GAZETA
DE
MATEMÁTICA

PUBLICADA POR

A. MONTEIRO, B. CARAÇA, H. RIBEIRO, J. PAULO, M. ZALUAR

1.º ANO - N.º 2 ═ PREÇO DÊSTE NÚMERO: 3$00 ═ ABRIL DE 1940
DEPOSITÁRIO GERAL - LIVRARIA SÁ DA COSTA - LARGO DO POÇO NOVO - LISBOA

26·06·

1.º ANO - N.º 2

ABRIL DE 1940

GAZETA DE MATEMÁTICA

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

ABEL E GALOIS

As vidas de Évariste Galois e Niels Abel oferecem um conjunto impressionante, o mais impressionante de tôda a história da Ciência, de concordâncias e contrastes.

Uma multidão de coisas os aproxima: a época em que viveram — princípios do século XIX; a brevidade das suas vidas — Galois morreu com 21 anos incompletos em 1832, Abel com 27 incompletos em 1829; a sua espantosa precocidade — Galois estava de posse dos fundamentos da teoria da resolubilidade das equações algébricas por meio de radicais aos dezasseis anos, Abel aos vinte e quatro apresentou à Academia das Ciências de Paris uma memória sôbre as Transcendentes Elíticas de que mais tarde Hermite havia de dizer que contém matéria para ocupar matemáticos durante quinhentos anos; o fim trágico que ambos tiveram — Galois morre estùpidamente num duelo, Abel na miséria, minado pela tuberculose.

Une-os ainda a incompreensão e o desinterêsse de que foram alvo por parte dos *consagrados* do seu tempo: os maiores, Cauchy em França e Gauss na Alemanha, deixaram passar a seu lado, sem os verem, os dois maiores génios matemáticos do século XIX — nódoa negra que a glória, a outros títulos bem merecida, jamais conseguirá apagar. Gauss não se dignou ler a memória que Abel lhe mandara sôbre a impossibilidade da resolução da equação do 5.º grau por meio de radicais, afastando-a desdenhosamente com êste comentário ao título — «mais uma monstruosidade!»; Cauchy, absorvido na *sua* obra, *perdeu* as que Abel em 1826, e Galois dois anos mais tarde, enviaram à Academia das Ciências. Para que a infelicidade da Academia fôsse completa, não faltaram na circunstância os episódios picarescos — Poisson escrevendo na capa duma memória de Galois, que não compreendera, um *visto* em boa caligrafia (o que é sempre uma solução...), Legendre desculpando-se, a respeito da memória de Abel, porque «era dificilmente legível, estava escrita numa tinta quási branca»! ..

Outro traço de união consiste no facto de ambos se terem ocupado, independentemente um do outro, e sem se conhecerem, do mesmo assunto — a resolubilidade das equações algébricas, questão que forma a parte mais importante da obra *conhecida* de Galois e para o estudo da qual Abel contribuíra com o seu trabalho sôbre a equação do 5.º grau, como acima se disse.

Acima de tudo, os dois estão irmanados numa coisa — a criminosa indiferença com que a Sociedade os tratou, condenando, como diz Tannery, um a morrer de fome, outro a viver ou a morrer, como se quiser, no cárcere.

Mas, ao lado de tantos pontos de contacto, que diferença enorme entre os dois, tão grande que se, pensando num, quisermos realizar a sua antítese, logo nos acode à mente o outro, tal a diversidade de condições psicológicas, de modos de trabalhar, de atitude perante a vida que ambos nos apresentam. O que num, Abel, é doçura, timidez, resignação, é no outro altivez, acção, revolta.

Ambos sofrem, mas na maneira de sofrer são dispares — Abel, fraco, de sensibilidade infantil, retrae-se, procura um ponto de apoio afectivo e, como todos os fracos, uma vez que entra na luta é para cometer uma injustiça[1]; Galois, personalidade incomparàvelmente mais forte, revolta-se, ataca, ataca sempre. Abel, incapaz de ultrapassar os limites do *individual*, nunca aborda de alto a posição do *homem*, não relaciona os seus males com os males gerais de que enferma a sociedade do seu tempo, restringe a sua ambição à tranqüilidade dum lugar na Universidade; Galois, mais esclarecido, discerne as conexões íntimas do corpo social, vê nos defeitos orgânicos de base a razão profunda de que os casos individuais são o reflexo e, lògicamente, combate as causas, atira-se para a luta, bate-se na rua, com tal ardor, tal exaltação no dom de si mesmo que chega a dizer «se fôr preciso um cadáver para que o povo se revolte, dar-lhe-ei o meu!»

Ao seu espírito superiormente claro nada passa despercebido e, pensando nas condições desastrosas da investigação científica, diz: «Aqui, como em tôdas as ciências, cada época tem de alguma maneira as suas questões do momento: há questões vivas que fixam ao mesmo tempo os espíritos mais esclarecidos... Parece muitas vezes que as mesmas idéias aparecem a vários como uma revelação. Se se procura a causa, é fácil encontrá-la nas obras daquêles que nos precederam, nas quais essas idéias estão presentes sem os seus autores darem por isso. A ciência não tirou, até hoje, grande partido desta coincidência tantas vezes observada nas investigações dos sábios. Uma concorrência desgraçada, uma rivalidade degradante têm sido os seus principais frutos. Não é, contudo, difícil reconhecer neste facto a prova de que os sábios não são, mais que os outros homens, feitos para o isolamento, que êles pertencem também à sua época e que, cedo ou tarde, multiplicarão as suas fôrças pela associação. Então, quanto tempo será poupado para a Ciência!» E noutro passo, escrito na prisão de Santa Pelágia em Outubro de 1831: «... infelizmente, não se pensa que o livro mais precioso do mais sábio seria aquêle em que êle dissesse tudo o que não sabe, não se pensa que um autor nunca prejudica tanto os seus leitores como quando dissimula uma dificuldade. Quando a concorrência, isto é, o egoísmo, deixarem de reinar nas ciências, quando uns se associarem com outros para estudar, em vez

A cada número $\alpha = \frac{a + b\sqrt{m}}{c}$ corresponde um outro $\alpha' = \frac{a - b\sqrt{m}}{c}$ que se chama o seu conjugado, e ambos são raízes da mesma equação (6) $x^2 - \frac{2a}{c}x + \frac{a^2 - b^2 m}{c^2} = 0$. Representaremos por α' o conjugado de α.

É evidente que $a + b\sqrt{m}$ é um inteiro do corpo. Mas os inteiros do corpo ainda podem ter outra forma. Efectivamente se α fôr um inteiro, então, por verificar (6), terão que ser $\frac{2a}{c}$ e $\frac{a^2 - b^2 m}{c^2}$ inteiros de R, e como podemos sempre supor que a, b e c não têm divisores comuns terá que ser $c = 2$ ou $c = 1$, donde as duas formas

$$\alpha = \frac{a + b\sqrt{m}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha = a + b\sqrt{m}.$$

Vejamos que depende do valor de m a forma dos inteiros.

Como m não contém factores quadrados será $m = \dot{4} + 1$, $m = \dot{4} + 2$ ou $m = \dot{4} + 3$.

No primeiro caso $\frac{a^2 - b^2 m}{4}$, têrmo independente de (6), será igual a $\dot{4} + \frac{a^2 - b^2}{4}$ e só será um inteiro se a e b forem simultâneamente pares ou ímpares; então

$$\alpha = \frac{2a_1 + 2b_1\sqrt{m}}{2} = (a_1 - b_1) + 2b_1 \frac{1 + \sqrt{m}}{2}$$

ou

$$\alpha = \frac{2a_1 + 1 + (2b_1 + 1)\sqrt{m}}{2} = (a_1 - b_1) + (2b_1 + 1)\frac{1 + \sqrt{m}}{2}.$$

No segundo caso, isto é, se $m = \dot{4} + 2$, o número $\frac{a^2 - b^2 m}{4} = \frac{\dot{4} + a^2 - 2b^2}{4}$ será inteiro simplesmente no caso em que a e b forem simultâneamente pares e então $\alpha = A + B\sqrt{m}$. Caso análogo se passa quando $m = \dot{4} + 3$.

Logo os inteiros de $R(\sqrt{m})$ são da forma

$$\alpha = a_1 + b_1 \frac{1 + \sqrt{m}}{2} \quad \text{se} \quad m = \dot{4} + 1$$

ou

$$\alpha = a + b\sqrt{m} \quad \text{se} \quad m \neq \dot{4} + 1$$

e se fizermos $\omega = \frac{1 + \sqrt{m}}{2}$ ou $\omega = \sqrt{m}$, caso $m = \dot{4} + 1$ ou $m \neq \dot{4} + 1$, poderemos escrever

$$\alpha = a_2 . 1 + b_2 \omega$$

que é a fórmula geral dos inteiros de $R(\sqrt{m})$. Os números 1 e ω formam o que se chama uma base do corpo, e demonstra-se que é possível determinar outros inteiros do corpo ω_1 e ω_2 (e isto dum número infinito de maneiras) tais que todo o número do corpo se pode escrever sob a forma

$$\gamma = a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2$$

em que a_1 e a_2 são inteiros racionais bem determinados. É fácil ver agora que tôdas as propriedades dos inteiros racionais se mantém.

