GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO V **N.º 20** AGÔSTO-1944

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 6$50

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR E PROPRIETÁRIO
J. da Silva Paulo

ADMINISTRADOR
Orlando M. Rodrigues

TESOUREIRO
J. de Oliveira Campos

CORRESPONDÊNCIA PARA Manuel Zaluar — Rua Serpa Pinto, 17, 4.º esq. — Lisboa

Composição e impressão: Sociedade Industrial de Tipografia, Limitada — Rua Almirante Pessanha, 3 e 5 (ao Carmo) - Lisboa

ANO V-N.º 20 GAZETA DE MATEMÁTICA AGÔSTO-1944

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

UMA INICIATIVA IMPORTANTE PARA O DESENVOLVIMENTO DOS ESTUDOS MATEMÁTICOS EM PORTUGAL

«Dotação da Junta de Investigação Matemática»

Um grupo de professores e antigos alunos da Faculdade de Ciências do Pôrto, convencidos de que seria impossível dar realização ao programa da Junta de Investigação Matemática sem lhe assegurar os meios materiais indispensáveis, criaram a «Dotação da Junta de Investigação Matemática». Certos de que a sua iniciativa era susceptível de despertar interêsse em sectores muito mais largos, redigiram e fizeram distribuir a seguinte circular:

Ex.mo Senhor:

A Junta de Investigação Matemática, fundada em 4 de Outubro de 1943, por iniciativa de um grupo de investigadores portugueses, definiu os seus principais objectivos nos seguintes têrmos:

1.º — Promover o desenvolvimento da investigação matemática;

2.º — Realizar trabalhos de investigação necessários à economia da Nação e ao desenvolvimento das outras ciências;

3.º — Sistematizar e coordenar a inquirição científica dos matemáticos portugueses;

4.º — Vincular o movimento matemático português com o dos outros países e, em especial, com o dos países ibero-americanos;

5.º — Despertar na juventude estudiosa portuguesa o entusiasmo pela investigação matemática e a fé na sua capacidade criadora.

Passando imediatamente ao domínio das realizações, tomou a iniciativa da publicação de uma série de cadernos de Análise Geral em que se procura expor, numa forma acessível, as modernas correntes do pensamento matemático; e, simultâneamente, em colaboração com o Centro de Estudos Matemáticos da Faculdade de Ciências do Pôrto, organizou os Colóquios de Álgebra Moderna, Topologia e Teoria Geral da Medida na intenção de «despertar na juventude estudiosa portuguesa o entusiasmo pela investigação matemática e a fé na sua capacidade criadora».

No entanto, como os resultados obtidos são apenas o ponto de partida para a resolução do problema central do programa da Junta de Investigação Matemática — a formação de investigadores — surge agora no primeiro plano das suas aspirações a criação de «bolsas de estudo» no país e no estrangeiro e o contrato de matemáticos especializados, que possam tomar o encargo de orientar a preparação dos seus futuros bolseiros.

Mas se aquela actividade, no seu duplo aspecto de criação e actualização, tem sido até hoje condicionada por uma série de preocupações, o plano de trabalho, que neste momento a Junta de Investigação Matemática se propõe iniciar, está muito para além dos limites naturalmente restritos do rendimento das suas próprias publicações.

Nestas circunstâncias, e convencidos de que se trata de uma obra impessoal que, transcendendo os interêsses imediatos de cada um, é susceptível de uma larga projecção no movimento matemático português, tomámos a iniciativa de criar a «Dotação da Junta de Investigação Matemática» *e convidamos a associarem-se-nos todos aquêles que, tomando conhecimento dos seus objectivos e das suas realizações, sintam a necessidade de assegurar a sua continuïdade e desenvolvimento».*

Como primeira resposta a êste apêlo e por activa e entusiástica intervenção do sr. dr. António Luís Gomes, Director Geral da Fazenda Pública, já se receberam subsídios, cujo montante ascende a 51.000$00 escudos, assim distribuídos:

Prof. Dr. Abel Andrade, (100$00) ; Dr. Albuquerque Rodrigues, (200$00); Alexandre Sequeira, (1.000$00); Dr. António Breda, (200$00) ; António da Costa, (5.000$00) ; Dr. António Pais Rovisco, (200$00) ; Dr. Armando Gonçalves Pereira, (200$00) ; Dr. A. Palma Carlos, (300$00); Dr. Artur Brandão, (500$00); Dr. Augusto Soares, (1.000$00); A. Viana da Mota, (100$00); Banco Burnay, (4.000$00) ; Banco Espírito Santo e Com., (2.000$00) ; Banco Fonsecas, Santos e Viana, (5.000$00) ; Banco Português do Atlântico, (1.000$00); Dr. Bastos Guerra, (200$00); Benigno Delgado, (150$00); Eng.° Carlos Garcia Alves, (1.500$00); Carlos de Oliveira, (1.000$00); Companhia dos Diamantes de Angola, (10.000$00) ; Cónego Dr. Carneiro de Mesquita, (100$00); Crispim Rocha, (500$00); Estoril Plage, (1.000$00) ; F. Fernandes Guimarães, (500$00); Fernando Tavares de Carvalho, (500$00) ; F. Rocha Gonçalves, (1.000$00) ; Gabriel Ferreira Marques, (500$00) ; H. Vaultier & C.ª, (1.000$00) ; Dr. Hipólito Raposo, (300$00) ; J. Abreu Valente, (300$00) ; Dr. J. Azeredo Perdigão, (200$00) ; Dr. João Lourenço Castelo Branco, (200$00) ; Eng.° João Teixeira de Queiroz, (500$00) ; Dr. João Vieira de Araújo, (500$00); José Maria Pedroso e Neto, (500$00); José dos Santos Lima, (500$00); Dr. Lopes Fidalgo, (100$00) ; Luís Leal, (500$00) ; Prof. Dr. Manuel A. Moreira J.or, (500$00) ; Dr. Manuel Coelho, (200$00) ; Manuel Pimentel Cavalheiro, (50$00); Marcelino Nunes Correia, (1.000$00); Dr. Mário Calisto, (100$00) ; Dr. M. Colares Pereira, (300$00) ; Dr. Octávio de Brito, (500$00) ; Prof. Dr. Paulo da Cunha, (300$00) ; Dr. Pedro Chaves, (200$00); Sacor, (2.500$00); Sociedade Argibay de Construções Navais, Lda., (1.500$00); Sociedade Nacional dos Fósforos, (500$00); Dr. Tomaz Sanches da Gama, (1.000$00). Total 51.000$00.

Agôsto de 1944.

A «Dotação da J. I. M.» dispõe ainda de cotizações mensais e anuais que somavam, até Julho de 1944, 16.500$00 escudos.

A «Gazeta de Matemática» regista o êxito dêste empreendimento e salienta a circunstância de os subsídios concedidos definirem um princípio de colaboração entre entidades privadas e institutos científicos para-universitários, colaboração que a acentuar-se abriria animadoras perspectivas quanto à possibilidade da realização completa do programa da Junta de Investigação Matemática.

Pequena introdução à Álgebra Moderna — I.

por **J. Sebastião e Silva** (bolseiro em Roma do I. A. C.)

A noção de corpo abstracto

Diz-se que, num dado conjunto M de elementos quaisquer, é definida uma operação θ, binária e unívoca, quando exista uma lei que faça corresponder a cada par ordenado a, b de elementos de M, um, e um só, elemento $c=a\,\theta\,b$, também de M.

Se M fôr o conjunto dos números racionais, sabemos que são definidas em M duas operações — a adição $(+)$ e a multiplicação $(\cdot)$ — gozando das seguintes propriedades fundamentais (por a, b, c designamos elementos arbitrários de M):

Para a adição:

R_1) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (associatividade)

R_2) $a+b=b+a$ (comutatividade)

R_3) Existe em M um elemento 0 tal que $a+0=a$

R_4) Para cada elemento a, existe um elemento $-a$, também de M, tal que $a+(-a)=0$.

Para a multiplicação:

R_5) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (associatividade)

R_6) $a\cdot b=b\cdot a$ (comutatividade)

R_7) Existe em M um elemento 1 tal que $a\cdot 1=a$

R_8) Para cada elemento $a\neq 0$, existe um elemento a^{-1}, também de M, tal que $a\cdot a^{-1}=1$.

Mixtas:

R_9) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ (distributividade)

R_{10}) Se N é um conjunto de elementos de M tal que: 1) N contém 1; 2) dados dois elementos a, b de N (sendo $b\neq 0$), também $a+(-b)$ e $a\cdot b^{-1}$ pertencem a N, então N coïncide com M.[1]

Além destas operações, é definida em M uma relação binária (relação de ordem «>») que satisfaz às seguintes condições:

R_{11}) Dados dois elementos a, b de M, uma, e uma só, das hipóteses $a>b$, $a=b$, $b>a$ se verifica necessàriamente.

R_{12}) Se $a\geq b$ e $c\geq 1$ ou $c>0$, tem-se $a+c>b$ e $ac\geq bc$.[2]

[1] A restrição «N contém 1» pode ser substituída por esta outra «N contém pelo menos dois elementos».

[2] Supõe-se, é claro, que já foi definida a relação «$a\geq b$» como equivalente a «$a>b$ ou $a=b$». A hipótese $c\geq 1$ poderia ser suprimida, acrescentando a condição $1>0$, para completar a caracterização.

É fácil demonstrar que as propriedades R_1 a R_{12} *caracterizam* os números racionais, isto é, que *tôdas* as proposições relativas a números racionais se podem deduzir lògicamente das condições R_1 a R_{12}. Em tudo o que segue, representaremos por R_a o conjunto dos números racionais.

Interessa observar que, suprimindo no sistema R_1 a R_{12} a condição R_8, e modificando a condição R_{10} com a supressão de $a \cdot b^{-1}$, se obtém um sistema de condições, *característico* do conjunto I_n dos números inteiros relativos (isto é, positivos e negativos); e que, suprimindo ainda as condições R_3 e R_4, e modificando R_{10} com a substituïção de $a+(-b)$ por $a+b$, ou mesmo por $a+1$ (feita já a supressão de $a \cdot b^{-1}$), se obtém *uma caracterização* do conjunto N_n dos números naturais. Dêste modo se vê, em particular, que a condição R_{10} não é mais do que uma modificação do princípio da indução completa, relativo aos números naturais.

Substituamos agora R_{10} pela condição mais fraca:

R_{10}^*) Se N fôr um subconjunto de M tal que: 1) N contém pelo menos um elemento (ou seja, *não é vazio*); 2) qualquer que seja o elemento a de N, também $a+1$ pertence a N, — então, dado um elemento b de M, ou b pertence a N, ou existe em N um elemento maior do que b (princípio de Arquimedes modificado).

O novo sistema R_1-R_9, R_{10}^*, R_{11}, R_{12} já não é verificado sòmente em R_a: é-o também no conjunto R_e dos números reais; no conjunto dos números da forma $a+b\sqrt{2}$, com a, b racionais; no conjunto dos números da forma $f(\log 2)$, sendo f uma função racional de coeficientes racionais e $\log 2$, por exemplo, o logaritmo ordinário (real) de 2, etc. É fácil reconhecer que, entre todos os conjuntos de números que satisfazem a tal sistema de propriedades, o conjunto R_e é, *de certo modo,* o máximo.[3] Podemos, no entanto, obter uma caracterização *directa* do conjunto R_e, juntando ao último grupo de condições, esta outra:

R_{13}) Dados dois sub-conjuntos não vazios A e B de M, tais que todo o elemento de A é maior do que qualquer elemento de B, existe em M, *pelo menos,* um elemento k (elemento separador) tal que: 1) k é igual ou maior do que qualquer elemento de B; 2) qualquer elemento de A é igual ou maior do que k (forma fraca do princípio de Dedekind-Cantor).

Suprimamos nêste último sistema a condição R_{10}^*. O conjunto R_e será, *de certo modo,* o mínimo conjunto aditivo, multiplicativo e ordenado, que satisfaz ao novo sistema. Em vez de averiguar da existência de outros conjuntos que verifiquem porventura as mesmas condições, suprimamos a condição R_{13}, isto é, passemos a considerar o sistema R_1-R_9, R_{11}, R_{12}. Tal sistema será verificado, por exemplo, no conjunto das funções racionais em uma variável x (variável real ou variável racional ou possìvelmente de outra natureza) de coeficientes reais (ou racionais, etc.), com a noção ordinária de produto e a soma de funções racionais e com o seguinte critério de ordenação: *a)* dados dois polinómios $p(x)$ e $q(x)$, supostos ordenados segundo as potências crescentes de x, ter-se-à $p>q$, quando e só quando se tiver $a_i>b_i$ sendo a_i o primeiro coeficiente de $p(x)$ que não é igual ao coeficiente correspondente b_i de $q(x)$; *b)* dadas duas funções racionais $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ (com $q>0$, $s>0$) ter-se-à $\frac{p}{q}>\frac{r}{s}$ quando e só quando $ps>qr$.

Êste conjunto fica por tal processo ordenado, mas não arquimedianamente ordenado, visto que não se verifica nêle a condição R_{10}^*; assim, por exemplo, entre o número 3 e todos os números racionais maiores do que 3 (consíderados os números como polinómios do grau zero) estará compreendido o elemento $3+2x$; o elemento $3+\frac{x}{2}-x^2$. etc.; para lá de todos os números racionais, existirão outros elementos como $\frac{1}{x}$, etc. É-se dêste modo conduzido a uma teoria análoga à dos infinitésimos de ordem inteira (positiva ou negativa). As considerações anteriores são ainda aplicáveis, *mutatis mutandis*: *a)* aos conjuntos das funções racionais, em mais de uma variável; *b)* aos conjuntos das funções meromorfas, reais, em uma ou mais de uma variáveis, com um mesmo domínio de existência.

Examinemos agora o conjunto K dos números complexos ou mesmo o conjunto dos números da forma $a+bi$ com a e b racionais (corpo de números de Gauss). Em tais conjuntos são definidas igualmente uma adição e uma multiplicação que verificam as condições R_1-R_9 (mas não a condição R_{10}). Seria possível definir em tais conjuntos uma relação de ordem que satisfizesse a R_{11}, mas tal relação já não satisfaria certamente a R_{12}: o seu interêsse seria portanto muito reduzido.

Em quási todos os exemplos anteriores (exceptuando os casos de I_n e de N_n), o núcleo de condições R_1-R_9 é respeitado. Estas condições, de carácter puramente operatório (regras de cálculo), são as mais interessantes, do ponto de vista algébrico. Pois bem:

[3] O sentido da expressão «de certo modo» será precisado com a noção de *isomorfismo*, em um outro artigo que espero poder publicar nesta revista. Encontrar-se-à adiante a definição do isomorfismo num caso particular.

Definição — *Chama-se «corpo» ou «domínio de racionalidade» a todo o conjunto* M *de elementos quaisquer, em que sejam definidas duas operações binárias e unívocas — a uma das quais convencionaremos dar o nome de adição* $(+)$, *e à outra o nome de multiplicação* $(\cdot)$ *— gozando das propriedades* $R_1 - R_9$.[4]

Fàcilmente se demonstra que: Para que um sub-conjunto N dum corpo M seja também um corpo relativamente às duas operações definidas em M, é necessário e suficiente que: 1) N contenha 1; 2) dados dois elementos a, b de N (sendo $b \neq 0$), também $a + (-b)$ e ab^{-1} pertençam a N. Se tal condição se verifica, diremos que N é um sub-corpo de M. Podemos agora dar à condição R_{10} *verificada no corpo racional,* a forma seguinte:

R_{10}) Se N é um sub-corpo de M, tem-se $N = M$.

Portanto, R_a admite um único sub-corpo: R_a.

Até aqui, temos visto apenas exemplos de corpos *infinitos,* isto é, de corpos com uma infinidade de elementos. Mas existem porventura corpos *finitos?* A esta pregunta vamos procurar responder.

Como se sabe, diz-se que dois números inteiros relativos a, b são congruentes em relação a um módulo p (sendo p também um inteiro relativo) e escreve-se $a \equiv b\ (p)$ quando $a - b$ é um múltiplo de p. Seja $p = 3$, e representemos, em geral, por $[a]$ a classe de todos os números congruentes ao número a, em relação ao módulo 3; se fôr a' o resto da divisão de a por 3 ter-se-à, evidentemente $[a] = [a']$, visto que $a \equiv a'\ (3)$, e chamaremos a $[a']$ forma canónica de classe $[a]$. Por exemplo: $[7] = [4] = [-2] = [1]$: a forma canónica desta classe será $[1]$. O conjunto I_n dos inteiros relativos ficará assim *repartido*[5] em 3 classes (*classes-resto para o módulo* 3): $[0]$, $[1]$, $[2]$; e entre tais classes podem-se definir naturalmente uma adição e uma multiplicação do modo seguinte: $[a] + [b] = [a + b]$, $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$[6] Aplicando êste critério, e fazendo a redução à forma canónica, podemos construir as duas tabelas seguintes:

Tábua da adição

	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

Tábua da multiplicação

	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

Fàcilmente se vê que tôdas as condições $R_1 - R_9$ são verificadas por tais operações. Em particular, $[0]$ é aqui o módulo da adição e $[1]$ o módulo da multiplicação. Trata-se portanto dum corpo e, precisamente, dum corpo finito. Exemplos análogos se podem obter considerando as classes-resto em relação a qualquer módulo primo p.

É curioso observar que todos êstes corpos finitos verificam a condição R_{10}. Demonstra-se que, dado um corpo Ω, existe sempre um sub-corpo mínimo de Ω, isto é, um corpo Γ contido em todos os sub-corpos de Ω; e que êste corpo mínimo Γ ou é isomorfo[7] ao corpo R_a ou é isomorfo ao corpo das classes-resto em relação a um módulo primo p. No primeiro caso diz-se que Ω tem a característica zero, no segundo caso diz-se que tem a característica p.

Mas ocorre ainda preguntar: O que sucede quando o módulo das congruências não fôr primo? As classes-resto não constituem neste caso um corpo? É o que veremos adiante.

Anéis; domínios de integridade

Consideremos o conjunto das classes-resto em relação ao módulo 6. Definindo nêste conjunto uma adição e uma multiplicação em modo análogo ao que fizemos anteriormente quando se tratava do módulo 3, ver-se-à que as condições $R_1 - R_9$ são tôdas verificadas, excepto a condição R_8; porque, por exemplo, não existe o inverso de $[2]$, isto é, não existe naquêle conjunto nenhum elemento $[x]$ tal que $[x] \cdot [2] = [1]$ (não é sempre possível a divisão por um número diferente de 0).

Consideremos de novo o conjunto I_n: já vimos que são nêle definidas uma adição e uma multiplicação

(4) Suprimindo a condição R_6 chega-se à noção de «corpo assimétrico» (*Schiefkörper*, na terminologia de Van der Waerden). Abandonámos, nêste ponto, a noção de *ordem*. Ela dá origem à noção de limite, e é portanto o ponto de partida para a Análise, para a Topologia.

(5) Diz-se que um conjunto M está *repartido* em sub-conjuntos $A_1 A_2, \cdots$ quando, dado um elemento a de M, a pertence necessàriamente a um dêstes sub-conjuntos e não pode pertencer a dois dêles ao mesmo tempo.

(6) Já conheciamos um exemplo dum corpo cujos elementos são representáveis por classes de elementos dum outro conjunto. Com efeito, todo o número racional pode ser definido por uma infinidade de pares de números inteiros, sendo $[a, b] = [c, d]$ se, e só se, $ad = bc$. Reduzir uma fracção à «forma canónica» é reduzi-la à sua «expressão mais simples».

(7) Diz-se que dois corpos Δ e Ω são isomorfos quando se pode estabelecer entre êles uma correspondência biunívoca que respeite a adição e a multiplicação, isto é, uma correspondência biunívoca tal que, se forem a, b dois elementos arbitrários de Δ e a', b' os elementos correspondentes de Ω, à soma $a + b$, corresponde em Ω a soma $a' + b'$, ao produto $a \cdot b$ corresponde em Ω o produto $a' \cdot b'$.

que verificam as condições $R_1 - R_7$, R_9, mas não a condição R_8. Se, em vez do conjunto dos inteiros relativos, considerarmos o conjunto dos números pares (positivos e negativos) — com a adição e a multiplicação definidas em I_n — vê-se que não só a condição R_8, mas também a condição R_7, se deixa de verificar.

Definições — *Chama-se «anel» a todo o conjunto em que são definidas uma adição e uma multiplicação satisfazendo às condições* $R_2 - R_5$, R_9; *«anel comutativo» a todo o anel em que é verificada a condição* R_6; *«anel comutativo com unidade», a todo o anel comutativo em que é verificada a condição* R_7.

Um outro exemplo de anel comutativo, além dos que já foram apresentados, é-nos fornecido pelo conjunto C_n das funções contínuas num mesmo intervalo (a, b), sendo a multiplicação e a adição ali definidas do seguinte modo:

$f+g=h$ equivalente a $f(x)+g(x) \equiv h(x)$;

$f \cdot g=h$ equivalente a $f(x) \cdot g(x) \equiv h(x)$.

Êste anel possui uma unidade, que é representada pela função $\varphi(x) \equiv 1$.

