunto de matemáticos como Gauss, Riemann, etc… que desenvolveram a matemática antes dele para que ele a pudesse utilizar. Eu achei isto fantástico!!!

Para mim, levantou-se uma questão: porque é que não estava na tradução? Comecei a pensar nisso.

Em 2006 ou 2007, estava em Minneapolis numa festa para que tinha sido convidada e onde estava o Peter Lax, que tinha ganhado o Abel Prize. Não sei porquê, comecei a contar-lhe esta história e pareceu muito interessado nela, o que me levou a achar que se o Peter Lax tinha interesse nesta história, se calhar ela tinha algum valor.

Um ano mais tarde, num congresso em Espanha, na mesa onde estava sentada, encontrava-se o David Eisenbud, na altura diretor do MSRI. Contei-lhe esta história e ele sugeriu que a mesma devia estar no Boletim da Americal Mathematical Society (AMS) e lá está.

Ao efetuar esta publicação, conheci um colega de História da Matemática e acabámos por descobrir que a história por detrás disto não era tão fantástica. Ao que parece, na segunda edição da versão traduzida, quando a cópia da original foi para impressão para a gráfica, a primeira página caiu. Conto isso no meu artigo. Por causa disto recebi uma carta do Yuri Manin, que faleceu recentemente, que estava muito interessado neste trabalho apesar de nem me conhecer.

A verdade é que isto originou que eu me relacionasse com matemáticos muito famosos. Nunca esperei que isso acontecesse.

GAZETA Voltando ao trabalho de pesquisa, qual é aquele de que mais se orgulha. Ou, para si, são todos especiais?

ALICIA Existe um trabalho de que gosto também publicado no jornal da AMS. Eu estava numa conferência no Brasil, onde conheci uma matemática incrível, Maria Aparecida Soares Ruas (Cidinha), da Universidade de São Carlos. Ela é uma mulher fantástica que criou um grupo de pesquisa e um ambiente de trabalho à sua volta muito harmonioso.

Ela convidou-me a dar um curso, na Universidade de São Carlos, baseado no livro *Discriminants, Resultants, and*

Multidimensional Determinants do Gelfand, do Kapranov e do Zelevinsky, que é uma espécie de bíblia. Sabem, é difícil dar um curso baseado num livro dessa complexidade e quando preparava esse curso coloquei-me a seguinte questão: eu estava a estudar variedades teóricas (são variedades racionais), como é que eu posso parametrizar as suas duais?

Encontrei uma forma de o fazer e na verdade redescobri uma coisa que já era conhecida no contexto não homogéneo. Um ano depois estava no Rio de Janeiro a coorganizar uma escola e um *workshop* com um colega sobre sistemas de equações polinomiais. Foi no início de março e era mais barato organizar o congresso em Angra dos Reis, que é um local lindíssimo.

Nesse congresso, um dos oradores era o Bernd Sturmfels (meu amigo e que me introduziu a estas questões da Biologia), com quem falei sobre esta minha descoberta. Penso que numa sexta-feira, enquanto tomávamos uma cerveja ou um café, mostrei-lhe as duas páginas do que tinha escrito e do que me tinha apercebido. No dia seguinte, ele apareceu-me com uma página de resultados dizendo: "Alicia, esta é a tropicalização do teu trabalho. Como é que não me apercebi antes destas conexões?" Então, comecei a estudar geometria tropical para perceber o meu próprio trabalho. Daqui resultou um trabalho de que gosto muito, mesmo.

Alicia com a medalha do Prémio da Fundação L'Oréal Unesco

GAZETA Existe um lado feminista na vida da Alicia. Apesar de sabermos que continuaria a ser uma cientista de sucesso sem este lado, como é que ele influencia o seu trabalho e porquê?

ALICIA Felizmente, no meu percurso como cientista eu não prestei atenção a que havia uma diferença real entre o homem e a mulher. Porque só mais tarde me apercebi de que há muito a fazer a nível das organizações. O que eu tento fazer, e é o que consigo fazer, é dar muitas entrevistas, apresentar muitas palestras, dar muita formação e pertencer a muitos painéis relacionados com atividades da Women in Mathematics para ajudar as mulheres a terem noção de si próprias. Por exemplo, no CONICET tinha uma colega que é astrónoma e é a primeira mulher que conseguiu chegar ao cargo de topo em tantos anos. A própria disse-me que em vários anos os únicos que conseguiam chegar à posição mais superior na carreira de pesquisador eram apenas homens, e que estes decidiam quem eram os homens que se lhes seguiam.