(Continua no próximo número)

J. DA SILVA PAULO

O MÉTODO DE FUBINI PARA A INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES RACIONAIS

Como é sabido, pode sempre determinar-se a primitiva de tôda a função racional desde que seja possível resolver uma equação algébrica. O processo clássico consiste em reduzir a função dada à soma dum polinómio inteiro e duma fracção algébrica irredutível cujo numerador é de grau inferior ao denominador. Esta decompõe-se, em seguida, em fracções simples (correspondentes aos zeros do denominador da fracção dada, cuja determinação poderá ser impossível como acima se aludiu); e procede-se à integração destas, o que se faz sistemàticamente. É-se conduzido assim, no caso geral, a uma combinação linear de logaritmos de funções lineares ou do 2º grau, arcos-tangentes de funções lineares, e de funções algébricas.

Tal observação levou o professor italiano Guido Fubini [1] à descoberta do seu engenhoso método que apresentaremos aos nossos leitores por ser de alguns desconhecido.

Consideremos a função racional $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ onde $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ designam dois polimónios inteiros de coeficientes reais sem factores comuns sendo o grau de $\varphi(x)$ inferior ao de $\psi(x)$. Suponhamos que sabemos determinar as raízes de $\psi(x) = 0$ e que conhecemos, portanto, o desenvolvimento único

$$\psi(x) = (x - a)^{\alpha}(x - b)^{\beta} \cdots (x^2 + px + q)^{\lambda}(x^2 + rx + s)^{\mu} \cdots$$

com $p^2 - 4q < 0$, $r^2 - 4s < 0$, ...

A partir dêste desenvolvimento a regra de Fubini permite imediatamente estabelecer o tipo da primitiva, à-parte constantes a determinar:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx = A \log(x - a) + B \log(x - b) + \cdots +$$
$$+ L_1 \log(x^2 + px + q) + M_1 \log(x^2 + rx + s) + \cdots +$$
$$+ L_2 \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + M_2 \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + r}{\sqrt{4s - r^2}} + \cdots + \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$$

onde é

$$\psi_1(x) = (x - a)^{\alpha - 1} . (x - b)^{\beta - 1} \cdots (x^2 + px + 1)^{\lambda - 1}(x^2 + rs + s)^{\mu - 1} \cdots$$

e $\varphi_1(x)$ um polinómio, de coeficientes a determinar, de grau inferior numa unidade ao de $\psi_1(x)$.

Prova-se fàcilmente [2] que, derivando ambos os membros da expressão anterior e desembaraçando de denominadores [o menor denominador comum é $\psi(x)$] obtém-se, por identificação dos dois polinómios, um sistema de equações lineares que permite determinar as constantes. O processo indicado, como se acaba de ver dispensa a decomposição prévia de $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ em fracções simples e qualquer operação de integração.

Bastante engenhoso êste método, rápido na indicação do tipo da primitiva, é sobretudo de aplicação útil quando a equação $\psi(x) = 0$ admite raízes complexas de grau de multiplicidade elevado.

M. ZALUAR NUNES

(1) Vide: *G. Fubini*, «Lezioni di Analisi Matematica», 3.ª ed., Torino, 1919, § 76.

(2) Vide: *G. Vivanti*, «Lezioni di Analisi Matematica», Torino, 1930, vol. I, pág. 412-414.

A cada número $\alpha = \frac{a + b\sqrt{m}}{c}$ corresponde um outro $\alpha' = \frac{a - b\sqrt{m}}{c}$ que se chama o seu conjugado, e ambos são raízes da mesma equação (6) $x^2 - \frac{2a}{c}x + \frac{a^2 - b^2 m}{c^2} = 0$. Representaremos por α' o conjugado de α.

É evidente que $a + b\sqrt{m}$ é um inteiro do corpo. Mas os inteiros do corpo ainda podem ter outra forma. Efectivamente se α fôr um inteiro, então, por verificar (6), terão que ser $\frac{2a}{c}$ e $\frac{a^2 - b^2 m}{c^2}$ inteiros de R, e como podemos sempre supor que a, b e c não têm divisores comuns terá que ser $c = 2$ ou $c = 1$, donde as duas formas

$$\alpha = \frac{a + b\sqrt{m}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha = a + b\sqrt{m}.$$

Vejamos que depende do valor de m a forma dos inteiros. Como m não contém factores quadrados será $m = \dot{4} + 1$, $m = \dot{4} + 2$ ou $m = \dot{4} + 3$.

No primeiro caso $\frac{a^2 - b^2 m}{4}$, têrmo independente de (6), será igual a $\dot{4} + \frac{a^2 - b^2}{4}$ e só será um inteiro se a e b forem simultâneamente pares ou ímpares; então

$$\alpha = \frac{2a_1 + 2b_1\sqrt{m}}{2} = (a_1 - b_1) + 2b_1 \frac{1 + \sqrt{m}}{2}$$

ou

$$\alpha = \frac{2a_1 + 1 + (2b_1 + 1)\sqrt{m}}{2} = (a_1 - b_1) + (2b_1 + 1)\frac{1 + \sqrt{m}}{2}.$$

No segundo caso, isto é, se $m = \dot{4} + 2$, o número $\frac{a^2 - b^2 m}{4} = \frac{\dot{4} + a^2 - 2b^2}{4}$ será inteiro simplesmente no caso em que a e b forem simultâneamente pares e então $\alpha = A + B\sqrt{m}$. Caso análogo se passa quando $m = \dot{4} + 3$.

Logo os inteiros de $R(\sqrt{m})$ são da forma

$$\alpha = a_1 + b_1 \frac{1 + \sqrt{m}}{2} \quad \text{se} \quad m = \dot{4} + 1$$

ou

$$\alpha = a + b\sqrt{m} \quad \text{se} \quad m \neq \dot{4} + 1$$

e se fizermos $\omega = \frac{1 + \sqrt{m}}{2}$ ou $\omega = \sqrt{m}$, caso $m = \dot{4} + 1$ ou $m \neq \dot{4} + 1$, poderemos escrever

$$\alpha = a_2 . 1 + b_2 \omega$$

que é a fórmula geral dos inteiros de $R(\sqrt{m})$. Os números 1 e ω formam o que se chama uma base do corpo, e demonstra-se que é possível determinar outros inteiros do corpo ω_1 e ω_2 (e isto dum número infinito de maneiras) tais que todo o número do corpo se pode escrever sob a forma

$$\gamma = a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2$$

em que a_1 e a_2 são inteiros racionais bem determinados. É fácil ver agora que tôdas as propriedades dos inteiros racionais se mantém.

(Continua no próximo número)

J. DA SILVA PAULO

O MÉTODO DE FUBINI PARA A INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES RACIONAIS

Como é sabido, pode sempre determinar-se a primitiva de tôda a função racional desde que seja possível resolver uma equação algébrica. O processo clássico consiste em reduzir a função dada à soma dum polinómio inteiro e duma fracção algébrica irredutível cujo numerador é de grau inferior ao denominador. Esta decompõe-se, em seguida, em fracções simples (correspondentes aos zeros do denominador da fracção dada, cuja determinação poderá ser impossível como acima se aludiu); e procede-se à integração destas, o que se faz sistemàticamente. É-se conduzido assim, no caso geral, a uma combinação linear de logaritmos de funções lineares ou do 2º grau, arcos-tangentes de funções lineares, e de funções algébricas.

Tal observação levou o professor italiano Guido Fubini [1] à descoberta do seu engenhoso método que apresentaremos aos nossos leitores por ser de alguns desconhecido.

Consideremos a função racional $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ onde $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ designam dois polimónios inteiros de coeficientes reais sem factores comuns sendo o grau de $\varphi(x)$ inferior ao de $\psi(x)$. Suponhamos que sabemos determinar as raízes de $\psi(x) = 0$ e que conhecemos, portanto, o desenvolvimento único

$$\psi(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \cdots (x^2 + px + q)^{\lambda}(x^2 + rx + s)^{\mu} \cdots$$

com $p^2 - 4q < 0$, $r^2 - 4s < 0$, ...

A partir dêste desenvolvimento a regra de Fubini permite imediatamente estabelecer o tipo da primitiva, à-parte constantes a determinar:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx = A\log(x-a) + B\log(x-b) + \cdots + L_1\log(x^2+px+q) + M_1\log(x^2+rx+s) + \cdots + L_2 \operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + M_2 \operatorname{arc\,tg}\frac{2x+r}{\sqrt{4s-r^2}} + \cdots + \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$$

onde é

$$\psi_1(x) = (x-a)^{\alpha-1} . (x-b)^{\beta-1} \cdots (x^2+px+1)^{\lambda-1}(x^2+rs+s)^{\mu-1} \cdots$$

e $\varphi_1(x)$ um polinómio, de coeficientes a determinar, de grau inferior numa unidade ao de $\psi_1(x)$.