O interêsse da teoria dos anéis reside principalmente no facto de nêles não ser necessàriamente verificada a condição R_8 (de não ser sempre possível a divisão por um número diferente de zero) — o que dá origem ao conceito de divisibilidade e bem assim a noções correspondentes às de máximo divisor comum, menor múltiplo comum, números primos, etc. [8] Importa notar que o problema correspondente ao da decomposição dum número em factores primos, e o de averiguar em que condições tal decomposição é única (àparte a ordem) — constituem o principal assunto da teoria dos anéis; do mesmo modo que o problema central da teoria dos corpos consiste em averiguar a que condições deve satisfazer um corpo para que nêle seja válida a teoria de Galois (relativa à resolubilidade das equações algébricas por meio de radicais).

No conjunto I_n (e anàlogamente no conjunto dos números pares, dos múltiplos de 3, etc.), não é verificada a condição R_8 — mas é verificada a condição mais fraca:

R_8^*) Se $ab=ac$ e $a \neq 0$, tem-se $b=c$. *Ou ainda, o que é equivalente:* se a equação $ax=b$ admite uma solução, essa solução será única.

Nos outros dois exemplos, que apresentámos, de anéis comutativos — anel das classes-resto par ao módulo 6 e conjunto C_n — a condição R_8^* não é respeitada. Por exemplo, no primeiro dêstes anéis tem-se $[2] \cdot [5] = [2] \cdot [2]$ e $[2] \neq [0]$, sem que se tenha $[5] = [2]$.

Definição — *Chama-se domínio de integridade a todo o anel comutativo que satisfaz à condição* R_8^*.

Um exemplo de domínio de integridade, além dos que já foram apresentados, é-nos oferecido pelos conjuntos de polinómios em uma ou mais variáveis e de coeficientes situados num dado corpo. Uma propriedade interessante dos domínios de integridade, que deriva imediatamente da condição R_8^* (é-lhe mesmo equivalente) é a seguinte: uma equação algébrica de grau n, de coeficientes situados num domínio de integridade I, não pode ter em I mais de n raízes. Daqui resulta que dois polinómios em x, de coeficientes situados em I, de grau não superior a n que tomem o mesmo valor para mais de n valores distintos de x, tem os coeficientes respectivamente iguais (princípio das identidades). Esta propriedade não se verifica nos anéis que não satisfazem à condição R_8^*.

Noção de grupo

Diz-se que um conjunto abstracto M, *em que é definida uma operação* θ, *binária e unívoca, constitui um grupo em relação a* θ, quando são verificadas *as seguintes condições* (a, b, c representam elementos arbitrários de M):

G_1) $(a\theta b)\theta c = a\theta(b\theta c)$ (associatividade)

G_2) Existe em M um elemento u tal que $a\theta u = a$

G_3) Dado um elemento a, existe em M um elemento $\varphi(a)$ tal que $a\theta\varphi(a) = u$.

Se além destas é verificada a condição:

G_4) $a\theta b = b\theta a$ (comutatividade),

diz-se que M é um grupo comutativo ou abeliano.

Vê-se imediatamente que todo o corpo constitui um grupo comutativo relativamente à adição e, o mesmo, se excluirmos o zero, relativamente à multiplicação. Quando num grupo não fôr definida mais de uma operação binária, podemos adoptar para esta o nome de multiplicação, escrevendo $a \cdot b$ em vez de $a\theta b$, 1 em vez de u, a^{-1} em vez de $\varphi(a)$ (notação multiplicativa); ou o nome de adição, escrevendo $a+b$ em vez de $a\theta b$, 0 em vez de u, $-a$ em vez de $\varphi(a)$ (notação aditiva). Trata-se apenas, claro está, duma questão de comodidade.

Fàcilmente se demonstra que, para que um sub-conjunto H dum grupo G constitua também um grupo relativamente à mesma operação definida em G, é necessário e suficiente que (adoptando a notação aditiva), dados dois elementos arbitrários a, b de H, a diferença $a+(-b)$ pertença também a H. Se tal condição se verifica, diz-se que H é um sub-grupo de G. Então, o princípio correspondente ao da indução completa para o anel dos inteiros I_n pode enun-

[8] Para um estudo destas questões em tôda a sua generalidade, convém introduzir uma outra noção — a noção de «ideal» — que me abstenho de apresentar aqui, para não tornar mais longo êste artigo.

ciar-se dêste modo: «Se N fôr um sub-grupo aditivo de M, tem-se $N=M$».

Um exemplo típico de grupo é-nos dado pelos conjuntos de transformações. Chama-se transformação biunívoca dum conjunto A em si mesmo a tôda a operação t que faça corresponder a cada elemento x de A um, e um só elemento $y=t(x)$ também de A, de modo que: *a)* elementos distintos de A sejam transformados por t em elementos distintos de A; *b)* dado um elemento y_1 de A, existe sempre um elemento x_1 de A tal que $y_1=t(x_1)$. *Convencionemos* chamar *produto* de duas transformações biunívocas s, t do conjunto A em si mesmo (pela ordem em que estão representadas) à transformação st que resulta de executar primeiro t e depois s. isto é, transformação st tal que $st(x)=s[t(x)]$, qualquer que seja o elemento x de A. É fácil ver que esta *multiplicação* satisfaz às condições G_1-G_3, e que, portanto, o conjunto Σ das transformações biunívocas dum conjunto A em si mesmo constitui um grupo relativamente a tal operação. Em particular, a unidade é aqui representada pela *identidade,* isto é, por aquela transformação que deixa fixos todos os elementos de A; e a transformação inversa t^{-1} duma dada transformação t será definida pela condição: $t^{-1}[t(x)]=x$, qualquer que seja x.

Por exemplo, as transformações biunívocas do conjunto R_e em si mesmo são representadas por aquelas funções reais de variável real que admitem uma função inversa. Consideremos, no conjunto τ de tais funções, o conjunto Γ das funções contínuas: tal conjunto Γ coïncide, visìvelmente, com o conjunto das funções crescentes e das funções decrescentes; e é fácil reconhecer que o conjunto Γ constitui um sub-grupo de τ, relativamente à multiplicação que definimos para as transformações.[9] Porém, o grupo Γ não é comutativo, como resulta do seguinte exemplo: Sejam as funções $\varphi(x)\equiv x^3$, $\psi(x)\equiv 1-x$ (crescente a primeira, decrescente a segunda); tem-se, por um lado, $\varphi[\psi(x)]\equiv[\psi(x)]^3\equiv(1-x)^3$, e, por outro lado, $\psi[\varphi(x)]\equiv 1-\varphi(x)\equiv 1-x^3$. Êste exemplo mostra que os grupos de transformações não são geralmente comutativos.

Notemos ainda que o conjunto das funções crescentes constitui um sub-grupo de Γ, relativamente à operação considerada.

A Geometria fornece-nos exemplos notáveis de grupos de transformações. O conjunto das translações, o conjunto das rotações em relação a um eixo (ou em relação a um ponto), o conjunto das simetrias em relação a um plano, o conjunto das homotetias em relação a um ponto — constituem grupos de transformações, e todos êstes grupos estão contidos no grupo das semelhanças, característico da geometria euclidiana. Anàlogamente, as afinidades, as projectividades, as correlações. etc., formam grupos de transformações. Deve-se a Felix Klein a ideia (apresentada no célebre programa de Erlangen) de caracterizar as geometrias por meio de grupos de transformações.[10]

Notemos, por último, que, se o conjunto A é finito, às transformações biunívocas de A em si mesmo se dá o nome de substituïções. Os grupos de substituïções desempenham um papel fundamental na teoria de Galois; històricamente, representam o primeiro passo para a formulação explícita do conceito de grupo.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1 — Caracterização do corpo dos números da forma $a+b\sqrt{2}$, com a, b racionais, por meio da adição, da multiplicação e da relação $>$. Construção abstracta dêste corpo a partir do corpo racional.

2 — Idem para o corpo dos números da forma $f(\log 2)$, sendo $\log 2$ o logaritmo ordinário (real) de 2 e f uma função racional de coeficientes situados no corpo a que se refere o problema 1.

3 — Idem, para o corpo de números de Gauss (introduzindo de um modo adequado a relação $>$).

4 — Idem, para o corpo complexo.

5 — Averiguar se existem corpos ordenados *diferentes* de R_e[11] que verifiquem as condições R_{11}, R_{12}, R_{13} (no caso negativo, a condição R^*_{10} — princípio de Arquimedes — será supérflua na caracterização, que nêste artigo foi apresentada, do corpo real).

6 — Demonstrar que o anel C_n das funções contínuas, definidas num mesmo intervalo (a, b), não constitui um domínio de integridade.

Nota — A resolução dêstes problemas parece-nos bastante recomendável para a iniciação do leitor nos métodos da Matemática moderna. Publicarei soluções dos mais interessantes num futuro número desta revista.

Roma, Março de 1944.

[9] Esta definição do produto não é a mesma que considerámos atrás, ao definir a forma C_n das funções contínuas num intervalo.

[10] Um outro exemplo importante é o do grupo dos automorfismos dum corpo. Chama-se automorfismo dum corpo Ω a todo o isomorfismo de Ω em si mesmo. Demonstra-se fàcilmente que os automorfismos dum corpo formam um grupo de transformações. O corpo R_a admite um só automorfismo: a identidade. O corpo dos números de Gauss (números de forma $a+bi$, com a e b racionais) admite, além da identidade, o automorfismo que transforma $a+bi$ no seu conjugado $a-bi$.

[11] Em vez de «diferentes de R_e», seria mais correcto escrever «não isomorfos a R_e». No entanto, o corpo R_e pode considerar-se definido *a menos de um isomorfismo.*

O teorema de Cantor-Bendixson

por **J. Albuquerque** (bolseiro em Roma do I. A. C.)

Um teorema muito importante, sôbre o qual desejamos chamar a atenção dos leitores da «Gazeta de Matemática», teorema que foi enunciado pela primeira vez por Bendixson em 1883, e é hoje universalmente conhecido por teorema de Cantor-Bendixson, afirma o seguinte:

Teorema de Cantor-Bendixson. *Todo o conjunto linear fechado é a soma de um conjunto perfeito e de um conjunto numerável.*

Trata-se de um teorema típico de estructura, e é essa a razão da sua importância e freqüente aplicação nas questões de análise.

Deram-se dêste teorema muitas demonstrações e poderiamos limitar êste artigo a uma delas que escolheriamos naturalmente entre as mais simples, mas o nosso procedimento vai ser outro. Procuraremos antes aprofundar o mais possível o estudo da estructura de um conjunto qualquer do espaço, e depois quási como coisa secundária surgirá uma demonstração, não do teorema, mas de uma proposição bastante mais geral e rica do que êle.

Como base dêste estudo deveremos dar algumas definições, mas limitaremos ao mínimo as noções e as propriedades do espaço que poremos em cena.

Consideremos um espaço onde cada ponto p tem a sua família de visinhanças V_p, e onde se dá a seguinte definição fundamental e imprescindível de ponto limite ou ponto de acumulação.

Difinição 1. Um ponto p do espaço, é ponto de acumulação de um conjunto E se e só se tôda a visinhança de p contiver pelo menos um ponto de E distinto de p.

Dado um conjunto E poderemos então falar do conjunto E' dos seus pontos de acumulação, conjunto chamado o derivado de E.

Definição 2. Um conjunto diz-se *denso em si* se está contido no seu derivado; portanto o conjunto X é denso em si se e só se $X \subset X'$.

Um conjunto diz-se *fechado* se contém o seu derivado; portanto o conjunto X é fechado se e só se $X' \subset X$.

Um conjunto diz-se *perfeito* se é simultâneamente denso em si e fechado; portanto o conjunto X é perfeito se e só se $X = X'$.

Um conjunto diz-se *clairsemé* se não contém um sub-conjunto denso em si não vazio.

Definição 3. Dado um conjunto X chama-se *coerência de* X, ao conjunto de todos os pontos comuns a X e ao derivado X'; a coerência é pois um operador que a cada X faz corresponder um conjunto bem determinado: $c(X) = X \cdot X'$. A coerência do conjunto X é evidentemente uma parte do conjunto X.

Postas estas definições, tomemos um conjunto qualquer A do espaço, e formemos a seguinte sucessão:

$$A \supset c(A) \supset c^2(A) \supset \cdots \supset c^n(A) \supset \cdots$$

e ponhamos por definição: $c^{\omega}(A) = \prod_{n=1}^{\infty} c^n(A)$, onde ω representa o primeiro número ordinal transfinito. De uma maneira geral, ponhamos para um número ordinal $\alpha < \Omega$ de segunda espécie, isto é, tal que não há um ordinal que o preceda imediatamente:

$$c^{\alpha}(A) = \prod_{\beta < \alpha} c^{\beta}(A),$$

onde β percorre todos os números ordinais que precedem α.

Temos assim a sucessão:

$$(1) \qquad A \supset c(A) \supset c^2(A) \supset \cdots \supset c^{\omega}(A) \supset \cdots \supset c^{\alpha}(A) \supset \cdots$$

A sucessão (1) verifica a seguinte importante propriedade:

P. *Cada têrmo da sucessão está ligado a* A *por uma cadeia de conjuntos cada um dos quais, ou tem um que o precede imediatamente e de que então é a coerência, ou não tem um que o precede imediatamente na cadeia e então é produto de todos os precedentes.*

A todo o conjunto do espaço ligado ao conjunto A por uma cadeia nas condições indicadas na propriedade P, chamaremos um *conjunto obtido de* A *por meio da operação* P.

É evidente que: *todo o têrmo da sucessão* (1) *é obtido de* A *por meio da operação* P.

Porém não se pode afirmar que: *todo o conjunto de* X *do espaço obtido de* A *por meio da operação* P, *pertence à sucessão* (1).

Considere-se então uma sucessão (2) definida por A e pela operação P, isto é, para a qual se possa afirmar que: *todo o conjunto* X *do espaço obtido de* A *por meio da operação* P, *pertence à sucessão* (2).

É evidente que todo o têrmo da sucessão (1) é um termo da sucessão (2).

Teorema 1. *A sucessão* (2) *tem um último têrmo que é um conjunto denso em si, nulo ou não.*

Demonstremos por absurdo, isto é, suponhamos que:

H. *A sucessão* (2) *não tem um têrmo denso em si* (nulo ou não).

Representemos por D o produto de *todos* os têrmos da sucessão (2) · O conjunto D pertence à sucessão (2) por ser obtido de A por meio da operação P. O conjunto D é pois o último têrmo da sucessão e não pode ser nulo porque seria denso em si e estaríamos em contradição com a hipótese H.

Logo $D \neq 0$, e como D não é denso em si, por hipótese, teremos: $c(D) \neq D$, $c(D) \subset D$.

Mas então D não seria o último termo da sucessão e produto de *todos* os têrmos.

O produto da totalidade dos têrmos da sucessão, é lògicamente legitimado pelos dois seguintes factos: *a)* admite-se que êsse produto seja nulo; *b)* a sucessão (2) é uma sucessão monótona decrescente.

Para ser D o último termo da sucessão deveria ter-se: $D = c(D)$, mas então D seria um conjunto denso em si como fàcilmente se veria, e estaríamos de novo em contradição com a hipótese H.

A hipótese H é portanto inadmissível, a sucessão (2) possui um têrmo denso em si nulo ou não, e êsse têrmo é necessàriamente o último têrmo da sucessão. c. q. d.

Dêste teorema vamos tirar algumas conclusões, que serão outros tantos corolários. Vejamos em primeiro lugar que o conjunto $A-D$ é um conjunto clairsemé; com efeito, o conjunto $A-D$ não pode conter um conjunto denso em si não vazio, porque êsse conjunto teria que pertencer a $c(A)$ e em seguida a $c^2(A)$ e assim sucessivamente e vê-lo-íamos repelido para o conjunto D. Mas não se viu sòmente que $A-D$ era clairsemé mas também que o conjunto D é o maior conjunto denso em si contido em A. Porém o conjunto $A-D$ pode ser vazio e o conjunto A reduzir-se ao conjunto D, e do mesmo modo o conjunto D pode anular-se e portanto o conjunto A ser clairsemé. Em resumo, teremos o seguinte teorema:

Teorema 2. *Todo o conjunto é a soma de dois conjuntos disjuntos, um o maior conjunto denso em si nêle contido, outro clairsemé* (podendo anular-se qualquer dêles).

Supondo que o conjunto A é um conjunto fechado, A contém não só o seu derivado como também o derivado de todo o seu sub-conjunto, em particular o derivado do conjunto D. Mas o derivado de um conjunto D denso em si é um conjunto também denso em si, que contém D. O conjunto D contém e está contido no seu derivado, é fechado e denso em si simultâneamente, e portanto é um conjunto perfeito; conclui-se pois que:

Teorema 3. *Todo o conjunto fechado é a soma de dois conjuntos, um perfeito outro clairsemé* (podendo anular-se qualquer dêles).

Retomemos o conjunto A e a correspondente sucessão (2) com o seu último têrmo D. Seja p um ponto do conjunto $A-D$; como a sucessão (2) é ordenada, o ponto p pertencerá a um certo número de têrmos da sucessão havendo necessàriamente um último têrmo a que p pertence, isto é, havendo um têrmo $c^{\alpha}(A)$ que contém p mas sem que p pertença a $c^{\alpha+1}(A)$. Então o ponto p não pode ser ponto de acumulação do conjunto $c^{\alpha}(A)$ e portanto existe uma visinhança V_p de p que só tem de comum com $c^{\alpha}(A)$, o ponto p. Tal sucede com cada ponto do conjunto $A-D$, e dado outro ponto q de $A-D$, mesmo que êle pertença a $c^{\alpha}(A)$ sem pertencer a $c^{\alpha+1}(A)$, as visinhanças V_p e V_q que lhes correspondem pelo modo indicado, serão diferentes porque uma delas contém um dos pontos e não contém o outro. Então: *a cada ponto* p *de* A$-$D *corresponde uma visinhança* V_p *de tal modo que se* $p_1 \neq p_2$ *também* $Vp_1 \neq Vp_2$.

Façamos agora apêlo a uma última propriedade do espaço:

Definição 4. Um espaço (ou um conjunto do espaço) diz-se *perfeitamente separável* se existe uma família numerável F de conjuntos, tal que dado um ponto p do espaço (ou do conjunto) se pode tomar para família de visinhanças de p, a família formada pelos conjuntos de F aos quais o ponto p é interior, e isto de modo que não há alteração na definição de ponto de acumulação.

É evidente que todo o sub-conjunto de um conjunto perfeitamente separável é um conjunto também perfeitamente separável.

Suponhamos então que o conjunto A é perfeitamente separável; então podemos supôr que a cada ponto de $A-D$ corresponde uma visinhança V_p, tal como atrás se indicou, mas escolhida precisamente na família F. Como esta família é uma família numerável concluímos que o conjunto $A-D$ é necessàriamente um conjunto numerável.

Resumindo: em primeiro lugar é lícito enunciar a seguinte propriedade:

Teorema 4. *Todo o conjunto clairsemé perfeitamente separável, é numerável.*

e finalmente podemos enunciar agora:

Teorema de Cantor-Bendixson. *Todo o conjunto fechado perfeitamente separável é a soma de dois conjuntos disjuntos, um perfeito, outro numerável e clairsemé* (podendo anular-se qualquer dêles).

O teorema anterior é, como tínhamos anunciado, uma proposição muito mais geral que o clássico teorema de Bendixson, porque é válida para todos os espaços cartesianos, qualquer que seja o seu número de dimensões, e mesmo válida para espaços muito mais gerais.

Mas o teorema anterior é mais rico de conteúdo que o de Bendixson, visto que afirma que o conjunto numerável é clairsemé, e isso não sucede com todos os conjuntos numeráveis de um espaço mesmo quando êsse espaço é o espaço linear; com efeito, o conjunto dos pontos da recta de abscissa racional, é um conjunto numerável e não é um conjunto clairsemé porque é denso em si.

Roma, 29 de Abril de 1944.

ESTATÍSTICA MATEMÁTICA

O n.º 24 das «Notícias Científicas Mensais», publicação editada pelo *British Council*, e distribuido em Portugal, em Outubro de 1943, quando do 1.º Congresso Nacional de Ciências Agrárias, é inteiramente dedicado ao centenário da Estação Experimental de Rothamsted. Como não podia deixar de ser, F. Yates, chefe do Departamento de Estatística da referida Estação, analisa, num dos artigos, as contribuïções fundamentais prestadas à Estatística pelo célebre estabelecimento de investigação.

A «Gazeta de Matemática», cônscia da importância científica dos novos métodos estatísticos e da necessidade indiscutível da sua divulgação, apresenta aos seus leitores uma tradução do referido artigo.

A REVOLUÇÃO NA ESTATÍSTICA

por ***F. Yates, Sc. D.***

O desenvolvimento da investigação biológica exigiu a criação de métodos matemáticos capazes de inferirem conclusões significativas de pequenas amostras de material altamente variável. Quando em 1919 foi fundado o Departamento de Estatística em Rothamsted, já se tinham verificado alguns progressos, mas em breve se notou que os métodos existentes eram ainda inadequados para o tratamento dos problemas práticos da investigação agrícola e biológica.