A dada altura, permitiram que as pessoas pudessem candidatar-se e ela candidatou-se e lá acabou por conseguir o lugar devido ao seu currículo, mas vejam, foi preciso candidatar-se. A possibilidade de que a escolhessem não existia, simplesmente porque ignoravam os currículos femininos. Ela teve de dizer que era ótima e "deem-me a posição". Foi a primeira mulher a consegui-lo.

As estatísticas têm vindo a diminuir a diferença entre homens e mulheres nos lugares de topo. No entanto, é preciso olhar para elas de outra forma. As mulheres demoram muito mais tempo a atingir esses lugares do que os homens. A princípio até se pode entender que isto possa estar relacionado com a questão familiar e com a maternidade, mas o surpreendente é que também está relacionado com o facto de terem de dizer que são boas e terem de o provar. E isto não tem por que ser uma característica feminina.

Algumas vezes familiarmente, na melhor das intenções, há pais que dizem que matemática não é uma carreira adequada para as mulheres ou que as ciências

Cartazes presentes nos principais aeroportos do mundo, nos quais a imagem de Alicia surge acompanhada da frase "o mundo precisa de ciência, a ciência precisa de mulheres"

não são adequadas. Claro que isto mudou nas novas gerações, mas ainda está muito enraizado culturalmente e, principalmente, na população mais pobre. É óbvio que esta discriminação não pode ser feita. Principalmente, na parte ocidental do mundo sabemos que estas coisas não podem nem irão continuar. Um conjunto exclusivamente masculino decidir quem pode subir ou não na carreira, não pode acontecer. Mas continua a ser…

Penso muitas vezes nesta imagem: há uma grande sala, num canto está um homem numa secretária a trabalhar, e no outro canto está uma cozinha e nessa cozinha está uma mulher com duas crianças a tentar cozinhar. Vemos esta imagem e, de alguma forma, achamos isto normal. Se invertermos os papéis e virmos uma mulher a trabalhar à secretária e um homem na cozinha a tentar cozinhar com as crianças, automaticamente somos impelidos a dizer: ela podia ajudá-lo. Mas porquê? Sentimos, interiormente, que há algo errado nessa imagem. E enquanto este sentimento não mudar na sociedade, não mudará nem para a matemática nem para outras atividades. Isto está muito estabelecido e é por isso que eu tento que as pessoas tomem consciência disto: que há características culturais que impedem as mulheres de fazer Matemática, Engenharia ou Ciências de Computação. E também procuro fazê-lo nas organizações.

Eu obtive o prémio da L'Oréal e depois dele dei imensas entrevistas (mais de 100), e dou-as principalmente para que as pessoas ganhem essa consciência. Que eu consiga transmitir esta mensagem.

GAZETA Como é que a Alicia se torna uma *pop star* da matemática e passa a estar na imprensa cor-de-rosa na Argentina?

ALICIA Isto tudo começou quando aceitei o tal prémio da L'Oréal (UNESCO) e fui uma das personalidades do ano. Aceitei-o por duas razões principais. Uma foi porque a minha neta estava excitadíssima com a ideia e queria muito ir à entrega do prémio e a outra, mais importante, em geral não há normalmente nestes prémios pessoas a fazer ciência, principalmente mulheres a fazer ciência, e queria que as pessoas vissem como isso é importante. A ciência é importante e as mulheres a fazer ciência ainda mais.

GAZETA Sobre os seus prémios, quais aqueles que a deixam mais orgulhosa?

ALICIA Não é que esteja orgulhosa. Gosto deles, mas principalmente porque me permitem fazer coisas de que gosto e permitem atingir pessoas que não estariam à partida interessadas em matemática ou em fazer matemática.

Penso que para mim são bons.

GAZETA Sabemos que a matemática tem um papel enorme na vida da Alicia. Como é que combina isso com a gestão profissional e com a gestão da vida familiar?

ALICIA Uma coisa muito importante para mim foi que na universidade nós tínhamos e temos infantário (*child care*) e acessível, porque apenas pagamos uma pequena percentagem do nosso salário. Ou seja, todos podiam pagá-lo, independentemente do salário.

Isto para mim foi crucial. E tive imensa ajuda do meu marido. A princípio não foi tão fácil. Eu tinha de sair, às vezes, um mês inteiro e tivemos alguns desentendimentos. Mas, no final, ele aceitou e adaptou-se e já só me perguntava: "Quando é que regressas?"

Não foi fácil, tivemos de nos adaptar e negociar. Também tive muitas dúvidas por causa do meu filho e da minha filha. Por terem uma mãe tão apaixonada pelo que fazia. Tinha receio de não lhes dar atenção suficiente. Por isso, sempre que estava com eles, dava-lhes atenção máxima e com valor. Em retrospetiva, acho que acabou por correr bem. Dou-me muito bem com os meus dois filhos.