Prova-se fàcilmente [2] que, derivando ambos os membros da expressão anterior e desembaraçando de denominadores [o menor denominador comum é $\psi(x)$] obtém-se, por identificação dos dois polinómios, um sistema de equações lineares que permite determinar as constantes. O processo indicado, como se acaba de ver dispensa a decomposição prévia de $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ em fracções simples e qualquer operação de integração.

Bastante engenhoso êste método, rápido na indicação do tipo da primitiva, é sobretudo de aplicação útil quando a equação $\psi(x) = 0$ admite raízes complexas de grau de multiplicidade elevado.

M. ZALUAR NUNES

(1) Vide: *G. Fubini*, «Lezioni di Analisi Matematica», 3.ª ed., Torino, 1919, § 76.

(2) Vide: *G. Vivanti*, «Lezioni di Analisi Matematica», Torino, 1930, vol. I, pág. 412-414.

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

ÉPOCA DE JULHO DE 1939

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

I

114 — *a)* Um professor tem, para distribuir como prémio, 25 livros por 3 alunos. Para atender ao seu saber e comportamento terá de dar ao melhor mais três que ao segundo e a êste mais dois que ao terceiro. ¿ Quantos livros dará a cada aluno? R: *Se* x *representa o número de livros que o terceiro aluno receberá é* $x+(x+2)+(x+2+3)=25$, *donde* $x=6$. *O terceiro aluno receberá seis livros, o segundo oito e o primeiro onze.* *b)* O número de permutações de n objectos distintos é $p!$ vezes o número de combinações dos mesmos n objectos 3 a 3. ¿ Quantos objectos são? R: *O problema traduz-se analìticamente por* $n!=p!\frac{n!}{3!(n-3)!}$. *Deve, pois, ter-se simultâneamente,* $n!\geq p!$, *isto é,* $n\geq p$ *e* $p!=(n-3)!6$. *Seja* $n=p+i$ *com* i *inteiro; é* $(n-i)!=(n-3)!6$ *e, portanto,* $i=0,1,2$. *Para* $i=0$, $n=p=3$; *para* $i=1$, $n=4$ *e* $p=3$; *para* $i=2$, $n=8$ *e* $p=6$. *c)* Na equação $2x^2-(2m+1)x+m^2-9m+39=0$ ¿ que valor é preciso dar a m para que a equação tenha uma raiz dupla da outra? R: *Designemos por* α *e* 2α *as raizes da equação. Teremos*

$$3\alpha=\frac{2m+1}{2} \quad e \quad 2\alpha^2=\frac{m^2-9m+39}{2},$$

donde: $\left(\frac{2m+1}{6}\right)^2=\frac{m^2-9m+39}{4}$, *isto é,* $m^2-17m+70=0$

e, portanto, $m=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\times 70}}{2}$; $m_1=10$, $m_2=7$.

115 — *a)* Calcular pelos logaritmos a área do trapézio de que se conhecem os dois lados paralelos, uma diagonal e o ângulo que ela forma com o maior dos dois lados conhecidos: $a=30^m$; $b=45^m$; $D=40^m$ e $\alpha=25^\circ 35' 43''$. R: *Designemos por* h *a altura e por* A *a área do trapézio. Tem-se* $h=D\,\mathrm{sen}\,\alpha$ *e* $A=\frac{(a+b)D\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2}=75\times 20\times \mathrm{sen}\,25^\circ 35' 43''$ *metros quadrados. Ora* $\log A=\log 1500+\log \mathrm{sen}\,25^\circ 35' 43''=3,1760913+\bar{1},6354952=2,8115865$ *donde* $A=648^{m^2},0171$. *b)* Demonstrar que $\mathrm{cotg}\,3\alpha=\frac{\mathrm{cotg}^3\alpha-3\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{3\,\mathrm{cotg}^2\alpha-1}$. R: $\mathrm{cotg}\,3\alpha=\frac{\cos(2\alpha+\alpha)}{\mathrm{sen}(2\alpha+\alpha)}=$

$$=\frac{\cos 2\alpha\,.\cos\alpha-\mathrm{sen}\,2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}\,2\alpha\cos\alpha+\mathrm{sen}\,\alpha\cos 2\alpha}=\frac{(\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha)\cos\alpha-2\,\mathrm{sen}^2\alpha\cos\alpha}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos^2\alpha+\mathrm{sen}\,\alpha(\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos^3\alpha-3\,\mathrm{sen}^2\cos\alpha}{3\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^3\alpha}=\frac{\mathrm{cotg}^3\alpha-3\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{3\,\mathrm{cotg}^2\alpha-1}.$$

116 — Determinar pelo método dos lugares geométricos os pontos duma circunferência dada dos quais se pode ver um segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo dado. Discutir as soluções propostas. R: *Os pontos procurados são, quando existirem, obtidos pela intersecção da circunferência dada com qualquer dos dois segmentos capazes do ângulo dado. A discussão far-se-á por exame das posições relativas do segmento e da circunferência e comparação das grandezas do raio desta, do comprimento de* $\overline{AB}$ *e do ângulo.*

117 — A soma de dois números é 960. O cociente do menor múltiplo comum pelo máximo divisor comum é 63. ¿ Quais são os números? R: *Sejam* a *e* b *os dois números, e* d *o seu máximo divisor comum. É* $a=d\times p$ *e* $b=d\times q$, *com* p *e* q *primos entre si. O menor múltiplo comum é* $\frac{ab}{d}$, *e as condições do problema exprimem-se pelas igualdades* $\frac{ab}{d^2}=pq=63$ *e* $d(p+q)=960$. *Como* $63=3^2\times 7$, *o número de divisores de* 63 *é* 6. *Os pares de divisores que nos interessam, são, só, dois* $(1,63)$ *e* $(7,9)$, *visto que o terceiro* $(3,21)$ *é constituido por números que não são, entre si, primos.* d *obter-se-á dividindo* 960 *por* $64=1+63$, *num caso, e por* $16=7+9$, *no outro. E os números são, ou* 540 *e* 420, *ou* 15 *e* 945.

II

118 — *a)* ¿ Qual é o número com 3 algarismos cujo primeiro algarismo é duas vezes o segundo mais 2 e o segundo é o terceiro deminuído de 3, sabendo que a soma dos três algarismos é 9? *b)* ¿ Qual é o valor da razão entre os coeficientes dos terceiros termos dos desenvolvimentos dos binómios $(1+a)^6$ e $(1-a)^6$ e o valor da sua soma? *c)* Procurar os valores de x que satisfazem à desigualdade

$$\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}>\frac{8a^2}{x^2-a^2}.$$

119 - *a)* Calcular pelos logaritmos a área do paralelogramo definido pelos dois lados e o ângulo agudo, respectivamente: $a=7^m,30$, $b=12^m,25$ e $\alpha=61^\circ 27' 33''$. *b)* Demonstrar que $4\,\mathrm{sen}^3\alpha=-\mathrm{sen}\,3\alpha+3\,\mathrm{sen}\,\alpha$.

120 — Traçar por método geométrico um triângulo inscrito numa circunferência dada, semelhante a um triângulo dado.

121 — Mostrar que dois números divididos pela sua diferença dão restos iguais.

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo

I

122 — *a)* Determine os valores de x que tornam negativa a fracção $\frac{x^2-2x+5}{x^2-5x+6}$. R: $2<x<3$. *b)* ¿ Que valor deve ter a para que o valor de x deduzido da equação $(a^2-1)x=a+1$ seja indeterminado? R: $a=-1$. *c)* Supondo que na equação $ax+by=c$, a, b e c são primos entre si, indique: 1.º ¿ Qual é a condição para que a equação admita soluções inteiras? 2.º ¿ Quais são as condições para que a equação admita uma infinidade de soluções inteiras e positivas?

123 — *a)* Dados os catetos $b=829^m,7$ e $c=655^m,6$ dum triângulo rectângulo, calcule, por logaritmos, o valor do ângulo B que se opõe ao lado b. *b)* Calcule, sem recorrer às tábuas, os valores de $x=\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ e $y=\mathrm{sen}\,900^\circ$.

R: $x = -\sqrt{3}$, $y = 0$. *c)* Deduza das igualdades:

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{sen} a} \quad \text{a igualdade:}$$

$$\operatorname{cosec}^2 a - \cot^2 a = 1.$$

124 — *a)* Demonstre que unindo 2 a 2 os meios dos lados consecutivos dum quadrilátero qualquer se obtém um paralelogramo. *b)* ¿Como determina os restos que se obtêm na divisão dum número por 100, por 3 e por 4? Aplique os teoremas enunciados ao cálculo dos restos das divisões de 432965432 pelos números referidos.