O Departamento dedicou portanto a sua atenção ao aperfeiçoamento dêsses métodos. Fizeram-se rápidos progressos, devidos em grande parte ao íntimo contacto entre matemáticos e biólogos, e não é exagerado afirmar que tanto a Estatística Matemática como os métodos práticos da Estatistica Biológica têm sido profundamente transformados como resultado do trabalho levado a cabo em Rothamsted.

Os mais notáveis progressos realizados no campo biológico — adoptados hoje em todo o mundo — são:

1) — Desenvolvimento da teoria exacta das «pequenas amostras».

2) — Desenvolvimento da técnica do delineamento experimental de tal maneira que a partir dum dado material é agora possível extrair informação mais completa e compreensiva além de se poder avaliar a precisão dos resultados utilizando apenas a evidência fornecida pelos próprios dados.

3) — Aperfeiçoamento dos métodos usados na «amostragem» de material biológico de todos os tipos.

4) — Desenvolvimento da interpretação estatística dos problemas genéticos.

Continua a trabalhar-se activamente sôbre a elaboração e extensão dos métodos estatísticos. À medida que surgem novos problemas faz-se sempre uma revisão das questões de método. Por exemplo, os métodos criados e desenvolvidos para os ensaios de campo, estão agora a ser adaptados ao campo nutritivo animal, à medicina e à indústria. Trabalha-se ainda no estudo de métodos de «amostragem» apropriados aos inquéritos em larga escala e de novos métodos destinados à análise do material obtido.

Até ao deflagrar da guerra, àparte no campo biológico, não se tinha compreendido a importância dos novos desenvolvimentos mas reconhece-se hoje, cada vez mais claramente, que estes desenvolvimentos são fundamentais em todos os ramos da Estatística. Em particular a marcada separação que existia entre a Estatística Biológica e a Estatística Económica tende a desaparecer. Assim, por exemplo, o valor dos novos métodos de «amostragem» foi demonstrado na sua aplicação a inquéritos em larga escala como sejam à investigação dos recursos em madeiras, estudo das práticas agrícolas, etc., etc., além de que se têm usado novos métodos destinados ao desenvolvimento de uma sólida política de guerra sôbre adubos, de modo a assegurar um equilíbrio apropriado entre a sua importação e a de outras mercadorias e a melhor utilização que dêles se possa obter para a produção máxima de alimentos. Uma das mais valiosas contribuïções que o Departamento poderá dar será acelerar e intensificar êste reconhecimento da utilidade mais ampla dos novos desenvolvimentos.

Durante a guerra os métodos estatísticos desenvolvidos pelo Departamento têm sido aplicados a numerosos problemas militares de todos os tipos e o próprio Departamento está activamente empenhado neste trabalho.

N. B. — Chamamos a atenção do leitor para o n.º 55 do nosso Boletim Bibliográfico dêste número onde se faz referência à publicação «Memorandum on Official Statistics» da Royal Statistical Society.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

JÚNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA (J. I. M.)

COLÓQUIOS DE ANÁLISE GERAL

Conforme o anunciado no n.º 18 da «Gazeta de Matemática», realizaram-se no Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto, por iniciativa da Junta de Investigação Matemática, a partir de 22 de Janeiro, colóquios semanais, onde foram versados os seguintes assuntos:

I — **Álgebra Moderna** — *Elementos da Teoria dos Grupos* — 5 colóquios por José Morgado; *Elementos da Teoria dos Anéis* — 3 colóquios por J. Gaspar Teixeira; *Séries de Composição* — 3 colóquios por Rui Verdial.

II — **Topologia Geral** — *Espaços de Sierpinski* — 2 colóquios por António Monteiro; *Espaços acessíveis de Fréchet* — 2 colóquios por António Monteiro; *Funções Contínuas* — 3 colóquios por A. Pereira Gomes; *Relativização* — 2 colóquios por M. Helena Ferreira; *Bases e Vizinhanças* — 2 colóquios por A. Pereira Gomes.

III — **Teoria Geral da Medida** — *Introdução* — 2 colóquios por Laureano Barros; *Medida à Jordan* — 3 colóquios por Laureano Barros; *Introdução à medida à Borel* — 1 colóquio por L. Neves Real; *Medida à Borel* — 3 colóquios por L. Neves Real; *Medida à Lebesgue* — 1 colóquio por L. Neves Real.

Estavam também previstos colóquios sôbre a *Teoria Geral da Integração* e *Teoria das Estruturas*, mas não se iniciaram por falta de tempo, ficando assim adiados para o próximo ano lectivo.

Estão já publicados onze cadernos, indicados na 2.ª página da capa da «Gazeta de Matemática».

Às primeiras palestras assistiu um número considerável de estudantes e pessoas estranhas à Universidade, o que prova ter despertado grande interêsse o programa de trabalhos esboçado. A freqüência foi, porém, diminuindo, devido, entre outras, às razões seguintes: 1.ª Não houve uma introdução cuidadosa aos assuntos tratados; 2.ª A discussão não foi suficientemente fomentada; 3.ª Falta de exemplos elucidativos, que permitissem a ligação da matéria exposta com questões conhecidas da Análise Clássica.

O reconhecimento destas deficiências permite que se espere, para o próximo ano lectivo, uma modificação no regime de trabalhos, de forma que melhor se realizem os objectivos em vista.

Laureano Barros

CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA DO PORTO

SEMINÁRIO DE FÍSICA TEÓRICA

Prolongaram-se até fins de Maio passado as actividades do Seminário de Física Teórica anexo ao Centro dos Estudos de Matemática do Pôrto, dirigido êste ano pelo Prof. A. Proca.

É de lamentar que a defeituosa organização dos nossos trabalhos escolares tenha mais uma vez impedido que os alunos universitários interessados por questões de Física Teórica aproveitassem esta magnífica oportunidade de se iniciarem em trabalhos de investigação sob a direcção do grande orientador que é o Prof. A. Proca. Assim, os trabalhos do seminário resumiram-se numa série de lições — aliás muito úteis — realizadas semanalmente pelos Profs. A. Proca e R. Sarmento de Beires. As primeiras, enquadradas no programa esboçado no n.º 18 da Gazeta, visaram o estudo teórico de partículas elementares — electrão e mesão — e a divulgação dos métodos da «segunda quantificação».

Sumários das lições realizadas (a partir das que foram referidas no n.º 18): 1. Les particules observables em Mécanique Quantique — 2. Les probabilités en Mécanique Ondulatoire. Équations du mouvement — 3. Équations générales des particules élémentaires. Introduction de la Relativité. Schéma de Dirac. — 4. Propriétés générales des particules représentées par des équations type Dirac et analogues — 5. Électron de Dirac. Aspect ondulatoire — 6. Negatons. Cas d'un champ. Positons — 7. Électrons libres. Compléments. — 8. Électrons. Symetries. Ondes planes. Idée de la seconde quantification. — 9. Ondes planes. Matérialisation. La seconde quantification. — 10. Coup d'oeil général sur les particules élémentaires et leurs lois de mouvement. — 11. Étude théorique des mésons. Mésons à fonction d'onde scalaire et réelle. Application à la seconde quantification. — 12. Mésons de spin nul. Quantification.

As lições do Prof. Sarmento de Beires podem ser divididas em duas categorias: — na 1.ª historiou-se detalhadamente o aparecimento da Mecânica Ondulatória até se estabelecer a equação de Shrödinger; como aplicação, estudou-se o problema da quantificação do átomo de hidrogénio segundo Shrödinger; — a 2.ª constou duma introdução matemática à Mecânica Quântica e da exposição dos seus princípios.

Sumários das lições realizadas (depois das anunciadas no n.º 18): 1. Grupos de ondas e a noção de velocidade de grupo. Aplicação ao estabelecimento das equações da Mecânica Ondulatória de Shrödinger — 2. Relações de incerteza de Heisenberg. Quantificação da energia no átomo de hidrogénio. Confronto com os resultados da teoria de Bohr-Sommerfeld. — 3, 4, 5, 6. Os princípios da Mecânica Quântica: *a)* Observáveis. *b)* Operadores. *c)* O método da Mecânica Quântica. Associação de operadores às grandezas físicas. Noção de probabilidade de estado. *d)* O espaço vertorial a *n* dimensões e o espaço de Hilbert. *e)* A significação da função de onda segundo Shrödinger e a hipótese das probabilidades de Born. *f)* Compatibilidade das grandezas físicas e permutabilidade dos respectivos operadores. Valores médios. Os valores médios e a mecânica clássica.

Como complemento duma lição do Prof. A Proca o aluno F. Soares David, da Faculdade de Ciências fêz uma comunicação subordinada ao título: «Quantificação do átomo de hidrogénio na teoria de Dirac».

F. Soares David

SÔBRE O PROGRAMA DAS PROVAS DE UM CONCURSO PARA ACTUÁRIO

por **A. Sá da Costa** (bolseiro em Zürich, do I. A. C.)

No n.º 18 da *Gazeta de Matemática* transcreve-se o programa das provas de um concurso para actuário.

Sem pôr em causa a competência profissional e as bôas intenções dos organizadores do programa referido, temos de reconhecer que êste não corresponde ao objectivo do concurso — ordenar linearmente os actuários concorrentes — e é revelador da tendência para o primário que o nosso meio acusa vincadamente.

Por êste motivo, com exclusão expressa de qualquer outro, valerá a pena analisar resumidamente o caso.

A leitura do programa em causa, levada a cabo isoladamente, poderá levantar, na melhor das hipóteses, a leve suspeita de que se tratará de uma relação incompleta e um tanto desordenada de assuntos cujo conhecimento é necessário, mas não suficiente, para o actuário e cuja posse, portanto, o não caracterisa. E será de crer que a determinante dessa suspeita estará no texto modesto da alínea *b*) do programa e não no da alínea *a*), apesar da supremacia conferida às provas que a esta correspondem.

Com efeito, na alínea *a*) mencionam-se assuntos cujo conhecimento, como elementar, é legítimo exigir de todos os alunos dos dois primeiros anos de matemática das nossas escolas superiores (parágrafos 1.º e 2.º e, nalguns casos, 3.º e 7.º), ou assuntos que fazem parte dos elementos preparatórios ou subsidiários na formação do actuário (parágrafos 3.º a 7.º). E, boa parte dos assuntos referidos na alínea *a*) se incluem na preparação pre-universitária de muitos países europeus.

Por outro lado, se se considerar que os actuários são recrutados entre os licenciados em ciências matemáticas e os licenciados em ciências económicas e financeiras (secção finanças), maior relêvo tomará o carácter rudimentar de todos ou quási todos os assuntos mencionados naquela alínea.

¿Esta tendência para os rudimentos não nos fará correr o risco de assistir à fixação de um programa de concursos universal consubstanciado no consagrado «ler, escrever e contar»?

Parece ser, contudo, a exclusão — tão completa que é impossível não a crer intencional — das provas de um concurso para *actuário* de matéria *especificamente actuarial* o elemento mais revelador da tendência referida.

Não se exigem provas sôbre a teoria ou técnica dos seguros de vida. Também não se incluem provas sôbre a teoria ou a técnica dos seguros sociais, cuja importância no caso se afigura decisiva aos olhos do leigo e que, segundo supomos, não fazem parte dos programas normais dos cursos a cuja freqüência são obrigados os pretendentes ao título de actuário. Apesar de uma parte dos concorrentes não ter a obrigação legal de os conhecer, os aspectos sociais, económicos e jurídicos dos problemas actuariais não constituem matéria senão para a receosa prova elementar da alínea *b*).

¿Será aceitável ou possível a realização de uma classificação de determinados especialistas com base em provas sôbre assuntos que desempenham na sua formação um papel elementar ou lateral?

Objectar-se-à, talvez, com a má preparação do actuário mesmo no que respeita aos assuntos basilares e subsidiários. Isso levantará uma outra questão não menos importante. Mas, aceitando como provada essa má preparação, ¿ não constituiria ela uma razão mais para tornar convenientemente exigentes tôdas as provas para actuários e nunca um motivo de redução do nível dessas provas ao da eventual impreparação? É natural concluir, portanto, que o programa não corresponde à intenção do concurso.

Ou, ¿ não se tratará de um concurso para o provimento de um lugar de actuário?

Zürick, 12 de Março de 1944.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Nos actuais programas de matemática dos liceus, não são incluídos certos capítulos como, propriedades dos polinómios, equações transcendentes, aproximações numéricas, e outros, cuja necessidade é evidente, quer sob o ponto de vista de cultura geral, quer para a continuação de estudos superiores. A reforma dos programas prevendo a criação de um oitavo ano no curso liceal, deve ter deixado para inclusão nos seus programas, estas matérias. E porque o seu ensino no primeiro ano universitário acarretaria perdas de tempo em prejuízo de outros assuntos, entende-se que o seu estudo deve ser feito como preparação para a entrada nas Universidades. É assim que nos exames de aptidão aparecem questões sôbre aquêles capítulos. E porque assim é, e porque os candidatos necessitam preparação para êsses exames, a «Gazeta de Matemática», com o intuito de fornecer elementos de preparação nêsse sentido, decidiu publicar nesta secção, a par de outros, artigos sôbre aquelas matérias que já em tempo pertenceram ao ensino liceal. É dêste tipo o artigo seguinte.

RESOLUÇÃO DE ALGUMAS EQUAÇÕES TRANSCENDENTES

*por **José da Silva Paulo***

0. A diversidade de tipos de equações transcendentes, a impossibilidade da resolução da grande maioria destas equações quando se consideram simplesmente as soluções reais e a extensão dos conhecimentos matemáticos do aluno que termina o curso liceal, estabelecem uma limitação ao estudo que fazemos da resolução de equações transcendentes. Assim trataremos simplesmente de equações exponenciais e trigonométricas, e mesmo destas só alguns tipos de maior aplicação nas questões de matemática, considerando ùnicamente as soluções reais.

1. *Equações exponenciais* — Os conhecimentos que se requerem para a resolução dos tipos de equações que vamos apresentar são simplesmente as propriedades elementares da função exponencial e da sua inversa, a função logarítmica.

Problema 1 — Seja resolver a equação $a^x=b$. Pela aplicação de logaritmos, tem-se:

$$x\log a=\log b \text{ e } x=\log b:\log a.$$

Exercício 1 — Resolver a equação $2^x=16$, vem $x=1{,}30412:0{,}30103=4$. Note-se que a solução da equação, pela sua simplicidade, era imediata. Note-se também, que no caso mais geral o cociente dos logaritmos não dará senão um valor aproximado, dados os êrros das mantissas dos logaritmos.

Exercício 2 — Resolver a equação $24^{3x-2}=10000$. Teremos sucessivamente:

$$3x-2=4:\log 24 \text{ e } x=(2+4:\log 24):3=1{,}6327.$$

Problema 2 — Resolver a equação: $am^{2x}+bm^x+c=0$. Fazendo a substituïção $y=m^x$ resulta $ay^2+by+c=0$ e a substituïção de y faz-nos cair numa equação do tipo anterior, que permite determinar x.

Exercício 3 — Seja a equação $4\cdot 3^x-\dfrac{729}{3^x}-81=0$ fazendo $y=3^x$ e desembaraçando de denominadores vem $4y^2-81y-729=0$ a equação que tem as soluções $y_1=-27/4$ e $y_2=27$, das quais só se aproveita a segunda, por os números negativos não terem logaritmos reais, obtendo-se para x o valor 3.

Exercício 4 — Resolver a equação $2^{2x-2}-2^x-8=0$. A equação é equivalente a $2^{2x}-2^2\cdot 2^x-32=0$ e fazendo $y=2^x$ vem $y^2-4y-32=0$ cujas soluções são $y_1=-4$ e $y_2=8$ e portanto $x=3$.

Problema 3 — Equações do tipo $\log f(x)\pm\log g(x)=\log c$. Consideremos simplesmente o sinal $+$, pois o tratamento é análogo para o caso do sinal $-$. A equação é equivalente a $\log[f(x)\cdot g(x)]=\log c$ ou $f(x)\cdot g(x)=c$, equação que resolvida nos dá os valores de x.

Exercício 5 — Resolver $\log\sqrt{7x+3}+\log\sqrt{4x+3}=\dfrac{1}{2}+\log 3$ ou seja $\log\sqrt{(7x+3)\,(4x+5)}=\log 3\sqrt{10}$ donde $(7x+3)\,(4x+5)=90$ e $28x^2+47x-75=0$ equação cujas soluções são $x_1=-75:28$ e $x_2=1$, das quais a primeira não é solução da proposta.

Problema 4 — Resolver o sistema $\log x+\log y=m$; $ax+by=n$. Êste pode escrever-se $\log xy=m$ e $ax+by=c$; ou $xy=10^m$, com $ax+by=c$; a resolução dêste último sistema dá-nos os valores de x e y.

Exercício 6 — Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \log x+\log y=2 \\ 2\,x+y=30 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} xy=10^2 \\ 2x+y=30 \end{cases}$$

cujas soluções são $x_1=5$ $y_1=20$; $x_2=10$ $y_2=10$.

Exercício 7 — Outro sistema de tipo semelhante é:

$$\begin{cases} \log x-3\log=0 \\ x-\ 9y\ =0 \end{cases} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} \log x : y^3=\log 1 \\ x-9y=0 \end{cases}$$

ou $\begin{cases} x=y^3 \\ x=9y \end{cases}$ donde $y^3-9y=0$ cujas soluções são $y_1=0$, $y_2=-3$ e $y_3=3$; sendo as duas primeiras de excluir, pois a 1.ª torna a primeira equação do sistema proposto indeterminada e a 2.ª pór não considerarmos logaritmos imaginários; a 3.ª dará 27 para valor de x.

Exercícios propostos

Resolva as seguintes equações:

1) $\sqrt[3x]{1000}=10$.
2) $\sqrt[x]{20}=10^x$.
3) $4^x\cdot 5^x=1700$.
4) $16^x+16^{1-x}=10$.
5) $3^{x^2-3/4}=9^{x/2}$.
6) $\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2$.

Resolva os sistemas:

1) $\begin{cases} \log x-\log y=\log 2 \\ x-y=2 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} \log(x+1)+\log(y+1)=1 \\ x+y\ =5 \end{cases}$.

2. *Equações trigonométricas* — Uma equação trigonométrica a uma incógnita é uma equação que relaciona entre si funções circulares directas ou inversas dessa incógnita. Assim as equações $x+\cos x-3\operatorname{tg} x=\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{arc\,sen} x+\operatorname{arc\,cos} x=\pi/4$ são equações trigonométricas. Estudaremos aqui, pelas razões já apontadas, só alguns tipos mais importantes destas equações, para a resolução das quais basta o conhecimento das propriedades das funções circulares directas e inversas.

Se numa equação trigonométrica só entram funções circulares directas é aconselhável, para a sua resolução, exprimir tôdas as funções numa delas. Para a escôlha prática dessa função, na qual se exprimem tôdas as outras, dá-nos indicações a regra de *Bioche,* que se enuncia:

Regra de Bioche — *Considerem-se os valores* $-x, \pi-x$ *e* $\pi+x$, *e substituam-se em vez de* x *na equação proposta, averiguando qual dêles deixa invariante a equação. Escolher-se-á para elemento de redução a função circular de* x *que se conserve invariante para as mesmas substituïções que a equação dada.*

Quere dizer, se a equação ficar invariante para a substituïção de x por $-x$, o elemento de redução será $\cos x$ pois $\cos x=\cos(-x)$; se fôr $\pi-x$ a substituïção que a deixa invariante, usar-se-á a função $\operatorname{sen} x$ por ser $\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}(\pi-x)$, e no terceiro caso a função de redução será $\operatorname{tg} x$ pois $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(\pi+x)$. Se a equação ficar invariante para tôdas as substituïções, o elemento de redução será $\cos 2x$ pois esta função fica invariante para tôdas aquelas substituïções; finalmente se a equação não ficar invariante para nenhuma das substituïções há vantagem em escolher a função $\operatorname{tg} x/2$.

Problema 5 — Equações do tipo $a\operatorname{sen} x+b\cos x=c$. Aplicando a regra de Bioche encontramos para elemento de redução $\operatorname{tg} x/2$. Ora como $\operatorname{sen} x=2\operatorname{tg} x/2 : (1+\operatorname{tg}^2 x/2)$ e $\cos x=(1-\operatorname{tg}^2 x/2):(1+\operatorname{tg}^2 x/2)$ fazendo para abreviar $\operatorname{tg} x/2=z$, substituindo na equação proposta e desembaraçando de denominadores obtém-se: $(b+c)\,z^2-2\,az+c-b=0$ o que dá $\operatorname{tg} x/2=$ $=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}$ expressão que permite determinar o valor de x, fazendo uso duma tabela de funções circulares.

Como é prático realizar os cálculos por meio de logaritmos, usa-se em geral para a resolução dêste tipo de equações o chamado *método do ângulo auxiliar* que consiste no seguinte: escrevamos a equação proposta sob a forma $\operatorname{sen} x+b/a\cos x=c/a$ e façamos $b/a=\operatorname{tg}\theta$, o que é sempre possível visto a tangente variar de $-\infty$ a $+\infty$. Esta última expressão permite determinar o valor de θ. Por substituïção na equação vem: $\operatorname{sen} x+\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cos x=c/a$ ou $\operatorname{sen} x\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cos x=c/a\cos\theta$ e $\operatorname{sen}(x+\theta)=b\cos\theta/a$ donde $\log\operatorname{sen}(x+\theta)=\log b+\log\cos\theta+\operatorname{colg} a$, expressão que permite determinar x.