Eu trabalhava imenso. Na realidade, fui a primeira mulher diretora do meu departamento e, sem me aperceber, acabei por ter uma subdiretora e uma secretária também mulheres. Não era nada comum e aprendi o que era ter muito trabalho e nenhum poder. Normalmente chegava a casa, jantava, falávamos um pouco e depois voltava a trabalhar. Trabalhava muito… e está OK… não me arrependo. Foi uma escolha. E foi uma escolha feliz.

GAZETA A Alicia parece-nos uma pessoa feliz. Acreditamos que é feliz. Como é que lida com o envelhecimento e como é que se sente tratada nesta fase da vida?

ALICIA Antes eu tinha tanto trabalho administrativo que era difícil concentrar-me na matemática como gostaria e, agora que mantenho a paixão pela matemática, as solicitações são tantas que se torna difícil responder a todas. Assumo que tenho a mesma paixão, mas não tenho a mesma força.

Atualmente sou a editora chefe da revista de *La Unión Matemática Argentina* que me dá muito trabalho, mas também muito orgulho, sou também editora associada das revistas *Mathematics of Computation*, *Vietnam Journal of Mathematics*, *Algebraic Combinatorics*, *La Matematica* e *Orbita Mathematicae*. Para além disso, sou membro do National Academy of Exact, Physical and Natural Sciences of Argentina desde 2018, que também requer muito de mim. Coorganizo muitos seminários e *workshops* e faço muitas coisas organizacionais não só para mim, mas também para diferentes instituições, que implicam fazer muitas avaliações de pessoas e processos.

GAZETA Há alguma pergunta que gostaria que lhe fizessem e que nunca ninguém fez?

ALICIA Acho que não [risos]. Porque sempre digo o mesmo. Sou a mesma pessoa. Há uma pergunta sobre o que é que eu espero para o futuro da matemática. Talvez não tenha uma boa resposta para isto, mas tenho algumas preocupações. Principalmente, com o desenvolvimento da inteligência artificial (IA). Tenho a certeza de que o desenvolvimento da IA vai ser um desafio e que não faremos a matemática da mesma maneira. Li recentemente um artigo muito interessante na *Nature* sobre como é que IA irá alterar a matemática. Essencialmente, o que dizem é que por agora estamos seguros porque com a IA não se consegue decidir o que é ou não é importante.

GAZETA Pensa que há um risco de perdermos a liberdade de como fazemos a matemática?

ALICIA Penso que há um risco de perdermos a liberdade em tudo. Estamos mesmo muito controlados [risos]. É fácil, pois a nossa informação está em todo o lado. Há um controlo e as nossas decisões estão circunscritas a um certo limite. Será importante que os matemáticos puros saibam mais fazer computação e código para entender o que se faz na IA.

Por exemplo, há um algoritmo desenvolvido por matemáticos (entre os quais, Peter Scholze) para verificar demonstrações muito abstratas.

GAZETA E o ChatGPT?

ALICIA Ainda comete muitos erros. Mas também acerta muitas coisas. No entanto, também existem erros em artigos, como em tudo na vida. [Risos]

Posteriormente a esta entrevista, Alicia Dickenstein foi agraciada com o Prémio 2023 da Fundación Konex e titulada Doutora Honoris Causa pela Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina).

Nuno Camarneiro
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

OS NÚMEROS DO NOBEL

O mercador da morte está morto. O Dr. Alfred Nobel, que fez fortuna ao encontrar forma de matar mais pessoas mais rápido do que nunca, morreu ontem.

A notícia, dada por um jornal francês a 12 de Abril de 1888, relatava a morte de Alfred Nobel, um químico, engenheiro, inventor e empresário sueco que terá ficado bastante incomodado ao ler o seu próprio obituário, tanto pela manifesta falsidade da notícia como pelo tom e pelas palavras escolhidas para descrever a sua vida.

O malogrado obituário resultou de um erro do jornal, o Nobel que acabara de morrer era Ludvig Nobel, também ele um ilustre engenheiro, inventor e empresário que era irmão de Alfred. Conta-se que o choque experimentado com a possibilidade de passar à história como um "engenheiro da morte" terá levado Alfred a alterar o testamento e a deixar um legado capaz de recompensar os futuros benfeitores da Humanidade. Assim nasceu o Prémio Nobel.

Alfred Nobel falava fluentemente cinco línguas e interessava-se por literatura e poesia inglesa bem como pela física e a química. Ao longo da sua vida, que terminou em 1896, terá registado 355 patentes, mas nenhuma foi tão bem-sucedida quanto a da dinamite, um novo explosivo mais barato, mais estável e mais seguro pensado para ser utilizado em minas e na construção de estradas e outras infra-estruturas.