II

125 — *a)* Desenvolva $\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ e simplifique os termos do desenvolvimento. *b)* Enuncie os teoremas que permitem determinar o sinal do trinómio do 2.º grau ax^2+bx+c para os diferentes valores de x. *c)* Resolva a equação $x^4-8x^2+16=0$.

126 — *a)* Dados a hipotenusa $a = 839^{\text{m}},2$ e o ângulo $B = 40^\circ 27' 32''$ (que se opõe ao cateto b) dum triângulo rectângulo, calcule por logaritmos o comprimento do outro cateto c. *b)* Calcule, sem recorrer às tábuas de logaritmos, os valores de $x = \operatorname{sen} 405^\circ$, $y = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. *c)* Represente gràficamente a função $y = \cos 2x$, dando a x os valores $x = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ e 180°.

127 — *a)* Demonstre que a mediana dum triângulo rectângulo que divide ao meio a hipotenusa tem por comprimento metade do comprimento da hipotenusa. *b)* Considere os três números inteiros e consecutivos n, $n+1$ e $n+2$. ¿Quantos podem ser divisíveis por dois? ¿Poderá acontecer que nenhum seja divisível por 3? ¿Se n fôr par haverá entre os três números algum que seja divisível por 4? ¿Qual dêles será? Justifique as respostas.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras

128 — *a)* Defina potência de expoente inteiro e positivo; diga que generalizações conhece da definição de potência e quais os motivos que levaram a dar essas definições. *b)* Simplifique e reduza a radicais a função $z = \dfrac{(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}$. Classifique a função z obtida e a função $u = z^3$.

R: $z = \sqrt[3]{\dfrac{x+y}{(x-y)^2}}$; *z é função irracional das duas variáveis* x *e* y; u *é função racional de* x *e* y.

129 — *a)* Defina as funções inversas de seno, coseno e tangente e escreva a expressão geral dos arcos cuja tangente é -1. R: $\operatorname{arc.tg}(-1) = k\pi - \frac{\pi}{4}$ rad. *b)* Determine os ângulos internos dum trapézio isósceles conhecendo a sua altura e a diferença das bases. R: $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{2h}{d}$ (h *altura e* d *diferença das bases*), $\beta = \pi - \alpha$.

130 *a)* Defina ângulo poliedro e poliedro regular. ¿Quantos poliedros regulares convexos existem iguais? Dêsses poliedros há algum que seja uma pirâmide? e um prisma? ¿Qual é a razão pela qual não existe nenhum poliedro regular convexo cujas faces tenham mais de cinco lados? *b)* Dada uma circunferência (C) e um ponto interior M não coincidente com o centro, determine o lugar geométrico dos meios das cordas que passam por M. ¿E se o ponto M estiver sôbre a circunferência? R: *O logar geométrico é a circunferência de diâmetro* CM (C *designa o centro de* (C)).

131 — Faz-se girar um triângulo rectângulo em tôrno da sua hipotenusa; seja V o volume do sólido gerado. Faz-se em seguida girar em tôrno de cada um dos seus catetos; sejam v e v' os volumes dos sólidos obtidos; verificar que

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v'^2}.$$

R: *Sejam* a *a hipotenusa,* b *e* c *os catetos, e* v *o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo em tôrno do cateto* c. *Tem-se* $V = \frac{1}{3}\pi a\left(\frac{bc}{a}\right)^2$, $v = \frac{1}{3}\pi bc^2$, $v' = \frac{1}{3}\pi cb^2$. *Por substituição na expressão* $\frac{1}{V^2} = \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v'^2}$, *notando que é* $a^2 = b^2 + c^2$, *esta verifica-se.*

132 — Calcular as arestas dum paralelipípedo rectângulo sabendo que as suas medidas estão em progressão aritmética e conhecendo, além disso, a área total e a diagonal do paralelipípedo. R: *Sejam* $x-r$, x *e* $x+r$ *as medidas das arestas do paralelipipedo. As equações do problema são:*

$$\begin{cases} d^2 = (x-r)^2 + x^2 + (x+r)^2 \\ A = 2x(x-r) + 2x(x+r) + 2(x-r)(x+r) \end{cases}$$

Resolvendo êste sistema e atendendo a que é $x > 0$, *acham-se as soluções* $x = \dfrac{\sqrt{d^2+A}}{3}$ *e* $r = \pm\sqrt{\dfrac{2d^2-A}{6}}$. *Para que o paralelipipedo exista é necessário e suficiente que* $A \leq 2d^2$. *Se* $A = 2d^2$ *trata-se dum cubo. Note-se que os dois valores de* r *conduzem ao mesmo paralelipipedo.*

ÁLGEBRA SUPERIOR E MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. (2.º exame de freqüência 1938-39)

I

133 — *a)* Defina eliminante e resultante dum sistema de equações algébricas. *b)* Defina coordenadas cilíndricas e deduza as expressões que as relacionam com as coordenadas dum sistema cartesiano ortogonal no caso em que coincidem os elementos de referência comuns aos dois sistemas. *c)* Indique quais os lugares geométricos que, em geometria analítica no espaço, são definidos por cada uma das equações $4x - y = 0$; $2x^2 + 2y^2 - y + x = 0$. *d)* Escreva na forma reduzida e na forma normal a equação duma recta no plano e indique o significado geométrico das constantes que entram nessas equações, no caso dos eixos cartesianos serem oblíquos. *e)* Defina potência dum ponto em relação a uma circunferência e indique como procede à sua determinação no caso das coordenadas cartesianas ortogonais.

134 — Resolva a equação:

$$10x^6-27x^5-120x^4+120x^2+27x-10=0.$$

R: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=5$, $x_4=\frac{1}{5}$, $x_5=-2$, $x_1=-\frac{1}{2}$.

135 — Deduza a equação da circunferência com centro no eixo dos YY e tangente à recta $y-3x+5=0$ no ponto P(2,1). R: $3(x^2+y^2)-10y-5=0$.

136 — Determine a distância do ponto P ao plano π: P é o traço da recta $x-2=\frac{y}{-6}=\frac{z-2}{3}$ no plano bissector do diedro $X\widehat{OY}Z$; π é um dos planos que passam pelo eixo OZ e fazem um ângulo de 60º com o eixo OY. R: *Há dois planos que passam por* OZ *e determinam com o semi-eixo* OY *um ângulo de* 60º. *As distâncias de* P *a êsses planos são iguais a* $\sqrt{3}$.

Outros exercícios

137 — Resolva, pelo método dos divisores, a equação

$$2x^5-3x^4-14x^3+38x^2-8x-15=0.$$

R: $x_1=1$, $x_2=-3$, $x_3=-\frac{1}{2}$, $x_4=2+i$, $x_5=2-i$.

138 — Deduza a equação da circunferência que passa pelo ponto P(0,1) e forma com a circunferência $x^2+y^2-4x+9y+3=0$ um sistema que tem por eixo radical a recta $x-2y-1=0$. R: $3(x^2+y^2)+x+y-4=0$.

139 — Deduza a equação do plano que passa por r_1 e é paralelo a r_2; r_1 passa por $P_1(1,-1,2)$ e é perpendicular ao plano bissector do diedro $X\widehat{OZ}Y$; r_2 passa por $P_2(2,-1,3)$ e $P_3(1,0,1)$. R: $x+y=0$.

140 — Determine os limites das raízes da equação $2x^5-3x^4+x^2-5x-8=0$ usando os métodos de Bret e Newton.

141 — Deduza a equação duma recta que passe pelo centro da circunferência $x^2+y^2-3x+6y+7=0$ e faça um ângulo de 45º com a tangente a esta circunferência no ponto P(2,−1). R: $10y-6x+39=0$ *e* $6y+10x+3=0$.

142 — Determine a distância entre as rectas r_1 e r_2: r_1 passa por $P_1(1,-1,2)$ e é paralela aos planos $2x-5y+z-3=0$ e $x-2y-3z+1=0$; r_2 passa pelo centro da esfera $x^2+y^2+z^2+4y-16=0$ e pelo ponto P(6, 2, 2).

R: $\delta=\frac{17}{\sqrt{390}}$.

143 — Determine λ de forma que o sistema $x-3y+2z+t=0$, $2x+y-2z-2t=0$, $-x+y+3z+2t=0$ e $x+y+z+\lambda t=0$ admita soluções não nulas. R: $\lambda=\frac{2}{23}$.

144 — Deduza a equação da bissectriz do ângulo formado pelas rectas r_1 e r_2: r_1 passa pelo centro da circunferência $x^2+y^2-4x-6y-13=0$ e pelo ponto P(3,−2); r_2 é a mediana relativa ao vértice A(2, 1) do triângulo cujos outros vértices são B(3,−2) e C(−1, 2).

R: $(5\mp\sqrt{13})x+(1\pm\sqrt{13})y-(13\mp\sqrt{13})=0$.

145 — Deduza a equação da esfera cujo centro é o ponto de encontro das rectas r_1 e r_2 e que é cortada pelo plano dos XZ segundo uma circunferência de raio R = 5

$$r_1\equiv\begin{cases}x=3z-5\\ y=2z+4\end{cases}\qquad r_2\equiv\begin{cases}x=z-7\\ y=-3z-1\end{cases}.$$

R: $x^2+y^2+z^2+16x-4y+2z+40=0$.

I. S. C. E. F. (3.º exame de freq., 20-6-1939)

146 — Calcular três termos do desenvolvimento, em série de potências da função $y=\frac{1+x^2+x^4}{\cosh x}$.

R: $y=1+\frac{x^2}{2}+\frac{17}{24}x^4+\cdots$

147 — Dada a equação $x^3-4x^2+6x+\lambda=0$ determine λ de modo que uma das raízes seja igual ao produto das outras duas. Resolva, nessa hipotese, a equação. R: *Há dois valores de* λ: $\lambda=-9$ *a que correspondem as raízes* $\frac{1+i\sqrt{11}}{2}$, $\frac{1-i\sqrt{11}}{2}$ *e* 3, *e* $\lambda=-4$, a que correspondem as raízes $1+i$, $1-i$, e 2.

148 — É dada em eixos coordenados rectangulares a recta $r)\ \frac{x}{-2}+y=1$; conduzir pelo ponto (0,2) uma recta r' tal que o triângulo formado pelas rectas r', r' e pelo eixo das abscissas tenha uma área dada m. Discussão. Examinar, em particular, os casos $m=1$ e $m=2$. R: *A equação de* r' *é* $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{2}=1$, *onde* α *é uma das raízes de* $\alpha^2+(4-m)\alpha+4(1-m)=0$, *que traduz ser* m *a área do triângulo em questão. O problema é sempre possível* $(m>0)$ *com duas soluções distintas (excepto no caso* $m=0$, *que não interessa). Uma das soluções para* $m=1$ *é o eixo das ordenadas. Para* $m=2$ *as rectas soluções correspondem aos valores* $\alpha=-1\pm\sqrt{5}$.

3.º exame de freq. extraordinário, 28-6-1939

149 — Duma função $y(x)$ conhecem-se os seguintes valores:

$x)$	-2	-1	0	1	2
$y)$	21	3	1	3	21

Calcular a função interpoladora $P(x)$ e fazer a sua representação geométrica.

150 — Dadas as rectas $r)\ x-y+2=0$ e $r')\ x+y-4=0$ tirar pelo seu ponto de encontro uma recta tal que o quadrilátero determinado pelos dois eixos coordenados e pelas rectas r e r' fique por ela dividido em duas figuras de área igual.

151 — Resolver a equação

$$2x^4+3x^3+2x^2-11x-21=0.$$

I. S. T. (Mat. Gerais — 2.º Exame de freq., 1938-39)

I

152 — *a)* Demonstrar que o determinante

$$\begin{vmatrix} x^n & a & ax & \cdots & ax^{n-2} & ax^{n-1}\\ x^{n-1} & 1 & a & \cdots & ax^{n-3} & ax^{n-2}\\ x^{n-2} & 0 & 1 & \cdots & ax^{n-4} & ax^{n-3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x & 0 & 0 & \cdots & 1 & a\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}$$

é igual a $(x-a)^n$.

R: *Representemos por* D_n *o determinante dado. Para* $n=1$ *é, evidentemente,* $D_1=x-a$.

Adoptemos na demonstração proposta o método de indução *completeta, admitindo assim a hipótese de que é* $D_{n-1}=(x-a)^{n-1}$. *Desenvolvendo* D_n *segundo os elementos da segunda coluna, tem-se:* $D_n=-a\,D_{n-1}+x\,D_{n-1}=(x-a)\,D_{n-1}=(x-a)^n$, c. q. p.

153 — Dada, no plano $x0y$, a cónica $xy+2x-5y=0$ estudá-la, fazendo o seu traçado aproximado, e achando as suas equações referidas aos eixos e às assíntotas. R: *A cónica é uma hipérbole equilátera. A equação referida aos eixos é* $\frac{X^2}{20}-\frac{Y^2}{20}=1$ *e a equação referida às assíntotas é* $XY=-10$.

154 — Determinar a recta simétrica da recta $x-2=y=z$ em relação ao plano $3x+y-z=5$.

R: $\frac{3x-5}{-7}=\frac{3y+1}{5}=\frac{3z+1}{17}$.

Outros exercícios

155 — Discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases}(a+b)\,x+(a-b)\,y=a^2+b^2\\(a-b)\,x+(a+b)\,y=a^2-b^2.\end{cases}$$

Interpretar em geometria analítica no espaço.

156 — Dadas no plano $x0y$, as duas rectas $mx+(2m-1)y+3=0$ e $(4m-7)x-(m+2)y-8=0$ determinar m de modo que sejam 1.º) perpendiculares, 2.º) paralelas. Determinar no 1.º caso o ponto de encontro, no 2.º caso a sua distância.

157 — Verificar que os planos perpendiculares aos meios dos lados dum quadrilátero $ABCD$ são concorrentes num ponto. ¿Qual é a posição dêsse ponto se o quadrilátero é plano?

158 — Um triângulo variável tem vértices fixos nos pontos $A(2,0)$ e $B(0,4)$ deslocando-se o terceiro vértice C na recta $x+y=9$. Achar o lugar geométrico do baricentro do triângulo.

159 — Determinar a condição a que deve satisfazer λ para que a circunferência representada pelas equações $x^2+y^2+z^2=R^2$ e $x+y+z=\lambda$ seja real. Determinar, nesta hipótese, o centro e o raio dessa circunferência.

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. L. (Junho de 1939)

160 — *a)* Linhas contínuas e rectificáveis: Definição e suas propriedades. *b)* Envolvente duma família de superfícies: Definição, equação e propriedades; características e aresta de reversão. *c)* Superfícies regradas: Sua equação vectorial; definição e equação vectorial da linha de estricção das superfícies enviezadas. *d)* Contacto de duas curvas torsas: Definição e condições analíticas do contacto de ordem n. *e)* Integrais definidos: Definição e propriedades gerais.

161 — Determine os máximos e mínimos da função

$$z=x^3+3x^2+4xy+y^2.$$

R: *A* $x=\frac{2}{3}$, $y=-\frac{4}{3}$ *corresponde um mínimo* $z=-\frac{4}{27}$.

162 — Determine as assíntotas da curva

$$x^2(x-y)^2-a^2(x^2+y^2)=0.$$

R: $X=a$, $X=-a$, $Y=X+a\sqrt{2}$, *e* $Y=X-a\sqrt{2}$.

163 — Calcule

$$\int\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x+\operatorname{sen}x}\,dx.$$

Outros exercícios

164 — Dada a equação

$$\frac{1-x^2}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{x^3}\cdot\frac{dy}{dx}+y=0$$

substitua a variável independente x por outra t ligada com esta pela relação $x=\sqrt{1-t^2}$.

165 — Determine os pontos de inflexão da curva

$$y=\frac{x^3}{x^2+3a^2}$$

e as tangentes nesses pontos.

166 — Calcule

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^3+1}}.$$

I. S. C. E. F. (2.º exame de freq., 21-4-1939)

167 — Calcular o integral $\iint_A\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$ sendo A a área limitada pelos eixos coordenados e pela elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ no quadrante positivo dos eixos. R: *Seja I o integral dado. A função integranda é infinita sôbre parte do contôrno de* A. *É fácil porém provar a convergência de* I.

Façamos $\begin{cases}x=aX\\y=bY\end{cases}$. A *transforma-se em* A', *domínio limitado pelos eixos coordenados e por* $X^2+Y^2=1$. *Atendendo a que é* $\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}=ab$, *vem* $I=\iint_{A'}\frac{ab\,dX\,dY}{\sqrt{1-X^2-Y^2}}=\iint_{A'}\frac{ab\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}$, *introduzindo coordenadas polares. É pois*

$$I=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

integral êste, evidentemente convergente. Efectuando o cálculo obtem-se $I=\frac{1}{2}\pi ab$.

168 — Determine os pontos de inflexão da curva

$$xy=2a\sqrt{2ax-x^2}.$$

169 — O integral

$$\int_1^\infty\left[x\,(1+x^2)^{-\frac{1}{6}}\right]^{-3}dx$$ será convergente?

I. S. T. (2.º exame de freqüência 1938-39)

I

170 — Calcular o integral duplo $\iint\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ estendido ao interior da parábola $y^2=2px$.

171 — Integrar a equação
$$\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0\,.$$

172 — Determinar os pontos singulares da curva
$$y^2-2x^2y+x^4-x^5=0\,.$$

173 — Integrar a equação $y''-y'=(x^2-1)\,e^x$.

II

174 — Sendo ρ o raio de curvatura num ponto P qualquer, e $n=\overline{PA}$ o segmento de normal compreendido entre o ponto P e o eixo dos xx, determinar, entre as curvas planas integrais de equação $\rho=2n$, aquela que tem ordenada mínima no ponto $\left(1,\frac{1}{2}\right)$. (Eixos rectangulares).

175 — Integrar a equação
$$2t^2\frac{d^2y}{dt^2}-2t\frac{dy}{dt}-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+4t^2=0$$
efectuando a transformação $x=t^2$.

176 — Calcular o volume do sólido comum aos dois parabolóides $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{36}=2z$, $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}=2(2-z)$.

177 — Determinar a de modo tal que a superfície $z=x^2+$ $+y^2+axy$ seja planificavel. Escrever a equação do plano tangente na origem dos eixos coordenados.

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. C. (exame de freq., Junho de 1939)

178 — Provar que a equação $x^2y''+4xy'+2y=X$ admite um integral regular na origem $x=0$ desde que X seja também regular neste ponto.

179 — Provar (sem recorrer ao teorema análogo de Lebesgue) que tôda a função integrável R satisfaz à condição
$$\lim_{h=0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,dx=0\,.$$

F. C. L. (2.º exame de freq. em 1939)

180 — *a)* Equações diferenciais totais a três variáveis: $Pdx+Qdy+Rdz=0$. Definição da sua integração e condição para que uma equação dêste tipo seja diferencial total. *b)* Equações não lineares às derivadas parciais de primeira ordem: generalidades; definição de integral completo. *c)* Equações às derivadas parciais de segunda ordem: definição de integral intermédio. *d)* Equação diferencial linear de ordem n: equações adjuntas e auto-adjuntas. Têrmo geral da equação auto-adjunta de segunda ordem. *e)* Definição e classificação das equações integrais. Transformação da equação de Volterra da primeira espécie numa da segunda espécie, quando o núcleo se não anula para valores iguais das variáveis.

181 — Aplicar o teorema dos resíduos ao cálculo do integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+2)^2(x^2-x+1)}$.

182 — Determinar o integral geral da equação $4x^3-y-$ $-xy^2+xy'=0$ de que é integral particular $y=-2x$.

183 — Determinar o sistema de integrais gerais do sistema
$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+y-3z=\text{sen}\,2x\\[2mm]\dfrac{dz}{dx}-3y+z=0\end{cases}.$$

Outros exercícios

184 — Calcular $\displaystyle\int_{2-i}^{2+i}\frac{dz}{\sqrt{(z-2)^2+1}\,(z^2+1)\,(z-1)^2}$.

185 — Determinar o integral geral da equação
$$xy\,y''-xy'^2-2y\,y'+xy^2=0\,.$$

186 — Determinar o integral geral da equação
$$y\,(z-y)\,dx+xz\,(x+1)\,dy-xy\,(x+1)\,dz=0\,.$$

GEOMETRIA SUPERIOR

F. C. C. (exame de freq., Junho de 1939)

187 — Supondo $a'_{ik}=\lambda a_{ik}$, com λ constante, exprimir a curvatura de $f'=a'_{ik}\,dx_i\,dx_k$ em função da curvatura de $f=a_{ik}\,dx_i\,dx_k$.

188 — Seja V_2 a variedade linear bidimensional construída sôbre as direcções concorrentes ξ e η, e seja ζ uma direcção arbitrária de V_2. Provar que a relação $\text{sen}(\zeta\xi)=$ $=\cos(\zeta\eta)$ implica $\cos(\xi\eta)=0$.

F. C. L. (exame de freq. em 1939)

189 — *a)* Invariantes e parâmetros diferenciais. Covariantes. Primeiro parâmetro diferencial e parâmetro diferencial mixto. *b)* Equivalência de duas formas diferenciais quadráticas. Definição. Condições de integrabilidade do sistema de equações de Christoffel. *c)* Métrica angular sôbre uma superfície. Involução circular de elementos lineares. *d)* Sistemas de coordenadas curvilíneas isotérmicas; parâmetros isométricos.

190 — Determinar o parâmetro λ de modo que a forma $f=2xt+\lambda yz+x^2+y^2-2zt$ seja degenerada; para o valor positivo de λ formar uma sua cadeia de menores principais e concluir a partir dela quais os números característicos da forma.

191 — Dada a forma $\varphi=x^2\,dxdy-dz^2-xydxdz+$ $+zdx^2-ydydz$ calcular o símbolo $\left\{\begin{matrix}1\ 2\\3\end{matrix}\right\}$.

Outros exercícios

192 — Determinar os parâmetros $m\,,n\,,p$ de modo que a substituïção $\begin{cases}X=mx+ny\\ Y=px+\frac{1}{2}y\end{cases}$ seja ortogonal. Indicar o número de soluções do problema e fazer a associação dos valores correspondentes.

193 — Transformar a forma $f=y^2\,dx^2+ydxdy-dy^2$ mediante a substituïção $x=X+Y\,,y=e^{X-Y}$ e verificar a relação entre as funções A_{ik} e A'_{rs} para os valores $i=k=1$.

COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA E DE GEOMETRIA ANALÍTICA

F. C. C. (exame de freq., Junho de 1939)

194 — Achar a composição de

$$f(z)=(z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_n)$$

e do seu grupo G de Galois na hipótese de existir uma função circulante para $r_1, r_2, \cdots r_n$.

195 — Tendo-se $\psi(\beta)=0$ e $\beta=\chi(\alpha)$ com ψ e χ no corpo C, tôda a equação que α verifique neste corpo é de grau pelo menos igual ao grau de ψ. (Supõe-se ψ irredutível).

F. C. L. (exame de freq., Junho de 1939)

196 — Defina: 1) Substituïção linear ortogonal e enuncie as principais propriedades das substituïções dêste tipo. 2) Polos duma substituïção linear. 3) Matriz de Hermite. Propriedades. 4) Covariante e invariante duma forma algébrica. Exemplos. 5) Índice dum sub-grupo num grupo dado de substituïções. 6) Isomorfismo holoédrico e meriédrico entre dois grupos de substituïções.

197 — Mostre que o conjunto das quatro matrizes

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

forma um grupo, adoptando como lei de composição o produto de matrizes.

198 — Determine a equação da hipérbole que tem por assíntotas as rectas de equações $y-x-1=0$ e $x=0$ e passa pelo ponto $P(-2{,}0)$.

Outros exercícios

199 — Determine a equação da hipérbole equilátera que passa pela origem, tem por assíntota a recta $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$ e por centro o ponto de abscissa 1. Determine em seguida, por aplicação dos invariantes, a equação da curva referida às assíntotas.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. (2.º exame de freqüência em 2-6-1939)

200 — *a)* Conceito de probabilidade elementar e sua importância nos problemas de probabilidades contínuas. Princípio da invariância por deslocamento. *b)* Enuncie o problema das probabilidades das causas. Teorema de Bayes.

201 — *c)* Enuncie o problema da compensação de observações indirectas de precisão diferente e indique a forma de o resolver. *d)* Enuncie os postulados de Gauss.

202 — Os 3 ângulos dum triângulo plano A B C foram medidos, obtendo-se os seguintes resultados: $\hat{A}=62^\circ 27' 32''$ (pêso 2); $\hat{B}=56^\circ 16' 52''$ (pêso 1); $\hat{C}=61^\circ 15' 44''$ (pêso 2). Calcule, pelo método geral de compensação das observações condicionadas, os valores compensados dos ângulos.
R: $\hat{A}=62^\circ 27' 30''$, $\hat{B}=56^\circ 16' 48''$, $\hat{C}=61^\circ 15' 42''$.

Outro exercício

203 — Com 3 baralhos completos de 52 cartas formam-se 3 grupos de cartas nas seguintes condições:

1.º) Com 40 cartas (tirando dum baralho completo os *8,8,9,9* e *10,10*).

2.º) Com as figuras dum baralho (ás, dama, valete e rei).

3.º) Um baralho completo de 52 cartas.

Escolhendo ao acaso um dêstes grupos tira-se uma carta, que depois se reconheceu ser o rei de espadas.

¿ Qual é a probabilidade da carta pertencer ao 1.º grupo? E se a carta aparecida fôsse o *10* de espadas ¿ qual será a probabilidade de pertencer ao 1.º grupo?

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. (2.º Exame de freqüência em 4-5-1939)

204 — *Cinemática: a)* O que entende por movimento de roto-translação; defina decomposição própria e imprópria. *b)* Enuncie o teorema de Coriolis e escreva a sua expressão definindo as diferentes acelerações. *c)* Defina os ângulos de Euler. *d)* Enuncie o teorema de Chasles (movimento de uma figura plana no seu plano).

205 — *Estática e Dinâmica: a)* Defina fôrças motoras e resistentes. *b)* Enuncie os teoremas gerais sôbre o equilíbrio. *c)* Enuncie as condições gráficas necessárias para o equilíbrio dos polígonos funiculares. *d)* Escreva as equações de Euler relativas ao movimento do ponto material livre (equações intrínsecas).

206 — *Problemas: a)* Determine as coordenadas do centro de gravidade do sólido gerado pela área plana compreendida entre o eixo OY, a recta $y=p$ e a parábola $y^2=2px$, quando ela roda de 360º em tôrno de OY. R: $\xi=0$ $\eta=\frac{5}{6}p$ $\zeta=0$.
b) Um ponto material de pêso mg é obrigado a permanecer sôbre uma circunferência situada num plano vertical. Determinar a fôrça que deve atraír o ponto para a extremidade superior do diâmetro vertical, a-fim-de que êle esteja em equilíbrio num dos extremos do diâmetro horizontal. R: $F=\sqrt{2}\ mg$.

ASTRONOMIA

F. C. L. (2.º Exame de freqüência em 8-5-1939)

207 — *a)* Defina directriz e linha média de um nível. Diga o que entende por nível calado e por nível rectificado. *b)* Defina colimação de um instrumento de passagens colocado no meridiano. Que métodos conhece para a determinação de colimação? *c)* Quais as estrêlas mais convenientes para a determinação de azimute de um I. P. colocado no meridiano; justifique a resposta. *d)* Como se reduzem as observações feitas nos diferentes fios do retículo, de um I. P. colocado no meridiano, ao fio do meio? *e)* O que é paralaxe de um astro? Que espécies de paralaxe conhece? *f)* Indique as principais diferenças entre os métodos de Gago Coutinho e de Talcott (determinação de latitude).

208 — *a)* Observaram-se duas estrêlas na sua passagem meridiana e determinaram-se os tempos $\theta_1 = 15^h\, 20^m\, 24^s,80$ e $\theta_2 = 15^h\, 30^m\, 10^s,04$ das suas passagens na média dos fios. Pretende conhecer-se o azimute do I. P., supondo-se constante o êrro de nível e nulo o de colimação. A latitude do lugar de observação é $\varphi = 38^o\, 43'\, 0''$, e as coordenadas das estrêlas são

$$\begin{cases} \alpha_1 = 15^h\, 18^m\, 12^s,40 \\ \delta_1 = -5^o\, 20'\, 12'',00 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \alpha_2 = 15^h\, 27^m\, 54^s,40 \\ \delta_2 = 55^o\, 10'\, 25'',00 \end{cases}$$

R: $\alpha = 2^s,71$.

b) Supondo que $\theta_1 = 15^h\, 20^m\, 14^s,80$ é o tempo sideral de Lisboa, determinar a hora legal nesse instante. A longitude de Lisboa é $\lambda = +0^h\, 36^m\, 44^s,68$ R: $H_L = 0^h\, 57^m\, 8^s,27$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

209 — Mostrar que a primitiva de $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2}$ se reduz a uma função racional quando se verifica a relação harmónica $2(ab+cd)=(a+b)(c+d)$.

210 — Determinar um conjunto ordenado de cinco algarismos e uma base de numeração tais que o número representado por êsse conjunto nessa base seja duplo do número representado pelo mesmo conjunto na base dez.

211 — Sendo z o número complexo $z = x + iy$ representado pelo ponto $M(x, y)$, referido a eixos rectangulares, achar o lugar geométrico de M quando o argumento de $z^2 - 1$ é constante, e o lugar geométrico de M quando o módulo de $z^2 - 1$ é constante.

212 — Por dois pontos A, B duma hipérbole, traçam-se paralelas às assíntotas. Provar:

1.º — Que uma das diagonais do paralelogramo assim formado passa pelo centro da curva;

2.º — Que metade dessa diagonal é meia proporcional entre as distâncias do centro do paralelogramo ao centro da curva e ao ponto em que ela encontra a tangente em A;

3.º — Que esta mesma diagonal é meia proporcional entre as distâncias do centro do paralelogramo aos pontos em que a segunda diagonal corta a curva.

RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS NO N.º 1 DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Consideraremos os problemas propostos no n.º 1 da «Gazeta de Matemática» com a numeração 110, 111, 112 e 113 para facilitar futuras referências.

110 — Considerando o sólido dividido em cilindros elementares, de base $a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ (1) e altura dz, teremos

$$V = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3)\, dz = \frac{a_1}{12} h^3 + a_3 h \qquad (2)$$

Por outro lado

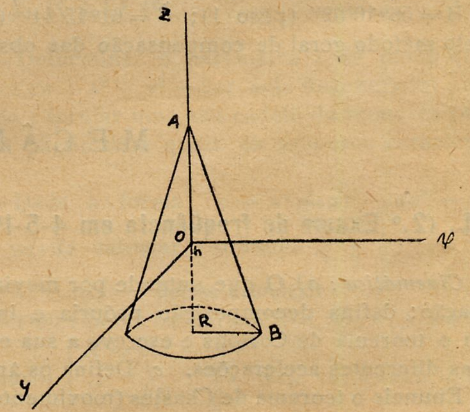
$$\begin{cases} B_1 = a_0\left(-\dfrac{h}{2}\right)^3 + a_1\left(-\dfrac{h}{2}\right)^2 + a_2\left(-\dfrac{h}{2}\right) + a_3 \\ B_2 = a_0\left(\dfrac{h}{2}\right)^3 + a_1\left(\dfrac{h}{2}\right)^2 + a_2\dfrac{h}{2} + a_3 \\ M = a_3 \end{cases}$$

logo $$V = \frac{1}{6} h [B_1 + B_2 + 4M] = \frac{a_1}{12} h^3 + a_3 h \qquad (3)$$

Como vemos as expressões (2) e (3) são idênticas como se queria demonstrar.

Cone: Vejamos que aspecto toma (1) neste caso particular. A equação da recta geratriz $\overline{AB}$, situada no plano dos xz é $z = -\dfrac{h}{R}x + \dfrac{h}{2}$. Para termos a equação da superfície cónica de revolução em tôrno do eixo dos zz basta mudar x em $\sqrt{x^2+y^2}$ e portanto

$$z = -\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{h}{2} \quad \text{donde} \quad x^2 + y^2 = \frac{R^2}{h^2}z^2 - \frac{R^2}{h}z + \frac{R^2}{4}.$$



A área de qualquer secção dum plano horizontal é

$$\frac{\pi R^2}{h^2}z^2 - \frac{\pi R^2}{h}z + \frac{\pi R^2}{4} \qquad (1')$$

pois $x^2 + y^2$ é o raio de cada uma dessas secções; vê-se que não há termo em z^3, isto é, $a_0=0$. Então

$$V_{cone}=\frac{1}{6}h\left[\pi R^2+0+4\frac{\pi R^2}{4}\right]=\frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Esfera: A sua equação, em relação a 3 eixos ortogonais de origem no centro da esfera, é $x^2+y^2=-z^2+R^2$. Logo aqui a expressão (*1*) toma o aspecto $-\pi z^2+\pi R^2$. (1'')

Também aqui não há têrmo em z^3, quere dizer, $a_0=0$; mas além dêste coeficiente é ainda nulo a_2. Então

$$V_{esf.}=\frac{1}{6}2R\left[0+0+4\pi R^2\right]=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

JOSÉ ARANDES

— **111** — *a)* Para determinar o $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}$, onde n é a variável inteira, notemos que será $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ onde x é a variável contínua, se existir $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. Então, teremos aplicando duas vezes a regra de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=2\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0 \quad \text{e portanto} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}=0.$$

A. S. C.

— **111** — *b)* Aplicando a regra de l'Hôpital e supondo que o limite é A,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(1+\operatorname{sen}2t)^{\frac{1}{t}}\,dt=\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}2x)^{\frac{1}{x}}=A.$$

Determinemos A: Sabe-se que

$$\log A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+\operatorname{sen}2x)$$

e, aplicando a regra de l'Hôpital, vem

$$\log A=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1+\operatorname{sen}2x}=2$$

logo será $A=e^2$.

A. S. C.

— **113** — Seja p o número médio, dos $2n+1$ números que satisfazem às condições do enunciado. Será:

$$(p-n)^2+\cdots+(p-1)^2+p^2=(p+1)^2+\cdots+(p+n)^2$$

ou

$$(n+1)p^2+(1+2^2+\cdots+n^2)-2p(1+2+\cdots+n)=$$
$$=np^2+(1+2^2+\ldots+n^2)+2p(1+2+\ldots+n)$$

donde

$$p^2=2pn(n+1)$$

e o problema tem duas soluções:

I) $-n,\ldots 0,\ldots n$

II) $2n^2+n,\ldots 2n^2+2n,\ldots 2n^2+3n$.

Para $n=1$ II) dá-nos as medidas dos lados do triângulo de ouro; para $n=2$ é-se conduzido ao 1.º problema sob a epígrafe *Curiosidades* no presente número da Gazeta.

RECTIFICAÇÕES

Da preparação apressada do 1.º número da «Gazeta de Matemática» resultaram inúmeras imperfeições (erros, gralhas etc.) que aqui ficam convenientemente rectificadas.

Pede-se aos colaboradores da «Gazeta» que escrevam de um modo perfeitamente legível, para que fiquem facilitadas as tarefas de verificação e revisão de provas.

— **5** — Substituir no enunciado dêste exercício $\cos^2 b$ por $\operatorname{sen}^2 b$.

— **22** — Substituir na resposta:

$$\begin{cases}x+3y=15\\3x+2y=11\end{cases} \text{ por } \begin{cases}x+3y=15\times 4\\3x+2y=11\times 5\end{cases},\quad x={}^3/_7\,\% \text{ por } x=6\,{}^3/_7\,\%$$

e $y=4\,{}^6/_7\,\%$ por $y=17\,{}^6/_7\,\%$.

— **29** — Substituir no resultado $n=0$ por $n=2$, e o período final por éste outro: *As soluções são* $x=r$, *para* $n=1$, *e* $x=0$, *para* $n=2$.

— **35** — Substituir no resultado $-\frac{3}{2}$ por $-\frac{15}{8}$.

— **44** — Acrescentar à alínea *b)* do resultado a solução $z_3=0$.

— **48** — Substituir no resultado

$$\pm\sqrt[4]{\frac{1}{k-1}} \text{ por } \sqrt[4]{-\frac{1}{3}} \text{ e } \frac{1}{\pm\sqrt{2+k}} \text{ por } \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

— **53** — Mostrar que tôdas as raízes da equação:

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^3=\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \quad \text{são reais.}$$

R:
$$\frac{1+ix}{1-ix}=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$$

$$\left(com\quad \theta=\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3},\quad k=0,1,2\right)$$

donde

$$x=\frac{1-\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-(1+\cos\theta)i}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\right),$$

expressão que só toma 3 valores reais, c. q. p.

— **57** — Substituir no resultado

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2x^2}{4\pi^2}\sqrt{r^2-\frac{r^2x^2}{4\pi}} \text{ por } V(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2x^2}{4\pi^2}\sqrt{r^2-\frac{r^2x^2}{4\pi^2}}.$$

— **65** — Averigue se há polinómios inteiros em x que satisfaçam à equação

$$y''+(x-1)y'-4y=0 \quad \left(y'=\frac{dy}{dx};\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

R: *Seja* $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+a_4x^{n-4}+\ldots+a_n$ *Calculando* y' *e* y'' *e substituindo na equação diferencial* $y''+(x-1)y'-4y=0$ *vem* $(n-4)a_0x^n+(-a_1-4a_0)x^{n-1}+$ $+(12a_0-3a_1-2a_2)x^{n-2}+(6a_1-2a_2-3a_3)x^{n-3}+\cdots=0$ *donde* $n=4\longrightarrow a_1=-4a_0$, $a_2=12a_0$, $a_3=-16a_0$ e $a_4=10a_0$ *e portanto* $y=a_0(x^4-4x^3+12x^2-16x+10)$.

HUMORISMO

A relatividade para meninas de sociedade

Um professor foi a um chá dansante e uma rapariga que ficou a seu lado preguntou-lhe: «Sr. Professor, diga-me em poucas palavras o que vem a ser a Teoria da Relatividade». O Professor respondeu: «Da melhor vontade! Mas deixe-me contar-lhe primeiro uma pequena história. Uma vez num passeio que dei com um amigo francês íamos cheios de sêde. A certa altura encontrámos uma herdade e eu disse-lhe: «Vamos beber um copo de leite». «O que é leite? «Oh! então não sabe o que é leite? É um líquido branco que...» «O que é que quere dizer branco?» «Branco? Você não sabe o que quere dizer? Bem, o cisne...» «O que quere dizer cisne?» «Cisne é uma ave grande com o pescoço arqueado...» «O que é arqueado?» «Arqueado? Oh! Céus, então você não sabe o que isso é? Bem, olhe aqui para o meu braço, quando eu o ponho levantado nesta posição êle está arqueado». «O quê, arqueado é isso? Ah! bem, então já sei o que é leite». (Do livro de Max Born: «The Restless Universe», transcrito pelas revistas «The Mathematics Student» e «Scripta Mathematica»).

LIRISMO

Um matemático que não tem qualquer coisa de poeta nunca será um bom matemático. KARL WEIERSTRASS

MODÉSTIA

Sturm quando falava do seu célebre teorema, dizia: «o teorema de que eu tenho a honra de usar o nome.. ».

CURIOSIDADES

O número de dias do ano goza das seguintes propriedades: 1.ª) é a soma dos quadrados dos três números inteiros consecutivos 10, 11, e 12; 2.ª) é também a soma dos quadrados de 13 e 14. Isto é $365 = 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

— Com 6 segmentos iguais construir 4 triângulos equiláteros iguais tendo por lados os segmentos dados.

BIBLIOGRAFIA

A «Gazeta de Matemática» fará referência a todos os livros e revistas que lhe sejam enviados pelos autores ou editores e para êsse efeito será criada uma secção bibliográfica.

Bento de Jesus Caraça — Lições de Álgebra e Análise, vol. II, fasc. 1.º, *Funções, Limites, Continuïdade*. Depositário Geral: Livraria Sá da Costa. Lisboa, 1940, 262 pág. 40$00.

Contém: cap. 1.º Variáveis e Conjuntos, cap. 2.º Noção de Função, cap. 3.º Teoria dos Limites, cap. 4.º Teoria da Continuïdade, Indicações bibliográficas e Exercícios. Assinalamos aos nossos leitores o aparecimento dêste livro, a que faremos uma referência mais detalhada num número posterior.

Portugaliae Mathematica. Faculdade de Ciências. R. da Escola Politécnica. Lisboa. Publicação subsidiada pelo Instituto para a Alta Cultura. Assinatura para Portugal 100$00 por cada volume com cêrca de 500 páginas.

Estão publicados quatro fascículos do vol. I desta revista. Os artigos publicados são os seguintes: Fasc. 1.º: António Monteiro — *Sur l'additivité des noyaux de Fredholm.* Fasc. 2. Aureliano de Mira Fernandes — *Derivate tensoriale simetriche;* Ruy Luis Gomes — *Les changements de référentiel et la cinématique des ensembles (de points). Quelques problèmes qui en dépendent;* Aureliano de Mira Fernandes — *Equazioni di struttura dei gruppi di Lie.* Fasc. 3: Caius Jacob — *Sur les mouvements lents des fluides parfaits compressibles.* 2.ª Parte, fasc. 1: António Monteiro — *Introduction; Le Congrès International des Mathématiciens;* Aureliano de Mira Fernandes — *Reimpressão das Notas publicadas nos «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», de 1928 a 1937.*

NOTICIÁRIO

CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA — Por motivo da guerra europeia o Congresso Internacional dos Matemáticos que devia realizar-se êste ano, no mês de Setembro, em Cambridge (Massaschussets), U. S. A., ficou adiado sine-dia.

SEMINÁRIO DE ANÁLISE GERAL. (Lisboa) — Realizou o sr. Mário de Alemquer, neste seminário, um curso sôbre a *Teoria dos Anéis e Ideais.* No dia 8 de Abril, realizaram-se ainda no mesmo seminário, sob a presidência do Prof. Dr. Pedro José da Cunha, duas conferências: *Objectivo da Topologia Geral* por H. Ribeiro e *Importância da Análise Geral* por A. Monteiro. Estas conferências tinham por objectivo informar os estudiosos sôbre o plano de trabalho do Seminário, a realizar no Centro de Estudos de Matemática recentemente criado em Lisboa pelo Instituto para a Alta Cultura, centro que funciona sob a direcção do Prof. Pedro José da Cunha.

GAZETA DE MATEMÁTICA — O próximo número (3) da Gazeta será especialmente dedicado aos candidatos ao exame de aptidão às Escolas Superiores. Nêle publicaremos os pontos dos exames de aptidão do ano passado, que ainda não foram publicados na Gazeta, bem como os pontos modelos dêste ano, acompanhados das respectivas resoluções. O número 4 da Gazeta será dedicado aos estudantes de Matemática das Escolas Superiores, e nêle serão publicados os pontos dos exames finais (de Julho e Outubro) do ano lectivo passado.

SERVIÇO DE INFORMAÇÃO — Com o objectivo de estabelecer um contacto mais íntimo entre os leitores e a «Gazeta de Matemática», resolvemos criar um serviço de informação. Tôdas as consultas devem ser dirigidas à Redacção da nossa revista.

ASSINATURA DA GAZETA — Atendendo aos pedidos de alguns leitores resolvemos montar um serviço de assinaturas da Gazeta. A assinatura de quatro números custa 12$00. Os pedidos devem ser dirigidos à Redacção da Gazeta.

Assinando a Gazeta, os nossos leitores contribuirão para o desenvolvimento desta Revista. Os recibos serão enviados à cobrança pelo correio.