Exercício 8 — Seja resolver a equação $\operatorname{sen} x+\cos x=\sqrt{2}$. Pelo primeiro processo teremos $\operatorname{tg} x/2=$ $=\dfrac{1\pm\sqrt{1+1-2}}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ e $\operatorname{tg} x=1$ logo $x=\pi/4$. Pelo segundo processo tem-se $1=\operatorname{tg}\theta$, $\theta=\pi/4$, $\operatorname{sen} x\cos\pi/4+\cos x\operatorname{sen}\pi/4=\sqrt{2}\cos\pi/4$ e como $\cos\pi/4=\sqrt{2}$ vem $\operatorname{sen}(x+\pi/4)=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$ ou

$x+\pi/4=\pi/2$ e $x=\pi/4$ (por ser muito simples a equação, foi desnecessário empregar logaritmos).

Problema 6 — Equações do tipo $a\,\mathrm{tg}\,x+b\,\mathrm{cotg}\,x=c$. A regra de Bioche indica-nos para êste caso a função $\mathrm{tg}\,x$ como elemento de redução, logo será: $a\,\mathrm{tg}\,x+ + b/\mathrm{tg}\,x=c$ ou $a\,\mathrm{tg}^2 x-c\,\mathrm{tg}\,x+b=0$ e $\mathrm{tg}\,x= =[c\pm(c^2-4\,ab)^{1/2}]:2a$ o que permite determinar x.

Querendo aplicar o cálculo logarítmico poderiamos escrever $a\cdot\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}+b\cdot\dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}=c$ ou $a\,\mathrm{sen}^2 x+b\cos^2 x= =c\,\mathrm{sen}\,x\cos x$, e como $1-\cos 2x=2\,\mathrm{sen}^2 x$, $1+\cos 2x= =2\cos^2 x$ e $2\,\mathrm{sen}\,x\cos x=\mathrm{sen}\,2x$, vem substituindo, $a\,(1-\cos 2x)+b\,(1+\cos 2x)=c\,\mathrm{sen}\,2x$ ou $c\,\mathrm{sen}\,2x+ +(a-b)\cos 2x=a+b$, equação do tipo anterior; ter-se-á então: $(a-b):c=\mathrm{tg}\,\theta$ e $\mathrm{sen}\,(2x+\theta)= =(a+b)\cos\theta/c$ o que determina θ e x.

Exercício 9 — Resolver $2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x+\sqrt{3}\,\mathrm{cotg}\,x=5$. Tem-se então pelo segundo método: $5\,\mathrm{sen}\,2x+ +\sqrt{3}\cos 2x=3\sqrt{3}$ e fazendo $\mathrm{tg}\,\theta=\sqrt{3}/5$ vem $\theta=19^\circ\,6'$ donde $\mathrm{sen}\,(2x+19^\circ\,6')=3\sqrt{3}\cos 19^\circ\,6'/5$ e por isso $\log\mathrm{sen}\,(2x+19^\circ\,6')=\bar{1},99198$ donde $2x+ +19^\circ\,6'=79^\circ\,6'$, $2x=60^\circ$, $x=30^\circ$ argumento mínimo que satisfaz a equação.

Problema 7 — Equação do tipo $a\cos^2 x+b\,\mathrm{sen}^2 x=c$. A regra de Bioche diz-nos que para êste caso, como fàcilmente se verifica, deve adoptar-se para elemento de redução a função $\cos 2x$, e então vem: $a\cdot(1+\cos 2x):2+b\,(1-\cos 2x):2=c$ donde $\cos 2x= =(2c-a-b):(a-b)$.

Exercício 10 — Resolver a equação $3\cos^2 x+ +\mathrm{sen}^2 x=2$. Fazendo a substituïção obtém-se $\cos 2x= =(4-3-1):(3-1)=0$ donde $2x=90^\circ$, $x=45^\circ$, argumento mínimo que satisfaz à equação proposta.

Consideremos algumas equações contendo funções circulares inversas.

Problema 8 — Resolver a equação: $\mathrm{arc\,sen}\,x+ +\mathrm{arc\,sen}\,\sqrt{3}x=\pi/2$. Seja $\alpha=\mathrm{arc\,sen}\,x$ donde $x=\mathrm{sen}\,\alpha$, e seja $\beta=\mathrm{arc\,sen}\,\sqrt{3}\,x$ donde $\mathrm{sen}\,\beta=\sqrt{3}\,x$, como é $\alpha+\beta=\pi/2$, deduz-se que $\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta)=1$ ou $\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta+ +\mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha=1$, ora $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$ e $\cos\beta=\sqrt{1-3x^2}$ vem $x\sqrt{1-3x^2}+\sqrt{3}\,x\sqrt{1-x^2}=1$. Isolando o primeiro radical vem $x\sqrt{1-3x^2}=1-x\sqrt{3-3x^2}$ e quadrando $x^2\,(1-3x^2)=1+x^2\,(3+3x^2)+2x\sqrt{3-3x^2}$ ou $2x\sqrt{3-3x^2}=1+2x^2$ e quadrando novamente, $4x^2\,(3-3x^2)=1+4x^4+4x^2$ donde $16x^4-8x^2+1=0$ de cujas soluções $x=\pm 1/2$ só serve a solução positiva; a solução negativa é uma raiz estranha que se introduziu em virtude das quadraturas que fizemos.

Problema 9 — Resolver a equação: $\mathrm{arc\,tg}\,x- -\mathrm{arc\,tg}\,1/x=0$. Façamos $\alpha=\mathrm{arc\,tg}\,x$ ou $x=\mathrm{tg}\,\alpha$ e $1/x=\mathrm{tg}\,\beta$ então será $\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta)=\mathrm{tg}\,0=0$ e $0=\dfrac{x-1/x}{1+x\cdot 1/x}$ ou $x-1/x=0$, $x=\pm 1$.

Vejamos finalmente alguns sistemas.

Problema 10 — Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=m \\ \mathrm{sen}\,x+\mathrm{sen}\,y=n. \end{cases}$

A última equação é equivalente a $2\,\mathrm{sen}\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=n$ donde se tira $\cos\dfrac{x-y}{2}=n:2\,\mathrm{sen}\dfrac{m}{2}$ o que permite determinar $x-y$. Seja $x-y=\alpha$ será então $\begin{cases} x-y=\alpha \\ x+y=m \end{cases}$ sistema que nos dá os valores de x e y.

Exercício 11 — Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=90^\circ \\ \mathrm{sen}\,x+\mathrm{sen}\,y=(1+\sqrt{3}):2 \end{cases}$. Então como anteriormente será: $\mathrm{sen}\,(x-y):2=[(1+\sqrt{3})/2]:[2\cdot\sqrt{2}/2]= =(\sqrt{2}+\sqrt{6}):4$ e $(x-y):2=15^\circ$, $x-y=30^\circ$ o que com a equação $x+y=90^\circ$ dá $x=60^\circ$, $y=30^\circ$.

Anàlogamente se resolvem os sistemas:

$$\begin{cases} x-y=m \\ \mathrm{sen}\,x+\mathrm{sen}\,y=n \end{cases}\quad \begin{cases} x\pm y=m \\ \mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,y=n \end{cases}\quad \text{e}\quad \begin{cases} x\pm y=m \\ \cos x\pm\cos y=n \end{cases}.$$

Problema 12 — Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=m \\ \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}\,y}=n \end{cases}$.

Como a segunda equação se pode considerar uma proporção $\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}\,y}=\dfrac{n}{1}$ teremos: $\dfrac{\mathrm{sen}\,x+\mathrm{sen}\,y}{\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,y}=\dfrac{n+1}{n-1}$ e

$$\frac{2\,\mathrm{sen}\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}{2\,\mathrm{sen}\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}}=\frac{n+1}{n-1}$$

ou $(n-1)\,\mathrm{sen}\dfrac{m}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}- -(n+1)\cdot\cos\dfrac{m}{2}\,\mathrm{sen}\dfrac{x-y}{2}=0$ equação do tipo do problema 5.

Exercício 12 — Seja resolver o sistema $\begin{cases} x+y=90^\circ \\ \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}\,y}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Como anteriormente tem-se: $\dfrac{\mathrm{sen}\,x+\mathrm{sen}\,y}{\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,y}=\dfrac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-3}$ ou

$$(\sqrt{3}-3)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}-(\sqrt{3}+3)\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\frac{x-y}{2}=0$$

donde se tira $(\sqrt{3}+3)\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}-(\sqrt{3}-3)\cos\frac{x-y}{2}=0$

fazendo $\frac{-\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+3}=\operatorname{tg}\theta$ ou seja $2-\sqrt{3}=\operatorname{tg}\theta$ e $\theta=15^\circ$

$\operatorname{sen}(x-y):2+\operatorname{tg}\theta\cos(x-y):2=0$ e $\operatorname{sen}[(x-y):2+15^\circ]=0$ donde $(x-y):2+15^\circ=0$ $x-y=-30^\circ$ que, com $x+y=90$ dá $x=30^\circ$ $y=60^\circ$.

Outros sistemas que se resolvem anàlogamente são:

$$\begin{cases} x-y=m \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}=n \end{cases} \quad \begin{cases} x\pm y=m \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos y}=n \end{cases} \quad \begin{cases} x\pm y=m \\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=n \end{cases}$$

Exercícios propostos

Resolva as equações:

1) $\operatorname{sen} 2x-\operatorname{cotg} x=0$.
2) $\operatorname{sen} x+\operatorname{cosec} x=0$.
3) $\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}=2\cos x$.
4) $\sqrt{3}\operatorname{sen} x+\cos x=\sqrt{3}$.
5) $\operatorname{sen}(x+a)=\cos(x+b)$.
6) $\operatorname{sen} x\operatorname{tg} x/2=\cos x$.
7) $5\operatorname{tg} x+6\operatorname{cotg} y=11$.
8) $\arccos(x-1)+\arccos(x+1)=\pi/2$.
9) $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} x/2=\pi/4$.
10) $\operatorname{arc\,sen} 2x-2\arccos x=\operatorname{arc\,sen} x$.

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1943)

Faculdade de Ciências — Licenciaturas em ciências fisico-quimicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas mil. e de eng. geógrafo. — Ponto n.º 2.

1801 — Determine m de modo que o trinómio $(m-2)x^2+(4m-6)x+5m-6$ seja negativo para qualquer valor real dado a x. R: *Os valores de* m *que satisfazem ao problema são os que dão ao descriminante valores negativos ao mesmo tempo que tornam negativo o coeficiente de* x^2, *ou sejam os valores de* m *que verificam as desigualdades:* $(4m-6)^2-4(m-2)(5m-6)<0$ *e* $m-2<0$ *ou* $m^2-4m+3>0$ *e* $m<2$. *Como as raízes do primeiro trinómio são* 3 *e* 1, *os valores que o tornam positivo são os que satisfazem a* $m>3$ *ou* $m<1$, *e como pela segunda desigualdade deve ser* $m<2$, *os valores de* m *que verificam o problema são os que satisfazem a* $m<1$.

1802 — Enuncie os teoremas que se referem ao número de soluções inteiras e ao número de soluções inteiras e positivas da equação $ax+by=c$ em que a, b e c são números inteiros e primos entre si.

1803 — Calcule as dimensões de um rectângulo, sabendo que o seu comprimento é triplo da sua largura e que, aumentando tanto o comprimento como a largura de 5 metros a sua área aumento de $385\ \text{m}^2$. R: *A equação que resolve o problema é* $3x^2+385=(x+4)(3x+5)$ *onde* x *representa a largura do rectângulo. Donde se tira* $x=18\ \text{m}$ *e portanto* $y=54\ \text{m}$.

1804 — Sendo $x+y+z=\pi$ verifique que $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg} z$. R: *Pela condição do enunciado* $x+y=\pi-z$, *logo* $\operatorname{tg}(x+y)=-\operatorname{tg} z=(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y):(1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y)$ *donde* $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=-\operatorname{tg} z(1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y)$ *ou* $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} z+\operatorname{tg} y=\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z$.

1805 — Sendo x um ângulo do 1.º quadrante e $\cos x=0{,}5$, determine, sem recorrer às tábuas, os valores de $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$ e $\operatorname{cosec} x$. R: $\operatorname{sen} x=\sqrt{1-0{,}5^2}=\sqrt{3}/2$, $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$, $\operatorname{cotg} x=1/\sqrt{3}$, $\sec x=2$ e $\operatorname{cosec} x=2/\sqrt{3}$.

1806 — O ângulo oposto à base de um triângulo isósceles é $27^\circ\,30'\,41'',2$ e o comprimento da base é de 26,45 metros. Usando o cálculo logarítmico, determine o perímetro do triângulo. R: *Os lados iguais do triângulo têm por expressão:* $1=12{,}325:\operatorname{sen}\alpha/2$ *logo é* $\log 1=\log 13{,}225+\operatorname{colog}\operatorname{sen} 13^\circ\,45'\,20'',6=1{,}12139+0{,}62381=1{,}74520$ *donde* $1=55{,}62\ \text{m}$ *e o perímetro será* 137,69 *metros.*

1807 — Figure as tangentes exteriores e a tangente interior a duas circunferências tangentes exteriormente. Designando por A e B os pontos de contacto duma das tangentes exteriores com as duas circunfecias por A' e B' os pontos de contacto da outra tangente e por F e F' os pontos em que a tangente interior corta as tangentes exteriores, demonstre que $\overline{AB}=\overline{A'B'}=\overline{FF'}$. R: *Se fôr* O *o ponto de encontro das tangentes exteriores, como os comprimentos das tangentes tiradas de um ponto para uma circunferência são iguais, é:* $\overline{OA}=\overline{OA'}$ *e* $\overline{OB}=\overline{OB'}$ *e portanto* $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\overline{A'B'}=\overline{OB'}-\overline{OA'}$. *Pelo mesmo motivo, se fôr* C *o ponto de contacto das duas circunferências, é:* $\overline{FC}=\overline{FB}$ *e* $\overline{FC}=\overline{FA}$ *donde* $2\overline{FC}=\overline{FF'}=\overline{FB}+\overline{FA}=\overline{AB}$, *pois é fácil ver que* $\overline{FC}=\overline{F'C}$.

1808 — Deduza em função de r, a expressão do volume gerado por uma rotação completa da figura representada em tôrno de AB. Os lados iguais do triângulo isósceles ADC tem um comprimento igual ao raio de circunferência $\widehat{BC}$. R: *O sólido gerado é um hemisfério encimado por um cone cuja base é um circulo de raio* r *igual ao da esfera. Assim o volume será:* $V=1/3(\pi r^3+2\pi r^3)=\pi r^3$.

Soluções dos n.os 1801 a 1808 de J. J. Rodrigues dos Santos.

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus 3 de Agôsto de 1943. — Ponto n.º 2.

I

1809 — Determine a condição a que deve satisfazer k para que a inequação $(k+1)\,x^2-2kx+5k+6>0$ seja verificada por qualquer valor real atribuído a x.
R: *O coeficiente do 1.º têrmo deverá ser positivo e imaginárias as raízes do trinómio.*: k *deve satisfazer às relações* $k+1>0$ e $k^2-(k+1)\,(5\,k+6)<0$, *donde se deduz* $k>-3/4$.

1810 — *a)* Indique as condições a que devem satisfazer os coeficientes da equação $ax^4+bx^2+c=0$ para que tenha duas raízes nulas e duas raízes infinitas. *b)* Defina progressão geométrica e calcule a razão da progressão geométrica cujo primeiro têrmo é 729 e cujo sétimo têrmo é 1. R: a) *Devem anular-se* a e c, *não se anulando* b. b) $u_n=u_1\,r^{n-1}\;.\cdot.\;r=\sqrt[6]{729^{-1}}=1/3$.

II

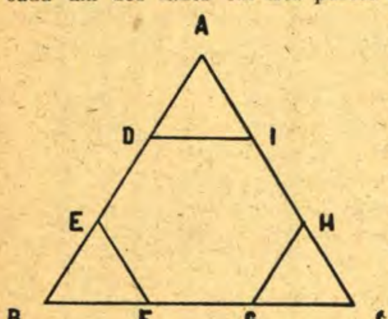
1811 — Determine, por logarítmos, a medida de um dos ângulos internos de um paralelogramo em que dois lados consecutivos medem 9,4 metros e 12,5 metros e cuja área mede 72,8 metros quadrados.
R: *A área é dada para* $A=ab\,\text{sen}\,\alpha$ *designando por* a e b *as medidas dos lados e* α *o ângulo compreendido. Aplicando logarítmos:*

$$\log\text{sen}\,\alpha=\log 72,8+\text{colog}\,12,5+\text{colog}\,9,4=$$
$$=1,86213+\bar{2},90309+\bar{1},02687=\bar{1},79209\,;$$
$$\alpha=38^\circ\,17'\,3'',75\,.$$

1812 — Verifique a identidade
$\cot\alpha-2\cos^2\alpha\,\text{cosec}\,2\alpha=0$. R: $\text{cotg}\,\alpha-2\cos^2\alpha\,\text{cosec}\,2\alpha=$
$$=\text{cotg}\,\alpha-2\,\frac{\cos^2\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}=0\,.$$

III

1813 — Desenhe um triângulo eqüilátero, divida cada um dos lados em três partes iguais e una os pontos de divisão mais próximos de modo a formar um hexágono. Demonstre que êsse hexágono é regular. R: *Por ser* $\overline{DI}\,\|\,\overline{BC}$; $\overline{EF}\,\|\,\overline{AC}$; $\overline{GH}\,\|\,\overline{AB}$ *são equiláteros os triângulos* [ADI], [EBF] *e* [HGC], *donde se conclui, atendendo às condições do enunciado, que o hexágono* [DEFGHI] *é regular, pois tem os lados e ângulos iguais.*



1814 — *a)* Deduza a relação que existe entre a área de um losango e a do quadrilátero que se obtém conduzindo pelos vértices daquele paralelas às suas diagonais. *b)* Indique as condições a que tem de satisfazer a soma das medidas dos diedros de um triedro.
R: a) *O quadrilátero construído é um rectângulo de lados paralelos às diagonais do losango. Da figura respectiva deduz-se fàcilmente que a área do losango é metade da do quadrilátero.*

IV

1815 — Demonstre que o quadrado de qualquer número inteiro que não seja divisível por 5 é um múltiplo de 5, aumentado ou diminuido de 1.
R: *Visto que todo o número inteiro não múltiplo de 5 se contém numa das expressões* $5R\pm1$, $5R\pm2$, *tem-se:* $(5R\pm1)^2=\dot{5}+1$, $(5R\pm2)^2=\dot{5}+4=\dot{5}-1$, *o que prova o que se tinha em vista.*

Soluções dos n.ºs 1809 a 1815 de F. Roldão Dias Agudo, aluno do 1.º ano da Faculdade de Ciências de Lisboa.

Licenciatura em Ciências Geográficas — Julho de 1943 — Ponto n.º 4.

1816 — Escreva uma equação biquadrada que tenha as raízes 2 e $\sqrt{-2}$. R: *A equação pedida admitirá também as raízes* -2 *e* $-\sqrt{-2}$ *e será:*

$$(x-2)\,(x+2)\,(x-\sqrt{2}\,i)\,(x+\sqrt{2}\,i)=0$$

ou:

$$(x^2-4)\,(x^2+2)=0\quad ou\quad x^4-2x^2-8=0\,.$$

1817 — Quais são os critérios de divisibilidade por 4 e por 6? R: *Um número* N *pode escrever-se com a forma:* (1) $a+b\times10+c\times10^2+\cdots$ *sendo* a, b, c ⋯ *os algarismos representativos do número de unidades, dezenas, etc., do número. Critério para* 4: *Apenas nos interessa a parte* $a+b\times10$ *de* (1). *Como* 10 *dividido por* 4 *dá resto* 2, *o resto da divisão de* N *por* 4 *será o mesmo que o da divisão por* 4 *do número* $a+b\times2$, *visto que* $b\times10$ *é* $b\times(\dot{4}+2)=\dot{4}+2b$. *O resto da divisão dum número por* 4 *obtém-se dividindo a soma do algarismo das unidades com o dôbro do das dezenas por* 4. *Critério para* 6: *De* (1) tira-se que

$$N=a+\dot{6}+4b+\dot{6}+4c+\cdots$$

visto ser 4 *o resto das divisões de* 10, 100, 1000 ⋯ *por* 6. *Portanto, o resto da divisão de* N *por* 6 *é o mesmo que o da divisão por* 6 *do número*

$$a+4\,(b+c+d+\cdots)$$

isto é: o resto da divisão dum número por 6 *obtém-se dividindo por* 6 *a soma do algarismo das unidade com o quádruplo da soma dos restantes algarismos.*

1818 — Calcule na esfera terrestre, com o raio R, o comprimento do arco de 1º no paralelo de latitude L.

Diga que relação há entre êste valor e o valor do arco de 1° no meridiano. R: *a)* $R' = R \cos L$; $\frac{2\pi R'}{360^\circ} = \frac{c}{1^\circ}$; $c = 2\pi R \cos L : 360^\circ$. *b)* $c_p/c_m = 2\pi R \cos L : 2\pi R = \cos L$.