Acerca da utilização da sua invenção para fins bélicos, conta-se que Alfred Nobel terá dito: "Talvez as minhas fábricas contribuam para o fim das guerras... No dia em que dois exércitos se possam aniquilar mutuamente em segundos, as nações civilizadas irão recuar com horror e desmantelar os seus exércitos". Enfim, todos sabemos como correu a história e quão cândidas nos parecem hoje estas palavras.

Já os prémios que Alfred Nobel resolveu instituir tornaram-se, de facto, numa marca de civilização, de progresso e do melhor que a Humanidade pode produzir, embora acompanhados de controvérsias, alguns erros e omissões e os enviesamentos próprios de cada época. Olhando para os laureados das cinco categorias inicialmente instituídas (Química, Física, Medicina, Literatura e Paz) e do prémio dedicado à Economia que foi criado em 1968 pelo Banco Central da Suécia, vemos que do total de 954 laureados (estão aqui excluídas as organizações), apenas 6% são mulheres, outros 6% são asiáticos ou de origem asiática e 1,7% são negros ou afrodescendentes. Relativamente à nacionalidade dos premiados, os EUA lideram a lista com um total de 403 laureados (pouco mais de 42%), seguidos pelo Reino Unido com 137 e a Alemanha com 114. Portugal, como sabemos, conta apenas com dois, o da Medicina, em 1949, para Egas Moniz, e o da Literatura, em 1998, para José Saramago. Um outro conjunto estatístico que poderá surpreender é o dos laureados com o Prémio Nobel da literatura agrupados por língua: o inglês vem à cabeça com 29 laureados, segue-se o francês com 16, o alemão com 14 e o castelhano com 11. A língua portuguesa, com um único prémio atribuído ao autor de *Memorial do Convento*, tem menos prémios do que o polaco (5), o dinamarquês (3), o norueguês (3), ou o grego (2), línguas com muito menos falantes.

A questão que muito se discute, não apenas acerca dos Nobel mas também de outros prémios com reconhecimento mundial (a Medalha Fields, o Pritzker, o Turing, etc) é até que ponto estes reflectem as desigualdades vigentes ou as promovem por estarem demasiado centrados nos países ditos "ocidentais" e, dentro destes, com um viés anglo-saxónico, branco e masculino. A verdade é complexa e será provavelmente um misto destas e de muitas outras coisas. O mundo sempre foi enviesado e desigual e isso reflecte-se no conjunto de pessoas que consegue chegar ao topo de cada actividade. Por outro lado, há cada vez menos razões para perpetuar essas desigualdades e é bom que vão sendo reparadas, a grande ciência, a grande literatura e a grande arte estão espalhadas por todo o mundo e são feitas por gente muito diversa. Estaremos nós à altura das expectativas de Alfred Nobel?

BARTOON

Luis Afonso

Publicado originalmente no jornal Público, em 23/03/2023. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Paulo Saraiva Universidade de Coimbra

EDITORES:
Patrícia Beites Universidade da Beira Interior
Rui Santos Politécnico de Leiria
Sandra Bento Universidade da Beira Interior

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Carlos Farias** E. S. Campos Melo, Covilhã • **Helder Vilarinho** Universidade da Beira Interior • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Maria de Natividade** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Sílvia Barbeiro** Universidade de Coimbra • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
FR Absolut Graphic
Rua Professor Egas Moniz n 38 4º Dto - 2620-138 Póvoa Sto. Adrião

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO
Sociedade Portuguesa de Matemática
SEDE: Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt
NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: http://gazeta.spm.pt/politica

TIRAGEM **1350 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

PORTUGAL TRAZ UMA MEDALHA DE BRONZE E QUATRO MENÇÕES HONROSAS DAS OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE MATEMÁTICA

A 64.ª edição das Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO2023), que decorreu em Chiba, no Japão, de 2 a 13 de julho, terminou com a equipa portuguesa a conquistar uma medalha de bronze e quatro menções honrosas.

Rafael Inácio, aluno do 12.º ano da Escola Secundária Dr. Mário Sacramento, em Aveiro, é o responsável pela medalha de bronze, André Pinheiro, Tiago Sousa, Tomás Faria e Xingyu Zhu foram distinguidos com menções honrosas. Da comitiva portuguesa faziam ainda parte Apolo Gomes, aluno da equipa, Joana Teles, chefe de equipa, e Nuno Arala, tutor.

Este ano, pela primeira vez, um problema proposto por Portugal foi escolhido para fazer parte de uma prova das IMO. Os autores do problema são Tiago Mourão e Nuno Arala, também eles antigos olímpicos.

Portugal participou pela primeira vez nas IMO em 1989 e, desde então, já conquistou três medalhas de ouro, oito de prata, 41 de bronze e 46 menções honrosas.

A participação de Portugal nestas competições é organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática, e a seleção e a preparação dos alunos estão a cargo do Projeto Delfos, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

ALUNOS MAIS NOVOS CONQUISTAM MEDALHAS DE OURO NAS OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

A 41.ª edição das Olimpíadas Portuguesas de Matemática ficou marcada pelo assalto ao pódio das medalhas feito pelos alunos mais novos, pois em cada uma das três categorias da competição, Júnior, A e B, houve estudantes a conquistarem uma medalha de ouro em ano de estreia no respetivo patamar. Tiago Gonçalves (6.º ano), da Escola Artística de Música do Conservatório Nacional, Rafael Marques (8.º ano), da Escola Patrício Prazeres, e Tomás Faria (10.º ano), do Colégio Moderno, foram os alunos que conseguiram este feito.

Quem também levou para casa uma medalha de ouro foi Rafael Inácio, da Escola Secundária Dr. Mário Sacramento, em Aveiro, alcançando um feito até agora só conseguido duas vezes: uma medalha por cada ano de participação nos sete anos possíveis. O aluno do 12.º ano fechou assim a sua passagem pelas Olimpíadas em grande forma.

O Agrupamento de Escolas Tomás Cabreira, em Faro, foi o anfitrião da competição que decorreu de 30 de março a 2 de abril. A cerimónia de encerramento teve lugar no dia 2 de abril, no Grande Auditório da Universidade do Algarve, Campus de Gambelas.

O evento contou com a presença do presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, José Carlos Santos, do reitor da Universidade do Algarve, Paulo Águas, do presidente da Câmara Municipal de Faro, Rogério Bacalhau, da diretora do Ciência Viva, Rosalia Vargas, da diretora do Agrupamento de Escolas Tomás Cabreira, Ana Paula Marques, de Hélder Pais, da Direção-Geral de Educação, e das várias dezenas de alunos participantes. As Olimpíadas Portuguesas de Matemática são organizadas pela Sociedade Portuguesa de Matemática em parceria com o Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e contam com o apoio do Ministério da Educação, da Ciência Viva, da Fundação Calouste Gulbenkian, do novobanco, do município de Faro, da Universidade do Algarve, da Altice e da Texas Instruments.

7.º WORKSHOP - NEW TRENDS IN QUATERNIONS AND OCTONIONS

Nos dias 27 e 28 de outubro irá realizar-se o 7.º workshop New Trends in Quaternions and Octonions - NTQO 2023, na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Politécnico de Leiria. Este evento pretende reunir cientistas da matemática, física, engenharia e outras áreas científicas para divulgar e discutir os desenvolvimentos recentes realizados na área dos quaterniões e dos octoniões. O encontro ocorrerá em formato híbrido (presencial e online) e contará com palestras convidadas e outras comunicações aceites. É uma organização conjunta das universidades de Aveiro, do Minho e da Beira Interior, através dos seus Centros de I&D em Matemática (CIDMA, CMAT e CMA), e da instituição onde se realiza o evento. Mais informações sobre o workshop e a inscrição podem ser consultadas em: *https://sites.google.com/view/ntqo2023.*

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

PROGRAMA SPM@TESTES

A Sociedade Portuguesa de Matemática desde 2016 desenvolve testes de matemática com as mesmas características de um exame nacional a pedido de escolas. Essa experiência, permitiu à SPM a partir de 2021, alargar o trabalho e lançar o **PROGRAMA TESTES SPM** a nível nacional para as escolas interessadas, contando, para tal, **com o apoio fundamental da Fundação Calouste Gulbenkian.**

Este programa oferece às escolas associadas SPM, (públicas ou privadas) testes para o 2.º, 4.º, 6.º, 9.º, 10.º, 11.º e 12.º anos, com as mesmas características de um exame nacional.

Consulte aqui o programa

Onde está o Programa?

A ESCOLA DE VERÃO DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA 2023

A Escola de Verão da Sociedade Portuguesa de Matemática 2023 (EVSPM2023) decorreu nas instalações da Escola Básica e Secundária Quinta das Flores, em Coimbra, de 12 a 14 de julho de 2023. O evento esteve organizado em conferências plenárias, painéis, mesas-redondas e workshops, contando com mais de 30 oradores num total de 18 sessões.

A EVSPM é um evento que tem como finalidade promover a ação docente: elevar os professores de Matemática, reconhecendo-os, estimulando-os e valorizando-os. Mas também é um evento que tem por objetivo divulgar novos meios de descoberta da cultura, do conhecimento matemático, do ensino moderno da disciplina e, ainda, dar formação específica em certas áreas da Matemática.

A Escola de Verão é destinada a professores do 1.º ciclo do Ensino Básico, a professores de Matemática dos 2.º e 3.º ciclos dos ensinos Básico e Secundário, a professores do Ensino Superior, a estudantes e a todos os que gostam de Matemática e os que com ela trabalham.

Esta edição do evento foi organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática com o apoio da Escola Básica e Secundária Quinta das Flores, da Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Coimbra, do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra e da Universidade de Coimbra. Contou ainda com uma parceria com a Universidade de Coimbra que assegurou um curso de formação integrado no programa da Escola de Verão com o apoio do Programa de Recuperação e Resiliência (PRR), através do Living the Future Academy.


círculos matemáticos
E no próximo ano?
+ Formação
+ Professores envolvidos
+ Escolas
+ Alunos
+ Problemas e Jogos
"Eu para o ano quero voltar (...) eu gosto de desenvolver o meu raciocínio!"


Do chapéu à tartaruga: uma família a um parâmetro de einsteins
https://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat/


ational Management (INAS)
10
DELL
ESCOLA DE VERÃO DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
spm


CABRAS VOADORAS: DIMENSÃO N
UNIVERSIDADE DE COIMBRA
N = 2; r = 1.158 ...
N = 3; r = 1.228 ...
...
N = ∞; r = √2

PARCERIA ENTRE A SPM E A SPE

A Sociedade Portuguesa de Matemática estabeleceu uma parceria com a Sociedade Portuguesa de Estatística que permite aos sócios de ambas as sociedades beneficiarem de um desconto de 25% na próxima quota. Ou seja, quem for membro da SPM e da SPE pagará 75% do valor da quota de cada sociedade.

2023 IMS INTERNATIONAL CONFERENCE ON STATISTICS AND DATA SCIENCE

A segunda edição da International Conference on Statistics and Data Science (ICSDS) irá realizar-se de 18 a 21 de dezembro, em Lisboa, no Centro Cultural de Belém. O Institute of Mathematical Statistics (IMS) lançou o evento no passado ano, em Florença, Itália. O objetivo da ICSDS é reunir investigadores em estatística e ciência de dados da academia, da indústria e do governo num ambiente estimulante para a troca de ideias sobre o desenvolvimento de estatística moderna, machine learning e teoria, métodos e aplicações amplamente definidos em Data Science. Consulte todas as informações no site oficial: *https://sites.google.com/view/icsds2023/home.*

36.º ENCONTRO DO SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

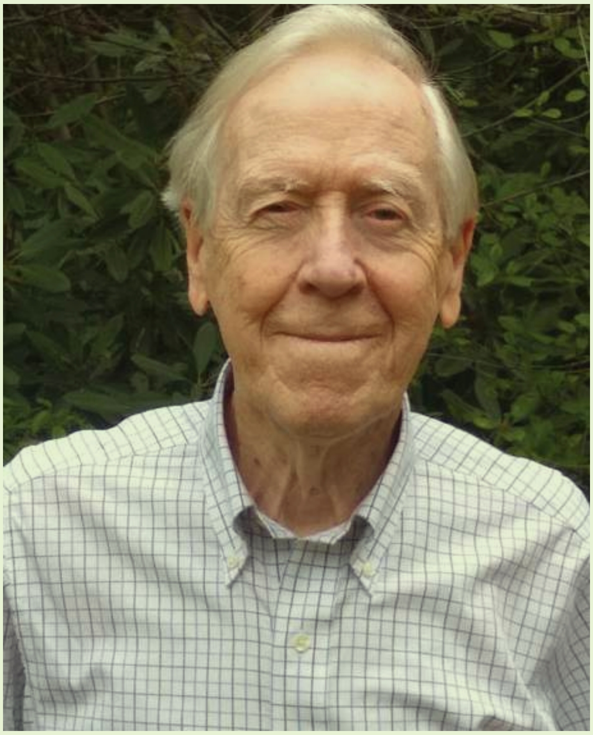
O Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro irá acolher o 36.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM), nos dias 20 e 21 de outubro de 2023. O SHNM é uma secção da estrutura da Sociedade Portuguesa de Matemática cuja finalidade é a promoção da colaboração entre interessados e investigadores em História da Matemática, bem como a intervenção em temas nessa área. Outra particular preocupação do SNHM é a integração na comunidade internacional dos historiadores da Matemática, evidenciada pela presença nos encontros nacionais de investigadores de outros países. Pode consultar todas as informações sobre este evento em *https://snhm.web.ua.pt.*

A ÚLTIMA LIÇÃO DE GIL STRANG

No passado dia 15 de maio, o conhecido professor e matemático norte-americano Gilbert Strang lecionou a sua última aula no Massachusetts Institute of Technology (MIT), aos 88 anos. Strang realizou investigação em diversas áreas da matemática, particularmente em teoria dos elementos finitos, cálculo de variações, análise de *wavelets* e álgebra linear. É igualmente responsável por diversos contributos para a educação matemática, incluindo a publicação de livros didáticos de matemática, entre eles Introduction to Linear Algebra, Linear Algebra for Everyone, Differential Equations and Linear Algebra e Linear Algebra and Learning from Data.

Nascido em Chicago, a 27 de novembro de 1934, Strang tornou-se conhecido entre os aprendizes de Álgebra Linear de todo o mundo quando em 2005 passou a permitir que as suas aulas fossem gravadas em vídeo e disponibilizadas gratuitamente na internet, através do MIT OpenCourseWare.

Tal como referiu na sua última aula, passou 2/3 da sua vida ligado ao MIT: os três primeiros anos como estudante de Matemática; depois dois anos como monitor e, finalmente, desde 1962, como professor. Quem desejar conhecer um pouco mais sobre Gil Strang pode consultar o n.º 172 da Gazeta de Matemática, edição na qual Gonçalo Morais conversou com o matemático sobre o futuro da Matemática e do ensino da mesma a nível universitário.



A sua última aula está disponível em *https://www.youtube.com/watch?v=lUUte2o2Sn8*. Após o discurso laudatório de Michel Goemans, chefe do Departamento de Matemática do MIT, afirmando que a sua reforma era bem merecida, Strang agradeceu, mas ainda teve oportunidade de acrescentar: "Ele pensa que me vou reformar! Mas eu ainda vou pensar nisso!"

FEIRA DA MATEMÁTICA 2023

A X edição da Feira da Matemática irá decorrer nos dias 10 e 11 de novembro, no Museu Nacional de História Natural e da Ciência. Será um evento repleto de atividades científicas, culturais e educativas para todos. Dia 10 de novembro haverá um programa dirigido ao público escolar e no dia 11, ao público em geral e famílias. A entrada é gratuita, no entanto as escolas necessitam de se inscrever. Em breve serão divulgados mais detalhes.

XXVI CONGRESSO DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE ESTATÍSTICA

A Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE) e o Centro de Matemática da Universidade do Minho são as entidades organizadoras do XXVI Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística, que vai realizar-se de 11 a 14 de outubro de 2023, em Guimarães. Trata-se do principal fórum de discussão da SPE, permitindo o debate entre investigadores e profissionais da área da Estatística de universidades, institutos e laboratórios de investigação, empresas, Governo e entidades reguladoras e de estatística oficiais. Pode consultar todas as informações em *https://w3.math.uminho.pt/SPE2023*.

Fernando Pestana da Costa
Vice-Presidente da SPM
fernando.costa@uab.pt

A PROPÓSITO DE UM NÚMERO REDONDO

Breve revisão de um percurso, com repto virado para o futuro.

O exemplar da *Gazeta de Matemática* que o leitor acabou de ler tem o bonito "número redondo" 200. Esta revista, fundada por António Aniceto Monteiro, Bento de Jesus Caraça, Hugo Ribeiro, José da Silva Paulo e Manuel Zaluar Nunes, e que teve o seu primeiro número em janeiro de 1940, foi uma das muitas iniciativas de uma notável plêiade de matemáticos que integrou os referidos acima e que ficou conhecida como Movimento Matemático, a qual, entre meados da década de 1930 e a segunda metade da década de 1940, além da *Gazeta*, fundou a *Portugaliæ Mathematica* e a SPM, criou diversos núcleos e centros de investigação matemática em Lisboa e no Porto, e incentivou, de uma forma notavelmente persistente, a investigação, o ensino e a divulgação da Matemática em Portugal: os três pilares sobre os quais assenta, ainda hoje, a atividade da SPM.

Não sendo este o local para detalhar a história da *Gazeta*, é importante referir alguns aspetos da sua história mais recente. A *Gazeta* foi sendo publicada de 1940 até ao número 136, em 1975/76, graças ao imenso esforço dos seus editores e autores, alguns a partir do estrangeiro. Em 1976 a sua publicação foi suspensa e a revista assim permaneceu, inativa, até 1990, ano do seu quinquagésimo aniversário, quando, sob a direção de José Gaspar Teixeira, um grupo de matemáticos tentou reavivar a *Gazeta*, tendo-se publicado o número 137 em setembro desse ano. (Como nota pessoal, tive a honra de, a convite do prof. Paulo Almeida, do IST, ter estado envolvido nessa iniciativa, de um modo muito marginal, mas a minha partida para o estrangeiro para a prossecução do doutoramento, no verão de 1990, não permitiu dar continuidade.)