Soluções dos n.os 1816 a 1818 de J. J. Rodrigues dos Santos.

Instituto Superior de Agronomia — 8 de Agôsto de 1944 — Ponto n.° 1.

1819 — Determine o coeficiente do têrmo em x^{-20} do desenvolvimento do binómio $(x^2/3 - 2/x^3)^{15}$. R: *O têrmo geral do desenvolvimento é*

$$\binom{15}{p} \cdot \frac{x^{2p}}{3^p} \cdot (-1)^{15-p} \cdot \frac{2^{15-p}}{x^{45-3p}} = (-1)^{15-p} \binom{15}{p} \frac{2^{15-p}}{3^p} \cdot x^{5p-45}.$$

O têrmo em x^{-20} *corresponde ao valor de* p *dado por* $5p - 45 = -20$, *donde* $p = 5$. *Vem pois* $\binom{15}{5} \frac{2^{10}}{3^5} x^{-20}$. *O coeficiente pedido é* $\frac{15!\, 2^{10}}{5!\, 10!\, 3^5}$.

1820 — Determine a relação entre os valores de n e p que satisfazem a ${}^nC_{p+2} = 4 \times {}^nC_{p+1}$. Diga qual é o menor valor de n que verifica a expressão e exemplifique para o caso do número de objectos estar compreendido entre 16 e 20. R: *De* $\frac{n!}{(p+2)!\,(n-p-2)!} = \frac{4 \cdot n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!}$ *deduz-se sucessivamente* $\frac{1}{p+2} = \frac{4}{n-p-1}$, $n - 5p = 9$. *O menor valor de* n *verificando a expressão dada é* $n = 4$ *a que corresponde* $p = -1$ *e* ${}^4C_1 = 4\, {}^nC_0$. *Para um número* n *de elementos compreendido entre* 16 *e* 20 *a expressão só é verificada para* $n = 19$ *a que corresponde* $p = 2$. *Tem-se, neste caso,* ${}^{19}C_4 = 4 \cdot {}^{19}C_3$.

1821 — É dada uma superfície prismática quadrangular de faces iguais, onde duas faces iguais consecutivas formam um diedro de $117^\circ\, 51',6$; a distância de duas arestas mais afastadas é de 8,9338 metros. Calcule o perímetro da secção obtida por um plano normalmente às faces. R: *A secção recta é um rombo. São conhecidos o ângulo obtuso* $\alpha = 117^\circ\, 51',6$ *e a maior das diagonais* $d = 8,9338$ m. *Designando por* l *o lado do rombo e por* P *perímetro, tem-se:* $d/2 = l \cdot \operatorname{sen} \alpha/2$ *donde* $P = 4l = \frac{2d}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \times 8,9338}{\operatorname{sen} 58^\circ\, 55'\, 48''}$ m · *Aplicando logaritmos vem*

$$\log P = \log 2 + \log 8,9338 + \operatorname{colog} \operatorname{sen} 58^\circ\, 55'\, 48'' = 0,30103 + 0,95104 + 0,06725 = 1,31932$$

donde $P = 20,860$ m.

1822 — Determine, sem recorrer às tábuas, os valores do seno e do coseno de um ângulo do 4.° quadrante cuja cotangente é $-4/3$. R: *Seja* α *o ângulo dado. Tem-se* $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ *e* $\operatorname{cotg} \alpha = -4/3$, *donde se deduz* $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 \alpha}} = -\frac{3}{5}$ *e* $\cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$.

1823 — Representando por V_a, V_b e V_c os volumes dos sólidos gerados por um triângulo rectângulo, quando roda respectivamente em tôrno da hipotenusa e de cada um dos catetos, verifique que $\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}$.

R: *Designando por* r *a altura do triângulo relativo à hipotenusa* a *tem-se respectivamente:*

$$V_b = \frac{1}{3}\pi b^2 c,\quad V_c = \frac{1}{3}\pi c^2 b \quad e \quad V_a = \frac{1}{3}\pi r^2 a = \frac{1}{3}\pi \frac{c^2 b^2}{\sqrt{c^2+b^2}}.$$

(Note-se que o dôbro da área do triângulo é $cb = ra = r\sqrt{c^2+b^2}$*). Quadrando e substituindo na expressão dada verifica-se finalmente o resultado.*

1824 — Demonstre que se duas circunferências se cortam, duas secantes paralelas tiradas pelos pontos de intersecção são iguais. R: *Sejam* AIB *e* A′I′B′ *as secantes paralelas traçadas (*I *e* I′ *pontos de intersecção das duas circunferências;* A *e* A′ *pontos duma circunferência e* B *e* B′ *da outra). Por* A *e* B′ *traçam-se paralelas* AC′ *e* B′C *à recta* II′ *(*C′ *e* C *são os pontos de intersecção das duas paralelas respectivamente com as cordas* A′B′ *e* AB*). Basta provar a igualdade dos triângulos* [AA′C′] e [BB′C] *e conseqüentemente que* $\overline{CB} = \overline{A'C'}$. *Como* $\overline{AC} = \overline{C'B'}$ *segue-se que* $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{C'B'} + \overline{A'C'} = \overline{A'B'}$.

Soluções dos n.os 1819 a 1824 de M. Zaluar.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — Outubro de 1943.

1825 — Definições e propriedades mais importantes das progressões aritméticas e geométricas. Determinar os valores reais de a para os quais é nula a soma $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n}$; discussão, atendendo à paridade de n. R: $S = \frac{a^n - 1}{a^n(a-1)}$ *e, como são de regeitar valores positivos para* a, *resta* $a = -1$ *que anula o numerador de* S *quando* n *fôr par.*

1826 — Dados $x + y = a$ e $x^4 + y^4 = b$, exprima xy em função de a e b. R: $(x+y)^4 = x^4 + y^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 6x^2y^2 = x^4 + y^4 + 4xy(x^2+y^2) + 6x^2y^2 = x^4 + y^4 + 4xy(x+y)^2 - 8x^2y^2 + 6x^2y^2$ *donde* $a^4 = b + 4a^2xy - 2x^2y^2$ *ou* $2(xy)^2 - 4a^2xy + a^4 - b = 0$ *e* $xy = a^2 \pm \sqrt{\frac{a^4 - b}{2}}$.

1827 — Calcule o volume dum cone circular recto cuja área lateral é $18\,m^2$ e cujo perímetro é $6\,m$.

R: $\begin{cases} 2\pi r = 6 \\ \pi r g = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \frac{3}{\pi} \\ g = 6 \end{cases}$ *donde* $V = Bh/3 =$
$= \pi r^2 \sqrt{g^2 - r^2}/3 = 9\sqrt{4\pi^2 - 1}/\pi^2 =$
$= 9\sqrt{(2\pi+1)(2\pi-1)}/\pi^2 =$
$= 9 \cdot (7{,}2832)^{1/2} \cdot (5{,}2832)^{1/2}/\pi^2 = 5{,}6566\ m^3$.

1828 — Dadas num plano três circunferências iguais e tangentes entre si duas a duas, determinar, em função do raio comum, a área do triângulo formado pelas tangentes exteriores a essas circunferências. R: *Sejam* O_1, O_2, O_3, *os centros das circunferências,* r *o seu raio,* A, B, C *os vértices do triângulo formado e* $P_1, P_2, \cdots P_6$ *os pontos de tangência. O triângulo* [A B C] *é equilátero e o triângulo* $[O_1 O_2 O_3]$ *é semelhante e de lado* 2r. *Notando que* $[O_1 P_1 A]$ *é igual a metade do triângulo* $[O_1 O_2 O_3]$ *e que a distância entre* P_1 *e* P_2 *é* 2r *a área virá* $A = 2(3 + 2\sqrt{3})\,r^2$.

1829 — *a)* Superfícies de revolução; definições; descrição e propriedades das mais importantes dessas superfícies. *b)* São dadas duas superfícies esféricas E_1 de raio r e E_2 de raio R e tais que E_2 passa pelo centro de E_1; calcule a área da zona de uma base, ou calote, determinada na superfície E_2 pela sua intersecção com a superfície E_1. R: *Seja* h *o raio da base da calote e* x *sua altura; então* $h^2 = r^2 - x^2$ *e também* $h^2 = R^2 - (R - x)^2$ *donde* $r^2 - x^2 = R^2 - (R - x)^2$ *e* $x = r^2/2R$ *e a área pedida será* $S = 2\pi R x = \pi r^2$, *valor independente de* R *o que é de notar.*

1830 — Numa semi-circunferência de diâmetro $\overline{AB} = 2r$, consideram-se as três cordas $\overline{AC} = r/2$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB} = r/2$; calcule o comprimento da corda $\overline{CD}$ e a área do segmento de círculo que ela determina. R: *O triângulo rectângulo* [ABD] *fornece* $r/2 = 2r \cos B$, *donde* $\cos B = 1/4$. *Seja* $\overline{DP}$ *a perpendicular baixada de* D *sôbre* $\overline{AB}$; *então:*

$\overline{PB}^2 = r^2/4 - r^2/4\,\mathrm{sen}^2 B = r^2(1 - \mathrm{sen}^2 B)/4 = r^2 \cos^2 B/4 = r^2/64$

portanto $\overline{CD} = 2\,(r - r^2/64)$. *A área pedida obter-se-ia por diferença entre a área do sector de abertura* $\pi - \mathrm{arc\,sen}\, B$ *e a do triângulo* [COD].

Soluções dos n.ºs 1825 a 1830 de J. Remy T. Freire.

Instituto Superior Técnico — Julho de 1943.

1831 — Num trajecto de 180 metros, as rodas dianteiras de um carro dão mais trinta voltas completas que as rodas trazeiras. Se a circunferência de cada roda tivesse 1 metro a mais, as rodas da frente dariam sòmente mais 15 voltas do que as de trás, durante o mesmo percurso. Determine o comprimento da circunferência de cada roda. R: *Seja* n *o número de voltas que dá, no percurso de* 180 m, *cada uma das rodas traseiras, no primeiro caso; o número de voltas que cada roda da frente dá é* n + 30. *Os perímetros das rodas traseiras e dianteiras são, neste caso, respectivamente* 180 : n *e* 130 : (n + 30). *Aumentando estes perímetros de* 1 *metro, passarão as rodas a ter* 180 : n + 1 *e* 180 : (n + 30) + 1, *e o número de voltas que cada uma delas dará no mesmo percurso será, repectivamente,* 180 : : (180 : n + 1) = 180n : (180 + n) *e* 180 : [180 : (n + 30) + 1] = = 180 (n + 30) : (210 + n), *e como as rodas dianteiras darão agora só mais* 15 *voltas deverá ser* 180n : (180 + n) + + 15 = 180 (n + 30) : (210 + n), *equação equivalente a* $n^2 + 390\,n - 27000 = 0$ *de cujas raízes* $n_1 = -195 + 255$ *e* $n_2 = -195 - 255$ *só serve a primeira sendo por isso* n = 60. *Os perímetros serão então* 3 m *e* 2 m.

1832 — Determine a, b e c de modo que o trinómio $ax^2 + bx + c$ tome para $x = 1$ e $x = -2$, respectivamente, os valores 2 e -1 e sejam reais e desiguais as raízes da equação obtida igualando a 0 êsse trinómio. R: *Os coeficientes* a, b *e* c *terão que satisfazer às seguintes condições, que são impostas pelo enunciado do problema:* $a + b + c = 2$, *para que* $x = 1$ *dê ao trinómio o valor* 2; $4a - 2b + c = -1$, *para que o trinómio tome o valor* -1 *quando se faz* $x = -2$ *e finalmente* $b^2 - 4ac > 0$ *para que as raízes do trinómio sejam reais e desiguais. Das duas primeiras equações tira-se* $a = b - 1$ *e* $c = 3 - 2b$, *valores que substituídos na última desigualdade dão a inequação* $9b^2 - 20b + 12 > 0$, *a qual é verificada para qualquer valor real de* b *pois as raízes da equação que se obtém igualando o primeiro membro a zero, são imaginárias. Logo as soluções do problema são:* b *qualquer,* $a = b - 1$ *e* $c = 3 - 2b$.

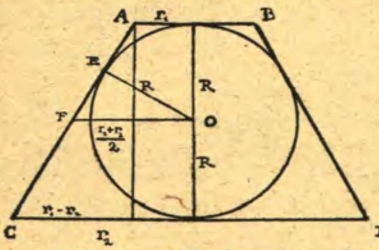
1833 — Determine os ângulos de um triângulo rectângulo de que se conhece um cateto e o ângulo da hipotenusa com a mediana relativa a êsse cateto. R: *Sejam* m *a medida da mediana,* α *a do ângulo que a mediana forma com a hipotenusa* c *a do cateto que se conhece;* $\hat{C}$ *o ângulo oposto ao cateto* c *e* $\hat{B}$ *o outro ângulo agudo. Teremos* $\hat{A} = 90^\circ$ $\hat{C} = 90 - \hat{B}$, *basta por isso determinar* $\hat{B}$. *Ora o triângulo rectângulo fica dividido pela mediana em dois triângulos, um rectângulo e o outro obtusângulo. Para o primeiro é* $c/2 = m \cos(\alpha + B)$ *e do segundo, atendendo à proporcionalidade dos lados e dos senos dos ângulos opostos, deduz-se* $m : \mathrm{sen}\, B = c/2 : \mathrm{sen}\, \alpha$; *destas duas equações e por substituição do valor de* m *obtém-se:* $c/2 = c/2 \cos(\alpha + B) \cdot \mathrm{sen}\, B : \mathrm{sen}\, \alpha$ *ou* $\mathrm{sen}\, \alpha = \cos \alpha\, \mathrm{sen}\, B \cos B - \mathrm{sen}\, \alpha\, \mathrm{sen}^2 B$ *equação que pode escrever-se* $\mathrm{tg}\, \alpha = \mathrm{sen}\, B \cos B : (1 + \mathrm{sen}^2 B)$ *ou ainda e finalmente* $(1 + \mathrm{tg}^2 \alpha)\mathrm{sen}^4 B - (1 - 2\,\mathrm{tg}^2 \alpha)\mathrm{sen}^2 B +$

$$+ \mathrm{tg}^2 \alpha = 0, \text{ donde } \mathrm{sen}\, B = \pm \sqrt{\frac{1 - 2\,\mathrm{tg}^2 \alpha \pm \sqrt{1 - 8\,\mathrm{tg}^2 \alpha}}{2\,(1 + \mathrm{tg}^2 \alpha)}}$$

o que permite determinar B *conhecido* α.

1834 — São dadas uma semi-circunferência de centro O e diâmetro $\overline{AB}$ e duas semi-circunferências interiores a esta e que tem como diâmetros os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. Descreva a circunferência de centro C tangente interior à circunferência maior e tangente exterior às duas menores. Sejam M e N os pontos de contacto nestas duas semi-circunferências. Exprima, em função de $\overline{AB}$ o perímetro do triângulo [CMN]. R: *Seja* $\overline{AB}=2r$ *e* x *o raio da circunferência de centro* C. *Se forem* O_1 *e* O_2 *os pontos médios de* $\overline{OA}$ *e* $\overline{OB}$ *o triângulo* [CO_1O] *é rectângulo e dêle se deduz* $(r-x)^2+r^2:4=(r:2+x)^2$ *donde* $x=r/3$. *Por outro lado o triângulo* [CMN] *é homotético do triângulo* [CO_1O_2] *e então* $\overline{CM}:\overline{CO_1}=\overline{MN}:\overline{O_1O_2}$ *ou* $r/3:(r/2+r/3)=\overline{MN}:r$ *donde* $\overline{MN}=2r/5$. *O perímetro de* [CMN] *é então* $2\cdot r/3+2r/5=16r/15=8\overline{AB}/15$.

1835 — O volume de uma esfera de raio R tangente às bases e à superfície lateral de um tronco de



cone de revolução é metade do volume do tronco de cone. Exprima, em função de R, os raios das bases do tronco. R: *Sejam* r_1 *e* r_2 *os raios das bases superior e inferior do tronco, será:* $8\pi R^3/3=2/3\,\pi R(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$ *ou* $4R^2=r_1^2+r_2^2+r_1r_2$, *notando que é* 2R *a altura do tronco. A geratriz do tronco tem por medida* $\sqrt{4R^2+(r_2-r_1)^2}$ *e da figura tira-se, considerando os triângulos semelhantes* [OEF] *e* [ACG], *que* $R:(r_1+r_2)/2=2R:\sqrt{4R^2+(r_2-r_1)^2}$ *ou* $\sqrt{4R^2+(r_2-r_1)^2}=r_1+r_2$ *e quadrando* $4R^2+(r_2-r_1)^2=(r_1+r_2)^2$ *e por isso* $r_1r_2=R^2$ *valor que substituído na primeira expressão de* $4R^2$ *determina* $r_1^2+r_2^2=3R^2$ *equação que. com* $r_1^2r_2^2=R^4$ *permite determinar* r_1 *e* r_2 *cujos valores são:* $r_1=R\sqrt{(3-\sqrt{5}):2}$ *e* $r_2=R\sqrt{(3+\sqrt{5}):2}$.

1836 — Determine os ângulos que uma diagonal do cubo forma com uma aresta, com uma face e com a outra diagonal. R: *Seja* l *a aresta do cubo a sua diagonal será* $d=l\sqrt{3}$ *e a diagonal duma das faces do cubo* $d_1=l\sqrt{2}$. *Se considerarmos o plano que contém duas diagonais do cubo, notamos que êle projecta ortogonalmente na face do cubo uma diagonal, projecção que é a diagonal da face do cubo. O ângulo destas duas diagonais (do cubo e da face do cubo) é o ângulo da diagonal do cubo com a face, e do triângulo rectângulo cujos catetos são a diagonal da face e a aresta do cubo tira-se:* $\cos\alpha=\sqrt{6}:3$ *sendo* α *o ângulo da diagonal com a face, e* $\beta=90^\circ-\alpha$ *sendo* β *o ângulo da diagonal com a aresta. Se considerarmos finalmente o triângulo formado pelas semi-diagonais do cubo e por uma aresta, e aplicando a proporcionalidade dos senos dos ângulos dum triângulo aos lados opostos,* $\operatorname{sen}\beta:d/2=\operatorname{sen}\gamma:l$ *ou* $\operatorname{sen}\gamma=2\sqrt{2}:3$, *sendo* γ *o ângulo das duas diagonais.*

Soluções dos n.os 1831 a 1836 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

BREVE ESTUDO, NO CAMPO REAL, DE ALGUMAS TRANSCENDENTES ELEMENTARES

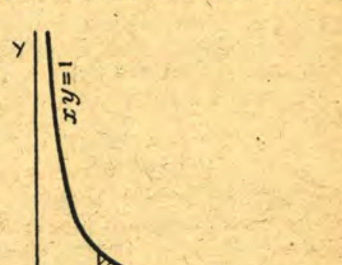
por ***Manuel Zaluar Nunes***

Função logaritmo neperiano $y=\log x$

Por vários modos pode ser apresentada e estudada, num curso de Matemáticas Gerais, a função $y=\log x$. Um dêles consiste em introduzi-la como primitiva da função $1/x$. Com efeito esta função $1/x$, contínua para $x>0$, admite primitiva definida a menos de uma constante aditiva, primitiva que se reconhece, porém, não ser exprimível por combinação finita alguma das funções prèviamente conhecidas. É esta a via que adoptaremos nesta exposição, que acompanha de perto algumas das obras citadas na bibliografia final.

Definição

A função $y=\log x$ (*logaritmo neperiano, natural* ou *hiperbólico de* x) é a função definida para $x>0$ que admite a derivada $y'=1/x$ e que se anula para $x=1$. A função $\log x$ é pois a medida algébrica da área limitada pelo ramo do primeiro quadrante da hipérbole equilátera $y=1/x$, eixo real e ordenadas de abscissas 1 e x, área representada na figura.



Tem-se então:

$$\log x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Algumas propriedades

Da definição resulta imediatamente que $y = \log x$ é uma *função contínua e derivável* $(y' = 1/x)$.

É $\log x > 0$ para $x > 1$, $\log 1 = 0$ e $\log x < 0$ para $0 < x < 1$.

Como a derivada $1/x$ é constantemente positiva para $x > 0$, a função $\log x$ é *monotónica crescente.*

De $y'' = \frac{-1}{x^2} < 0$ conclui-se que a curva $y = \log x$ volta a concavidade no sentido dos y negativos.

> *Tem-se para* a e b *números reais positivos quaisquer* $\log ab = \log a + \log b$.

Seja $a > 0$ e calculemos $(\log ax)'$. Tem-se $(\log ax)' = a/ax = 1/x = (\log x)'$ donde se conclui que $\log ax = \log x + c$. Recordando que, por definição, é $\log 1 = 0$, deduz-se $c = \log a$, fazendo na igualdade anterior $x = 1$. Vem pois $\log ax = \log x + \log a$, c. q. p.

Nota — Vê-se então que *a função* $\log x$ *satisfaz à equação funcional* $f(xy) = f(x) + f(y)$. Pode mostrar-se mais que não há função alguma derivável distinta de $c \log x$ e solução da equação indicada, (excepção feita da função $f(x) = 0$, que corresponde a $c = 0$, sem interêsse). Com efeito, derivando em ordem a x e y, respectivamente, a equação funcional vem $y f'(xy) = f'(x)$ e $x f'(xy) = f'(y)$ donde $y f'(y) = x f'(x) = c$, $f'(x) = c/x$, donde finalmente $f(x) = \int \frac{c}{x}\, dx + c_1 = c \log x + c_1$. A substituïção na equação funcional dá $c_1 = 0$.

Mais geralmente, e como resultado da propriedade associativa do produto de números reais, tem-se:

$$\log \prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \log a_i \quad (a_i > 0).$$

O caso particular $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ conduz a $\log a^n = n \log a$.

Mostremos que esta propriedade, assinalada no caso $n > 0$ inteiro, é válida para n *racional qualquer.*

Comecemos por considerar $n > 0$ racional qualquer $n = p/q$.

De $(a^{p/q})^q = a^p$ deduz-se $q \log (a^{p/q}) = p \log a$, $\log a^{p/q} = p/q \log a$, c. q. p.

Para passar ao caso dos expoentes negativos notemos primeiro que no caso do quociente, de $a/b \times b = a$ vem $\log a/b + \log b = \log a$ ou $\log a/b = \log a - \log b$. Se $a = 1$ tem-se $\log 1/b = -\log b$.

Se for n racional negativo $n = -n'$ $(n' > 0)$ tem-se

$$\log a^n = \log \frac{1}{a^{n'}} = -\log a^{n'} = -n' \log a = n \log a.$$

> *A propriedade* $\log a^n = n \log a$ *verifica-se pois para* n *racional qualquer e* $a > 0$.

Nota — A propriedade indicada é válida para n real qualquer o que não pode porém mostrar-se neste momento.

Passemos agora ao estudo de outras propriedades de $\log x$ relativas ao seu comportamento quando $x \to 0$ e $x \to +\infty$.

É $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$.

Seja $a > 1$ e portanto $\log a > 0$. Tem-se para p inteiro $y = \log x > p \log a$, desde que $x > a^p$, arbitràriamente grande, c. q. p.

É $\lim\limits_{x \to 0} \log x = -\infty$.

É resultado da propriedade anterior e de dois números recíprocos (a^p e a^{-p}) terem logaritmos simétricos.

Notemos, o que nos dará indicações para o traçado da curva representativa, que o coeficiente angular da tangente no ponto da abscissa x é $1/x$ e que esta função é monótica decrescente tendendo para zero quando $x \to \infty$. Em particular, no ponto de abscissa 1 o coeficiente angular é 1, isto é, os dois infinitésimos $f(u) = \log(1+u)$ e u são equivalentes. Com efeito, visto a derivada ter o valor 1 no ponto 1 segue-se que

$$f'(1) = \lim_{u \to 0} \frac{\log(1+u) - \log 1}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{\log(1+u)}{u} = 1, \text{ c.q.p.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

Seja $x_0 < x$ e designemos por ξ um valor conveniente intermédio de x_0 e x. Pela fórmula dos acréscimos finitos: $\log x = \log x_0 + (x - x_0)\, \xi^{-1}$ donde $\frac{\log x}{x} = \frac{\log x_0 + (x - x_0)\, \xi^{-1}}{x} < \frac{\log x_0}{x} + \frac{x - x_0}{x_0 x}$, expressão que tende para $1/x_0$ quando $x \to +\infty$. Como x_0 pode ser escolhido arbitràriamente grande tem-se $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$, c. q. p.

> *Para* n *racional qualquer positivo tem-se*
>
> $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^n} = 0 \quad e \quad \lim_{x \to 0} x^n \log x = 0.$$

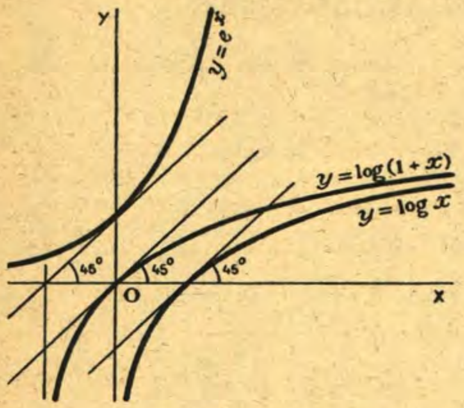
Com efeito, fazendo $x = y^{1/n}$, vem $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^n} = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{\log y}{ny} = 0$ e fazendo $x = y^{-1/n}$ deduz-se anàlogamente $\lim\limits_{x \to 0} x^n \log x = \lim\limits_{y \to +\infty} -\frac{\log y}{ny} = 0$, c. q. p.

Façamos agora o estudo da função exponencial de base e, inversa do logaritmo neperiano.

Função e^x

Definição e principais propriedades

Das propriedades apontadas da função $\log x$ resulta a existência duma função inversa contínua, derivável e crescente, cujo domínio é todo o eixo real e contra-domínio o semi-eixo positivo das ordenadas. É a função que designaremos, de momento, por $E(x)$ e cujo gráfico se pode obter, como é sabido, construindo a curva simétrica de $y=\log x$ em relação à bissectriz dos eixos coordenados de equação $y=x$.



Passemos à dedução das propriedades de $E(x)$ que resultam também imediatamente das correspondentes de $\log x$.

Derivada de y = E (x).

Basta, para deduzir y', recordar a lei de derivação duma função inversa e notar que a inversa de $y=E(x)$ é $x=\log y$ e que $x'=(\log y)'=1/y$.

Assim, tem-se: $y'=1/x'=y=E(x)$.

A função E (x) *é idêntica à sua derivada.*

A função E (x) *satisfaz à equação funcional* E (a+b) = E (a) · E (b) (a *e* b *números reais quaisquer*).

Comecemos por notar que do facto de serem inversas as duas funções consideradas se tem para x qualquer $x=\log[E(x)]$.

Consideremos agora o logaritmo do produto $E(a)\cdot E(b)$. Vem: $\log[E(a)\cdot E(b)]=\log[E(a)]+\log[E(b)]=a+b$ e portanto $E(a)\cdot E(b)=E(a+b)$, c. q. p.

Generalização imediata: $\prod_{i=1}^{n} E(a_i)=E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$.

Nota — Pode aqui observar-se também que não há função alguma derivável fundamentalmente distinta da função $E(x)$ e solução da equação funcional: $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. A justificação far-se ia por via análoga à já indicada no caso de $\log x$.

No caso particular $a_i=a$ $(i=1,2,\cdots n)$ tem-se: $[E(a)]^n=E(na)$.

Mais geralmente, para n racional qualquer, duma propriedade assinalada para $\log x$, deduz-se: $\log([E(a)]^n)=n\log[E(a)]=na$ ou $[E(a)]^n=E(na)$.

Designando por e o valor de $E(x)$ para $x=1$, isto é, $E(1)=e$ ou $\left(\log e=\int_1^e \frac{dt}{t}=1\right)$ vem, para x racional qualquer $E(x)=e^x$.

As propriedades fundamentais atrás indicadas passam a ser traduzidas por $e^a\cdot e^b=e^{a+b}$ e $(e^a)^n=e^{na}$ para n racional qualquer.

É também evidente que

$$E(1)=e^1=e\,,\ E(r)\quad E(-r)=E(0)=e^0=1$$

em vista de convenções conhecidas.

A função $E(x)$ contínua para todos os valores de x coïncide assim para x racional com a potência e^x.

Convencionaremos, naturalmente, estender esta representação $E(x)=e^x$ a x irracional, *generalizando assim, a noção de potência no caso do expoente irracional para a base* e. [1]

Passemos ao estudo de outro conjunto de propriedades de e^x (*função exponencial* de base *e*).

Os infinitésimos x *e* e^x-1 *são equivalentes.*

Com efeito $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^0}{x}=(e^x)'_{x=0}=1$.

Tem-se para n *racional positivo*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \quad e \quad \lim_{x\to-\infty}x^n e^x=0\,.$$

Mostremos finalmente que o limite da sucessão de têrmo geral $u_n=(1+1/n)^n$ é o número e definido por $\log e=1$.

Para isso considere-se a sucessão $v_n=\log u_n=n\log(1+1/n)$. Recordando que $\log(1+1/n)$ é para $n\to\infty$ um infinitésimo equivalente a $1/n$, vem $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\log(1+1/n)=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot 1/n=1$ e portanto $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}\log u_n=\log(\lim\limits_{n\to\infty}u_n)=1$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e$, c. q. p.

(Continua)

BIBLIOGRAFIA

G. Bouligand. Initiation à l'Analyse Mathématique, 2.ª ed. Paris, 1943.

G. Bouligand et *M. J. Dufresnoy.* Mathématiques Pures. (1ère partie du programme de la classe de Mathématiques Supérieures). Paris, 1943.

G. H. Hardy. A course of pure Mathematics, 8.ª ed. Cambridge, University Press, 1941.

R. Courant. Differential and Integral Calculs. Vol. 1, 2.ª ed. London, 1941.

R. Courant and *H. Robbins.* What is Mathematics? Oxford University Press, 1943.

Th. Leconte et *R. Deltheil.* Éléments de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Paris, 1935.

Nota — Todos os livros indicados são de leitura aconselhável aos alunos dos dois primeiros anos das nossas Escolas Superiores. As obras «What is Mathematics?» e «Initiation à l'Analyse Mathématique» não são livros de curso e a sua leitura é muito agradável e proveitosa podendo contribuir para desenvolver vantajosamente o gôsto pela matemática.

---

[1] Mais adiante provaremos que êste número e é o número vulgarmente definido por $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ ou como limite comum das duas sucessões convergentes $u_n=1+1+1/2!+1/3!+\cdots+1/n!$ e $v_n=u_n+1/n!$, e que tão importante papel representa na Análise Matemática.

EXAMES DE FREQÜÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — Exame final, 9-6-944. — Ponto n.º 1.

1837 — Demonstre que o produto de duas raízes de índice n da unidade é ainda uma raíz de índice n da unidade. R: *As raízes de índice* n *da unidade são:*

$$w_{n,k} = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n} \quad (k=0,1,2\cdots n-1)$$

pondo $k=i$ *e* $k=j$, *vem:*

$$w_i \cdot w_j = \cos\frac{2(i+j)\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2(i+j)\pi}{n}$$

ora $i+j=nq+r$ *com* $0 \lesseqgtr r \lesseqgtr n-1$.

Portanto: $w_i \cdot w_j = \left(\cos\frac{2nq\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2nq\pi}{n}\right)\cdot$

$$\cdot\left(\cos\frac{2r\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2r\pi}{q}\right) = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2r\pi}{n}$$

que é uma raiz de índice n *da unidade.* c. q. d.

1838 — Calcule pelo método de aproximação de Newton (usando duas aproximações) a menor raiz positiva da equação $x-\cos x=0$. R: *A menor raiz positiva da equação dada está contida no intervalo* $(0, \pi/2)$. *A função* $f(x)=x-\cos x$ *e a sua segunda derivada têm no ponto* 0 *sinais contrários. Portanto, a primeira aproximação da raiz é:*

$$r_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi/2}{1+1} = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854\,.$$

Para calcular a segunda aproximação note-se que a raiz está contida na intervalo $(0, \pi/4)$. *Portanto, visto que* $f(\pi/4) > 0$

$$r_2 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi/4-\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2} = 0{,}7374\,.$$

1839 — Que valor se deve atribuir a k para que a equação $ay^2-x^2+(a-1)\,xy+(a+1)\,y-k=0$ represente duas rectas distintas? R: *A condição para que a equação dada represente duas rectas distintas, é:* $(B^2-AC)\;(D^2-AE)=(BD-AF)^2$ *ou seja, no nosso caso:* $\left(\frac{a^2+1-2a}{4}+a\right)\cdot\left(\frac{a^2+2a+1}{4}\right)=\left(\frac{a^2-1}{4}-ak\right)^2$ *ou* $\left(\frac{a+1}{2}\right)^2=\frac{a^2-1}{4}-ak$ *ou ainda* $a^2+2a+1-a^2+1=$ $=-4ak$; *logo* $k=-\frac{a+1}{2a}$.

Soluções dos n.os 1837 a 1839 de L. G. Mendonça de Albuquerque.

F. C. L. — Álgebra Superior — 2.º Exame de freqüência, 1942-43.

I

1840 — Equação da tangente à curva $y=xe^{1/x^2}$ no ponto $M(x,y)$ e limite para que tende esta tangente quando $\overline{OM}$ tende para ∞.

1841 — Determinar o 4.º termo do desenvolvimento em série de Mac-Laurin de $\frac{1}{1+x}\cdot\log(1-x)$. R: *De* $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots=\Sigma\,u_n$ *e* $\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots=\Sigma\,v_n$, *tem-se* $w_4=u_0v_4+u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1+u_4v_0$ *ou* $w_4=7x^4/12$.

1842 — Determinar os máximos e mínimos da função $y=\text{sen}\,x^2+\cos x^2$. R: *Pondo* $y=\text{sen}\,u+\cos u$ *tem-se* $y'=\cos u-\text{sen}\,u=0$ *para* $\text{tg}\,u=1$ *ou* $u=\pi/4+$ $+k\pi$. *Agora* $y''=-\text{sen}\,u-\cos u$ *é positiva para* $u=5\pi/4+2k\pi$ *e negativa para* $u=\pi/4+2k\pi$; *nestes pontos a função tem portanto um mínimo* $(-\sqrt{2})$ *e um máximo de* $(\sqrt{2})$, *respectivamente.*

II

1843 — Como se levanta uma indeterminação do tipo ∞^0? Justifique. R: *De* $y=[f(x)]^{g(x)}=e^{\frac{\log f(x)}{1/g(x)}}$ *tem-se* $\lim\limits_{x\to a} y = e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\log f(x)}{1/g(x)}}$. *Bastará determinar-se* $\lim\limits_{x\to a}\frac{\log f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.

1844 — De que relação se parte para concluir que $f(x,y)$ é contínua num ponto em que tem derivadas contínuas? R: *Da fórmula dos acréscimos finitos.*

1845 — Não é possível garantir a continuïdade de $f(x,y)$ em condições mais gerais? Como? R: *Para que* $f(x,y)$ *seja contínua num ponto em que admita derivadas parciais é suficiente que estas sejam limitadas nas suas vizinhanças.*

1846 — Que fórmula se pode utilizar no cálculo aproximado de $25^{1/5}$? R: *Pondo* $25=32\,(1/32+24/32)$ *pode desenvolver-se* $(1/32+24/32)^{1/5}$ *pela fórmula do binómio*

1847 — Como se justifica o uso que se faz de $f''(x)$ para determinar a situação duma curva em relação à sua tangente na vizinhança do ponto de contacto? R: *A partir da comparação da ordenada* $y=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)^2/2\cdot f''(x_1)$, *na vizinhança do ponto* (x_0, y_0) *da curva, com a ordenada* $Y=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$ *do ponto da tangente à curva em* $(x_0 y_0)$ *que tem a mesma abscissa que o primeiro.*

1848 — Aplique a $\varphi(t)=f(a+ht, b+kt)$, no intervalo de $t=0$ a $t=1$, o teorema de Lagrange e classifique o resultado obtido aproximando-o de alguma fórmula conhecida. R: *É* $\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)=\Delta t\varphi'(t+\theta\Delta t)$. *Pondo-se* $a+ht=x$ *e* $b+kt=y$ *será* $h\Delta t=\Delta x$ *e* $k\Delta t=\Delta y$; *além disso* $\varphi'(t)=hf'_x+kf'_y$ *e finalmente:*

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta x f'_x(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)+\Delta y f'_y(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y).$$

1849 — Na resolução dum problema de máximos e mínimos é sempre necessário recorrer às derivadas de ordem superior? Justifique. R: *Um ponto de máximo ou mínimo é um ponto em que a 1.ª derivada muda de sinal. Para o determinar basta em muitos casos o conhecimento da derivada como quando, sendo* α *e* β *inteiros positivos, se tem* $y'=(x-a)^\alpha/(x-b)^\beta$.

1850 — Que relação liga os coeficintes angulares de 2 diâmetros conjugados da curva $2x^2+y^2=2$? R: *Sendo* m *e* m' *êsses coeficientes, a relação é:*

$$mm'=-2.$$

1851 — De que teorema se deduz que é constante a diferença entre duas primitivas da mesma função finita? É necessária esta restrição *finita?* Porquê? (Funções reais, variável real). R: *Do teorema de Lagrange ou, mais directamente, dum seu corolário que diz que* se duas funções num dado intervalo admitem derivadas finitas constantemente iguais, a sua diferença, nêsse intervalo, é necessàriamente constante. *A restrição é necessária. Considere-se a função nula para qualquer* $x\neq 0$ *e infinita para* $x=0$. *Qualquer função, nula para* $x=0$ *e igual a* $k|x|/x$ *para* $x\neq 0$, *é uma primitiva de 1.ª; duas destas funções não diferem duma constante. (Êste exemplo é uma variante dum outro que se encontra em Vicente Gonçalves,* Lições de Cálculo e Geometria, *pág. 194).*

1852 — Para que valores de x se desenvolve $\operatorname{sen} e^x$ em série de Mac-Laurin? Porquê? R: *Qualquer, porque* $\operatorname{sen} z$ *tem um desenvolvimento em série de potências válido em todo o plano.*

III

1853 — Escreva a identidade de Euler para a função homogénea $f(x,y)$ e derive-a em relação a x. Em que condições se deduz daí que $f'_x(x,y)$ é também função homogénea? R: *A identidade é* $xf'_x+yf'_y=\alpha f(x,y)$. *Derivando, tem-se* $f'_x+xf''_{x^2}+yf''_{yx}=\alpha f'_x$ *ou* $xf''_{x^2}+yf''_{yx}=(\alpha-1)f'_x$. *Na condição de serem contínuas as derivadas de 2.ª ordem* $f''_{yx}=f''_{xy}$ *é* $f'_x(x,y)$ *uma função homogénea visto que verifica a identidade de Euler.*

1854 — Ache a equação da recta variável na qual os semi-eixos Ox e Oy determinam um segmento $\overline{AB}$ de grandeza invariável. R: *Sendo* $\overline{AB}=l$ *a equação será* $x/p+x/\sqrt{l^2-p^2}=1$.

Soluções dos n.ºs 1841 a 1854 de G. Ramos de Castro.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira. — 2.º exame de freqüência, 8 de Junho de 1943.

1855 — Calcular a área dum triângulo, cujos comprimentos dos lados, são as raízes da equação

$$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0.$$

(Utilizar a fórmula $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ em que p é o semi-perímetro e a, b, c as medidas dos lados do triângulo). R: *Tem-se* $p(p-a)(p-b)(p-c)=p^4-p^3(a+b+c)+p^2(ab+ac+bc)-pabc$ *e pelas fórmulas de Newton:* $a+b+c=-\alpha$, $ab+ac+bc=\beta$ *e* $abc=-\gamma$. *Ora* $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{-\alpha}{2}$; *portanto,*

$$S=\sqrt{\alpha(4\alpha\beta-8\gamma-\alpha^3)}/4.$$

1856 — Mostre que é $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=e^{-2r}\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right)$ se fôr $V=f(x,y)$ e $\begin{cases} x=e^r\cos\theta \\ y=e^r\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$

R: *Tem-se:*
$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial r}=\dfrac{\partial V}{\partial x}e^r\cos\theta+\dfrac{\partial V}{\partial y}e^r\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{\partial V}{\partial \theta}=-\dfrac{\partial V}{\partial x}e^r\operatorname{sen}\theta+\dfrac{\partial V}{\partial y}e^r\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}e^{2r}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}e^{2r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{\partial V}{\partial x}e^r\cos\theta+\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}e^{2r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}e^{2r}\operatorname{sen}^2\theta+\frac{\partial V}{\partial y}e^r\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}e^{2r}\operatorname{sen}^2\theta-\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}e^{2r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\frac{\partial V}{\partial x}e^r\cos\theta-\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}e^{2r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}e^{2r}\cos^2\theta-\frac{\partial V}{\partial y}e^r\operatorname{sen}\theta.$$

Somando ordenadamente e tendo em conta as simplificações, virá: $\dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=e^{2r}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+e^{2r}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ *donde:*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right), \quad \text{c. q. p.}$$

1857 — Considere-se um triângulo $[ABC]$ de base $\overline{AB}$ e de altura $\overline{CO}$. Tomem-se para eixos coordenados as rectas contendo $\overline{AB}$ e $\overline{CO}$. Sejam a e b as abcissas dos pontos A e B, c a ordenada do ponto C. Escrever as equações das alturas dêste triângulo, verificar que elas passam por um mesmo ponto e determinar as coordenadas dêste ponto. R: *Escolhendo o referencial cartesiano ortogonal que aconselha o problema, é fácil ver que as três alturas do triângulo são medidas:*

altura $\overline{CO}$ $\rightarrow$ *sôbre a recta* $x=0$.

» $\overline{AD}$ $\rightarrow$ *sôbre a recta que passa por* $A(a,0)$ *e é perpendicular à recta* CB.

» $\overline{BE}$ $\rightarrow$ *sôbre a recta que passa por* $B(b,0)$ *e é perpendicular à recta* AC.