Foi, no entanto, necessário esperar mais uma década para que, em 2000, a *Gazeta de Matemática* renascesse pela mão segura de Graciano de Oliveira, tendo sido publicado, em janeiro desse Ano Internacional da Matemática, o número 138 a que se seguiram regularmente dois números por ano até 2007, ano em que Graciano de Oliveira deixa a direção da *Gazeta* com uma dinâmica consolidada e com uma procura junto dos sócios da SPM e seus restantes leitores que permitiu que, a partir de 2008, a publicação tenha passado a ter uma periodicidade quadrimestral sob as direções de Jorge Buescu (2008-2010), Rogério Martins (2011-2013), Adérito Araújo (2014-2016), Sílvia Barbeiro (2017-2022) e, desde o número 199, o primeiro de 2023, de Paulo Saraiva.

Sendo a *Gazeta de Matemática* a publicação da SPM que mais diretamente se imbrica com os pilares de ensino e divulgação da Sociedade, a presente direção da SPM está empenhada, tal como estiveram as anteriores, em continuar a apoiar a publicação da *Gazeta* e a sua divulgação junto dos estudantes e professores de Matemática (fundamentalmente, mas não exclusivamente) dos ensinos Básico, Secundário e Superior, quer na sua versão impressa quer via acesso online, em *https://gazeta.spm.pt*, o qual é livre para todos os exemplares da *Gazeta* desde o número 1 até aos do ano anterior ao atual (e, para assinantes, ao ano atual).

Nunca, como agora, houve em Portugal tantos profissionais a fazerem investigação e desenvolvimento nos diversos ramos de disciplinas matemáticas, em universidades, politécnicos, laboratórios, e em empresas industriais e de serviços, além, naturalmente, dos profissionais do ensino, os professores de Matemática nos diversos níveis de ensino, em instituições públicas e privadas. A todos eles, deixo o desafio de colaborarem com a SPM e, em particular, de contribuírem para a *Gazeta* com artigos de elevada qualidade que permitam continuar a ilustrar os progressos atuais das ciências matemáticas e como estas estão imbricadamente ligadas à sociedade contemporânea, e também exemplificar de que modo estes fatores podem ser incorporados num ensino que seja atualizado, desafiante e não excluindo a beleza abstrata da Matemática e a sua importância formativa. Com isto, não só farão um serviço fundamental para a divulgação e o ensino da Matemática em Portugal, como assegurarão que esta publicação continue, sem sobressaltos, a ser publicada durante, pelo menos, os próximos 200 números!

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2023

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3º esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*


Liping Ma
Saber e Ensinar Matemática Elementar
ANTÓNIO ANICETO MONTEIRO
Uma fotobiografia a várias vozes
JORGE BUESCU O fim do Mundo está próximo?
LOGARITMOS
Elon Lages Lima
Análise Combinatória e Probabilidade
10 MATEMÁTICOS 100 PROBLEMAS
TEXTOS DE MATEMÁTICA
2000 MATEMÁTICA RADICAL
OS INSTRUMENTOS NÁUTICOS DE NAVEGAÇÃO E O ENSINO DA GEOMETRIA
NUNO CRATO
A Matemática das Coisas
Desarrumar
TEXTOS DE MATEMÁTICA
TÓPICOS DE ÁLGEBRA SUPERIOR
Isometrias
Elon Lages Lima
OS NÚMEROS E OS JOGOS
JOHN H. CONWAY
exercícios de álgebra linear
A MATEMÁTICA NO TEMPO DO MESTRE JOSÉ VIZINHO
MATEMÁTICA & COMBOIOS
MATEMÁTICA ELEMENTAR DE UM PONTO DE VISTA SUPERIOR
Felix Klein
ANÁLISE
Olimpíadas de Matemática
PEDRO NUNES
OBRAS
NÚMEROS CIRURGIAS E NÓS DE GRAVATA
COMO RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS
exercícios de Análise Complexa e Equações Diferenciais
NUNO CRATO
PASSEIO ALEATÓRIO
RON AHARONI
ARITMÉTICA PARA PAIS
Matemática em família
Matemática em Portugal
Uma Questão de Educação
Jorge Buescu
TREZE VIAGENS PELO MUNDO DA MATEMÁTICA
Bento de Jesus Caraça
INÉDITOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA
Carlos Bastien
4000 ANOS DE GEOMETRIA