Equações das rectas CB *e* AC:

CB) $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}=1 \rightarrow y=-c/b\cdot x+c$

AC) $\frac{x}{a}+\frac{y}{c}=1 \rightarrow y=-c/a\cdot x+c$.

Portanto, as equações das rectas AD *e* BE *serão respectivamente:* $y=\frac{b}{c}(x-a)$ *e* $y=\frac{a}{c}(x-b)$. *Tem-se de verificar que as três rectas de equações:* $x=0$, $y=b/c\cdot(x-a)$ *e* $y=a/c\cdot(x-b)$ *passam tôdas por um mesmo ponto. Como sabemos, terá que ser nulo o determinante:* $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ b & -c & ab\\ a & -c & ab\end{vmatrix}$, *o que é evidente. Para determinar as coordenadas dêste ponto, basta resolver, por exemplo, o sistema:* $\begin{cases}x=0\\ y=b/c\cdot(x-a)\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=-ab/c\end{cases}$.

1858 — Estudar e representar gràficamente a função $y=e^{-\operatorname{tg} x}$. Calcular, utilizando o seu desenvolvimento em série, o valor numérico de y para $x=\pi/4$ com um êrro inferior a 10^{-2}. R: *Função definida em todo o domínio da variável* x *real, periódica de período* π. *São seus pontos de descontinuidade infinita, de 1.ª espécie, os pontos de abcissa* $x=(2k+1)\pi/2$ *à esquerda dos quais a função tende para zero e à direita dos quais* $y\rightarrow+\infty$. *É um ponto da curva, sôbre o eixo das ordenadas, o ponto* $(0,1)$. *Tem-se:* $y'=-e^{-\operatorname{tg} x}\cdot\sec^2 x \rightarrow y'<0$ *qualquer que seja* x, *logo, a função é monotónica decrescente; não tem máximos nem mínimos.* $y''=e^{-\operatorname{tg} x}\cdot\sec^2 x\,(\sec^2 x-2\operatorname{tg} x)=$ $=e^{-\operatorname{tg} x}\sec^2 x\cdot(1-\operatorname{tg} x)^2$ *o que leva a concluir que* y *não tem pontos de inflexão e apresenta a sua concavidade sempre voltada no sentido das ordenadas positivas, por ser sempre* $y''>0$. *O cálculo do valor numérico de* y *para* $x=\pi/4$ *reduz-se, como fàcilmente se vê, ao cálculo, com um êrro inferior a* 10^{-2}, *da soma dos termos da série alterna:*

$$e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\cdots=$$

$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots$ *Tomando os quatro primeiros termos desta série, cometeremos no cálculo da sua soma um êrro* $<\left|\frac{1}{6!}\right|=\frac{1}{720}<\frac{1}{200}$ *Basta calcular* $\frac{1}{3!}$, $\frac{1}{4!}$ *e* $\frac{1}{5!}$ *com três casas decimais (arredondando a última), para se cometer três êrros de cálculo inferiores a* $1/2000$, *logo um êrro total inferior a* $1/200$. *Com um êrro sistemático e um êrro de cálculo* $<\frac{1}{200}$, *o resultado virá pois com a aproximação desejada; assim, será* $e^{-1}\simeq 0{,}5-0{,}167+0{,}042-0{,}008=0{,}367$.

Soluções dos n.ºs 1855 a 1858 de O. Morbey Rodrigues.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — Exame Técnico — **2.º exame de freqüência extraordinário, 23-6-943.**

1859 — Importância do conceito de monotonicidade na teoria da convergência de séries.

1860 — Estabeleça, pelo caminho que lhe pareça mais curto, a fundamentação do teorema dos valores compreendidos sôbre o conceito de corte.

1861 — Aplique o teorema de Rolle à função:

$$y(x)=(x-a)^n\cdot(x-b)^p$$

e determine o ponto em que a derivada se anula.

GEOMETRIA DESCRITIVA E PROJECTIVA

F. C. C. — Geometria Descritiva — **2.º exame de freqüência. Junho de 1943.**

1862 — *Geometria cotada.* São dados: uma recta r de declive 1 e um plano α de intervalo 4/3. A recta e o plano projectam-se segundo dois lados opostos de um quadrado. Representar a recta simétrica de r em relação ao plano α. Escala 1 : 80. R: *A introdução de um plano vertical de projecção de traço paralelo à escala de declive do plano dado, transforma* α *num plano de topo e* r *numa recta frontal, resolvendo o problema imediatamente.*

1863 — *Perspectiva cavalheira.* Determinar o ângulo de dois planos de traços paralelos.

1864 — *Superfícies.* É dada uma esfera pelos contornos aparentes, de 3,5 cm de raio e centro no segundo plano bissector. Conduzir os planos tangentes à esfera paralelos a um plano dado pelos traços. R: *Conduza-se pelo centro da esfera uma recta perpendicular ao plano dado. Os pontos em que essa recta intersecta a esfera são os pontos de contacto dos planos pedidos.*

F. C. C. — GEOMETRIA DESCRITIVA — **Exame final, Junho de 1943.**

1869 — *Perpectiva rigorosa* — Representar o ponto simétrico de um ponto dado em relação ao plano do quadro. R: *Conduza-se pelo ponto o plano projectante de tôpo e rebata-se sôbre o plano do quadro.*

1866 — *Superfícies* — Representar a secção plana feita numa esfera por um plano definido pela L. T. e pelo centro da esfera.

Soluções dos n.os 1862, 1864 e 1865 de L. G. Mendonça de Albuquerque.

F. C. C. — GEOMETRIA PROJECTIVA — **Exame final, Outubro de 1943.**

1867 — Dada uma involução de raios por dois pares de elementos conjugados, determine o par de raios perpendiculares conjugados na involução. Justifique.

1868 — Dada uma parábola por três tangentes e o ponto de contacto de uma delas, determine pelo processo de Brianchon, a direcção do eixo. Justifique.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. P. — Exames finais — Outubro de 1943. — Ponto n.º 1.

1869 — Calcular a área limitada pela curva $y=\dfrac{1}{a^2x^2+b^2}$, o eixo dos xx e as paralelas ao eixo dos yy tiradas pelos pontos de inflexão. R: *Para abcissas dos pontos de inflexão obtém-se:* $x=\pm\dfrac{b}{\sqrt{2}\,a}$. *A área pedida será:*

$$\int_{-\frac{b}{\sqrt{3}a}}^{+\frac{b}{\sqrt{3}a}}\frac{dx}{a^2x^2+b^2}=\frac{1}{ab}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{ax}{b}\right]_{-\frac{b}{\sqrt{3}a}}^{+\frac{b}{\sqrt{3}a}}=\frac{\pi}{3ab}.$$

1870 — Determinar a envolvente das circunferências cujos centros percorrem a parábola $y=x^2$ e cujos raios são iguais às ordenadas dos centros. R: *As circunferências consideradas têm por equação* $(X-x)^2+(Y-x^2)^2=x^4$, *onde* x *desempenha o papel de parâmetro. Derivando em ordem a* x, *obtem-se* $(X-x)+2x(Y-x^2)=-2x^3$; *eliminando* x *entre esta equação e a anterior, vem* $2Y(X^2+Y^2)-Y^2=0$, *que representa a envolvente pedida. Trata-se do eixo dos* XX *e duma circunferência centrada no eixo dos* YY *e passando pela origem.*

1871 — Sendo $M(\rho,\theta)$ o ponto corrente de uma linha (C), determinar a sua equação sabendo que esta linha passa pelo ponto $A(\theta=0,\rho=a$, em que $a\geq 2)$, e que a área OAM tem um valor numérico igual ao arco $\widehat{AM}$. R: *Tem-se* $\displaystyle\int_0^\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^\theta\rho^2\,d\theta$, *donde* $\rho^2+\rho'^2=\rho^4/4$, *ou* $\rho'=\rho\sqrt{\rho^2-4}/2$. *Separando variáveis e integrando, obtém-se* $\rho=\dfrac{2}{\cos(\theta+C)}$. *Os dados iniciais levam a* $\cos C=2/a$; *a equação procurada é, pois,* $\rho=\dfrac{2a}{2\cos\theta-\sqrt{a^2-4}\,\mathrm{sen}\,\theta}$, *que representa uma recta.*

Soluções dos n.os 1869 a 1871 de A. Pereira Gomes.

F. C. P. — Exame final, Outubro de 1943. — Ponto n.º 2.

1872 — Calcular a área limitada pela curva $y^2=3x^2-x^3$, desde a origem até à paralela ao eixo dos yy tirada pelo ponto de ordenada máxima. R: *Para abcissa do ponto de ordenada máxima, obtém-se* $x=2$. *A área pedida será:*

$$A=2\int_0^2 x(3-x)^{\frac{1}{2}}\,dx\,,\ \textit{ou, pondo}\ 3-x=t^2,$$

$$A=4\left[t^3-\frac{t^5}{5}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{8}{5}(3\sqrt{3}-2).$$

1873 — Determinar a relação que deve existir entre R e a para que a envolvente das esferas $x^2+y^2+(z-2a)^2=R^2$ seja a superfície $x^2+y^2=z^2-1$. R: *Exprimindo que, em cada ponto, o plano tangente à envolvente coïncide com o plano tangente à envolvida, obtém-se* $z=a$; *eliminando* x,y,z *entre esta equação e as dadas, vem:* $2a^2-R^2=1$, *que é a relação procurada.*

1874 — Dada a equação diferencial (1) $y'^3=y^2+yy'$ sabe-se que se considerarmos y' como abcissa teremos uma cúbica com um ponto singular na origem. Determinar as equações paramétricas da linha integral de (1) que passa pelo ponto $(0,0)$. R: *Se puzermos* $y=ty'$, *sabe-se que podemos exprimir* y *e* y' *em função racional de* t. *Obtém-se* $y'=t^2+t$, $y=t^3+t^2$, *donde* $\dfrac{dy}{dt}=3t^2+2t$ *e, portanto,* $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3t+2}{t+1}$; *integrando,* *vem* $x=3t-\log(t+1)+C$. *Os dados iniciais levam a* $C=0$. *As equações paramétricas procuradas são, pois,* $\begin{cases} x=3t-\log(t+1) \\ y=t^3+t^2 . \end{cases}$

Soluções dos n.os 1872 a 1874 de A. Pereira Gomes.

I. S. T. — Cálculo — Exame final, Outubro de 1943.

1875 — Calcular o integral duplo $\iint_A x dx dy$, em relação à área A limitada pela curva $3x^2+2x-y+1=0$, pelo eixo dos yy e pela tangente à curva no ponto de curvatura máxima.

1876 — Determinar as curvas planas cujo comprimento de arco s satisfaz à equação diferencial $\frac{ds}{dy}+3y\frac{d^2 s}{dy^2}=0$. ($x$ e y coordenadas rectangulares).

1877 — Verificar que o laplaciano do módulo duma função analítica (excepto nos pontos em que a função ou a sua derivada se anulam) é sempre positivo; e que o logaritmo do módulo da mesma função (com as mesmas excepções) é sempre nulo.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 1.º exame de freqüência extraordinário, 14-3-944.

1878 — Demonstre que, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ forem ortogonais dois a dois, se tem $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})^2=a^2 b^2 c^2$.
R: *O paralelepípedo construído sôbre os três vectores é rectângulo. Qualquer dos membros da igualdade mede o quadrado do seu volume.*

1879 — Demonstre que, se A e B forem dois pontos fixos dum sólido em movimento, a velocidade de C, exterior a AB, é constantemente perpendicular ao plano ABC.

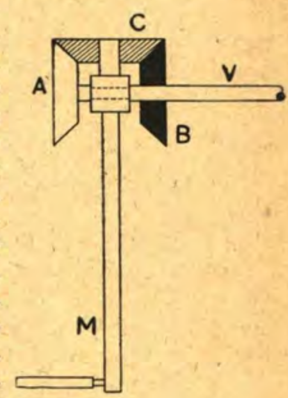
1880 — Considere um biela-manivela em que o comprimento da biela é igual ao raio da manivela (biela-manivela isósceles). Verifique que, se a rotação da manivela fôr uniforme, o centro do cavilhão está animado de movimento harmónico simples.

1881 — Demonstre que tôdas as soluções da equação vectorial $\vec{a}\wedge\vec{x}=\vec{b}$, em que os vectores constantes $\vec{a}$ e $\vec{b}$ satisfazem às condições $\vec{a}\neq 0$ e $\vec{a}\,|\,\vec{b}=0$, são dadas por $\vec{x}=\frac{\vec{b}\wedge\vec{a}}{a^2}+\lambda\,\vec{a}$, onde λ é um escalar arbitrário.

1882 — Do ponto A, situado 19,60 m acima do solo, deixam-se cair sucessivamente, sem velocidade inicial, dois grãos de chumbo P e Q. Quando o grão Q inicia a sua queda, já P percorreu 4,90 cm. Desprezando a resistência do ar, calcule a altura a que se encontra o grão Q ao atingir P o solo. Sugere-lhe o resultado dêste problema alguma explicação, mesmo parcial, para o facto dos jactos líquidos tenderem a dividir-se em gôtas? R: *Altura pedida,* $x=1{,}91$ m.

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 2.º exame de freqüência ordinário, 23-5-944.

1883 — A figura representa uma manivela manual com multiplicador. A manivela M, em vez de estar, como habitualmente, solidária com o veio V, forma com êle um par rotóide. O satélite C une-se à manivela por um par rotóide e engrena com as rodas planetárias iguais A e B. A primeira destas é solidária com o veio V; a roda B faz parte do fixe, formando um par rotóide com V. Por cada volta da manivela, quantas rotações faz o veio? *(Feraudi).* R: *Notando que o mecanismo é o diferencial dos automóveis com uma das rodas planetárias fixa, vê-se imediatamente que o veio* V *efectua duas rotações por cada volta da manivela.*



1884 — Os perfis dos dentes duma colecção de rodas cicloidais de engrenamento avulso foram gerados por uma rolante auxiliar com 3 cm de diâmetro. A roda de flancos rectilíneos tem 14 dentes. Qual é o diâmetro primitivo da roda de 56 dentes? R: *Numa colecção de rodas de engrenamento avulso, os diâmetros primitivos são directamente proporcionais aos números de dentes. O raio primitivo do carreto de flancos rectilíneos, igual ao diâmetro da rolante auxiliar, vale* 30 mm. *Logo, a roda de 56 dentes tem por diâmetro primitivo*

$$2R=\frac{2\times 56\times 30}{14}=240 \text{ mm}.$$

1885 — Demonstre que o lugar geométrico das rectas, paralelas a uma dada direcção, em relação às quais o momento de inércia dum sistema material tem o mesmo valor, é uma superfície cilíndrica de revolução em tôrno do eixo que passa pelo centro de gravidade do sistema e é paralelo à direcção dada. R: *É conseqüência imediata do Teorema de Lagrange.*

1886 — Calcule o momento quadrático da esfera homogénea do raio R e densidade ρ, em relação: *a)* ao centro; *b)* a um ponto da superfície.

R: a) *Decompondo em camadas esféricas, vem* $I_c = 4\pi\rho \int_0^R r^4\,dr = \frac{4}{5}\pi\rho R^5$; b) *o Teorema de Lagrange fornece, a partir do resultado anterior,* $I_P = \frac{32}{15}\pi\rho R^5$.

1887 — A um elevador com 1 tonelada de pêso, foi em 3 s e com aceleração constante, imprimida a velocidade de 4 m/s. Desprezando o atrito, calcule a fôrça de tracção exercida pelos cabos e a altura subida durante aquêle tempo. *(Poorman)* R: *Fôrça pedida,* $F = 1136{,}1$ kg; *altura subida,* $s = 6{,}00$ m.

Soluções dos n.os 1878, 1882 e 1883 a 1887 de P. de Varennes e Mendonça.

I. S. T. — 2.º exame de freqüência — 1943

1888 — Verificar que as equações de Lagrange num espaço de configuração definido pela métrica $ds^2 = 2T\,dt^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\,dx^i\,dx^k$, têm a forma $\frac{d^2x^i}{dt^2} = X^i - \sum_{r} \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx^r}{dt}\frac{dx^s}{dt}$, sendo (X^i) o vector fôrça.

1889 — Um fio flexível, inextensível e simplesmente pesado, suspenso por dois pontos situados sôbre a mesma horizontal, toma a forma duma semi-circunferência. Achar a lei de variação da densidade.

1890 — Um ponto material é atraído por um centro fixo na razão inversa do cubo da distância. Dada a distância inicial a, calcular a duração da queda. (Supõe-se nula a velocidade inicial).

1891 — Quando um cilindro de revolução gira uniformemente em tôrno duma generatriz, o sistema das fôrças de inércia é equivalente a um vector único, cuja linha de acção é a perpendicular baixada do centro de gravidade sôbre o eixo. Qual é a grandeza dêsse vector?

I. S. T. — Mecânica — Exame final, Outubro de 1943.

1892 — Num movimento central, seja r a distância do centro ao ponto móvel M, p a distância do mesmo centro à tangente à trajectória em M, c a constante das áreas e F a grandeza da fôrça, por unidade de massa, suposta atractiva. Verificar a relação: $F = \frac{c^2}{p^3}\frac{dp}{dr}$. E ainda a relação $F = \frac{c^2\,r}{\rho p^3}$, sendo ρ o raio de curvatura da trajectória em M.

1893 — Um sólido formado por três hastes rectilíneas homogéneas idênticas (de massa M e comprimento $2a$), cada uma delas perpendicular às outras duas, gira uniformemente em tôrno da haste média. Achar o vector principal e o momento resultante do sistema das fôrças de inércia, em relação ao ponto O, meio dessa haste média.

1894 — Desenvolver $\frac{1}{2}(\pi - x)\,\mathrm{sen}\,x$ em série de cosenos, válida no intervalo $0 \leq x \leq \pi$.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da «Gazeta»

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1895 — Calcular os catetos e a hipotenusa dum triângulo rectângulo, conhecendo-se as superfícies (A_1 e A_2) dos dois triângulos, em que a altura correspondente à hipotenusa, o divide.

(Bach. do Ens. Esp.al Poitier — 2-8.º-88).

1896 — Encontrar quatro números inteiros consecutivos tais que o cubo do maior seja igual à soma dos cubos dos outros três.

(*Generalizar:* — quatro números formando progressão aritmética).

1897 — Resolver a equação

$$\frac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}} = a-b\,.$$

1898 — Dividir o volume dum cone recto de revolução, em média e extrema razão, por um plano paralelo à base.

(Bach. em ciências — Marselha — 25-4.º-88).

Problemas n.os 1895 a 1898 propostos por J. Faria de Abreu (de Penafiel).

1899 — Numa urna há n bolas brancas e pretas. Qual a composição da urna, sabendo-se que o número de bolas brancas é igual ao valor médio do n.º de extracções necessárias para se obter uma bola branca, supondo que se vai extraindo, sucessivamente, ao acaso uma bola da urna, com reposição ao fim de cada extracção. Discutir.

Problema proposto por Laureano Barros (do Pôrto).

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1193 — Qual a fórmula da trigonometria plana análoga à fórmula fundamental da trigonometria esférica? Passsar desta para aquela. R: *As fórmulas análogas fundamentais da trigonometria rectilínea e esférica, são* $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ *e* $\cos a=\cos b\cdot\cos c+\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\cos A$. *Se considerarmos os comprimentos dos lados* a, b, c *dum triângulo esférico, bastante pequenos em relação ao raio* R, *podemos tomar o triângulo considerado como plano. Se fizermos depois:*

$$\cos a=1-\frac{a^2}{2R^2}\,,\quad \cos b=1-\frac{b^2}{2R^2}\,,\quad \cos c=1-\frac{c^2}{2R^2}\,,$$

$\operatorname{sen} b=\frac{b}{R}$ *e* $\operatorname{sen} c=\frac{c}{R}$, *e substituirmos estes valores na fórmula fundamental da trigonometria esférica, vem:*

$$1-\frac{a^2}{2R^2}=\left(1-\frac{b^2}{2R^2}\right)\cdot\left(1-\frac{c^2}{2R^2}\right)+\frac{bc}{R^2}\cdot\cos A\,,$$ *donde*

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A-\frac{bc}{R^2}\cdot$$ *Mas como* R *é muito grande em relação aos lados,* $\frac{bc}{R^2}$ *despreza-se, e temos então, como pretendíamos* $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$.

Solução de T. Ferreira Rato (de S. Tiago — Cabo Verde).

1508 — Por lapso, ao ser publicada uma solução dêste problema no n.º 18 da «Gazeta de Matemática», omitiu-se o terem sido recebidas soluções correctas do mesmo problema de Alberto Pais (de Lisboa) e de J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

35 — Memorandum On Official Statistics — Publicação da Royal Statistical Society, enviada pelos Serviços Culturais do British Council.

Em Outubro de 1942 a Royal Statistical Society nomeou uma comissão que foi encarregada de elaborar um relatório sôbre a organização dos Serviços Oficiais de Estatística antes, durante e depois da guerra, focando os seguintes pontos:

a) Preenchimento dos quadros das Repartições.
b) Relações entre as Repartições.
c) Vantagens e desvantagens de alguns esquemas de organização para o após-guerra.

É dos resultados dêste inquérito — a que na nossa modesta opinião devia ser dada a mais larga publicidade — que trata a publicação acima referida.

Dada a relativa extensão do trabalho não é possível, como seria nosso desejo, fazer uma apreciação cuidadosa e pormenorizada do seu conteúdo mas, desde já, dada a importância do assunto e a sua manifesta oportunidade, tomamos a liberdade de chamar para o mesmo a atenção dos nossos dirigentes, particularmente daqueles que se encontram à frente dos Serviços Estatísticos das organizações oficiais.

O índice, que fornece já uma idéia aproximada do carácter do trabalho realizado, dos problemas examinados, das críticas formuladas e das soluções previstas, é o seguinte:

1. — *Introdução:* — Observações preliminares. — Classificação das Repartições. — Definição de «estatístico» e «estatística».

2. — *Posição antes da guerra:* — A colheita dos dados. — A análise do material estatístico nas Repartições. — Preenchimento dos quadros das Repartições. — Ligação entre as Repartições. — Sumário.

3. — *Desenvolvimentos durante a guerra:* — Falta de estatísticos quando se declarou a guerra. — «The Central Statistical Office». — Coordenação dos trabalhos de estatística matemática. — Mecanização. — Mudança da atitude pública em relação à Estatística. — Sumário.

4. — *Necessidades do período do post-guerra:* — Suposição fundamental. — A criação de unidades estatísticas. — Preenchimento dos quadros destas unidades. — Coordenação. — Posição especial de certas Repartições.

Sumário.

Parece-nos útil acentuar a importância de certas apreciações mormente daquelas que dizem respeito ao período de antes da guerra por envolverem uma crítica cerrada à organização então existente.

Assim é posta em relêvo a orgânica defeituosa dos Serviços Estatísticos, a falta de coordenação dos mesmos, a colheita desordenada de dados sem fim determinado, a repugnância do público em fornecer informações, o preenchimento dos quadros por pessoal sem qualificações profissionais, a ideia generalizada a quási todo o funcionalismo de que a estatística não conta como habilitação profissional e não passa dum conhecimento transitório sem importância para a carreira administrativa, a não qualificação profissional do Estatístico, etc., etc.

A guerra teve a virtude de pôr a nú tôdas estas deficiências, obrigando a uma reorganização apressada mas substancial dos serviços.

A rápida expansão de certos serviços, particularmente daqueles que estão ligados aos Ministérios das Subsistências, Fornecimentos, Guerra Económica e Produção Aeronáutica, os transportes, e o reconhecimento de que a complexidade técnica da guerra moderna exige profissionais competentes e especializados, foram as determinantes desta reorganização.

Criou-se um organismo central — The Central Statistical Office — com funções coordenadoras e directivas, promoveu-se a mecanização de várias repartições dotando-as de máquinas de calcular adequadas e iniciaram-se na London School of Economics, actualmente em Cambridge, cursos de preparação estatística com a duração de oito semanas para os funcionários civis.

Sôbre a preparação matemática necessária ao estatístico para o estudo e interpretação de grande número de problemas criados pela guerra, vem a propósito transcrever o seguinte (pág. 10, § 32):

... «As complexidades da guerra moderna levaram ao reconhecimento bemvindo, embora lento, da importância do ponto de vista científico nos campos da produção, do desenvolvimento e da investigação. Quando a qualidade, no sentido lato de distinta da quantidade, se transforma num assunto de investigação científica, em breve se verifica que os métodos de ataque devem ser os da Estatística Matemática, porque só êstes permitem abarcar compreensivamente as ilações que resultam da variação inerente entre unidades individuais. Isto é verdade, quer a unidade seja um membro das Fôrças Armadas e o problema trate da selecção e treino do potencial humano, ou uma parte componente da estrutura da asa de um avião ou o mecanismo de uma espoleta de uma granada ou seja mesmo uma unidade mais complexa consistindo de um canhão com a sua guarnição e um complicado sistema mecânico de «control» de fogo. Para satisfazer estas exigências não existia ao tempo número suficiente de estatísticos com treino matemático satisfatório, e a falta teve de ser preenchida na maioria dos casos pelos cientístas que trabalhavam nestes assuntos — matemáticos, físicos, fisiologistas — que foram obrigados a aprender por si próprios os elementos da teoria das probabilidades e da teoria dos êrros».

A última parte do relatório, sob certos aspectos a mais interessante dado o seu caráter eminentemente construtivo, trata da reorganização dos Serviços Estatísticos para o período do após-guerra, recomenda a manutenção dum organismo central coordenador, propõe a criação de unidades estatísticas libertas por completo das tarefas administrativas, estabelece as normas para o preenchimento dos quadros, vencimentos e promoções, foca em pormenor as futuras relações entre os vários serviços e advoga enfàticamente a necessidade de dar uma boa preparação matemática a todos os estatísticos.

Merecia sem sombra de dúvida êste relatório uma apreciação cuidadosa que infelizmente o espaço restrito de que dispõe a «Gazeta» não permite, mas no entanto mais uma vez lembramos a necessidade de uma larga divulgação do mesmo, não para ser lido negligentemente como uma curiosidade, antes para ser estudado, analizado e meditado por quem de direito.

F. Carvalho Araújo

36 — GALLEGO-DÍAZ, J. — **Curso de Matemática en forma de problemas** — Prólogo de António Flores de Lemus — Editorial Dossat, Madrid, 1944.

Esta nova obra de Gallego-Díaz é uma bela colecção dos mais variados problemas de Álgebra, Geometria Analítica, Análise Infinitesimal e Cálculo das Probabilidades. Alguns dos problemas foram já publicados pelo Autor em revistas espanholas ou de outros países, outros são problemas saídos nos exames de entrada de Escolas Especiais de Engenharia (Minas, Agronomia, Silvicultura, etc.). Quási todos são acompanhados das respectivas resoluções, elegantemente apresentadas, e alguns dão indicações bastante úteis que levarão o estudioso ao conhecimento de boas obras didacticas e de revistas de matemática.

Do prólogo, escrito pelo matemático contemporâneo espanhol António Flores, traduzimos parcialmente, para uma melhor e justa apresentação da obra, as considerações seguintes:

«Dos problemas incluidos muitos são originais; outros, clássicos, aparecem resolvidos com extraordinárias brevidade e elegância, graças, por exemplo, ao hábil emprêgo de métodos cinemáticos.

...Gallego-Diaz não é um repetidor, nas aulas, de uma ciência adquirida, pelo contrário, a sua verdadeira vocação exerceu-se e exerce-se constantemente em problemas científicos que ultrapassam a reduzida esfera dos cursos. Não é outra a causa que dá a esta colecção de problemas uma marca típica que demonstra a existência de um cientista deslocado num campo de actividade de nível inferior».

Termino indicando o livro aos professores, que o consultarão com agrado e encontrarão nêle matéria útil para exercícios dos cursos, e aos alunos a quem servirá para o seu desenvolvimento e formação, travando assim contacto com métodos, por ventura, desconhecidos e com sugestões interessantes.

Manuel Zaluar Nunes

37 — PASSOS DA SILVA, LUÍS MARIA DE — **Elementos de Geometria,** para os IV, V e VI anos dos liceus (programa de 1936) — 1939 — Livraria Sá da Costa, Editora — Lisboa.

Pode considerar-se que o desenvolvimento da matemática, passou por 3 períodos: o discursivo, o sincopado e o simbólico. É característica a transformação do sinal da operação de diferença, correspondente a cada um daquêles períodos: primeiro se escreveu a palavra *minus*, depois $\bar{m}$ na forma sincopada, o m sobrecarregado de um traço, e finalmente o simples traço —.[1] A geometria elementar, pela sua natureza experimental, e porque nos descreve as propriedades das figuras, não sentiu tão fortemente, para o seu desenvolvimento, a necessidade do simbolismo e por isso se conserva por assim dizer no primeiro estádio. Mas as vantagens que advêm para o seu estudo da adopção de um simbolismo racional, são incontestáveis. Por isso o uso sistemático dum simbolismo, que é sua criação, pelo Dr. Luiz Passos, nos seus livros de geometria e nas suas lições, é uma obra que já tem marcados os seus traços no ensino, pois grande parte dos nossos professores do ensino liceal, a vai usando. É possível que as notações se possam modificar e simplificar, especialmente dando a cada símbolo um único significado, mas de início era de aconselhar não alargar muito o número de símbolos usado. O livro «Elementos de Geometria» para os 4.º, 5.º e 6.º anos, tem por isso essa grande vantagem. Como livro destinado ao ensino, e aprovado oficialmente, segue os programas. Quanto ao aspecto gráfico pode considerar-se duma maneira geral bom, conquanto algumas páginas, pelo uso de tipo muito grosso a substituir o itálico, fiquem muito carregadas. As demonstrações são correctas, com excepção da referente ao teorema de geometria no espaço: duas rectas paralelas a uma terceira são paralelas entre si. Pequeno senão, fácil de corrigir em futura edição. Termina o livro por uma boa colecção de exercícios que completam ou esclarecem as matérias tratadas no texto.

J. da Silva Paulo

[1] Tobias Dantzig — Le nombre.

38 — SIRK, DR. HUGO — **Matemáticas Superiores aplicadas a la Química y a la Física** — Tradução espanhola por Prof. Dr. T. Batuecas — Manuel Marín, ed. Barcelona, 1943.

As crescentes exigências de ordem matemática que se impõem mesmo aos experimentadores no campo da Química e da Física e os obrigam a possuir conhecimentos que ultrapassam largamente o domínio das Matemáticas Elementares, levaram o Autor, professor durante longos anos na Universidade de Viena, a redigir êste livro que é dedicado aos estudantes dos primeiros anos de Ciências Experimentais.

Os conceitos fundamentais são introduzidos a partir de exemplos de problemas e questões que se põem em Química, Física ou Cinética Química. Seguidamente, abstraindo dos atributos físicos ou químicos, apresentam-se sob forma matemática.

Numerosos gráficos acompanham a exposição esclarecendo-a.

A matéria distribui-se por três partes a saber:

1.ª parte — Funções de uma variável (cálculo diferencial, cálculo integral e noções sôbre séries); 2.ª parte—Funções de mais de uma variável (focam-se entre outras, sobretudo as aplicações à Termodinâmica); 3.ª parte Equações diferenciais (apresentam-se as noções fundamentais indispensaveis através de algumas das muitas equações diferenciais ordinárias e às derivadas parciais que se encontram, a cada passo, no estudo de Física).

Finalmente termina por um apêndice onde se compilaram algumas régras de cálculo de Álgebra e Geometria.

Trata-se pois de uma obra que certamente agradará e será entre nós, em especial, útil para os estudantes do 1.º ano de Ciências Físico-Químicas.

Manuel Zaluar Nunes

39 — PALMA FERNANDES, ANTÓNIO DO NASCIMENTO — **Elementos de Geometria,** para o 1.º, 2.º e 3.º anos dos Liceus. 1943 — Livraria Cruz. Braga.

O livro do Dr. Palma Fernandes, seguindo o programa, parece-nos no entanto, não se conformar inteiramente com o seu espírito, porquanto, dizendo-se nas observações do programa, que o ensino da geometria nas primeiras classes deve ser intuitivo e experimental, logo no capítulo II da II Parte começa fazendo demonstrações rigorosas de que se dão as justificações lógicas em passos, fugindo assim à verificação experimental. É certo que nas mesmas observações se diz, que no ensino do terceiro ano se pode e deve fazer-se demonstrações dedutivas, mas só no 3.º ano.

O tratamento das demonstrações por passos justificados, como usam americanos e inglêses, parece-nos muito aconselhável, e esta seria uma boa inovação introduzida em livros portugueses pelo Dr. Palma Fernandes, em especial porque se serve de um simbolismo que facilita o raciocínio; o que não nos parece aconselhável é que essas demonstrações com êsse carácter comecem a fazer-se logo aos primeiros passos do aluno do 1.º ano quando as suas possibilidades lógicas são pequenas. A definição de teorema a páginas 16, não é certamente correcta, e parecia-nos preferível não a ter dado; não havia prejuízo em guardá-la para mais tarde, para o 3.º ano, quando se pudesse dar uma melhor definição. Também não nos parece bem que chame à *hipótese: dados* e à *tese: pedidos*. Àparte êstes inconvenientes o livro, que tem boa apresentação gráfica, factor importante em livros de ensino, está recheiado de problemas bem graduados e que permitem boa preparação dos alunos, sendo as demonstrações correctas e bem apresentadas. Note-se que apesar de tudo algumas vezes o autor faz apêlo à intuïção dos alunos, pena sendo que o não faça mais freqüentemente.

J. da Silva Paulo

40 — PALMA FERNANDES, António do Nascimento. **Exercícios de Geometria e Álgebra** para o 5.º Ano dos Liceus. Livraria Cruz, Braga, 1943. Preço 8$50.

A preparação dos alunos para os exames actuais de matemática nos liceus, requere, mais do que nunca, a execução de longa série de exercícios sôbre as matérias dos programas, dado que as provas são exclusivamente escritas. Os livros da natureza dêste são por isso de grande utilidade quer para mestres quer para alunos, facultando a uns e outros larga cópia de exercícios. Têm por vezes o inconveniente de se repetirem, dando-nos, por assim dizer, os mesmos exercícios, com uma simples mudança de dados. Não é o caso dos livros de exercícios do Dr. Palma Fernandes, em que se nota exactamente a preocupação, louvável, de apresentar exercícios que não sejam, tanto quanto possível, a reprodução dos que se encontram com facilidade em qualquer manual. Como introdução a cada capítulo dá o autor muito brevemente e sem demonstrações as noções teóricas de que se necessita para a resolução dos problemas ou demonstrações dos teoremas, que uns e outros existem, quer resolvidos ou demonstrados como exemplos, quer depois, e em muito maior número questões propostas de que se dá simplesmente o resultado.

Com bôa apresentação gráfica e com os assuntos bem arrumados e graduados é êste livro de aconselhar a todos aquêles que necessitam de preparação para os exames liceais.

J. da Silva Paulo

41 — PALMA FERNANDES, António do Nascimento. **Exercícios de Aritmética Racional, Álgebra e Métodos Geométricos** — Livraria Cruz, 1944. Braga. Preço 17$50.

Neste livro a parte mais volumosa corresponde à aritmética, conquanto contenha o livro mais exercícios de álgebra e geometria do que de aritmética. O facto provém de que na 1.ª parte cada capítulo é precedido das noções teóricas julgadas necessárias para a resolução das questões postas, ao passo que, quer na parte da álgebra, quer na dos métodos da geometria, sòmente são dados os enunciados dos problemas e as suas soluções. Apresenta o livro àlém de exercícios mais ou menos originais do autor, algumas das questões saidas em exames do liceu e de aptidão às Universidades. É por isso um bom repositório de exercícios do tipo dos saídos nos exames, como se requere para a preparação dos alunos, e contém bom número dêles, para cima de mil. As matérias estão arrumadas na ordem estabelecida no programa e a apresentação gráfica é razoável, boa na 1.ª parte. Alguns reparos temos no entanto a fazer. Assim a definição de grandeza não nos parece boa, àlém do mais por tratar-se de noção a dar a alunos do último ano do curso liceal.

A noção de medida de grandezas, a de número inteiro, a definição de unidade e de zero não são de certo correctas. Fala também o autor em *ordens* e *classes* e a maneira por que o faz estabelece confusão entre uma e outra. Ainda as definições de adição e multiplicação nos não parecem as melhores. São fáceis de remediar tais inconvenientes, e estamos certos que em nova edição, o autor os eliminará.

J. da Silva Paulo

PUBLICAÇÕES CIENTÍFICAS RECEBIDAS POR TROCA

NACIONAIS

Portugaliae Mathematica — Vol. 4 (1943-44), Fascículo 3 — Henryk Schärf. *Ueber links-und rechtsseitige Stieltjesintegrale und deren Anwendungen.* Germán Ancochea — *Corps hyperelliptiques abstraits de caractéristique deux.* Heinz Hopf — *Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs-und Überdeckungssätze.* H. Hadwiger. *Ein Ueberdeckungssatz für den Euklidischen Raum.*

Portugaliae Physica — Vol. 1, Fasc. 2 — A. Gibert, F. Roggen et J. Rossel. *Sar les masses de* Cl^{35} *et* Cl^{37}. — J. Palácios. *Sur la myopie et le presbytisme nocturnes.* — A. Proca. *Sur un nouveau type d'électron.* — Lídia Salgueiro. *Spectographie du rayonnement* γ *émis par le dépôt actif à évolution lente du radon.* — Manuel Valadares. *Le spectre* L *de rayons* X *du radium* D.

Publicações da Junta de Investigação Matemática — Cadernos de Análise Geral:

Caderno n.º 8 — *Álgebra Moderna — Anéis* — por José Gaspar Teixeira.

Caderno n.º 9 — *Topologia Geral — Relativização* — por Maria Helena Ferreira.

Caderno n.º 10 — *Topologia Geral* — Bases e vizinhanças — por A. Pereira Gomes.

Caderno n.º 11 — *Álgebra Moderna — Grupos (Séries de composição)* — por Rui Verdial.

ESTRANGEIRAS

Cuba

Revista de la Sociedad Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas — Universidad de La Havana — Vol. I, n.º 4, 1943.

Espanha

Euclides — (Madrid) — Revista mensual de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones — Tomo IV, n.ºˢ 39, 40 e 41, Maio a Julho de 1944.

Inglaterra

The Quarterly Journal of Mathematics — Oxford Series — Vol. 15, n.ºˢ 57-58, Março-Junho, 1944 — Oferta do «British Council» por intermédio do «Instituto Britânico em Portugal».

Roménia

Annales Scientifiques de l'Université de Jassy — 1ère section (Mathématiques, Physique, Chimie) — Tomo XXVII, ano 1941.

OUTRAS PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Afinidades — (Lisboa) — Revista de Cultura Luso-Francesa — n.º 6, 1943.

Agros — (Lisboa) — Boletim dos Estudantes de Agronomia — Ano XXVI, n.º 6, 1943.

Técnica — (Lisboa) — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.ºˢ 147, 148 e 149 — Maio a Julho de 1944.

Aritmética e Álgebra — 1.º ciclo do ensino liceal — por P. Campos Tavares. Edições Marânus, Pôrto, 1943.

Álgebra — 3.º ciclo do ensino liceal — por P. Campos Tavares. Edições Marânus, Pôrto, 1943.

Estudo de alguns funcionais e sua aplicação à resolução de equações de derivadas parciais — (Dissertação para o doutoramento em Ciências Matemáticas, na Faculdade de Ciências da Universidade do Pôrto) — por Jayme Rios de Souza. Pôrto, 1944.

Exercícios de Geometria e Álgebra — 4.º ano dos Liceus — 2.ª ed. melhorada — por António do Nascimento Palma Fernandes. Livraria Cruz, Braga, 1943.

Exercícios de Geometria e Álgebra — 5.º ano dos Liceus — por António do Nascimento Palma Fernandes. Livraria Cruz, Braga, 1943.

Ampliación de Matemáticas para Químicos, Mecánicos y Electricistas — por I. Rubio Sanjuán. Editorial Dossat, Madrid, 1943.

Teoria y Manejo de la Regla de Calculo Logaritmico — por Miguel Ibañez Garcia. Editorial Dossat, Madrid, 1944.

Curso de Matemática en forma de problemas — por J. Gallego Díaz — Editorial Dossat, Madrid, 1944.

Statistics — The Home University Library — por L. H. C. Tippett — Oxford University Press, 1943 — Oferta do «British Council» por intermédio do Instituto Britânico em Portugal.

Publicações da Embaixada Britânica.

Publicações da Embaixada dos Estados Unidos da América do Norte.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número extraordinário dedicado às
MATEMÁTICAS ELEMENTARES e EXAMES DE APTIDÃO

Foi publicado, em Março de 1944, o n.º 22 da «Gazeta de Matemática», número extraordinário dedicado às Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão, para dêle se poderem utilizar ainda êste ano os candidatos aos exames de aptidão às nossas Escolas Superiores. É inteiramente independente dos outros números da «Gazeta de Matemática.»

Os assinantes da «Gazeta de Matemática» poderão durante o corrente ano (1944) beneficiar duma redução de preço dêste número extraordinário (6$50 em vez de 10$00) que não é incluído na assinatura anual.

●

AOS ASSINANTES

CONDIÇÕES DE ASSINATURA E DE AQUISIÇÃO DE NÚMEROS AVULSO

Preço de capa por cada número	6$50
Preço de assinatura anual dos quatro números 18 a 21 (Janeiro, Maio, Agôsto e Outubro).	20$00
Preço de capa do número extraordinário (Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão)	10$00
A aquisição dêste número pelos assinantes é feita a Esc.	6$50

NÚMEROS ATRAZADOS

O pequeno número de colecções completas, ainda existente, destina-se exclusivamente às Bibliotecas de Escolas e dalguns Estabelecimentos Oficiais sendo a sua aquisição feita ao preço de Esc. 200$00 (colecção dos 17 primeiros números). Ao público serão vendidos avulso os números ainda não esgotados (3, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 e 19) ao preço de Esc. 6$50 cada.

A Lógica Matemática e o Ensino Médio com aplicação aos métodos da matemática
por José Sebastião e Silva — Separata dos n.os 5, 6 e 7, Esc. 5$00.

●

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial