

N. 0199

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXXIV | Mar. 2023 | 4,20€

Agulhas, ondas e magia

Gonçalo Jorge e Diogo Oliveira e Silva

CANTO DÉLFICO

Teorema de Gauss-Lucas

Ricardo Mamede

ATRATOR

Polinómios vs. polígonos



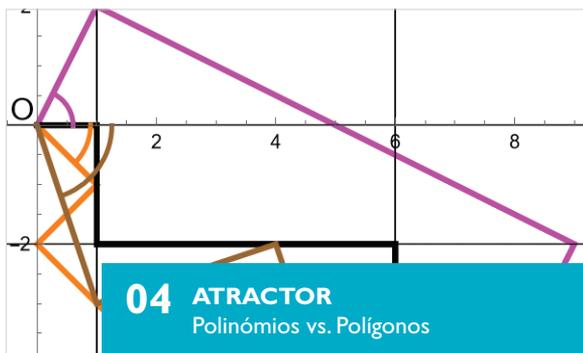
ESCOLA DE VERÃO SPM

COIMBRA

12 - 14 julho

2023





- 02 EDITORIAL** | *Paulo Saraiva*
Habitar A Gazeta: Um Desafio Que Se Renova
- 04 ATRACTOR**
Polinómios vs. Polígonos
- 10 RECREIO** | *Hélder Pinto*
Um Percurso na Matemática Recreativa
- 15 CANTO DÉLFICO** | *Ricardo Mamede*
O Teorema de Gauss-Lucas
- 21 APANHADOS NA REDE** | *José Carlos Santos*
É Natural Querer Saber se o Número 0 é Natural
- 23 MATEMÁTICA PARA A INDÚSTRIA E INOVAÇÃO** | *Sofia O. Lopes e Fernando A. C. C. Fontes*
Água, Água em Todo o Lado e nem um Pingó Desperdiçado: Como a Matemática Pode Ajudar os Agricultores a Irrigar de Forma Mais Eficiente
- 33 HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA** | *Carla Cardoso*
Ludus Regularis: um Jogo de Dados na Igreja
- 38 AGULHAS, ONDAS E MAGIA**
Gonçalo Jorge e Diogo Oliveira e Silva
- 48 MATEMÁTICOS NA PRIMEIRA PESSOA** | *Ana Mendes e Paulo Saraiva*
Maria de Natividade
- 60 MATEMÁTICA E LITERATURA** | *Nuno Camarneiro*
A Literatura Artificial
- 61 BARTOON** | *Luis Afonso*
- 62 NOTÍCIAS**
- 67 CARTAS DA DIREÇÃO** | *Isabel Hormigo*
Por um Ensino da Matemática de Qualidade

HABITAR A GAZETA: UM DESAFIO QUE SE RENOVA

A nova equipa editorial apresenta-se e reafirma os propósitos da *Gazeta de Matemática*.



PAULO SARAIVA
Universidade
de Coimbra
psaraiva@fe.uc.pt

O n.º 199 da *Gazeta de Matemática* surge com uma nova equipa editorial, respondendo ao desafio feito pela Sílvia Barbeiro, anterior diretora da revista. Acompanham-me nesta missão Patrícia Beites, Rui Santos e Sandra Bento (ver ao lado as sínteses biográficas). Renova-se a equipa – com a responsabilidade de continuar, e até de melhorar, o bom trabalho que foi feito –, mas mantém-se o propósito plasmado no estatuto editorial: fazer com que a *Gazeta* seja um espaço de divulgação de cultura matemática, capaz de estimular o gosto pelo seu estudo, assim como a troca de ideias entre quem a estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente por ela se interessa. Também renovado foi o Conselho Editorial, garante da qualidade da revista, com a missão de criação de pontes com toda a comunidade matemática.

São múltiplos e aliciantes os artigos que o atual número nos propõe. No espaço Atractor, podemos entender como funciona o Método de Lill, um procedimento dinâmico de procura e visualização dos zeros de um polinómio, com fácil implementação por via computacional. Também da localização dos zeros de um polinómio, agora na variável complexa, nos fala Ricardo Mamede, ao abordar, no Canto Delfico, o interessante Teorema de Gauss-Lucas. Hélder Pinto, novo coordenador do Recreio, apresenta-se e descreve o seu percurso pela matemática recreativa. No artigo de José Carlos Santos, abordando o tema de certas convenções matemáticas (e

suas razões), compreendemos por que razão “É Natural Querer Saber se o Número 0 é Natural”. Na cativante rubrica Histórias da Matemática, Carla Cardoso faz uma incursão pelo Ludus Regularis, um jogo de dados especialmente concebido para elementos do clero! Na sua habitual crónica, Nuno Camarneiro coloca-nos desta feita perante implicações e desafios vários resultantes do advento da chamada Inteligência Artificial. O problema da otimização da utilização dos recursos hídricos, mais premente em cada ano que passa, é tema do artigo “Água, Água em Todo o Lado e Nem um Pingo Desperdiçado...”, de Sofia Lopes e Fernando Fontes, no espaço Matemática para a Indústria e a Inovação. O duro percurso de vida da matemática angolana Maria de Natividade é o convite para a leitura de Matemáticos na Primeira Pessoa. Também neste número, Gonçalo Jorge e Diogo Oliveira e Silva exploram três facetas do Teorema de Borsuk-Ulam no seu “Ondas, Agulhas e Magia”. Por último, nas Cartas da Direção, destaca-se a posição crítica da SPM a respeito das homologadas Aprendizagens Essenciais para o Ensino Secundário.

O próximo número assistirá à criação de uma nova coluna, Arte e Matemática, da responsabilidade de Pedro Freitas, ficando as Histórias da Matemática sob a coordenação de Jorge Nuno Silva.

A *Gazeta de Matemática* é fruto do trabalho de todos os que a habitam: editores e membros do Conselho Edi-

torial, colaboradores técnicos, autores e coordenadores das colunas e dos artigos. Claro, os leitores são a razão de ser da revista: também eles são convidados a habitá-la com o seu olhar crítico! Em nome da equipa editorial,

renovo o repto de que todos os que se interessam pela matemática se sintam estimulados a contribuir com trabalhos que nos levem a apreciá-la ainda mais e a aprofundar o conhecimento acerca dos temas neles contidos.

BIOGRAFIAS DOS EDITORES

Paulo Saraiva é professor da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra (FEUC). Licenciado e mestre em Matemática (especialização em Ensino) pela FCTUC, doutorou-se em Economia Matemática e Modelos Económétricos pela FEUC em 2004. É membro da Linha de Álgebra e Combinatória do CMUC – *Centre for Mathematics of the University of Coimbra* e colaborador do CeBER – *Centre for Business and Economics Research*. É coeditor do *Boletim FEUC et al.* desde 2019. Os seus principais interesses de investigação e docência incluem tópicos de álgebra não associativa, cálculo diferencial e integral e equações diferenciais.



Paulo Saraiva
Universidade de Coimbra
psaraiva@fe.uc.pt

Patrícia Beites é professora do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior (UBI) e membro do CMA-UBI – Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior. É doutorada em Matemática e licenciada em Matemática (Ensino) pela UBI; é mestre em Matemática (Álgebra) pela Universidade de Lisboa. Os seus principais interesses de investigação prendem-se com tópicos de álgebra, em particular não associativa, e de educação matemática.



Patrícia Beites
Universidade da Beira Interior
pbeites@ubi.pt

Rui Santos é professor na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Politécnico de Leiria e membro do CEAUL – Centro de Estatística e Aplicações. É licenciado e mestre em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão e doutorado em Probabilidade e Estatística. As suas áreas de interesse na investigação e na docência incluem os fundamentos, história, ensino e aplicações da probabilidade e da estatística, simulação, distribuições, epidemiologia, meta-análise e ciência de dados.



Rui Santos
Politécnico de Leiria
rui.santos@ipleiria.pt

Sandra Bento é professora no Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior. Licenciada em Matemática pela FCUL e mestre em Matemática Aplicada pelo IST, doutorou-se em Matemática na Universidade do Porto, em 2011, com investigação na área da Geometria Algébrica. As suas áreas de interesse na investigação e na docência incluem educação matemática, didática da matemática e comunicação e divulgação de ciência.



Sandra Bento
Universidade da Beira Interior
sbento@ubi.pt

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atrator, este é um espaço da responsabilidade do Atrator, relacionado com conteúdos interativos do seu site www.atrator.pt. Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para atrator@atrator.pt

POLINÓMIOS VS. POLÍGONOS

O método de Lill é um processo dinâmico que permite visualizar os zeros reais, se existem, de qualquer polinómio de grau positivo numa variável real. Com este método, podemos testar a existência desses zeros e analisar como eles variam com os coeficientes do polinómio. O método tem ainda a vantagem de ser fácil de implementar em computador e de se adaptar a uma abordagem interativa, como a que aqui se apresenta.

Consideremos uma equação polinomial na variável real x

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

com coeficientes reais a_n, \dots, a_0 , sendo n um inteiro positivo e $a_n \neq 0$. A primeira etapa do método de Lill (cf. [2]) associa ao polinómio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

um caminho no plano feito de segmentos de reta horizontais e verticais, cujos comprimentos são determinados pelos coeficientes de f . Mais precisamente, começamos por traçar um segmento de reta α_n horizontal, de comprimento $|a_n|$, com início no ponto $O = (0,0)$ do plano cartesiano, dirigido para a direita se $a_n > 0$ e para a esquerda se $a_n < 0$. Designemos por P_n o ponto final de α_n . Se $a_{n-1} \neq 0$, traçamos outro segmento de reta α_{n-1} , com início em P_n mas desta vez vertical, medindo $|a_{n-1}|$ e dirigido para cima se $a_{n-1} > 0$ e para baixo se $a_{n-1} < 0$. Denotemos por P_{n-1} o ponto final de α_{n-1} . Se $a_{n-1} = 0$, este segmento α_{n-1} reduz-se ao ponto P_n . Verifique-se na figura 1 estas duas etapas para os polinómios $2x + 1$, $x - 2$ e x .

Se $n \geq 2$ e $a_{n-2} \neq 0$, prosseguimos com a construção anterior traçando outro segmento horizontal, digamos

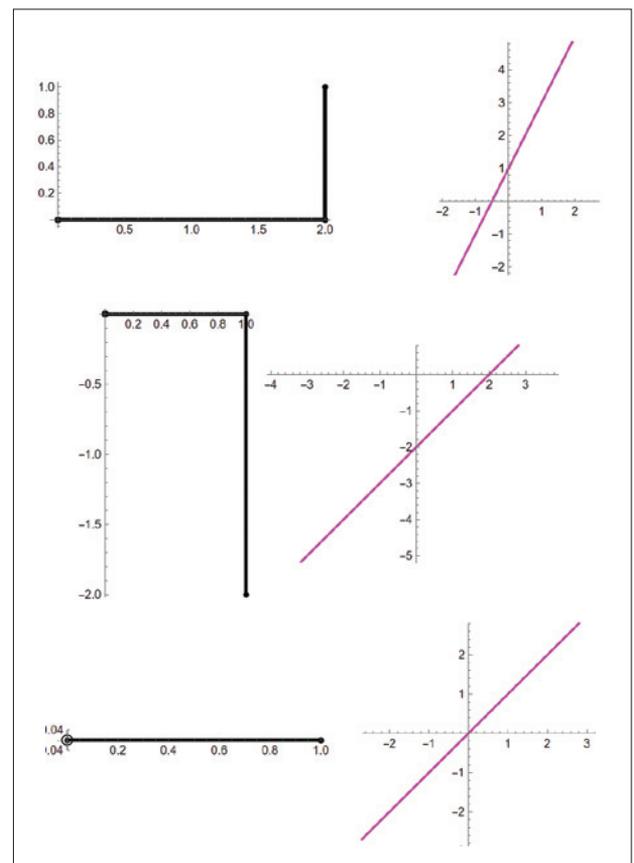


Figura 1.

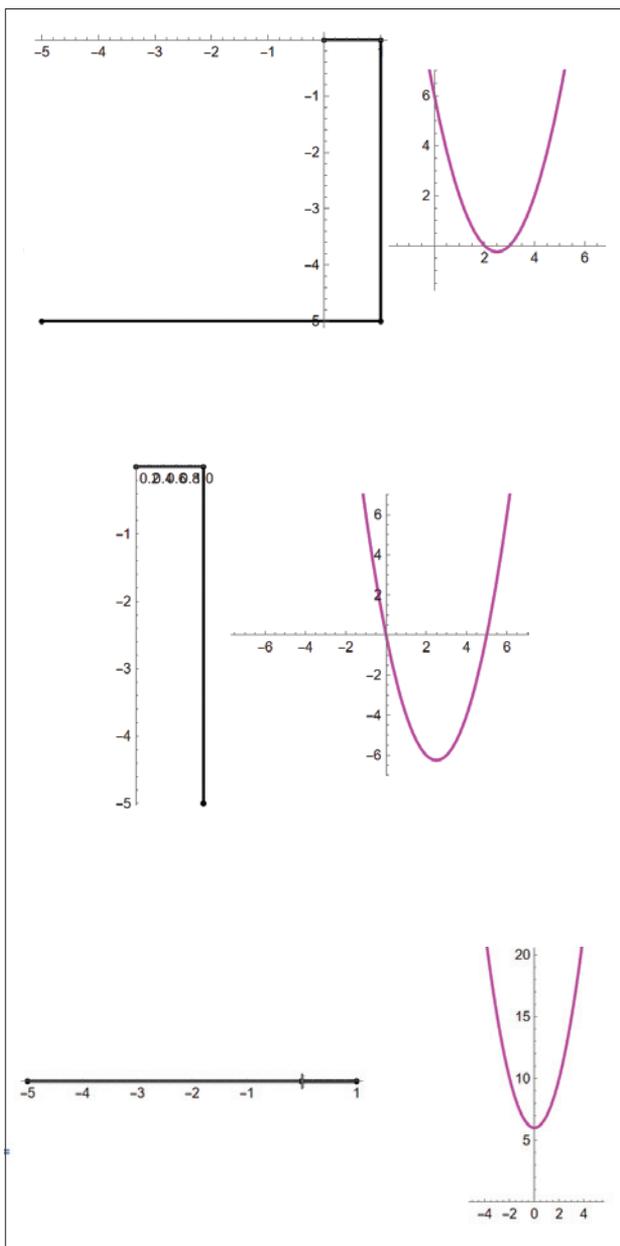


Figura 2.

α_{n-2} , justaposto ao ponto final do último segmento traçado e medindo $|a_{n-2}|$. A direção deste novo segmento depende, como anteriormente, do sinal de a_{n-2} : para a esquerda se $a_{n-2} > 0$, para a direita se $a_{n-2} < 0$. Em geral, as direções dos segmentos cumprem a seguinte regra: a curva α que se vai desenhando, feita de segmentos de reta justapostos, orienta-se no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio se os coeficientes são todos positivos, e no sentido horário caso os coeficientes sejam todos negativos. Mais precisamente, se os coeficientes do polinómio de grau n são todos positivos, então os segmentos correspondentes às parcelas no polinómio de grau $n - k$, com k par, são horizontais, tendo sentidos alternados e começando para a direita; e os segmentos associados às parcelas no polinómio de grau $n - k$, com k ímpar, são verticais, também em sentidos alternados e começando para cima. Se o polinómio tiver um coeficiente negativo, o sentido do segmento correspondente é o oposto ao descrito; se o coeficiente for nulo, o segmento reduz-se a um ponto. Na figura 2, esta construção está feita para os polinómios $x^2 - 5x + 6$, $x^2 - 5x$ e $x^2 + 6$.

A construção desta representação plana do polinómio f termina quando se esgotam os coeficientes do polinómio, obtendo-se deste modo uma curva α formada por ℓ segmentos de reta, sendo $1 \leq \ell \leq n + 1$, que começa em O e termina num ponto que designaremos por T . A figura 3 mostra a curva α para os polinómios $3x^4 + x^3 + 2x^2 - 5x + 7$, $3x^4 + 2x^2 - 5x + 7$, $3x^4 - 5x + 7$ e $3x^4 + 2x^2 + 7$.

Uma vez traçada a curva α , construa-se uma outra curva, digamos β , dependente da escolha inicial de um ângulo θ :

- (a) O primeiro segmento de reta β_1 de β começa em O , tem inclinação relativamente ao eixo dos x 's dada por

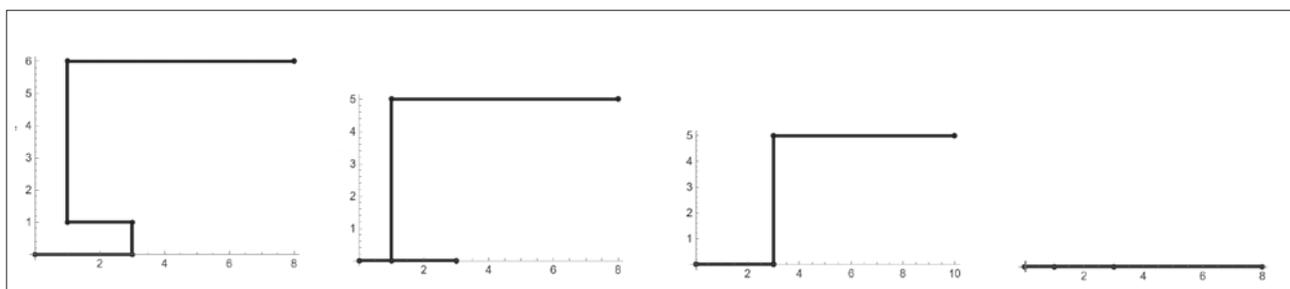


Figura 3.

θ , e termina num ponto Q_1 da linha que passa em P_n com direção vertical.

(b) O segundo segmento de reta β_2 de β começa em Q_1 e faz com β_1 um ângulo de 90° . Esta mudança de ângulo na direção do movimento de β_1 exige uma escolha se a continuação β_2 é feita do outro lado da linha vertical ou do mesmo lado de β_1 . Essa escolha é feita de modo a assegurar que o segmento β_2 intersesta a linha horizontal determinada pelo coeficiente a_{n-2} do polinômio f .

(c) Prosseguimos com o processo descrito anteriormente, até se intersestar a reta que contém o último segmento da curva α .

Em geral, esse último ponto da curva β difere do último ponto T da curva α . Coincide com ele se e só se o número $x_0 = -\text{tangente}(\theta)$ for um zero real do polinômio. Ou seja, a equação (1) tem uma solução real se e só se for possível unir O a T por uma curva β como definida anteriormente.¹

Se uma tal curva β existir, as curvas α e β formam um polígono \mathcal{L} , possivelmente degenerado num segmento, a que chamaremos *polígono de Lill do polinômio f* . É o que acontece nos exemplos da figura 4, que se refere aos polinômios $2x + 1$, $x^2 - 2x + 1$, $x^2 - 2$, $x^2 - 5x + 6$ e em que as curvas α e β estão traçadas a preto e magenta, respectivamente. Note-se que são várias as possíveis curvas β , para diferentes ângulos iniciais θ , caso a equação polinomial tenha mais do que uma solução real.

A figura 5 contém informação análoga sobre os polinômios $x^3 - 9$, $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$, $x^3 - 7x - 6$ e $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 10x + 12$.

Em [3], o leitor encontra uma aplicação interativa com um cursor que permite, para cada polinômio, variar o ângulo θ , ver como a curva β se modifica e ainda procurar as posições em que termina em T , isto é, procurar os zeros reais do polinômio escolhido.

Para equações quadráticas há uma construção geométrica alternativa para testar a existência de soluções reais. Mais precisamente, a cada polinômio $x^2 + bx + c$ está associada uma circunferência (dita de Carlyle) que tem como diâmetro o segmento AB , sendo $A = (0, 1)$ e $B = (-b, c)$; os zeros do polinômio são precisamente as abscissas dos pontos de interseção desta circunferência

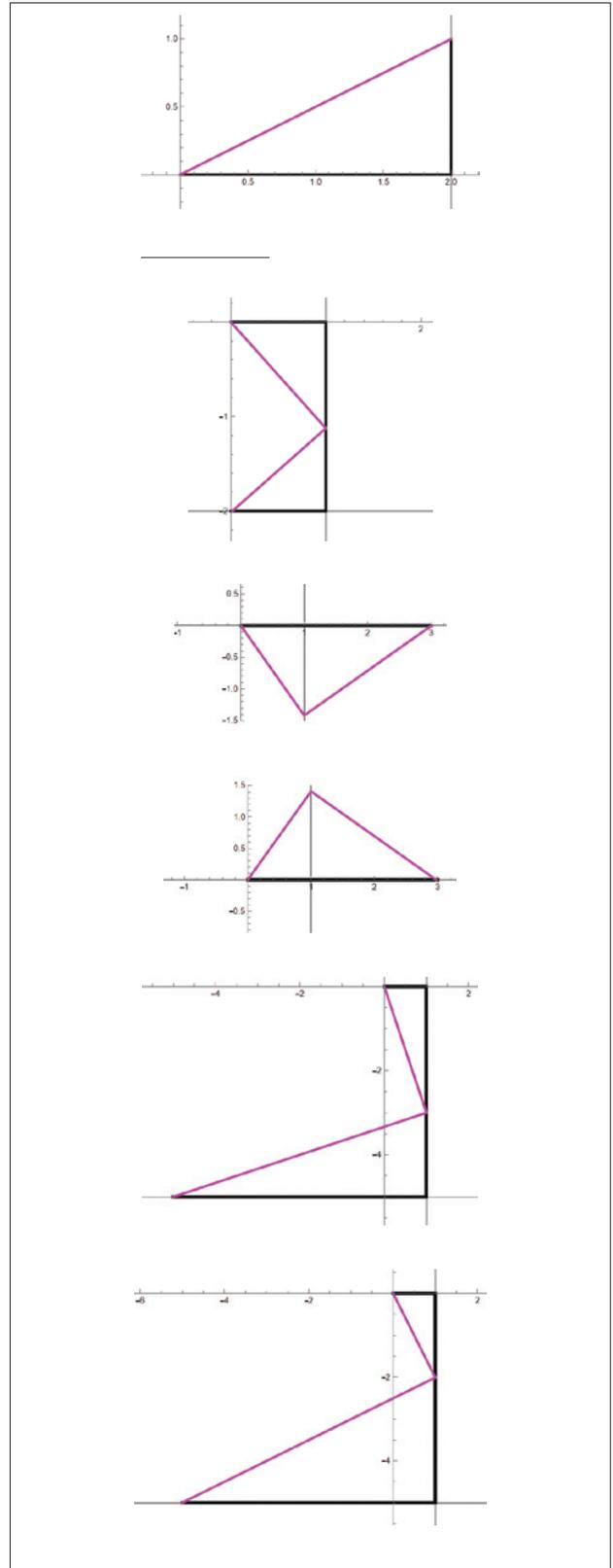


Figura 4.

¹ Uma demonstração elementar desta afirmação pode ser lida em [1].

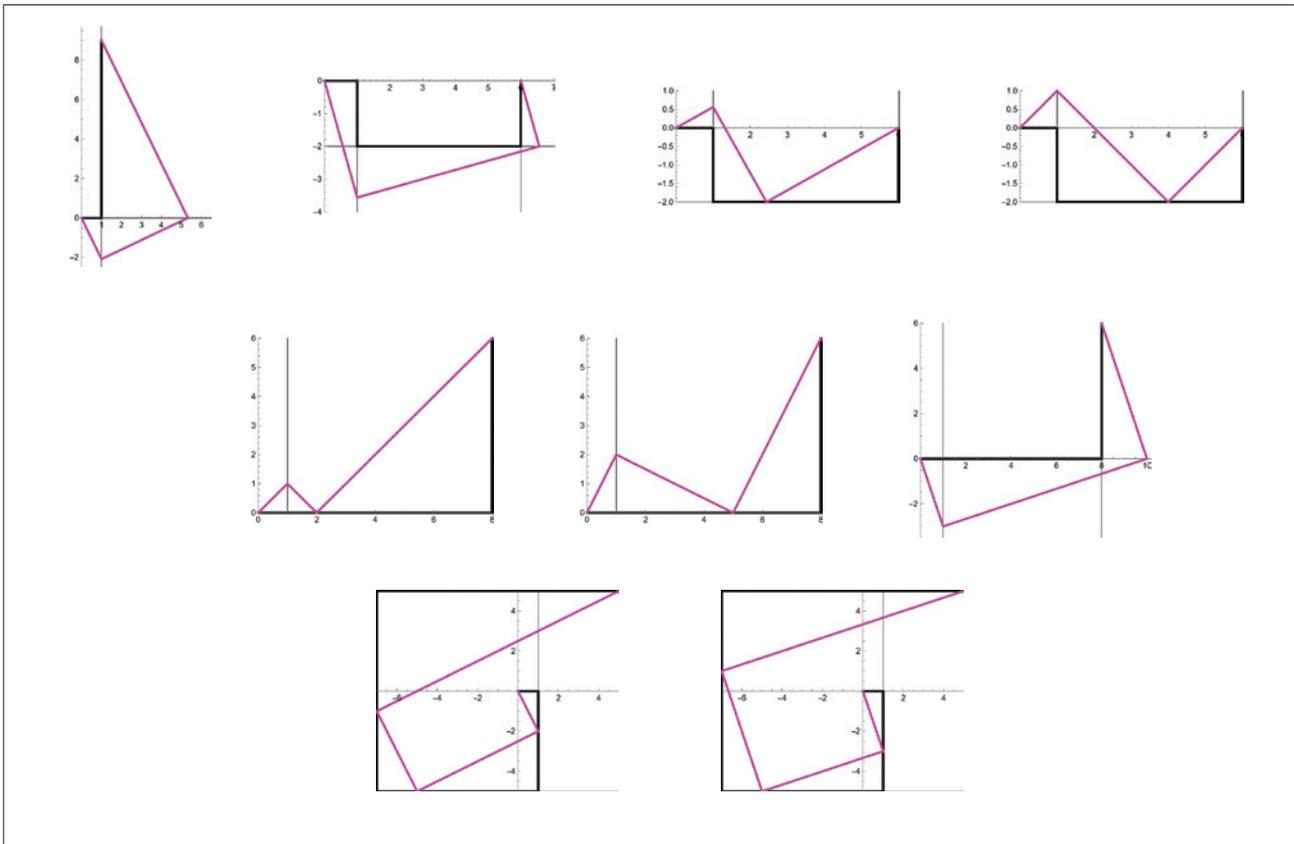


Figura 5.

com o eixo dos x 's, se existem. Para provar esta afirmação, podemos supor que os pontos A e B são distintos, caso contrário a circunferência é degenerada, não interseca o eixo dos x 's e o polinómio é $x^2 + 1$, que não tem zeros reais. Sendo $A \neq B$, a circunferência de Carlyle correspondente tem como equação cartesiana

$$x(x + b) + (y - 1)(y - c) = 0$$

e basta agora intersecá-la com a reta de equação $y = 0$. As abcissas dos pontos de intersecção são, portanto, as soluções da equação $x(x + b) + c = 0$. A figura 6 ilustra a informação dada pela circunferência de Carlyle sobre os zeros reais dos polinómios $x^2 + 2x + 1$, $x^2 - 5x + 6$, $x^2 + 2x + 2$ e $x^2 + 1$. Note-se que, para o penúltimo polinómio, a circunferência de Carlyle existe mas não interseca o eixo dos x 's, enquanto para o último polinómio a circunferência reduz-se ao ponto $(0, 1)$.

Com os módulos interativos produzidos pelo Atractor, disponíveis em [3], podemos considerar um polinómio, aplicar o método de Lill para verificar se tem zeros reais,

e ainda mudar os coeficientes do polinómio para analisar como variam os zeros reais e os polígonos de Lill correspondentes. É o que a figura 7 indica para a família parametrizada de polinómios dada por $f_\lambda(x) = x^2 - 5x + \lambda$, com $\lambda \in \{0, 4, 6, 25/4\}$.

Esta componente interativa sobre o método de Lill no portal do Atractor pode ainda ser usada para se responder a algumas questões sugeridas pelo método, que o leitor é convidado a explorar. Por exemplo:

- (I) Dado um polinómio f de grau maior ou igual a 2 e um caminho β_f que determina um zero real x_0 de f através do método de Lill, então β_f é a curva poligonal α_g do polinómio $g = f/(x - x_0)$ se devidamente reposicionada (isto é, com a figura rodada de modo a que o segmento inicial de β_f fique horizontal) e, de seguida, reescalada por uma homotetia. Esta propriedade está ilustrada na figura 8 para o polinómio $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

A primeira imagem da figura 8 representa, em co-

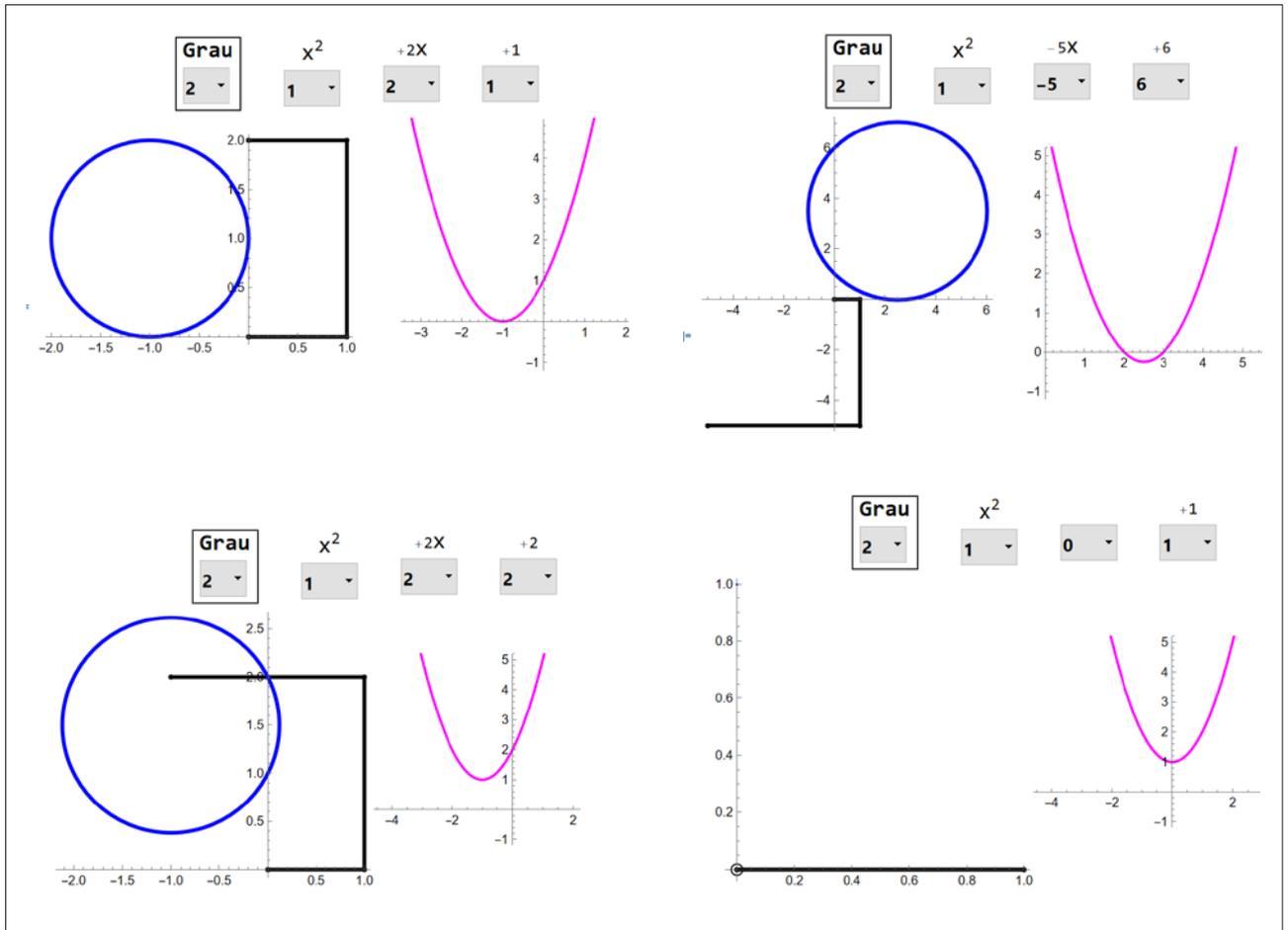


Figura 6.

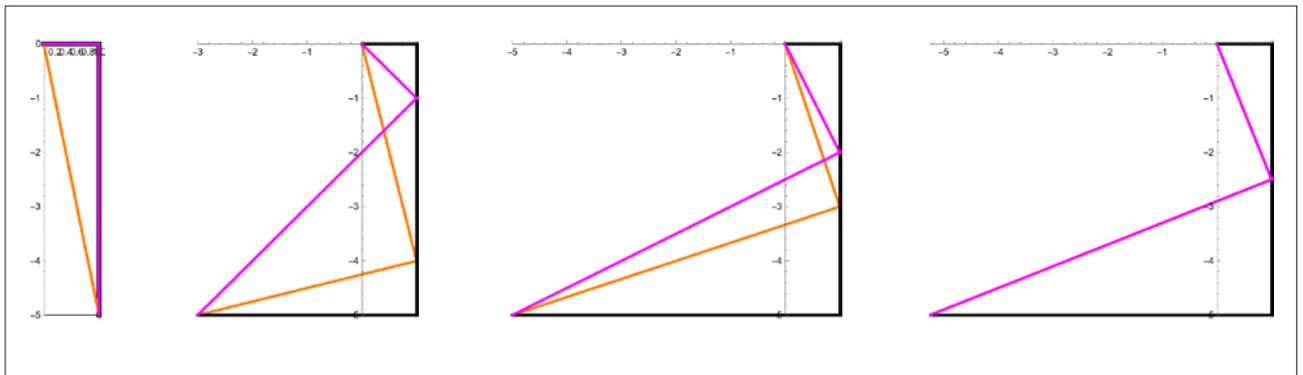


Figura 7.

res diferentes (magenta, laranja e castanho), três caminhos β que ligam O a T e têm declives iniciais relativos ao primeiro traço preto (horizontal) iguais a $k=2$, $k=-1$ e $k=-3$, respectivamente. E, portanto, pelo que afirmámos anteriormente, o polinómio tem três zeros reais, -2 , 1 e 3 .

Na imagem do meio, obtida escolhendo $k=2$, procede-se a uma construção de curvas β análoga à anterior, mas agora com declives iniciais relativamente ao primeiro segmento magenta em vez de ao primeiro segmento horizontal preto. Desse modo, encontramos duas escolhas de declives que geram polígonos

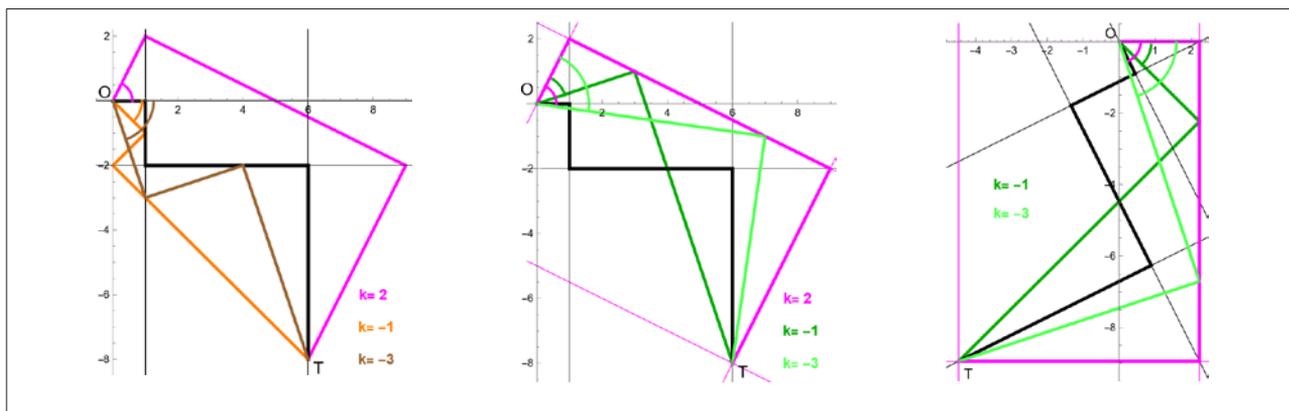


Figura 8.

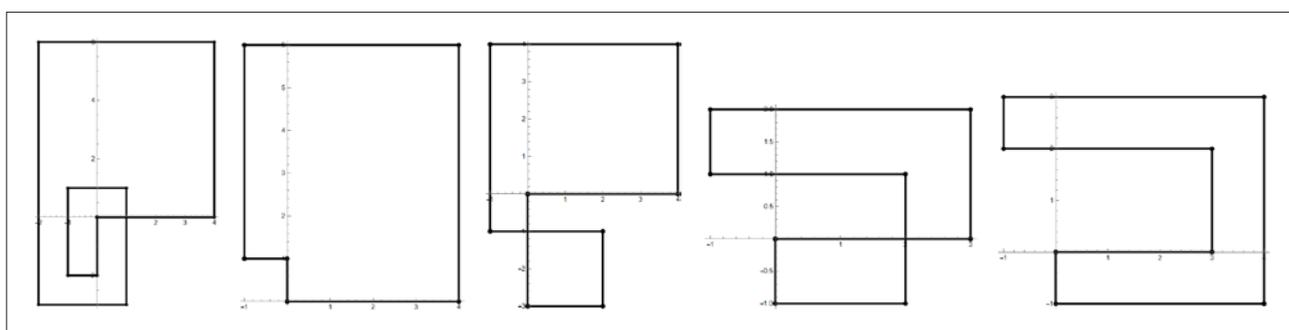


Figura 9.

de Lill, $k = -1$ e $k = -3$, precisamente os dois valores de k que não foram usados para passar da primeira imagem para a segunda. De algum modo, é como se a curva magenta representasse o polinómio do segundo grau que é quociente do inicial por $x + 2$ e pudéssemos repetir a construção com essa nova curva para obter os outros zeros reais do polinómio inicial; e, portanto, é como se esta construção geométrica permitisse visualizar a divisão do polinómio inicial por $x + 2$. Para facilitar a compreensão desta iteração do método, representamos na terceira imagem o resultado de uma rotação que colocou na horizontal o primeiro segmento magenta.

(II) As curvas α dos polinómios indicados na figura 9 são todas fechadas, isto é, $T = O$. O que têm estes polinómios em comum?

A resposta (são todos divisíveis por $x^2 + 1$) é de algum modo surpreendente, mas de facto este é um caso particular de um resultado geral: a curva poligonal α de um polinómio f é fechada se e só se $x^2 + 1$ divide f .

Pode ler-se uma prova desta propriedade em [1].

(III) A configuração das curvas α e β admite algumas generalizações. Por exemplo, podemos variar o ângulo de 90° entre os segmentos de reta α_j que formam a curva α ; ou alterar o ângulo de 90° com que os segmentos da curva β se refletem na direção vertical ou horizontal. Em [1], o leitor encontra informação adicional sobre estas abordagens mais gerais.

[1] D. Kalman, M. Verdi. "Polynomials with Closed Lill Paths". *Mathematics Magazine*, Vol. 88, nº. 1, 2015, pp. 3-10.

[2] M. E. Lill. "Résolution graphique des équations numériques de tous degrés à une seule inconnue, et description d'un Instrument inventé dans ce but". *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Ser. 2, nº. 6, 1867, pp. 359-362.

[3] <https://www.atractor.pt/mat/polinomios-vs-poligonos/>



UM PERCURSO NA MATEMÁTICA RECREATIVA

Na passagem de testemunho do professor Jorge Nuno Silva, aproveito esta minha primeira contribuição com a *Gazeta* para mostrar o meu percurso na área da Matemática Recreativa, dando especial ênfase a contextos pouco usuais nesta área como são os comboios e o futebol!



HÉLDER PINTO
Instituto Piaget,
RECI e CIDMA-UA
helder.pinto@piaget.pt

O meu nome é Helder Pinto, sou docente no Instituto Piaget e investigador na RECI e no CIDMA-UA, e fiquei com a responsabilidade de substituir o professor Jorge Nuno Silva na secção Recreio da nossa *Gazeta de Matemática*. Dada a gigantesca empreitada que me foi incumbida, tomo a liberdade de me apresentar aos leitores, para que conheçam o meu trajeto até ter sido convidado para esta tarefa.

Durante o meu percurso académico, percorri várias universidades portuguesas (licenciatura na Universidade do Porto, mestrado na Universidade de Coimbra e doutoramento na Universidade de Lisboa), tendo despertado desde cedo o meu interesse pela área da Matemática Recreativa, em particular, no Clube de Matemática da Escola Dr. Manuel Gomes de Almeida (Espinho), que eu e os meus colegas de estágio dinamizámos em 2004. Entre 2004 e 2007 fui bolseiro da Fundação Calouste Gulbenkian na Associação Atractor¹.

Desde então, e em paralelo ao meu percurso na área da História da Matemática (área em que me doutorei em 2013, sob orientação do professor Luís Saraiva, e na qual colaborei ativamente no grupo *History and Pedagogy of Mathematics* (<http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/contact.htm>), nunca deixei de procurar problemas e desafios que possam ter um interesse extra em relação às tarefas matemáticas rotineiras. Uma outra característica que procuro num bom problema recreativo é que o seu enunciado seja entendível

por todos e que não seja preciso saber matemática para o compreender. Por exemplo, quando se pede “Determina as raízes do polinómio”, estão subjacentes vários conceitos na pergunta que não são do conhecimento de quem não estuda matemática formal... Às vezes, o problema não é só não saber a resposta, é nem sequer se perceber o que está a ser perguntado...

Recentemente, voltei a colaborar com um outro Clube da Matemática, desta vez o que é dinamizado *online* pela Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), que pode ser consultado aqui <https://clubespm.pt/aaanumerosreais/>.

Por exemplo, no texto de abril de 2022, explico a razão de ser do estranho padrão de numeração que existe nos lugares dos comboios Intercidades em Portugal e que tanta confusão cria nos passageiros quando estão à procura do seu lugar. O leitor pode observar esse padrão na figura 1.

Deixo ao leitor o desafio de compreender/explicar como funciona este padrão, alertando para o facto de que o mesmo tem a sua justificação não só na matemática, mas também na história da evolução dos comboios...

Aliás, aproveito este espaço para agradecer à SPM ter-me ajudado no meu percurso, ao publicar, em 2010, com prefácio do professor Jorge Picado de Coimbra, o meu livro *Matemática & Comboios* (fig. 2), a minha primeira grande publicação nesta área, em que apresento 100 desafios matemáticos, todos ligados à temática ferroviária (locomo-



Figura 1: Exemplo de numeração de lugares numa carruagem Intercidades.

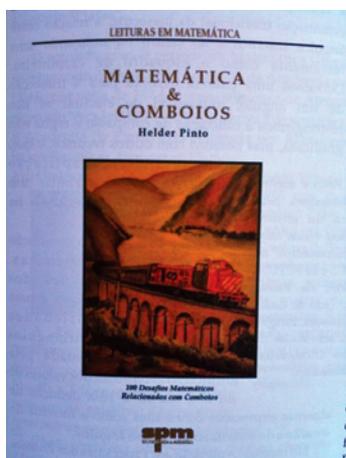


Figura 2: Capa do livro *Matemática & Comboios*, SPM, 2010.

tivas, carruagens, estações, linhas, passageiros, mercadorias, etc.).

Ainda a propósito desta obra, aproveito este espaço para agradecer também as palavras simpáticas do professor Filipe Oliveira:

“O grande defeito deste livro é o seu carácter extremamente... viciante. Esqueci-me, em casa do meu pai, de um número da *Gazeta de Matemática* em que se encontrava transcrito um dos problemas do Helder Pinto. Quando voltei, encontrei-o cercado por uma parafernália de gatafunhos, esquemas e pedaços de equações. “É pá, Filipe, tens de vir dar-me uma ajuda numa coisa que aqui estou a ler, acho que não tem solução...” foram as suas primeiras pa-

lavras, antes mesmo de um simples olá!”

https://clube.spm.pt/analise_livro/

Quanto ao meu interesse por comboios, não vou explicá-lo aqui, podendo o leitor obter alguns esclarecimentos na entrevista que dei na altura da publicação deste livro: https://clube.spm.pt/aentrevista_com/.

Na sua maioria, estes desafios são bem conhecidos de todos, aos quais dei uma nova “roupagem ferroviária”. Deixo a seguir ao leitor dois desses desafios (o primeiro adaptado de um bem conhecido problema de Malba Tahan e o segundo de um problema de Perelman).

Problema 31: O interposto de mercadorias

Num determinado interposto de mercadorias existem apenas 21 vagões (todos iguais), que estão carregados da seguinte maneira:

- 7 vagões estão carregados com dois contentores cada;
- 7 vagões estão carregados com um contentor cada;
- 7 vagões estão vazios.

Como a grua que colocava os contentores nos vagões se avariou, decidiu-se encerrar este interposto e transferir o seu conteúdo para três outros interpostos de mercadorias. Decidiu-se igualmente que os contentores (são todos iguais) e os vagões deviam ser distribuídos equitativamente pelos três interpostos, ou seja, cada um deles deverá receber o mesmo número de vagões e o mesmo número de

¹ Algumas das páginas que ajudei a construir podem ser consultadas aqui: https://www.tractor.pt/mat/sem_palavras/index.html e <https://www.tractor.pt/mat/conchas>.

contentores. Note-se que, como a grua está avariada, já não é possível transferir contentores de um vagão para outro.

Como distribuir os vagões de modo a obter-se o que se pretende?

Problema 83: A ordem de serviço

Um maquinista foi destacado para levar um comboio de uma estação para outra. O comboio deverá viajar a uma velocidade constante (com aceleração desprezável) e não fazer nenhuma paragem entre as duas estações. Na sua ordem de serviço aparecem apenas as seguintes indicações:

Possíveis velocidades para o comboio	Hora de chegada à estação de destino
80 km/h	13.00
120 km/h	12.00

A que horas sairá este comboio da estação de partida? Qual é a distância entre as duas estações? Qual é a velocidade a que deverá seguir para chegar à estação de destino às 12.30?

Uma particularidade interessante deste último problema é o facto de se perguntarem tantas questões para um enunciado que, aparentemente, apresenta tão poucas informações iniciais.

Alguns anos mais tarde, igualmente com o apoio da SPM, virei-me, com a minha colega Cristina Silva, para uma temática muito mais entusiasmante e paixão nacional: o futebol! Assim, em 2018, a editora da Federação Portuguesa de Futebol publicou um livro com desafios matemáticos! (fig. 3)

Assim, quem for à loja online da FPF pode comprar camisolas da seleção, mas também um livro com pro-



Figura 3: Capa do livro *Contas de Cabeça*, FPF, 2018.

blemas de matemática... A ideia desta obra foi replicar o mesmo conceito: trazer problemas matematicamente interessantes para o contexto do futebol, que tanto entusiasmo costuma gerar no nosso país.

A apresentação decorreu na Cidade do Futebol da FPF, no dia do Pi (14 de março), contando com a presença do então presidente da SPM (Jorge Buescu) e do ministro da Educação da altura (Tiago Brandão Rodrigues) (fig. 4).

De seguida, deixo aos nossos leitores três exemplos de desafios deste livro:

28. CAN 2000

A Taça das Nações Africanas (CAN) de futebol de 2000 foi uma organização conjunta entre o Gana e a Nigéria. A classificação do Grupo A (GM – Golos marcados; GS



Figura 4: Apresentação do livro *Contas de Cabeça*. (Crédito: André Sanano/FPF)

– Golos sofridos) foi bastante peculiar e pode ser observada a seguir.

Grupo A	GM	GS	Pontos
1. Camarões	4	2	4
2. Gana	3	3	4
3. Costa do Marfim	3	4	4
4. Togo	2	3	4

Todas as seleções deste grupo acabaram com a mesma pontuação, tendo sido necessário recorrer à diferença de golos para o desempate.

Sabendo que houve golos em todos os jogos e que os dois primeiros classificados empataram entre si, qual o resultado dos seis jogos disputados neste grupo (recorde-se que jogaram todos contra todos uma única vez)?

40. Os marcadores de golos

No final de um campeonato, os golos marcados por uma equipa de futebol estavam assim distribuídos:

-Arquimedes marcou metade dos golos da equipa mais meio golo!

-Euclides marcou um terço dos restantes golos, mais um terço de um golo!

-Tales marcou um quarto dos restantes golos, mais um quarto de um golo!

-Descartes marcou um quinto dos restantes golos, mais um quinto de um golo!

-Outros 11 jogadores marcaram os restantes golos da equipa (um golo cada um).

Quantos golos marcou esta equipa de futebol? Quantos golos marcou cada um dos seus quatro melhores marcadores?

(Como se pode marcar *meio golo*? E um *terço de golo*?)

43. A venda de jogadores

Um clube colocou à venda seis jogadores pelos valores indicados na tabela seguinte.

Jogador	Valor (milhões de euros)
Antonic	15
Brunic	31
Carlovic	19
Dinic	20
Eugenic	16
Fabic	18

Contudo, o clube apenas conseguiu vender cinco desses jogadores a dois clubes. De um desses clubes recebeu o dobro do dinheiro que recebeu do outro.

Qual o jogador que não foi vendido pelo clube?

Mais tarde, em 2020, publicámos um outro livro similar, mas agora utilizando outros desportos que não apenas o futebol: *Atletas das Contas*. (fig. 5)

De seguida, deixo um problema deste livro, baseado num problema do conhecido autor Henry Dudeney:

Problema 39: Os jogadores de rãguebi

O Henrique é um fervoroso adepto de rãguebi, conhecendo pessoalmente alguns jogadores. No fim da última temporada, o Henrique comentava com um amigo:

- Todos os jogadores que eu conheço estão lesionados! Quatro têm o braço esquerdo partido e cinco têm o braço direito partido. E mais... apenas dois têm o braço direito são e apenas três têm o braço esquerdo são. Foi uma verdadeira hecatombe...

Quantos jogadores conhece o Henrique?

No final do ano passado, durante o Campeonato Mundial de Futebol, no Catar, eu e três colegas do Instituto Piaget apresentámos na FNAC um outro livro de futebol, novamente com o apoio da FPF, mas com um conceito diferente: *Vamos Marcar um Golo na Matemática?* (fig. 6) Desta vez, seguimos as novas aprendizagens essenciais de matemática do 5.º ano, e apresentámos exercícios com contexto de futebol, cobrindo todos os temas deste ano de escolaridade. A ideia é que esta obra possa ser utilizada em plena sala de aula sem exigir adaptações por parte dos professores, facilitando a sua implementação no terreno.

Um exemplo de um exercício apresentado neste livro, do capítulo “Frações, decimais e percentagens”:

10. Na Loja Oficial da FPF podes comprar várias peças de roupa da seleção portuguesa. Na tabela abaixo encontra o preço de alguns desses itens

Item	Preço Normal (€)	Preço Promocional (€)
Camisola	80,00	58,50
Camisola Júnior	70,00	46,90
Camisola Mulher	80,00	50,40

10.1. Ordena por ordem decrescente os valores dos preços promocionais.

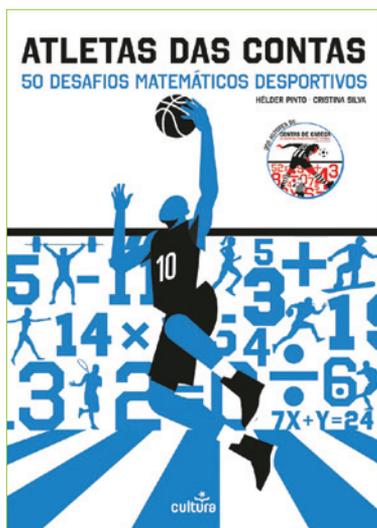


Figura 5: Capa do livro *Atletas das Contas*, Cultura Editora, 2020.



Figura 6: Apresentação do livro *Vamos Marcar um Golo na Matemática?*, FPF, 2022. (A apresentação desta obra decorreu conjuntamente com a apresentação do livro *101 Coisas que Deve Saber sobre Futebol* do jornalista Rui Miguel Tovar, à direita na foto.)

10.2. Arredonda às unidades cada um dos preços promocionais.

10.3. Comenta, sem efetuares cálculos, a veracidade da seguinte afirmação: “Todos os produtos estão com a mesma percentagem de desconto.”

10.4. Um adepto comprou dois destes produtos na loja da FPF gastando menos de €100. Quais os produtos que comprou?

Como pode observar, este problema não pretende ser desafiante (pelos menos, não no sentido usual nesta secção), mas sim servir como mais um apoio ao estudo da temática em causa.

Em jeito de conclusão, com todos estes trabalhos de Matemática noutros contextos, tentamos sempre entusiasmar, de algum modo, os estudantes e o público em geral, para a Matemática, disciplina tantas vezes, infelizmente, considerada difícil e aborrecida. Se, de facto, há conceitos e temas em Matemática que podemos concordar que são mais difíceis e trabalhosos em comparação com outras disciplinas, devemos sempre tentar mostrar uma outra face da Matemática que seja mais apelativa e entusiasmante.

Uma última observação para o facto de a matemática recreativa não necessitar de ser complicada para ser interessante, e o gosto por este tipo de atividades pode ser inculcado desde os primeiros anos do primeiro ciclo. Deixamos a seguir um problema muito simples que me foi tra-

zido pelos meus filhos e que pode ser colocado a qualquer criança de tenra idade.

1. Como colocar seis cruces no jogo do galo sem ganhar o jogo?

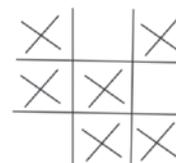


Figura 7: Uma não solução do problema anterior.

Mais três desafios simples. (O último é mais engraçado do que matemático...)

2. Efetua uma adição usando oito vezes o algarismo 8 de modo a que o resultado seja o número 1000.
3. Quanto pesa uma criança, se ela pesa mais dez quilos do que a metade do seu peso?
4. Com apenas um traço, transforma os quatro algarismos abaixo num número de apenas um algarismo!

0 1 1 0

Até ao próximo número do nosso Recreio!

O TEOREMA DE GAUSS-LUCAS

O problema da localização das raízes de um polinómio é um tema central no estudo de equações de variável real ou complexa. Esta localização torna-se gradualmente mais difícil à medida que o grau do polinómio aumenta, pelo que conseguir relacionar as raízes de um polinómio com as da sua derivada, cujo grau tem uma unidade a menos, pode ser bastante útil. Neste Canto Délfico vamos explorar o Teorema de Gauss-Lucas, um resultado clássico de Análise Complexa, que afirma que os zeros da derivada de um polinómio, quando representados no plano complexo, estão situados no invólucro convexo formado pelos zeros do polinómio.

1. INTRODUÇÃO

Neste Canto Délfico vamos analisar a relação entre os zeros de um polinómio complexo e os zeros da sua derivada. Esta relação pode ser vista como uma generalização aos polinómios complexos do Teorema de Rolle da Análise Real, provado por Michel Rolle no livro *Traité d'Algebre* em 1690, que afirma que entre dois zeros consecutivos de uma função diferenciável, existe pelo menos um zero da derivada:

Teorema 1.1 (Teorema de Rolle) *Se f é uma função real contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) com $f(a) = f(b)$, então existe um número $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$.*

Se $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for um polinómio de grau n com n raízes reais distintas, o Teorema de Rolle garante que a derivada p' tem exatamente $n - 1$ raízes reais. Além disso, as raízes de p e da sua derivada estão interlaçadas, ou seja, entre duas raízes consecutivas de p existe exatamente uma raiz de p' . Portanto, se x_1, \dots, x_n forem as raízes de p , os seus pontos críticos (*i.e.* os zeros de p') estão situados no segmento de reta formado pelos pontos $\min_{1 \leq i \leq n} x_i$ e $\max_{1 \leq i \leq n} x_i$.

Ao longo dos anos houve várias tentativas de generalizar este resultado para polinómios complexos [4]. No entanto, esta generalização não é óbvia nem imediata. Por exemplo, o polinómio

$$p(z) = (z^2 + 1)(z - 1)$$

tem como raízes os pontos 1 e $\pm i$, vértices de um triângulo isósceles. Se o Teorema de Rolle fosse válido no plano complexo, cada lado deste triângulo deveria ter um ponto crítico de p , o que não acontece pois p tem apenas dois pontos críticos no interior do triângulo. No plano complexo, o conceito de ponto crítico situado entre duas raízes de um polinómio é geralmente substituído pelo conceito mais geral de uma região convexa definida pelas raízes do polinómio onde se localizam os pontos críticos.

Neste sentido, o Teorema de Gauss-Lucas generaliza o Teorema de Rolle para polinómios complexos, afirmando que os pontos críticos de p , quando considerados como pontos no plano complexo, estão situados no interior do mais pequeno conjunto convexo que contém os zeros de p . É um resultado clássico da Análise Complexa, com várias generalizações e demonstrações, que permite restrin-

gir a localização dos pontos críticos de um polinómio sem termos de calcular a sua derivada.

O Teorema de Gauss-Lucas deve o seu nome a Johann Carl Friedrich Gauss e a Felix Lucas. Gauss, entre 1836 e 1846, escreveu sobre este teorema ao estabelecer uma interpretação mecânica para os pontos críticos de um polinómio, mas foi Lucas em 1870, aparentemente sem conhecer o resultado de Gauss, quem apresentou a primeira prova do teorema [5].

2. POLINÓMIOS COMPLEXOS

No que se segue, assumimos uma certa familiaridade com os números complexos. Identificamos um número complexo $z = a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$, com o ponto (a, b) do plano \mathbb{R}^2 . O conjugado de $z = a + bi$ é o número $\bar{z} = a - bi$, obtido de z por reflexão sobre o eixo real (veja-se a Figura 1). A distância de $z = a + bi$ à origem é dada pelo número $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. É fácil verificar que $z\bar{z} = |z|^2$.

Um polinómio complexo de grau $n \geq 1$ é uma função $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ da forma

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (1)$$

com $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$. Um número complexo α que verifique $p(\alpha) = 0$ chama-se raiz do polinómio. O Teorema Fundamental da Álgebra garante que um polinómio de grau $n \geq 1$ tem exatamente n raízes complexas, contando multiplicidades. Por exemplo,

$$p(z) = (z^2 + 1)(z - 1) \quad (2)$$

é um polinómio de grau 3 e tem raízes complexas dadas por $z_1 = -i$, $z_2 = i$ e $z_3 = 1$.

Um polinómio complexo é uma função diferenciável em todo o plano complexo. A derivada de (1) é o polinómio de grau $n - 1$

$$p'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1.$$

As raízes de $p'(z)$ dizem-se pontos críticos de $p(z)$. Por exemplo, a derivada do polinómio (2) é o polinómio

$$p'(z) = 3z^2 - 2z + 1.$$

Usando a Fórmula Resolvente, obtemos as raízes $\zeta_1 = \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $\zeta_2 = \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$ de $p'(z)$. Não é difícil verificar que os pontos críticos $\frac{1}{3} \pm i\frac{\sqrt{2}}{3}$ do polinómio (2) estão no interior do triângulo cujos vértices são as raízes do polinómio, como se pode confirmar na Figura 2, onde as raízes do polinómio estão representadas a azul e os pontos críticos a cinzento.

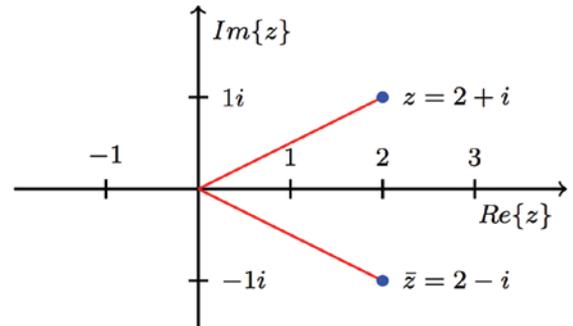


Figura 1. Representação do número $2 + i$ e do seu conjugado no plano complexo.

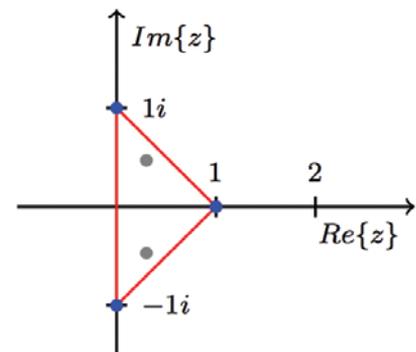


Figura 2. Raízes e pontos críticos do polinómio $p(z) = (z^2 + 1)(z - 1)$.

3. CONJUNTOS CONVEXOS

Nesta secção vamos introduzir o conceito de conjunto convexo e de invólucro convexo de um conjunto de números (veja-se, por exemplo [7]). Apesar da definição e dos resultados que vamos apresentar serem válidos em geral, vamos restringir-nos a conjuntos de números complexos.

Intuitivamente, dizemos que um conjunto $S \subset \mathbb{C}$ é convexo se contém o segmento de reta entre dois quaisquer pontos de S . O triângulo S_2 representado na Figura 3 é um exemplo de conjunto convexo, enquanto que o conjunto S_1 não é convexo, uma vez que o segmento de reta que une z a w não está contido em S_1 .

A reta que passa pelos números complexos z e w , pode ser dada parametricamente por

$$r(\lambda) = z + \lambda(w - z) = (1 - \lambda)z + \lambda w,$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. Notemos que quando $\lambda = 0$ obtemos o ponto $r(0) = z$, e quando $\lambda = 1$ obtemos o ponto $r(1) = w$. Assim, o segmento de reta que une z a w , denotado por $[z, w]$,

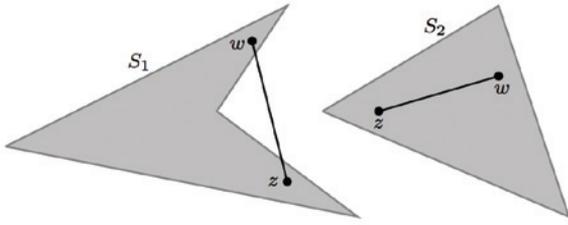


Figura 3. Um conjunto não convexo e um conjunto convexo.

pode ser representado por

$$[z, w] = \{(1 - \lambda)z + \lambda w : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Ou seja, os números pertencentes ao segmento $[z, w]$ podem ser escritos na forma $\lambda_1 z + \lambda_2 w$, com $\lambda_i \geq 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Um tal número diz-se uma combinação convexa de z e w . Mais geralmente, uma combinação convexa de n pontos z_1, \dots, z_n é uma soma da forma

$$\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_n z_n,$$

onda cada $\lambda_i \geq 0$ e $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Podemos agora apresentar a definição formal de conjunto convexo.

Definição 1. Um conjunto $S \subset \mathbb{C}$ é convexo se $[z, w] \subset S$ para quaisquer $z, w \in S$.

É fácil verificar que a união de conjuntos convexos não é, em geral, convexo. Por exemplo, a união dos segmentos $[0, 1]$ e $[0, i]$ não é convexo. No entanto, a interseção de conjuntos convexos é ainda convexo.

Proposição 3.1. A interseção de um qualquer número de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Demonstração. Sejam $\{S_i : i \in I\}$ uma família de conjuntos convexos e $S = \bigcap_{i \in I} S_i$. Então, dados $z, w \in S$ temos $z, w \in S_i$ para todo o $i \in I$. Como cada S_i é convexo, verifica-se $[z, w] \subset S_i$, pelo que $[z, w] \subset S$. Ou seja, S é convexo. \square

Intuitivamente, a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm S é o "menor" conjunto convexo que contém S . Esta é a definição de invólucro convexo de S .

Definição 2. O invólucro convexo de um conjunto S , denotado por $\text{conv}(S)$, é a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm S .

Podemos pensar no invólucro convexo de um conjun-

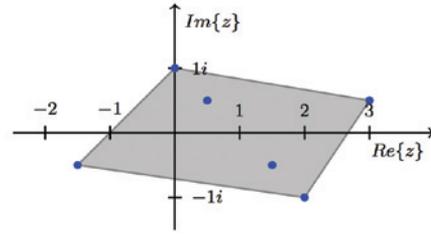


Figura 4. O invólucro convexo das raízes do polinómio (3).

to de pontos $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, como sendo o conjunto que se obtém colocando pinos em cada um dos pontos z_i e rodeando todos eles com um elástico esticado. A área demarcada corresponde ao invólucro convexo $\text{conv}(z_1, \dots, z_n)$. Por exemplo, o invólucro convexo do conjunto formado pelas raízes do polinómio de grau 6

$$p(z) = \prod_{i=1}^6 (z - z_i), \quad (3)$$

com $z_1 = -3/2 - i/2$, $z_2 = i$, $z_3 = 3 + i/2$, $z_4 = 2 - i$, $z_5 = 1/2 + i/2$ e $z_6 = 3/2 - i/2$ pode ser visualizado na Figura 4.

Por definição, um conjunto convexo contém todas as combinações convexas de dois dos seus pontos. Na próxima proposição, vamos mostrar que este resultado se generaliza para combinações convexas de mais do que dois pontos.

Proposição 3.2. Se S é um conjunto convexo, então qualquer combinação convexa (finita) de elementos de S pertence a S .

Demonstração. Vamos efetuar a prova por indução sobre o número n de pontos da combinação convexa. Os casos $n = 1$ e $n = 2$ resultam da definição de conjunto convexo. Suponhamos a proposição verdadeira para combinações convexas com $n = k$ pontos de S e consideremos a combinação convexa

$$\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_k z_k + \lambda_{k+1} z_{k+1}. \quad (4)$$

Seja $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$. Então

$$1 - \lambda = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i = \lambda_{k+1}$$

e podemos escrever

$$(4) = \lambda \left(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda} z_i \right) + \lambda_{k+1} z_{k+1}. \quad (5)$$

Uma vez que $\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$, a hipótese indutiva garante que a combinação convexa $\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda} z_i$ pertence ao conjunto S . Mas então, o lado esquerdo da igualdade (5) é uma combinação convexa de dois pontos de S e, portanto, pertence a S . \square

Podemos usar combinações convexas para descrever o invólucro convexo de um conjunto.

Teorema 3.3 *Seja $S \subset \mathbb{C}$. Então, o invólucro convexo de S é formado por todas as combinações convexas (finitas) de pontos de S .*

Demonstração. Seja $C(S)$ o conjunto formado por todas as combinações convexas (finitas) de pontos de S . Se $z \in C(S)$, então z é uma combinação convexa de pontos de S . Como $S \subset \text{conv}(S)$ e $\text{conv}(S)$ é convexo, segue da Proposição 3.2 que $z \in \text{conv}(S)$. Portanto, temos $C(S) \subset \text{conv}(S)$. Para provarmos a inclusão contrária basta mostrarmos que é um conjunto convexo, pois neste caso pela definição de invólucro convexo temos $\text{conv}(S) \subset C(S)$.

Sejam então $z, w \in C(S)$. Isto significa que

$$z = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^m \mu_i w_i,$$

para certos pontos $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m \in S$ com $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^m \mu_i = 1$. Seja $\lambda \in [0, 1]$ e consideremos um ponto do segmento $[z, w]$:

$$(1 - \lambda)z + \lambda w. \quad (6)$$

Usando as representações de z e w , temos

$$\begin{aligned} (6) &= (1 - \lambda) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \right) + \lambda \left(\sum_{i=1}^m \mu_i w_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (1 - \lambda) \lambda_i z_i + \sum_{i=1}^m \lambda \mu_i w_i, \end{aligned}$$

com

$$\sum_{i=1}^n (1 - \lambda) \lambda_i + \sum_{i=1}^m \lambda \mu_i = (1 - \lambda) + \lambda = 1.$$

Ou seja, o ponto $(1 - \lambda)z + \lambda w$ é uma combinação convexa de pontos de S , pelo que pertence a $C(S)$. Isto prova que o segmento $[z, w]$ está contido em $C(S)$ e, portanto, $C(S)$ é convexo. \square

4. O TEOREMA DE GAUSS-LUCAS

Estamos agora em condições de enunciar e provar o Te-

orema de Gauss-Lucas. A demonstração deste resultado pode ser obtida usando, por exemplo, argumentos de natureza analítica, geométrica ou física. Neste artigo vamos apresentar uma prova analítica do teorema e remetemos o leitor para as referências [2, 6, 8], onde poderão encontrar provas de natureza distintas.

Teorema 4.1 (Teorema de Gauss-Lucas). *Os pontos críticos de um polinômio não constante p pertencem ao invólucro convexo das raízes de p .*

Antes de apresentarmos a demonstração deste resultado, vamos analisar alguns casos particulares. O teorema é trivial se p tem grau 1, pois neste caso o polinômio não tem pontos críticos. Para polinômios de grau 2 com raízes distintas z_1 e z_2 , temos

$$\begin{aligned} p(z) &= a(z - z_1)(z - z_2) \\ &= a \left(z^2 - z(z_1 + z_2) + z_1 z_2 \right). \end{aligned}$$

para alguma constante não nula a . A partir daqui é fácil obter a derivada

$$p'(z) = a(2z - (z_1 + z_2))$$

e a sua única raiz:

$$\xi = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

O invólucro convexo de z_1 e z_2 é o segmento $[z_1, z_2]$ e o ponto crítico é o ponto médio deste segmento.

Se p for um polinômio de grau 2 com apenas uma raiz z_1 de multiplicidade 2, então

$$p(z) = a(z - z_1)^2 \text{ e } p'(z) = 2a(z - z_1),$$

com $a \neq 0$. Neste caso, o ponto crítico de p coincide com a única raiz de p e $\text{conv}(z_1) = \{z_1\}$.

Demonstração do Teorema de Gauss-Lucas. Seja

$$p(z) = a \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

um polinômio complexo de grau $n \geq 1$, onde os números z_1, \dots, z_n são as suas raízes, não necessariamente distintas. Seja z_0 um ponto crítico de p . Se z_0 coincide com uma das raízes de p , é claro que está no invólucro convexo das raízes de p . Suponhamos então que $p(z_0) \neq 0$. Observe-mos que as raízes da função racional

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - z_i},$$

são os pontos críticos de p . Em particular, temos

$$0 = \frac{p'(z_0)}{p(z_0)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_0 - z_i}.$$

Multiplicando e dividindo cada termo do membro direito da igualdade anterior por $\overline{z_0 - z_i}$ obtemos

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{\overline{z_0 - z_i}}{(z_0 - z_i)(\overline{z_0 - z_i})} = \sum_{i=1}^n \frac{\overline{z_0 - z_i}}{|z_0 - z_i|^2},$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\overline{z_0}}{|z_0 - z_i|^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\overline{z_i}}{|z_0 - z_i|^2}.$$

Conjugando ambos os membros desta igualdade obtemos

$$\sum_{i=1}^n \frac{z_0}{|z_0 - z_i|^2} = \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{|z_0 - z_i|^2},$$

ou ainda

$$z_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{|z_0 - z_i|^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|z_0 - z_i|^2} z_i.$$

Fazendo $\lambda = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|z_0 - z_i|^2}$ conseguimos escrever z_0 como uma combinação convexa das raízes de p ,

$$z_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\lambda} z_i,$$

onde $\mu_i = \frac{1}{|z_0 - z_i|^2}$ para $1 \leq i \leq n$, uma vez que $\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\lambda} = 1$. Usando o Teorema 3.3 concluímos então que o ponto crítico z_0 pertence ao invólucro convexo das raízes de p . \square

Vamos ilustrar o Teorema de Gauss-Lucas analisando o polinómio

$$p(z) = \frac{1}{3}(z^2 - 6)(z - 3i). \quad (7)$$

O invólucro convexo das raízes $3i$ e $\pm\sqrt{6}$ é o triângulo cujos vértices são estas raízes. A derivada $p'(z) = z^2 - 2iz - 2$ tem raízes $\pm 1 + i$, que se encontram no interior do triângulo.

No caso de polinómios de grau 3, podemos indicar com mais exatidão a localização dos pontos críticos usando um resultado notável conhecido como Teorema de Steiner-Marden [1, 3].

Teorema 4.2 (Teorema de Steiner-Marden) *Se p é um po-*

linómio de grau 3 cujas raízes são não colineares no plano complexo, então os pontos críticos de p são os focos da elipse inscrita no triângulo formado pelas raízes de p e tangente aos lados deste triângulo nos seus pontos médios.

A elipse considerada no Teorema de Steiner-Marden é conhecida como elipse de Steiner. Uma prova da sua existência e unicidade pode ser encontrada em [3]. A Figura 5 representa a configuração geométrica desta elipse com focos nos pontos e e f , inscrita no triângulo de vértices a, b, c .

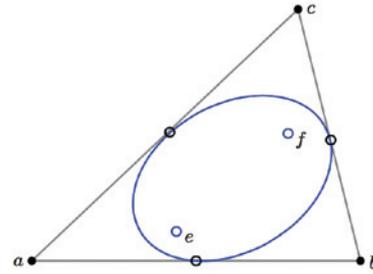


Figura 5. A elipse de Steiner.

Demonstração do Teorema 4.2. Suponhamos que a, b, c são as raízes do polinómio p e e, f são os seus pontos críticos. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - a)(z - b)(z - c) \\ &= z^3 - (a + b + c)z^2 + \dots \end{aligned}$$

e

$$p'(z) = 3(z - e)(z - f) = 3(z^2 - (e + f)z + ef).$$

O Teorema de Gauss-Lucas garante que os pontos críticos pertencem ao interior do triângulo de vértices a, b, c .

Notemos que podemos alterar o sistema de coordenadas $z \mapsto z'$ aplicando a rotação $z \mapsto \alpha z$ com $|\alpha| = 1$, seguida da translação $z \mapsto z + \beta$. Nas novas coordenadas, o polinómio $p(z)$ transforma-se em $p(z') = p(\alpha z + \beta) =: q(z)$. Uma vez que $dq/dz = \alpha dp/dz$, os pontos críticos de p e de q coincidem e, portanto, podemos escolher um sistema de coordenadas onde o ponto 0 seja o baricentro do triângulo. Neste caso, temos

$$a + b + c = 0 \quad (8)$$

e, portanto, $e + f = 0$. A derivada de p pode então ser escrita como

$$p'(z) = (z - a)(z - b) + (2z - (a + b))(z - c) \quad (9)$$

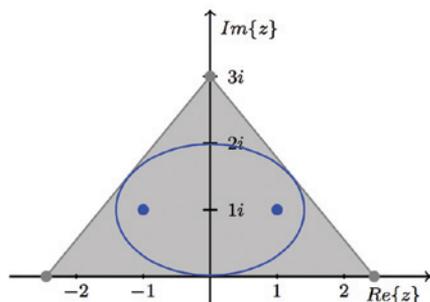


Figura 6. Raízes, pontos críticos e elipse de Steiner do polinómio $p(z) = \frac{1}{3}(z^2 - 6)(z - 3i)$.

mas também como

$$p'(z) = 3(z - e)(z + e). \quad (10)$$

Consideremos o ponto médio $z_1 = (a + b)/2$ do lado $[a, b]$ do triângulo. Usando as fórmulas (9) e (10) obtemos

$$3(z_1 - e)(z_1 + e) = -\left(\frac{a - b}{2}\right)^2. \quad (11)$$

Usando a identidade do paralelogramo e as fórmulas (8) e (11), obtemos a seguinte expressão para a soma das distâncias de z_1 aos pontos $-e$ e e :

$$\begin{aligned} 2(|z_1 + e| + |z_1 - e|)^2 &= \\ &= 2|z_1 + e|^2 + 2|z_1 - e|^2 + 4|(z_1 + e)(z_1 - e)| \\ &= 4|z_1|^2 + 4|e|^2 + \frac{1}{3}|a - b|^2 \\ &= |a + b|^2 + 4|e|^2 + \frac{1}{3}|a - b|^2 \\ &= \frac{1}{3}(|a + b|^2 + |a - b|^2) + \frac{2}{3}|a + b|^2 + 4|e|^2 \\ &= \frac{2}{3}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2) + 4|e|^2. \end{aligned}$$

Como esta última expressão é independente do lado do triângulo onde escolhemos o ponto médio z_1 , a elipse com focos $\pm e$, centro 0, e que passa pelo ponto médio $(a + b)/2$ também passa pelos pontos médios $(a + c)/2$ e $(b + c)/2$ dos outros lados do triângulo e, portanto, é a elipse de Steiner do triângulo de vértices a, b, c . \square

Voltando ao polinómio (7) considerado acima, é fácil verificar que o centro da elipse com focos $\pm 1 + i$, inscrita no triângulo de vértices $3i$ e $\pm\sqrt{6}$, tem centro i (baricentro do triângulo), menor eixo de comprimento 1 e maior eixo de comprimento $\sqrt{2}$. Portanto, a elipse de Steiner tem equação

$$\frac{x^2}{2} + (y - 1)^2 = 1,$$

como se pode ver na Figura 6.

AGRADECIMENTO

Agradeço ao Professor Alfredo Costa a leitura cuidadosa que fez a este documento.

REFERÊNCIAS

- [1] E. Badertscher (2014). A Simple Direct Proof of Marden's Theorem, *The American Mathematical Monthly*, 121:6, 547-548.
- [2] M. Brilleslyper and B. Schaubroeck (2017). Explorations of the Gauss-Lucas Theorem, *PRIMUS*, 27:8-9, 766-777.
- [3] D. Kalman (2008). An elementary proof of Marden's theorem, *Amer. Math. Monthly* 115, 330-338.
- [4] M. Marden (1985). The Search for a Rolle's Theorem in the Complex Domain, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 92 (9), pp. 643-650.
- [5] M. Marden (1996). *Geometry of Polynomials*. Mathematical Surveys and Monographs, no. 3, American Mathematical Society.
- [6] A. Chéritat, Y. Gao, Y. Ou and L. Tan (2015). A refinement of the Gauss-Lucas theorem (after W. P. Thurston), *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 353, no. 8, 711-715.
- [7] V. Soltan (2020). *Lectures on Convex Sets*. Second Edition, World Scientific, Hackensack, NJ, 612 pp.
- [8] E. Van Vleck (1929). On the location of roots of polynomials and entire functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* 35, 643-683.



JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

É NATURAL QUERER SABER SE O NÚMERO 0 É NATURAL

Recentemente, o número 0 passou a ser considerado um número natural. Mas, afinal, é ou não é natural?

Segundo os novos programas do Ensino Secundário, passará a ser ensinado que 0 é um número natural, ou seja, que o conjunto \mathbb{N} dos números naturais é o conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e não, como até agora, o conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Isto causou alguma estranheza entre os professores e levou alguns destes a querer ter uma resposta à seguinte pergunta: afinal, 0 é ou não um número natural?

À primeira vista, a pergunta parece ser uma pergunta legítima de matemática. Acontece que, sendo legítima, não é realmente uma pergunta de matemática, pelo menos se entendermos por isto uma pergunta que leva a uma resposta sob a forma de uma demonstração matemática. Isto porque 0 ser ou não um número natural é uma questão de convenção e não uma questão matemática.

Pode parecer estranho, mas a matemática tem um grande número de convenções. Antes de falar de outras, voltemos ao exemplo dos números naturais.

Se quisermos ser totalmente rigorosos, poderemos ser tentados a responder à questão de saber se 0 é ou não um número natural recorrendo aos axiomas de Peano. Afinal, são estes axiomas que são geralmente empregues quando se pretende estudar os números naturais de um ponto de vista axiomático. Então, a pergunta é: para Giuseppe Peano, o número 0 era ou não um número natural? Acontece que a resposta é ambígua: na sua formulação original¹ os

naturais começavam em 1, mas, num texto posterior², os naturais começavam em 0. E, além disso, mesmo que Peano tivesse só adotado uma das possibilidades, isso não seria motivo para que, posteriormente, não fosse adotada a outra.

Como 0 ser ou não um número natural é apenas uma convenção, é natural que a adoção de uma ou da outra das possibilidades varie de local para local. De facto, também varia bastante entre áreas científicas. Por exemplo, é muito mais frequente que 0 seja visto como um número natural em combinatória ou em informática teórica³, mas no caso da análise é de longe mais frequente que os naturais comecem em 1.

Vejamos mais alguns exemplos de convenções que surgem na matemática do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Uma das mais básicas é o sistema de numeração que usamos, que é em base 10. E usamos essa base somente por hábito; não há nada de intrinsecamente melhor que aquela base tenha em relação a outras. De facto, a base 12 tem algumas vantagens relativamente à base 10 e há alguns povos que a usam.⁴ Os antigos babilónios tra-



Giuseppe Peano

balhavam em base 60 (o que faz com que, até aos nossos dias, as horas e os graus sejam divididos em 60 minutos e os minutos em 60 segundos). E, como é sabido, em informática teórica usa-se base 2.

Outro exemplo de convenção surge com os fatoriais. Se $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, define-se $n!$ como sendo o produto $1 \times 2 \times \dots \times n$. Mas, além disso, convencionou-se que $0! = 1$. Há um bom motivo para isto: para que seja válida a regra $n! = n \times (n - 1)!$ mesmo quando $n = 1$. De facto, é possível definir $n!$ de maneira a abranger 0!; basta definir $n!$ como sendo o número de permutações de um conjunto com n elementos. Isto funciona... mas pelo preço de ser necessário explicar porque é que há uma e só uma bijeção do conjunto vazio nele próprio.

Ainda outro exemplo reside no conceito de número primo. Se se definir “número primo” como sendo um número sem outros divisores além dele próprio e de 1, então 1 é primo. Hoje em dia, o normal é que não se veja 1 como um número primo e, para se conseguir isso, a definição que se usa é ligeiramente diferente da anterior; pode-se impor logo à partida que o conceito de número primo só se aplica a números maiores do que 1, ou então dizer que um número é primo quando tem exatamente dois divisores. Mas durante muito tempo, 1 foi visto como um número primo. Por exemplo, G. H. Hardy considerou 1 como sendo primo nas primeiras seis edições do seu *A Course in Pure Mathematics* (veja-se [2]) e só a partir da sétima edição é que deixou de o considerar como tal.⁵

No entanto, não se deve pensar que todas as convenções têm o mesmo valor. Algumas são mais cómodas do que outras e algumas prestam-se a menos confusões do que outras. E há outros fatores a levar em conta. Por exemplo, a mudança de convenções no ensino leva inevitavelmente a uma diminuição da possibilidade de ajuda entre pessoas de gerações diferentes.

Finalmente, convém ter em conta o facto de a ISO (*International Organization for Standardization*) advogar, na sua norma *ISO 80000-2*,⁶ que o símbolo \mathbb{N} (ou \mathbb{N}) representa o conjunto dos números naturais, o qual é o conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ devendo o conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$ ser representado por \mathbb{N}^* ou por \mathbb{N}^* .

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. Kennedy, *Giuseppe Peano*, Birkhäuser, 1974.
- [2] G. H. Hardy, *A Course in Pure Mathematics*, Cambridge University Press, 1967.

¹ *Arithmetices Principia: Nova Methodo Exposita* (1889) [em latim]; URL: <https://archive.org/details/arithmeticespri00peangoog/page/n6/mode/2up>

² *Formulario Mathematico* (1894) [em latim]; veja-se [1]

³ Veja-se *Why Numbering Should Start at Zero*, de E.W. Dijkstra; URL: <https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD08xx/EWD831.html>

⁴ Shuji Matsushit, *Decimal vs. Duodecimal: An Interaction Between Two Systems of Numeration*; URL: https://web.archive.org/web/20081005230737/http://www3.aa.tufs.ac.jp/~P_aflang/TEXTS/oct98/decimal.html

⁵ Evelyn Lamb, *Why Isn't 1 a Prime Number?*; URL: <https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/why-isnt-1-a-prime-number/>

⁶ <https://www.sis.se/apil/document/preview/800153371>



SOCIIDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Visite-nos em <https://clube.spm.pt>





SOFIA O. LOPES
Universidade
do Minho
sofialopes@math.
uminho.pt

FERNANDO
A. C. C. FONTES
Universidade
do Porto
faf@fe.up.pt

ÁGUA, ÁGUA EM TODO O LADO E NEM UM PINGO DESPERDIÇADO: COMO A MATEMÁTICA PODE AJUDAR OS AGRICULTORES A IRRIGAR DE FORMA MAIS EFICIENTE

A água doce é um recurso escasso, mas vital para o ser humano, e 69% do seu total é usado no setor agrícola. Aqui mostramos como a matemática é utilizada na irrigação de modo a que todas as gotas contem. Uma utilização eficiente da água para irrigação requer, por um lado, o planeamento – que envolve modelação, análise de dados, estatística e otimização – e, por outro lado, o controlo – que envolve automação, teoria do controlo, eletrónica e agronomia. Neste artigo, descrevemos essencialmente as questões de planeamento e de controlo que utilizam ferramentas de otimização e teoria do controlo. Relatamos também brevemente alguns testes experimentais e o desenvolvimento de um protótipo no âmbito de um projeto de investigação e desenvolvimento.

1. INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

A água doce é um recurso realmente escasso: representa 2.5% do total de água global, dos quais apenas 0.025% são aceitáveis para consumo humano [12]. É um bem vital para o ser humano; é necessária não apenas para consumo direto, mas também para tarefas agrícolas, indústrias energéticas, etc. A agricultura (irrigação, pecuária e aquacultura) utiliza 69% das captações anuais de água a nível mundial, tornando-se o setor que mais consome água no planeta. Apesar de começarmos a estar conscientes desta escassez e do seu aumento preocupante nos próximos anos, há ainda muito a fazer neste país e no mundo para reverter a situação. No verão de 2022, devido à falta de água em Portugal, questionou-se a utilização da água na agricultura e na produção hidroelétrica, sendo estas as primeiras a serem sujeitas a contenções.

Entre 1950 e 2020, a população mundial triplicou [13]; a procura de alimentos e de água acompanhou esse crescimento. Nos objetivos de desenvolvimento sustentável das Nações Unidas inclui-se garantir a disponibilidade e a gestão sustentável da água potável e do saneamento para todos. Uma das metas para atingir tal objetivo é aumentar substancialmente a eficiência no uso da água em todos os setores, assegurar extrações sustentáveis e o abastecimento de água doce para enfrentar a escassez de água, bem como reduzir substancialmente o número de pessoas que sofrem com a sua escassez (Meta 6.4, [12]). Prevê-se que para atingir esta meta em 2030 será necessário quadruplicar o ritmo do progresso das medidas de mitigação (ver figura 1). Se mantivermos o ritmo atual, estima-se que em 2030, 1600 milhões de pessoas carecerão de água potável gerida com segurança.



Figura 1. Visão geral do progresso na implementação da Agenda 2030 para o Desenvolvimento Sustentável relativo ao Objetivo 6, Meta 6.4. In *The Sustainable Development Goals Report 2022*, United Nations, 2022 [14].

Assim, é cada vez mais pertinente educar a sociedade e sensibilizar futuros governantes para comportamentos e utilização de estratégias sustentáveis, nomeadamente para o uso da água de uma forma inteligente, eficiente e otimizada. Ao nível da produção agrícola, em particular, é crucial procurar formas de otimizar a utilização deste precioso recurso de modo a encontrar soluções sustentáveis e responsáveis que satisfaçam as necessidades de alimentação humana. A matemática poderá ter aqui um papel importante a desempenhar a nível da compreensão dos fenómenos envolvidos (utilizando técnicas de modelação de sistemas dinâmicos e de parâmetros distribuídos, análise de dados e estatística), a nível de planeamento, gestão e controlo da utilização da água (com técnicas de otimização e teoria do controlo).

Consciente destes factos, um grupo de investigadores nacionais propôs e desenvolveu o projeto de investigação e desenvolvimento *To Chair - The Optimization Challenges in Irrigation* (POCI-01-0145-FEDER-028247), financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, na área da matemática. Foi criada uma equipa de trabalho com o principal objetivo de estudar o problema da gestão de água como um problema de controlo ótimo, usando e/ou desenvolvendo ferramentas matemáticas dentro de diversas áreas científicas, para posterior aplicação em sistemas de irrigação para qualquer tipo de cultivo, em qualquer lugar do

mundo. Desta equipa fizeram parte investigadores da área de modelação matemática e estatística da Universidade do Minho, a equipa de otimização e engenharia de controlo da Universidade do Porto e do Politécnico do Porto, assim como investigadores em agronomia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD) cuja participação tem como intuito dar apoio na modelação matemática, na recolha de dados e na implementação de um *software* de apoio à decisão. Também fazem parte da equipa colegas da eletrónica e da informática da Universidade do Minho com o objetivo de dar apoio no desenvolvimento de uma interface e de um protótipo. No âmbito do projeto *To Chair* foram criados dois campos experimentais: um em laboratório (ambiente fechado) e outro numa vinha comercial (ambiente aberto). No laboratório foi criado um provete de ensaio com quatro sensores a diferentes alturas com sistema de rega ligado a um compressor com o objetivo de estudar a infiltração. Na vinha comercial (Quinta da N. Sr^a da Ribeira, Carrazeda de Ansiães) foi definida uma parcela experimental em que foi instalada uma estação meteorológica automática. Foram ainda colocados oito sensores (modelo 10HS) divididos por quatro profundidades distintas (10, 40, 70 e 110 cm), com o propósito de avaliar a dinâmica hídrica no solo. Complementarmente, foram recolhidas amostras de solo para caracterização física do mesmo (laboratório de solos da UTAD).

1.1. O Problema e as técnicas

O problema de irrigação poderá ser formulado como a determinação em cada instante da quantidade de água a fornecer a uma zona de terreno – i.e., determinar a função de controlo – de modo a que os requisitos hídricos da cultura sejam satisfeitos. Trata-se assim de um problema de controlo.

Na sua maioria os sistemas de rega existentes baseiam-se em controlos "on-off" sem técnicas de previsão associadas. Nos casos em que o sistema de rega é automatizado, o seu funcionamento dispara o ciclo de rega quando um valor crítico mínimo da humidade do solo é detetado e suspende-o quando um máximo definido é atingido (às vezes, perto da saturação). Uma das consequências do uso desta técnica de controlo básica é o excesso de água no solo, sendo responsável pelo desperdício de elevadas quantidades de água, prejudicando o nosso ecossistema sem beneficiar, ou até prejudicando, o cultivo. Estes sistemas podem ser melhorados se houver um conhecimento da evolução da água no solo ao longo do tempo e também do espaço, ainda mais se aliado à previsão da pluviosida-

de e à utilização de água pela planta. O uso de modelos matemáticos adequados permite estimar a necessidade de água para a irrigação em diferentes cenários, uma maior adequação das necessidades hídricas da planta às diferentes fases do seu crescimento e detetar falhas no sistema de irrigação, contribuindo para o uso eficiente de água.

Na engenharia de controlo, temos vindo a assistir nos últimos anos à utilização cada vez mais frequente de técnicas de controlo baseadas em modelos [3]. Estas permitem abordar problemas mais complexos ou obter ganhos de eficiência quando comparadas com técnicas mais simples como o controlo "on-off" (que encontramos nos sistemas de rega, em dispositivos com termostatos como os fornos, etc.) ou como os controladores PID – Proporcional Integral Derivativo (os controladores usados mais frequentemente para determinar a posição e a velocidade de motores). Algumas das técnicas de controlo baseadas em modelos aliam-se à otimização para conseguir maximizar critérios de desempenho a definir pelo projetista. Estas técnicas, chamadas de controlo baseado em otimização, são essencialmente o controlo ótimo e o controlo preditivo.

A teoria de controlo ótimo emergiu como um campo de investigação na década de 1950 em resposta a problemas relativos à exploração aeroespacial do sistema solar, nomeadamente o cálculo de trajetórias de foguetões que minimizem o consumo de combustível [15]. Problemas de controlo ótimo envolvem a otimização da função de custo que depende de um estado e de controlo relacionados através de equações diferenciais e outras restrições com formulação algébrica. O facto de que se pode especificar um conjunto de restrições de controlo, combinadas com possibilidade de lidar com funções de custo gerais amplia a aplicabilidade de problemas de controlo ótimo para uma ampla gama de problemas. Consequentemente, a teoria do controlo ótimo abrange diversas áreas, com várias abordagens possíveis, com várias aplicações em matemática, engenharia, economia, biologia, e é uma fonte de várias técnicas e ideias. Neste caso, o controlo ótimo ajuda-nos a obter um plano da utilização da água que minimiza o desperdício.

Posteriormente, será necessário implementar o plano obtido. Aqui a teoria do controlo poderá de novo ajudar-nos com um mecanismo fundamental chamado realimentação. É de esperar que, ao implementar o plano calculado através do controlo ótimo baseado em modelos, a evolução ao longo do tempo das várias variáveis envolvidas não seja exatamente a prevista: o modelo é uma aproximação e não uma representação exata da realidade,

e a previsão da pluviosidade também não é garantida. Assim, há que medir frequentemente algumas das principais variáveis a controlar e replanear caso o comportamento não seja o previsto. A esta medição e à sua utilização para modificar o controlo chama-se realimentação, e é um dos mais importantes mecanismos para os sistemas de controlo lidarem com a incerteza e com as perturbações. Quando replaneamos frequentemente, aliando o controlo ótimo a esta realimentação de uma forma iterativa, estamos perante a técnica de controlo preditivo, cuja utilização iremos descrever.

Finalmente, uma palavra ao tratamento de dados e à estatística. Estes são usados em diferentes fases do processo: na construção do modelo, nomeadamente na sua validação e na identificação de parâmetros; na estimação de variáveis não medidas diretamente (por exemplo a humidade do solo em locais afastados dos sensores), e podem ser usados para melhorar o controlo usando técnicas de aprendizagem computacional.

2. MODELO MATEMÁTICO

Apresentamos aqui um modelo simplificado, em que é considerada a quantidade de água no solo numa única localização. O principal objetivo do problema de irrigação introduzido em [5] (aperfeiçoado em [4]) é minimizar o uso de água na irrigação de um campo agrícola garantindo que o crescimento saudável da cultura seja preservado. Assumindo que o controlo $u(t)$ é o caudal de água de rega no tempo t , a função custo a minimizar é o gasto total de água na rega, ou seja:

$$\text{Minimizar } \int_0^{t_f} u(t)dt,$$

onde t_f é o tempo final de planeamento. Considera-se que a variável de estado $x(t)$ é a quantidade de água existente no solo em determinado instante de tempo t . Para garantir um crescimento saudável da cultura, uma restrição de estado deve ser satisfeita:

$$x(t) \geq x_{\min}, \forall t \geq 0,$$

ou seja, a quantidade de água no solo $x(t)$ tem de ser maior ou igual a um determinado nível x_{\min} , este valor é conhecido como necessidade hidrológica da cultura.

A variação da água no solo é baseada na equação do balanço hidrológico:

$$\dot{x}(t) = u(t) + r_{\text{fall}}(t) - \text{evtp}(t) - \text{loss}(t, x(t)),$$

onde r_{fall} é a previsão da precipitação durante um período

do de dias seguintes ao dia inicial, $evtp$ é a evapotranspiração estimada para o tipo de cultura, e $loss$ é a percolação profunda (a água que se encontra abaixo das raízes). A $evtp$ é calculada com base no modelo [1] usando o coeficiente da cultura, as previsões meteorológicas e a localização da cultura, nomeadamente: temperatura máxima, temperatura mínima, humidade relativa do ar, intensidade do vento, radiação solar, latitude e altitude. Apesar de vários autores considerarem que a percolação profunda ($loss$) é igual a zero, obtivemos em alguns casos valores significativos. Em [7], comparamos dados reais com a simulação do modelo desenvolvido em [5], sendo para tal necessário considerar valores não nulos em relação à percolação profunda. Por outro lado, é bem conhecido que a equação de Horton [2] permite medir taxas de infiltração no solo. É uma fórmula empírica que diz que a infiltração começa a uma taxa constante, i_0 , e diminui exponencialmente em função do tempo. Quando o nível de saturação do solo atinge um determinado valor, a taxa de infiltração estabiliza-se na taxa i_c . Considera-se $loss(x) = \beta x$. Atendendo a que as características do solo podem sofrer alterações ao longo do tempo por erosão, é considerado que o termo β depende do tempo. Por outro lado, quando a quantidade de água no solo atinge a capacidade de campo, x_{FC} , o solo não consegue reter mais água e nestes casos as perdas são significativamente maiores. Consequentemente, as perdas por percolação foram modeladas da seguinte forma, tendo em consideração [8]:

$$loss(t, x) = \begin{cases} \beta(t)x, & x \leq x_{FC} \\ x - x_{FC} + \beta(t)x, & x > x_{FC}, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde x_{FC} representa a quantidade de água retida no solo depois de este ter sido drenado. Tal valor depende do tipo de solo.

Assume-se que se conhece a humidade no instante inicial do solo, $x(0) = a$, e o caudal de água de irrigação u pertence ao intervalo $[0, M]$, onde M é o caudal máximo de água que sai do sistema de rega. O problema de controlo ótimo a ser estudado é formulado como:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \int_0^{t_f} u(t) dt \\ \text{sujeito a} & \dot{x}(t) = u(t) + rfall(t) - evtp(t) - loss(t, x(t)), t \in [0, t_f], \\ & x(0) = a, \\ & u(t) \in [0, M], \forall t \in [0, t_f], \\ & x(t) \geq x_{min}, \forall t \in [0, t_f]. \end{cases} \quad (2.2)$$

3. SIMULAÇÕES E COMPARAÇÃO COM UM CASO REAL

Por forma a obter as soluções numéricas do problema de controlo ótimo (2.2), é utilizada a função "fmincon" do MATLAB com algoritmo Active Set. As soluções numéricas são obtidas tendo como base dados meteorológicos reais no Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP) durante dez dias. Atendendo ao tipo de cultura (relva) e ao tipo de solo considerado, assumiu-se que $x_{min} = 18.72 \text{ mm}$, e $x_{FC} = 46.8 \text{ mm}$. O caudal máximo da água da torneira foi considerado $M = 10 \text{ m}^3/\text{dia}$. Atendendo a que o parâmetro $\beta(t)$ da parcela perdas é difícil de estimar, foi considerado constante no período dos dez dias. A sua determinação foi feita comparando a trajetória obtida pelo nosso modelo com a verdadeira trajetória em que β é escolhido por forma a minimizar a soma dos erros quadráticos entre as duas trajetórias mencionadas.

Estes exemplos correspondem a um período de dez dias consecutivos num campo do ISEP. Nos dois exemplos que estamos a analisar verifica-se que a precipitação é suficiente para a sobrevivência da cultura e nos dois exemplos abaixo ocorre uma situação de seca e o sistema de rega tem de ser ativado.

No primeiro caso (canto superior esquerdo da figura 2), houve fortes chuvas. Corresponde ao período compreendido entre 1 e 10 de maio de 2015. A precipitação neste período foi: [50.29, 3.81, 33.02, 30.73, 1.27, 0.76, 15.53, 0.76, 0, 0] (mm). Como a chuva é abundante, o segundo ramo da função de perdas "loss" é usado na equação do balanço hidrológico.

No segundo caso (canto superior direito da figura 2), houve precipitação ligeira. Corresponde ao período compreendido entre 14 e 24 de outubro de 2015. A precipitação neste período foi: [0, 0, 0, 0.76, 12.95, 0.25, 0, 0, 0, 0] (mm). Como a chuva não é abundante, apenas o primeiro ramo da função de perdas "loss" é usado.

No terceiro caso (canto inferior esquerdo da figura 2) não houve precipitação. Corresponde ao período entre 1 e 10 de agosto de 2015. A humidade do solo cai rapidamente e o controlo (irrigação) tem de ser acionado após dois dias. Como se pode ver nesta figura, uma vez acionada a irrigação, ela permanece até ao final do período em estudo, garantindo água suficiente para o crescimento saudável da cultura.

O quarto caso (canto inferior direito da figura 2) foi de seca. Corresponde ao período compreendido entre 1 e 10 de setembro de 2015. A chuva é muito escassa, a precipitação neste período foi: [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.02, 0] (mm). A humidade do solo já estava no nível mínimo para o cres-

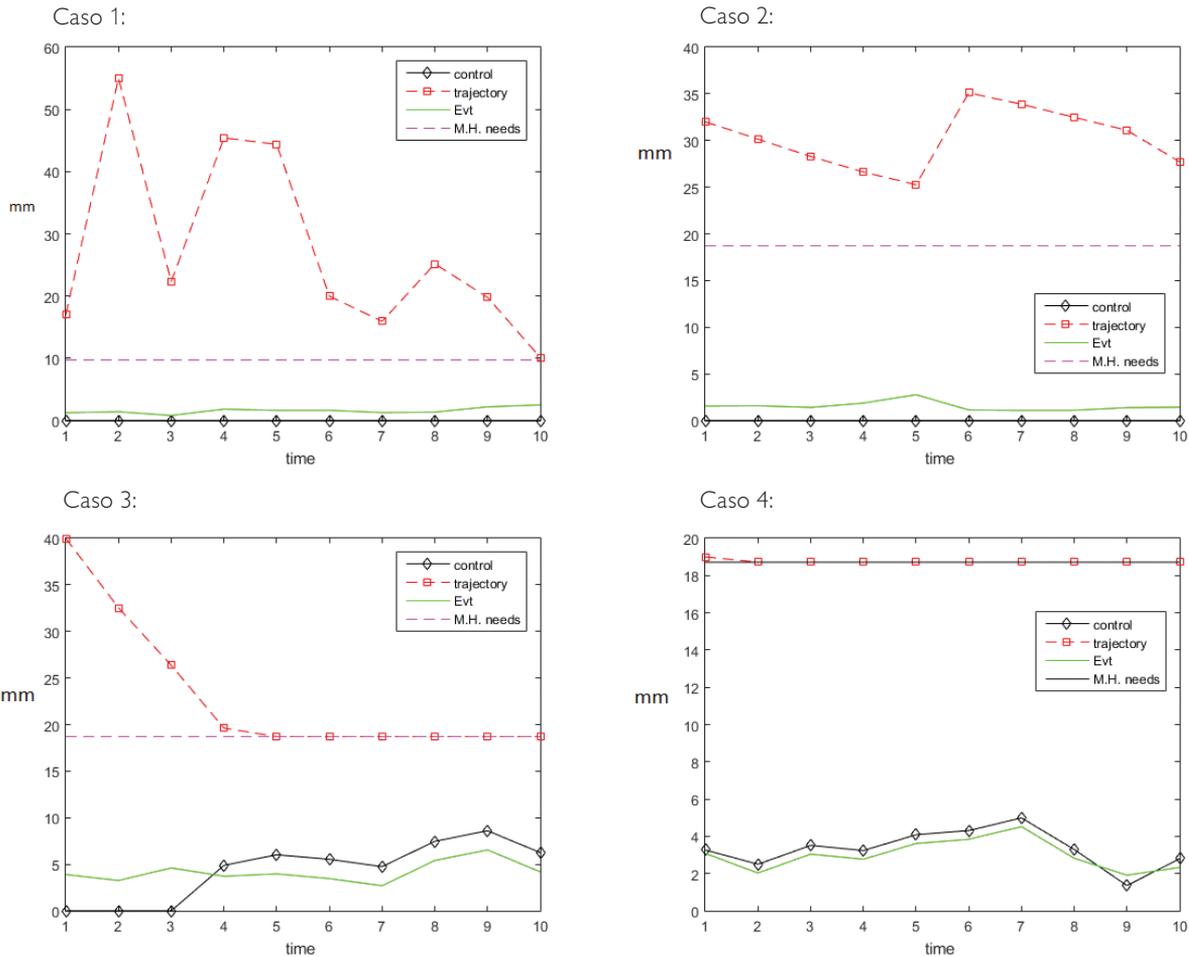


Figura 2. Trajetória (humidade no solo), controlo (rega), evapotranspiração e necessidades hídricas da planta, ao longo do tempo, em diferentes cenários de precipitação.

cimento da planta de uma forma saudável e, portanto, o controlo (irrigação) deve ser ativado durante todo o período. Observe que no dia 9, o valor da evapotranspiração é ligeiramente acima do valor de irrigação, uma vez que houve chuva fraca.

3.1 Comparação entre solução numérica e dados reais da humidade no solo

Os sensores utilizados no ISEP para medir a humidade do solo têm como unidade de saída a pressão. Para comparar os dados reais com as soluções numéricas é necessário converter os resultados numéricos em *mm* para tensão de água no solo (kPa – pressão). Esta conversão depende do tipo de solo [10] (para mais detalhes, ver [7]).

Na figura 3, está a comparação dos resultados das simulações com os dados reais do caso 1 (esquerda) e do caso 2 (direita). Salientamos que nestes casos não houve necessidade de rega.

No caso 3 e no caso 4, uma vez que houve irrigação, serão comparados os dados reais com as soluções numéricas da equação do balanço hidrológico, tendo como entrada a rega real. Salienta-se que um valor da humidade no solo abaixo de 5 kPa, significa que o solo está próximo da saturação; se este valor for superior a 20 kPa o solo não tem água suficiente para satisfazer as necessidades hídricas da planta.

Na figura 4 e na figura 5, do lado esquerdo, está a comparação do resultado da simulação com os dados reais

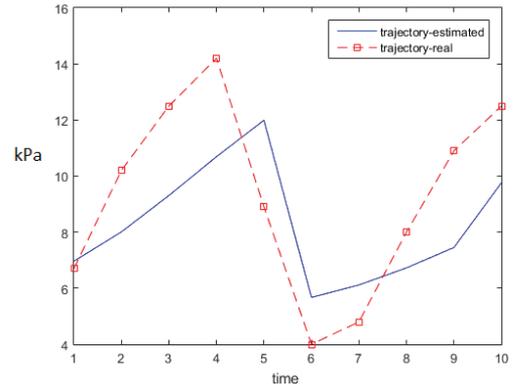
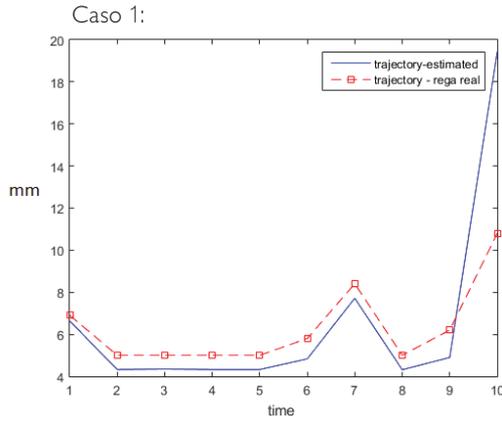


Figura 3. Trajetória (humidade no solo ao longo do tempo) estimada sem otimização e trajetória real, no caso 1 e no caso 2.

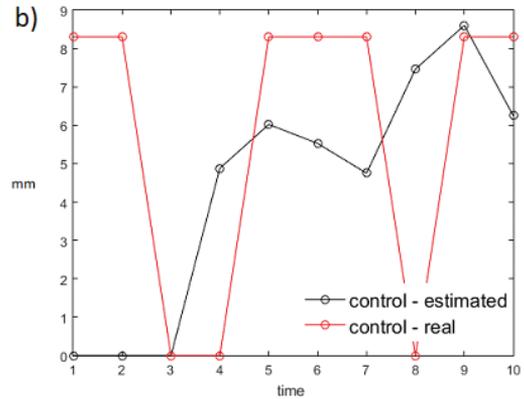
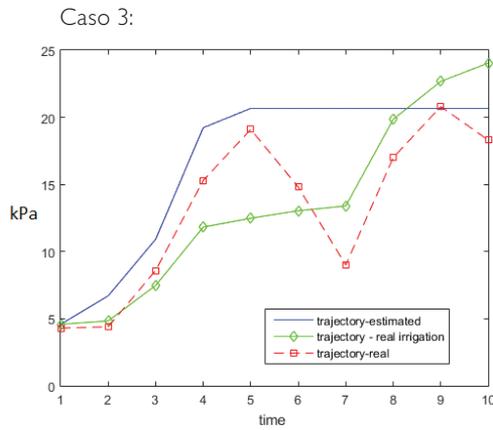


Figura 4. a) Trajetória (humidade no solo ao longo do tempo) real, trajetória estimada sem otimização e trajetória estimada com otimização. b) Controlo (rega) real e controlo estimado com otimização.

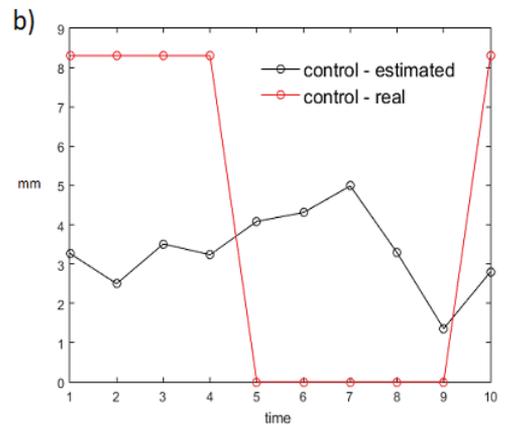
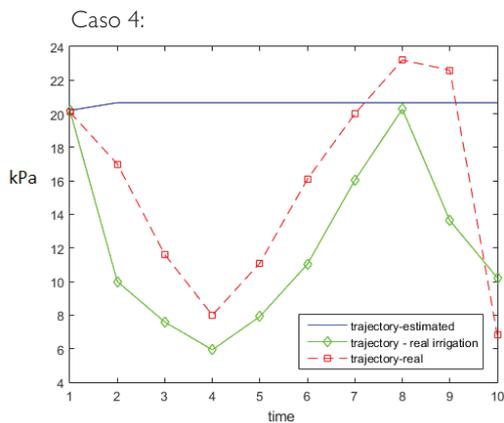


Figura 5. a) Trajetória (humidade no solo ao longo do tempo) real, trajetória estimada sem otimização e trajetória estimada com otimização. b) Controlo (rega) real e controlo estimado com otimização.

para o caso 3 e caso 4 respetivamente, assim como também é apresentada a solução ótima para cada um destes casos. No lado direito da figura 4 e da figura 5 está a comparação entre a água necessária para a rega através do modelo da secção 2 e a quantidade real de água utilizada na rega pelo ISEP (note-se que utilizam um sistema de controlo "on-off" para irrigação). No caso 3, estima-se que a economia de água atinja 16.8%, cifrando-se nos 11.1% no caso 4.

4. PROTÓTIPO

Um dos objetivos do projeto é o desenvolvimento de um protótipo de fácil utilização que ajude na tomada de decisão relativamente ao uso da água num sistema de rega. Pretende-se que o sistema utilize sensores de humidade do solo no campo, previsões do tempo, caracterização do solo e o tipo de cultivo. Esses dados são inseridos num programa Octave/Matlab que implementa um algoritmo de controlo ótimo para calcular o plano de irrigação para o campo de cultivo de acordo com o modelo apresentado na secção 2. Esta informação será comunicada ao sistema de rega já instalado no campo agrícola, de acordo com a figura 6.

Como já mencionado, o algoritmo de controlo ótimo necessita de dados de previsão do tempo que podem ser obtidos através de serviços disponíveis na internet. Os valores de humidade do solo são obtidos por sensores ana-

lógicos e são usadas comunicações móveis com o objetivo de enviar os dados para o servidor. O servidor disponibiliza um site para os usuários inserirem dados sobre as suas plantações e os seus campos. A partir deste conjunto de dados, o algoritmo calcula o plano de irrigação para o campo dado, que consiste numa lista de quantidade de água para cada dia, para um período de dias. Esta informação será comunicada ao sistema de rega (para mais detalhes ver [6]).

4.1 Replaneamento

Embora o modelo descrito na secção 2 tente representar a realidade, imprevistos podem sempre ocorrer, como alterações das condições climáticas que podem levar a um mau desempenho dos sistemas de rega. É importante avaliar se os resultados obtidos com o planeamento da rega se aproximam da realidade. Caso contrário, há a necessidade de replanear a solução de acordo com os dados reais atuais.

O replaneamento é feito definindo o estado inicial como a humidade real no solo e tendo em conta as novas previsões meteorológicas. A estratégia de replaneamento, apresentada no fluxograma na figura 7, implementa uma técnica conhecida como Controlo Preditivo. O algoritmo de replaneamento deteta se a humidade do solo lida pelo sensor difere significativamente da prevista no plano

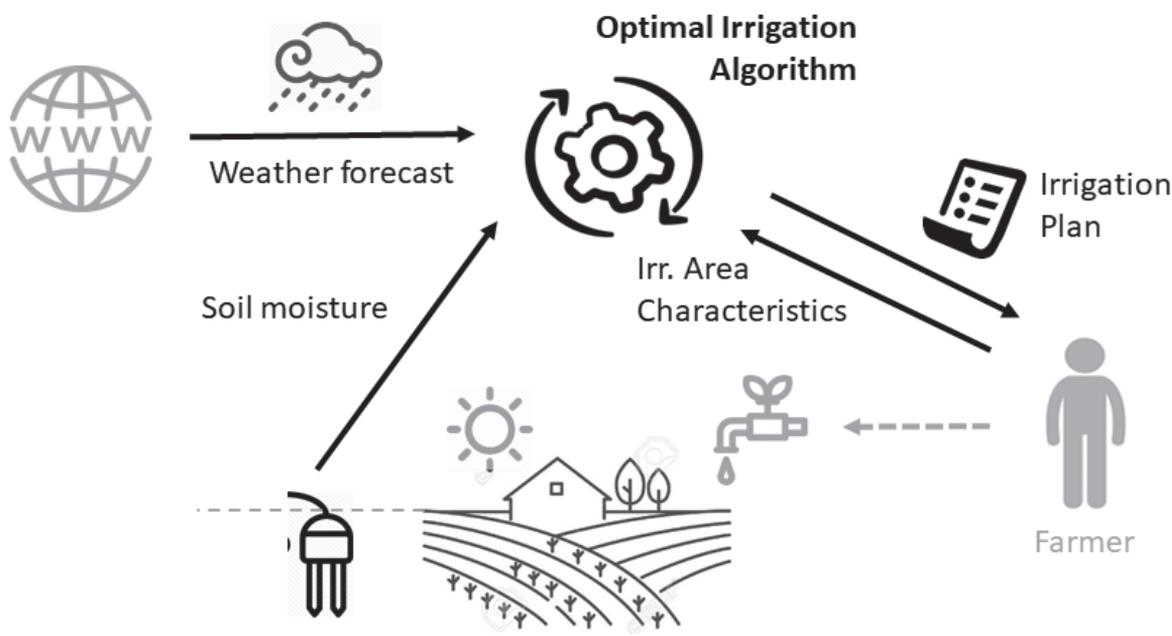


Figura 6. Visão geral do sistema e sua integração no campo.

de rega para o dia atual. Se for esse o caso, duas situações podem ocorrer: a restrição de estado não é violada e o processo é repetido com novos dados. Se a restrição de estado for violada, é necessário calcular um valor de água necessária na rega para evitar a violação da restrição de estado. Novos dados são então considerados impondo que o estado inicial seja agora x_{min} e o programa seja executado novamente. Salienta-se que ε é o erro aceitável entre a humidade do solo real e a humidade do solo estimada. Resultados numéricos deste procedimento podem ser encontrados em [9].

4.2 Plano de múltiplos pontos de rega

Até agora, o modelo assumiu que todo o campo é descrito como um ponto no espaço. O plano de irrigação para todo o campo de cultivo é projetado para esse ponto, implicando que a distribuição espacial das medidas de irrigação seja uniforme. Um modelo mais realista consideraria vários pontos de irrigação. Para simplificar, o modelo assume que o campo é retangular e consiste em várias áreas retangulares menores. Um ponto de irrigação no centro de cada retângulo menor recebe um plano de irrigação

descrito nas secções anteriores. O novo sistema de planeamento de irrigação agora pode lidar com necessidades de irrigação diferenciadas que dependem da localização espacial. O algoritmo do plano de múltiplos pontos de irrigação desenvolvido em [9] é proposto e implementado para considerar múltiplos pontos de irrigação. Após obter o plano de irrigação para cada ponto de irrigação, o algoritmo de redistribuição de água verificará se cada ponto de irrigação pode irrigar a quantidade de água necessária. Se, por exemplo, um ponto de rega não consegue satisfazer as suas necessidades, o algoritmo de redistribuição de água procura a possibilidade de satisfazer as necessidades necessárias noutros pontos de rega. Essas informações são repassadas ao agricultor. Suponha que é impossível atender às necessidades de todos os pontos de irrigação após atender às necessidades de irrigação nos pontos onde isso é possível. Nesse caso, a água disponível é redistribuída nos pontos de irrigação onde há necessidade de água. Uma vez que a informação sobre os défices hídricos em cada ponto de irrigação chegou ao agricultor, eventualmente, ele poderá obter água noutro local e prosseguir com o plano de múltiplos pontos de irrigação.

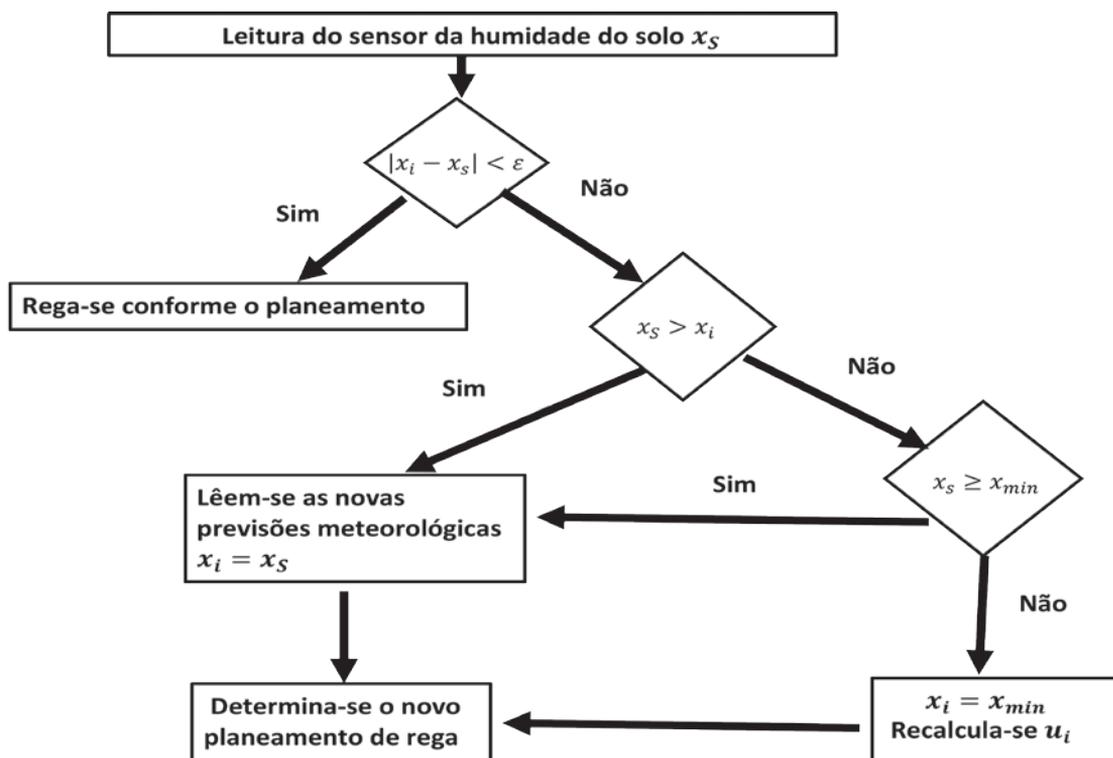


Figura 7. Fluxograma da estratégia de replaneamento, controlo preditivo.

5. COMENTÁRIOS FINAIS

Consideramos o problema de minimização do desperdício de água em irrigação e abordamos a sua resolução com técnicas matemáticas de modelação, otimização e controlo. Descrevem-se alguns resultados desenvolvidos no âmbito de um projeto de investigação e desenvolvimento que envolveu diversas instituições de Ensino Superior do norte do País. A investigação realizada neste projeto permitiu concluir que é possível reduzir o consumo total de água usada na irrigação, respeitando as necessidades hidrológicas da cultura. Foram implementadas técnicas de controlo ótimo e de controlo preditivo que têm em conta desvios relativamente ao modelo desenvolvido, erros nas previsões meteorológicas, crescimento atípico da planta, entre outras incertezas. Desenvolveu-se um algoritmo que considera múltiplos pontos de irrigação e que faz a redistribuição da água pelos pontos em que há défice de água. Em trabalho futuro, pretende-se continuar a desenvolver um protótipo de fácil utilização, implementável em qualquer cultura e em qualquer local.

REFERÊNCIAS

- [1] Allen, R. G., Pereira, L. S., Raes, D., Smith, M., et al. "Crop Evapotranspiration - for Computing Crop Water Requirements. Fao Irrigation and Drainage Paper 56." *FAO, Rome*, 300(9):D05109, 1998. ISBN 92-5-104219-5
- [2] Horton, R. E. "An Approach Toward a Physical Interpretation of Infiltration-Capacity 1". *Soil Science Society of America Journal*, Vol. 5(C), pp. 399-417, 1941. <https://doi.org/10.2136/sssaj1941.0361599500050000C0075x>
- [3] Lamnabhi-Lagarrigue, F., A. Annaswamy, S. Engell, A. Isaksson, P. Khargonekar, R. M. Murray, H. Nijmeijer, T. Samad, D. Tilbury, P. Van den Hof. "Systems & Control for the Future of Humanity, Research Agenda: Current and Future Roles, Impact and Grand Challenges", *Annual Reviews in Control*, Vol. 43, pp. 1-64, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.ar.control.04.001>.
- [4] Lemos-Paião, A. P., Lopes, S. O. and de Pinho, M.D.R.. "Analytical Study for Different Extremal State Solutions of an Irrigation Optimal Control Problem with Field Capacity Modes". *Journal of Applied and Computational Mathematics*, Vol. 8 (2), pp. 1-27, 2022. <https://doi.org/10.1007/s40819-022-01266-9>
- [5] Lopes, S. O., Fontes, F. A., Pereira, R., de Pinho, M. D. R. and Gonçalves, A. M.. "Optimal Control Applied to an Irrigation Planning Problem". *Mathematical Problems in Engineering*, 2016. <https://doi.org/10.1155/2016/5076879>
- [6] Lopes, S. F., Pereira R. M. S., Lopes S. O., Coutinho, M., Malheiro, A., Fonte, V. "Yet a Smarter Irrigation System". *Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering book series LNICST*, 323, 2020. <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-51005-3-28>.
- [7] Lopes, S. O., Pereira, R. M., Pereira, P. A., Caldeira, A. C. and Fontes, F. "Optimal control applied to an irrigation planning problem: a real case study in Portugal". *International Journal of Hydrology Science and Technology*, Vol. 9 (2), pp.173-188, 2019. <https://doi.org/10.1504/IJHST.2019.098161>
- [8] Pereira, L. S. *Necessidades de água e métodos de rega*. Ed. Europa-América, Lisboa, 2004. ISBN: 5601072370609
- [9] Pereira, R., Lopes, S., Costa, M.F., Haie, N. and Fontes, F. "Modelling of Smart Irrigation with Replan and Redistribution Algorithms". *Journal of Sustainable Development of Energy, Water and Environment Systems*, Vol. 10 (3), pp. 1-17, 2022. <https://doi.org/10.13044/j.sdewes.d9.0409>
- [10] da Silva, E., Lima, J., Azevedo, J. Rodrigues, M. "Valores de Tensão na Determinação da Curva de Retenção da Água de Solos do Cerrado". *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, Vol. 41 (3), pp. 323-330, 2006. <https://doi.org/10.1590/S0100-204X2006000200018>
- [11] To Chair. Página do projeto *To Chair - The Optimal Challenges in Irrigation* (POCI-01-0145-FEDER-028247) <https://sofialope6.wixsite.com/to-chair>
- [12] United Nations. *Sustainable Development Goals*, <https://sdgs.un.org/goals>.
- [13] United Nations. *ONU News, Perspectiva Global Reportagens Humanas*. <https://news.un.org/pt/story/2022/07/1794942>
- [14] United Nations. *The Sustainable Development Goals Report 2022*, United Nations, 2022. <https://unstats.un.org/sdgs/report/2022/>
- [15] Vinter, Richard B. *Optimal control*. Boston: Birkhäuser, 2010. ISBN-13 978-0817649906

SOBRE OS AUTORES

Sofia O. Lopes é professora auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade do Minho e investigadora Centro de Física das Universidades do Minho e do Porto (CF-UM-UP) e do SysTec-ISR/ARISE. Licenciou-se em Ensino de Matemática na Universidade de Aveiro. Obteve o mestrado e o doutoramento na área da matemática na Universidade do Minho. Os seus interesses de investigação centram-se nas áreas de Otimização e Controlo, tendo ultimamente abordado aplicações ao ambiente. Participou como investigadora em diversos projetos de investigação e desenvolvimento, nacionais e europeus, na área da matemática. Coordenou o projeto *To-Chair The Optimization Challenges in Irrigation* que desenvolveu ferramentas para minimizar os desperdícios de água na irrigação.

Fernando A. C. C. Fontes é professor associado com agregação na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP) e Investigador do SysTec-ISR/ARISE. Obteve o doutoramento no Imperial College London, Reino Unido. Iniciou a carreira no Departamento de Matemática da Universidade do Minho, lecionou na London School of Economics and Political Science da Universidade de Londres, foi investigador no Imperial College London, e mais recentemente, foi professor visitante na Texas A & M University, Estados Unidos. Na Universidade do Minho desempenhou funções de diretor de curso da licenciatura em Matemática Aplicada e, posteriormente, diretor do departamento. Os seus interesses de investigação centram-se nas áreas de Otimização e Controlo, tendo ultimamente abordado aplicações à robótica, à energia e ao ambiente.

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação pt-maths-in@spm.pt

TARDES DE MATEMÁTICA

Conversas Ímpares

12 NOV. 2022, 15h00

Como a Matemática pode salvar a tua vida

Adérito Araújo
(CMUC, DM-FCTUC)

14 JAN. 2023, 15h00

Galileu: a acne solar e os planetas com orelhas

Fernando Figueiredo
(CITEUC, DM-FCTUC)

11 MAR. 2023, 15h00

Matemática, Magia e Mistério

Márcio Nascimento, Nuno Bastos
e Nuno Conceição
(ESTGV-IPV)

13 MAI. 2023, 15h00

Paradoxos da Estatística: os números contam histórias...

Rui Pascoal
(CEBER, FEUC)

8 JUL. 2023, 15h00

Uma viagem sobre rodas e estradas exóticas

Fátima Leite
(ISR-UC, DM-FCTUC)

EXPLORATÓRIO
Entrada Livre

Iniciativa da SPM-centro

Coorganizado por:



Cofinanciado por:





LUDUS REGULARIS: UM JOGO DE DADOS NA IGREJA

Ludus Regularis é um jogo de tabuleiro com dados, do século X, que chegou ao nosso conhecimento por meio de fontes literárias. As regras do jogo foram mantidas pelo historiador Balderic, no século XI, num livro editado em 1615 por Colvener, *Chronicon Cameracense et Atrebatense*, e reeditado em 1834 por André Le Glay, em Paris, *Chronique d'Arras et de Cambrai*. Estudando as probabilidades envolvidas na dinâmica do jogo Ludus Regularis, é possível avançar que as preocupações do autor se centravam, sobretudo, em apresentar um jogo que seguisse a doutrina católica. Ludus Regularis é um jogo cuidadosamente concebido, com recurso a dados comumente inacessíveis a membros do clero, num contexto de simbolismo religioso cristão profundo.

JOGAR LUDUS REGULARIS

Ludus Regularis Seu Clericalis, o Jogo do Clero, foi inventado pelo bispo Wibold de Cambrai (França), com o objetivo de proporcionar aos elementos do clero o acesso a um jogo de dados sem a componente vulgar que interditava este tipo de jogo aos elementos da Igreja. Ao praticar o Ludus Regularis, os clérigos deviam trabalhar, ao nível do enriquecimento pessoal, as virtudes que viessem a ganhar em determinada partida do jogo (tabela 1).

Para jogar Ludus Regularis são necessários quatro dados – três cubos e um tetraedro – e um tabuleiro onde estejam registadas as 56 virtudes que Wibold definiu como objetivos do jogo (figura 1). Cada face dos dados cúbicos é marcada com uma ou mais vogais que representam os pontos do dado: uma face com uma vogal, uma face com duas vogais, uma face com três, e assim por diante. No dado tetraédrico, estão marcadas 16 consoantes, repartidas em grupos de quatro pelas faces do tetraedro, usando a ordem alfabética.



Figura 1: Ilustração do jogo Ludus Regularis na variante de tabuleiro circular, pertencente à exposição *Jogos Matemáticos Através dos Tempos*, patente no Museu da Ciência de Lisboa (24 de abril de 2008 a 31 de dezembro de 2022).

Tabela 1: As 56 virtudes do jogo Ludus Regularis; à esquerda de cada virtude é possível encontrar a combinação numérica relativa ao lançamento dos três dados cúbicos (considerando cada vogal como um ponto) e à direita regista-se o valor que resulta da soma das três parcelas saídas nos dados.

Pontuação nos dados	Virtus (Latim)	Virtude	Soma dos pontos	Pontuação nos dados	Virtus (Latim)	Virtude	Soma dos pontos
I, I, I	Karitas	Caridade	3	II, III, V	Hospitalitas	Hospitalidade	10
I, I, II	Fides	Fé	4	II, III, VI	Parcitas	Parcimónia	11
I, I, III	Spes	Esperança	5	II, IV, IV	Patientia	Paciência	10
I, I, IV	Justitia	Justiça	6	II, IV, V	Zelus	Zelo	11
I, I, V	Prudentia	Prudência	7	II, IV, VI	Paupertas	Pobreza	12
I, I, VI	Temperantia	Temperança	8	II, V, V	Lenitas	Moderação	12
I, II, II	Fortitudo	Fortaleza	5	II, V, VI	Virginitas	Virgindade	13
I, II, III	Pax	Paz	6	II, VI, VI	Reverentia	Reverência	14
I, II, IV	Castitas	Castidade	7	III, III, III	Pietas	Piedade	9
I, II, V	Misericordia	Misericórdia	8	III, III, IV	Indulgentia	Indulgência	10
I, II, VI	Obedientia	Obediência	9	III, III, V	Oratio	Oração	11
I, III, III	Timor	Temor	7	III, III, VI	Amor	Amor	12
I, III, IV	Providentia	Providência	8	III, IV, IV	Judicium	Discernimento	11
I, III, V	Discretio	Discrição	9	III, IV, V	Vigilantia	Vigilância	12
I, III, VI	Perseverantia	Perseverança	10	III, IV, VI	Mortificatio	Mortificação	13
I, IV, IV	Bonitas	Bondade	9	III, V, V	Innocentia	Inocência	13
I, IV, V	Modestia	Modéstia	10	III, V, VI	Contritio	Contrição	14
I, IV, VI	Longanimitas	Longanimidade	11	III, VI, VI	Confessio	Confissão	15
I, V, V	Mansuetudo	Mansidão	11	IV, IV, IV	Maturitas	Maturidade	12
I, V, VI	Benignitas	Benignidade	12	IV, IV, V	Sollicitudo	Solicitude	13
I, VI, VI	Sapientia	Sabedoria	13	IV, IV, VI	Constantia	Constância	14
II, II, II	Compunctio	Compunção	6	IV, V, V	Intellectus	Inteligência	14
II, II, III	Gaudium	Alegria	7	IV, V, VI	Suspiratio	Anelo	15
II, II, IV	Sobrietas	Sobriedade	8	IV, VI, VI	Fletus	Lágrimas	16
II, II, V	Delectatio	Deleite	9	V, V, V	Hilaritas	Boa disposição	15
II, II, VI	Suavitas	Suavidade	10	V, V, VI	Compassio	Compaixão	16
II, III, III	Astutia	Astúcia	8	V, VI, VI	Continentia	Continência	17
II, III, IV	Simplicitas	Simplicidade	9	VI, VI, VI	Humilitas	Humildade	18

No contexto da prática do jogo, cada jogador lança os quatro dados simultaneamente. A combinação dos pontos obtidos nos dados cúbicos aponta a virtude em jogo. No entanto, para adquirir essa mesma virtude é necessário que:

▶As vogais obtidas nos três dados cúbicos correspondam às da virtude (por exemplo, para adquirir Oratio é preciso que saiam, pelo menos, dois *o*, um *a* e um *i*);

▶Pelo menos, uma das consoantes saídas na face voltada para baixo no dado tetraédrico esteja na palavra referente à virtude em jogo (por exemplo, para Oratio é preciso que saia *r* ou *t*);

▶A virtude em jogo não tenha sido previamente adquirida por outro jogador;

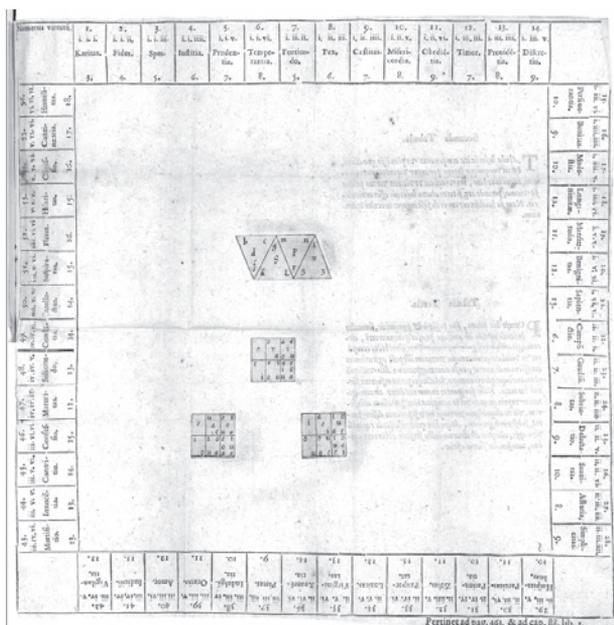


Figura 2: Tabuleiro quadrado do jogo Ludus Regularis, com os esquemas dos dados, incluído como elemento desdobrável da obra *Chronicon Cameracense et Atrebatense*, edição de Georgium Colvenerium, de 1615, entre as páginas 460 e 461. Imagem cedida pela Bibliothèque Nationale de France.

►Para a aquisição da virtude Karitas é necessária a introdução de uma exceção: Karitas será obtida quando a combinação pontual do lançamento for I, I, I, ou seja, as faces correspondentes às vogais *a, e, i*; esta situação não permite o aparecimento de dois *a*, pelo que está previsto um segundo lançamento dos dados cúbicos de modo a encontrar a letra *a* em falta.

Wibold destaca as situações em que as somas pontuais de duas virtudes perfaçam 21 – são as chamadas uniões de virtudes. Nestes casos, a contabilização dos pontos segue um procedimento distinto.

O jogo termina quando todas as virtudes tiverem sido atribuídas aos jogadores, ou, em versões alternativas que tornam a duração do jogo mais equilibrada, quando se atingir determinado número de virtudes – Wibold chega a sugerir que se termine o jogo quando um dos jogadores adquirir dez ou 15 virtudes. Nesse momento, para determinar o vencedor é necessário contabilizar os pontos de cada jogador, do seguinte modo:

►Perante pares de virtudes que perfaçam uma união,

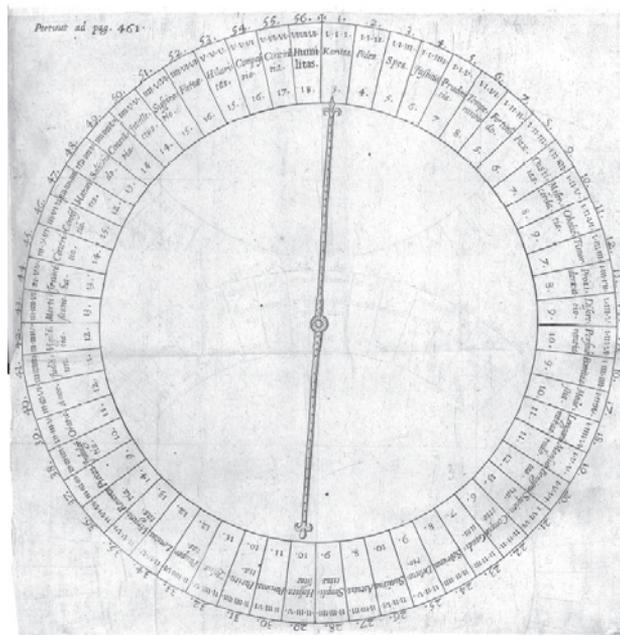


Figura 3: Tabuleiro circular, com ponteiro, do jogo Ludus Regularis, incluído como elemento desdobrável da obra *Chronicon Cameracense et Atrebatense*, edição de Georgium Colvenerium, de 1615, entre as páginas 460 e 461. Imagem cedida pela Bibliothèque Nationale de France.

a pontuação será contabilizada como o dobro do valor da pontuação individual mais alta (por exemplo, Fletus, com pontuação 16, e Fortitudo, com pontuação 5, constituem uma união – assim, quem detiver este par contabiliza 2 x 16 pontos);

►A virtude Karitas vale o dobro dos pontos (quando estiver em união com Humilitas cumpre-se a regra da união);

►As restantes virtudes são contabilizadas pelo valor que aparece registado na tabela 1 como a sua pontuação.

Como alternativa, existe também a possibilidade de jogar uma versão mais simples e de duração inferior, com um tabuleiro circular (em cujo perímetro se encontram as 56 virtudes em jogo) com uma agulha ou um ponteiro, fixo no centro, que será girado pelos vários jogadores (figura 3). Nesta situação, cada jogador vai adquirindo a virtude que for apontada pela agulha, excetuando os casos em que a virtude já esteja na posse de outro jogador. De notar que,

no parágrafo que antecede a apresentação do esquema deste tabuleiro, na obra de 1615, este é aconselhado ao público feminino, por oposição às versões com dados, mais masculinas!

ANÁLISE PROBABILÍSTICA DE LUDUS REGULARIS

As probabilidades de ocorrência de cada uma das virtudes em jogo variam entre 0,116% e 1,389%. A procura de uma relação entre o valor pontual de cada virtude e a probabilidade da sua ocorrência leva à conclusão de que tal não existe: Wibold não estabeleceu relação entre o valor pontual que atribuiu a cada virtude e a maior ou menor probabilidade envolvida na obtenção dessa mesma virtude. Não obstante, organizou de modo cuidadoso a lista das 56 virtudes. De facto, as virtudes não poderiam ser conectadas aos ternos de pontuação e vogais sem ter em atenção as vogais obtidas com os dados cúbicos e a grafia de cada uma das palavras.

SIMBOLISMO

O recurso a simbolismos da Igreja Católica é transversal a todo o texto sobre Ludus Regularis. A doutrina católica enquadra o significado cristão de cada um dos valores pontuais que é possível obter, justifica a ordenação de parte das virtudes e chega até a ser usada na explicação a respeito da leitura dos resultados nos dados: os cúbicos leem-se na face superior (as vogais), enquanto no dado tetraédrico (o das consoantes) a face resultante de uma jogada é a que se encontra na parte inferior; Wibold comenta que as vogais representam a imagem da alma, que se eleva a Deus, enquanto as consoantes preconizam o corpo que volta ao elemento mais baixo; é indicada a passagem bíblica Eclesiastes 12:7: “Então o pó voltará à terra de onde saiu e o espírito voltará para Deus que o concedeu.”

A respeito das virtudes Karitas e Humilitas, respetivamente a primeira e a última, diz Wibold que a primeira é a mãe de todas as virtudes e a última a guardiã. Sobre Karitas, Wibold justifica a sua escolha fazendo a ponte com uma passagem do Evangelho Segundo S. Mateus: “destes dois mandamentos depende toda a Lei e os Profetas”, a saber: “Amarás ao Senhor, teu Deus, com todo o teu coração, com toda a tua alma e com toda a tua mente” e “Amarás ao teu próximo como a ti mesmo”. De modo semelhante ao Evangelho, onde Jesus Cristo concentra todo o conteúdo da sua Lei nestes dois mandamentos, também Wibold faz brotar da caridade as restantes virtudes.

O CARÁCTER PITAGÓRICO E A DIFICULDADE DE LUDUS REGULARIS

No texto da *Crónica*, afirma-se que o jogo tem um carácter marcadamente pitagórico. De facto, se por um lado é incontornável que Wibold tenha recebido influências da Antiguidade, por outro lado as características pitagóricas apontadas por Colvener e por Le Glay não são visíveis. À exceção da referência ao número seis como perfeito (um conceito pitagórico no âmbito da teoria de números), não se encontram outras menções que possam ser ligadas a Pitágoras. Pelo contrário, a exploração dos restantes simbolismos que Wibold apresenta cai na orla da Bíblia Sagrada ou de filósofos e estudiosos da mesma, como Santo Agostinho ou São Gregório – ambos santificados à luz da Igreja Católica.

Mesmo sobre a referência à perfeição do número seis, a verdade é que tal caracterização pode encontrar-se no contexto da literatura católica; veja-se o que diz o Papa Gregório I na obra *The Books of the Morals*:

“Mas o número seis é perfeito, porque é o primeiro número que é composto pelas suas várias partes, ou seja, o seu sexto, o seu terço, e a sua metade, que são um, dois e três, e estes somados tornam-se seis. (...) Mas porque transcendemos todo este conhecimento, ao avançarmos através da altivez da Sagrada Escritura, encontramos aí a razão pela qual os números seis, sete, dez e mil são perfeitos. Pois o número seis é perfeito na Sagrada Escritura, porque no início do mundo Deus completou, no sexto dia, as obras que começou no primeiro.”

Outra característica que Colvener aponta ao jogo Ludus Regularis é a dificuldade na sua implementação (Le Glay também partilha tal opinião). Esta ideia de dificuldade ou obscuridade não parece ter ligação com a realidade. Na verdade, Wibold explana as regras com cuidado, com pormenores tão detalhados como em que face dos dados se lê o resultado da jogada ou a repetição do estatuto diferenciado da virtude Karitas. Mesmo perante a característica do jogo que podia provocar menor divulgação do mesmo, a sua longa duração, Wibold oferece versões alternativas.

NO SÉCULO XX, ALGUMA MATEMÁTICA COM LIGAÇÃO A WIBOLD: A FUNÇÃO W

Em 1988, os autores Kurt Kreith e Judith Kysh publica-

ram na revista *The Mathematics Teacher*, nos Estados Unidos da América, um artigo que remete para o jogo Ludus Regularis: “The Fourth Way to Sample k Objects from a Collection of n ”. Neste artigo, os autores dedicam alguma atenção a técnicas matemáticas de contagem. É justamente em homenagem a Wibold que é usada a notação nW_k para referir o número de resultados que é possível obter quando se formam subconjuntos de k elementos a partir de um conjunto com n objetos, existindo reposição de elementos, mas sem que a ordem de extração tenha relevância.

A partir da análise de Ludus Regularis sabe-se que ${}^6W_3 = 56$. O número de resultados possíveis ao extrair k objetos de um conjunto de n , com repetição, sem que a ordem seja relevante, é dado por:

$${}^nW_k = {}^{n-1+k}C_k = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1+k-k)!} = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!}$$

REFERÊNCIAS

[1] Balderic. *Chronicon Cameracense et Atrebatense*. George Colvener, editor. Ioannis Bogardi, 1615.

[2] Boécio Epo. *Boetti Eponis Frisii. Heroicarum et Ecclesiasticarum Quaestionum Libri VI*, Edição por Ioannis Bogardi, 1588.

[3] Kreith, Kurt e Kysh, Judith. “The Fourth Way to Sample k Objects from a Collection of n ”. *The Mathematics Teacher*, 81: pp. 146-149, 1988.

[4] Le Glay, André. *Chronique d’Arras et de Cambrai par Balderic*. Paris: Levraut, J.-A. Mercklein, e Téchener, 1834.

SOBRE A AUTORA

Carla Cardoso: Professora no Ensino Secundário desde o ano 2000; doutoranda de História e Filosofia das Ciências na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Coordenação do espaço **HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:**
Pedro Freitas, Universidade de Lisboa, pjfreitas@fc.ul.pt

No fim das contas ganham todos!

Campeonato da Tabuada.
Participa!



Provas maio e junho
na App Multipli



7 Semifinais e 1 Grande Final

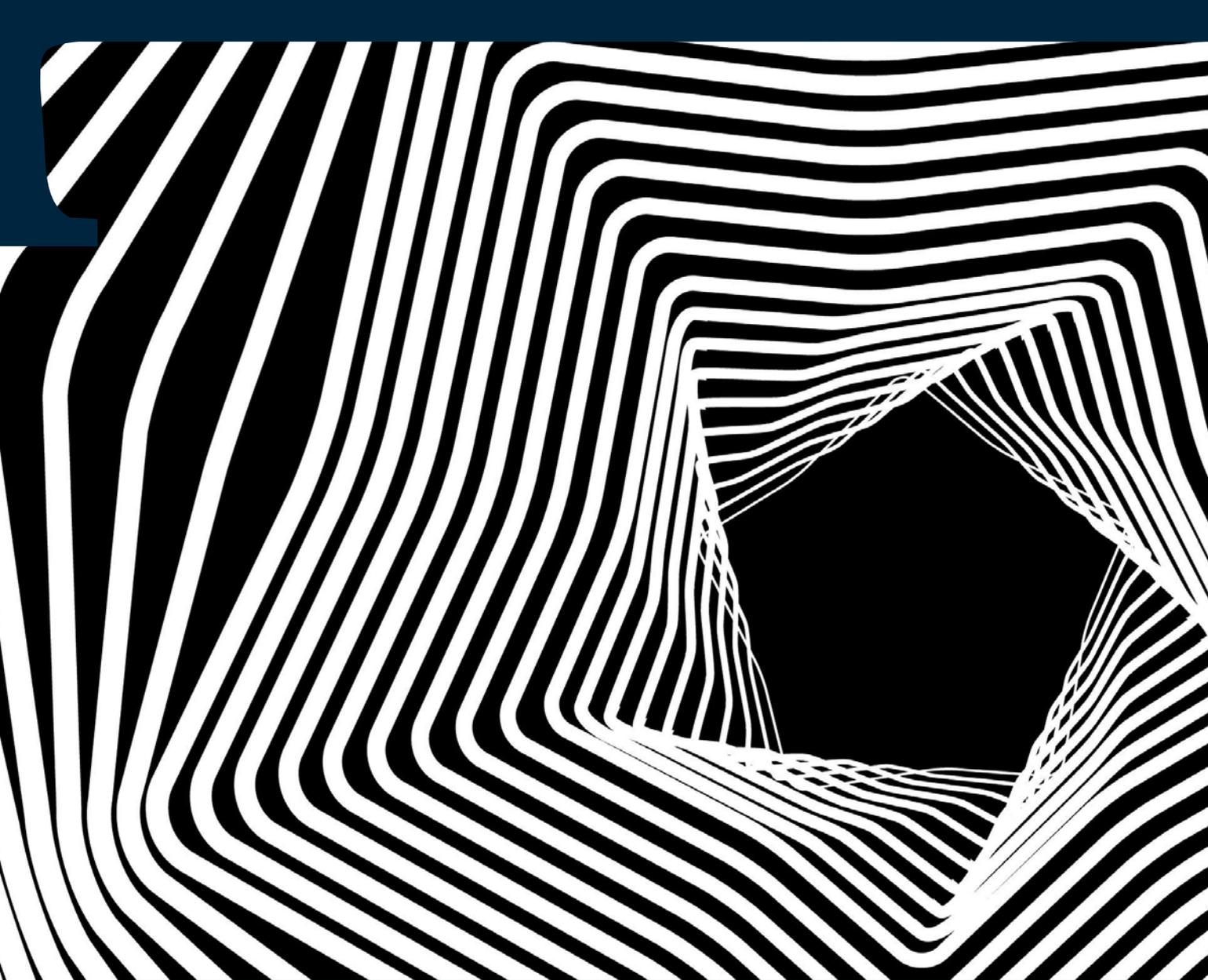
$72 = ? \times ?$

$64 = ? \times ?$

$48 = ? \times ?$



Regulamento e Inscrições em www.campeonato.multipli.pt



AGULHAS, ONDAS E MAGIA

GONÇALO JORGE^a E DIOGO OLIVEIRA E SILVA^b

ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA DE ILUSIONISMO^a E INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO^b

goncalo_jorge@hotmail.com^a e diogo.oliveira.e.silva@tecnico.ulisboa.pt^b

1. INTRODUÇÃO

Um *teorema do ponto fixo* é um resultado matemático que garante que, sob determinadas condições, uma dada função tem pelo menos um ponto fixo. Por outras palavras, se $f : X \rightarrow X$ é uma função de um certo tipo, então existe um elemento x de X tal que $f(x) = x$. Apesar da sua aparente simplicidade, teoremas do ponto fixo podem ser surpreendentemente poderosos. O propósito deste artigo é ilustrar esta afirmação com algumas aplicações inesperadas. Pelo caminho, iremos rodar agulhas, decompor ondas e pasmar-nos com alguns truques de magia.

Um dos mais conhecidos e versáteis teoremas do ponto fixo foi provado por L. E. J. Brouwer [6] em 1911. Sendo $B = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| \leq r\}$ uma qualquer bola fechada de centro x_0 e raio r em \mathbb{R}^d , o teorema do ponto fixo de Brouwer garante que toda a função contínua $f : B \rightarrow B$ tem pelo menos um ponto fixo. Como consequência quase imediata, se abirmos um mapa de Portugal em algum lugar do País, então necessariamente existe um ponto do mapa que efetivamente se encontra na sua posição correta.

Uma variante particularmente elegante do teorema de Brouwer para funções definidas na esfera unitária $S^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$ aparece num artigo de K. Borsuk [4] de 1933, em que se atribui a formulação do problema a S. Ulam; no entanto, L. Lyusternik e L. Shnirel'man [24] já tinham apresentado uma versão análoga em 1930.

Apesar da sua aparente simplicidade, teoremas do ponto fixo podem ser surpreendentemente poderosos. O propósito deste artigo é ilustrar esta afirmação com algumas aplicações inesperadas. Pelo caminho, iremos rodar agulhas, decompor ondas e pasmar-nos com alguns truques de magia.

Teorema 1. (Borsuk-Ulam) *Se $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua, então existe $x \in S^d$ tal que $f(-x) = f(x)$.*

O caso unidimensional ($d = 1$) do teorema de Borsuk-Ulam decorre facilmente do teorema do valor intermédio. O caso bidimensional ($d = 2$) admite a seguinte interpretação física: existe sempre um par de pontos antípodas à superfície terrestre que estão *exatamente* à mesma temperatura e à mesma pressão (assumindo que ambas as quantidades variam de forma contínua no espaço).

A *análise harmónica* estuda fenómenos oscilatórios como as soluções da equação da onda. É uma área de grande destaque no panorama atual da investigação matemática, com resultados dramáticos em áreas tão diversas como geometria combinatória [34], teoria analítica dos números [5] e até computação quântica [27]. Por outro lado, o teorema de Borsuk-Ulam tem vindo a ocupar uma posição de relevo na análise harmónica moderna, e isto é parte da motivação para as próximas duas secções deste artigo.¹

A quarta e última secção ilustra outra faceta, ainda mais mágica, do teorema de Borsuk-Ulam. Para outras interpretações, generalizações e aplicações de Borsuk-Ulam, recomendamos vivamente o livro [26].

2. AGULHAS

Em 1917, o matemático japonês S. Kakeya [8] colocou a seguinte questão: *Quão pequena pode ser uma região do plano onde é possível virar uma agulha de comprimento unitário por um ângulo de 180 graus, exclusivamente por rotações e translações?* Uma tal região é designada por *conjunto de Kakeya planar*. Eis duas tentativas de simples execução:

- ▶ Um disco de raio igual a $\frac{1}{2}$ tem área $\frac{\pi}{4} = 0.785\dots$
- ▶ Um triângulo equilátero de altura 1 tem $\frac{2}{\sqrt{3}}$ de lado, e área igual a $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\dots$

J. Pál [28] demonstrou em 1921 que, na classe dos conjuntos *convexos*, não é possível bater o triângulo equilátero. E se o conjunto não for convexo? Uma *deltoide* é a trajetória descrita por um ponto de uma circunferência à medida que esta rola, sem deslizar, dentro de outra circunferência de raio três vezes maior. Durante algum tempo, conjecturou-se que o interior de uma deltoide corresponderia

¹Como complemento de leitura, sugerimos os artigos de divulgação de I. Łaba [23] e T. Tao [33].

à solução do problema de Kakeya. A realidade, porém, é bem diferente.

A. S. Besicovitch [2] trabalhava na mesma altura (na Rússia, em quase completo isolamento) num problema da teoria de integração de Riemann. Conseguiu reduzir o problema à existência de um subconjunto do plano de área zero contendo um segmento de reta unitário em cada direção. E depois construiu um tal conjunto, o que teve consequências imediatas para o problema de Kakeya.

Teorema 2. (Besicovitch). *Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um conjunto de Kakeya planar de área inferior a ε .*

Dado que é impossível virar um segmento unitário dentro de um conjunto de área zero, o teorema 2 implica que não existe um conjunto de Kakeya de área mínima.

A construção de Besicovitch foi mais tarde modificada e simplificada por O. Perron [29] e I. J. Schoenberg [30], mas todas as variações partem essencialmente de duas ideias fundamentais.

Primeira ideia: Um triângulo equilátero de altura 1 contém um segmento de reta unitário que aponta em cada uma das direções possíveis num arco de 60 graus. Podemos dividir o triângulo em duas regiões, e deslizar uma delas por forma a garantir uma sobreposição considerável na nova figura, mas de tal modo que as direções abrangidas permaneçam as mesmas; cf. figura 1.



Figura 1. Deslizar, mantendo as direções mas reduzindo a área.

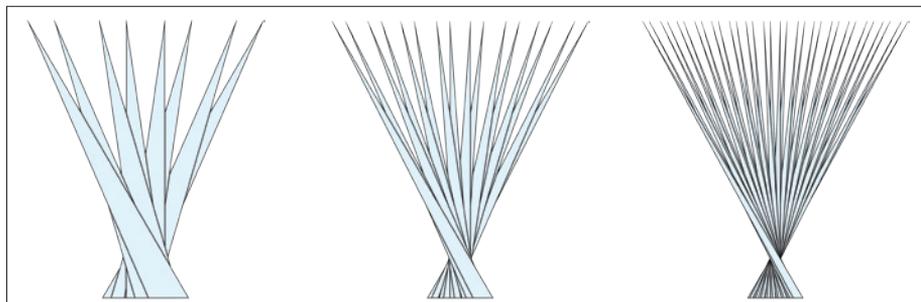


Figura 2. Figura resultante após três, quatro e cinco passos.

Segunda ideia: Iterar a primeira ideia, notando que as direções abrangidas se mantêm inalteradas; cf. figura 2.

Para implementar as duas ideias, partimos de um *triângulo mãe* e produzimos uma nova figura com um *coração* (escurecido, na figura 1) e dois *braços*. Seja δ o quociente entre o deslocamento e o comprimento da base do triângulo mãe. Se A denotar a área do triângulo mãe, então por semelhança de triângulos temos que

$$\text{área}(\text{coração}) = (1 - \delta)^2 A, \text{ e } \text{área}(\text{braços}) = 2\delta^2 A.$$

Repetindo o procedimento, a área da figura resultante após n passos é, no máximo, igual à soma das áreas dos braços em cada um dos n passos acrescida da área do coração no último passo, ou seja,

$$(2\delta^2 + 2\delta^2(1 - \delta)^2 + \dots + 2\delta^2(1 - \delta)^{2(n-1)} + (1 - \delta)^{2n}) A,$$

o que pode ser *majorado* por A vezes

$$\begin{aligned} 2\delta^2 \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \delta)^{2k} + (1 - \delta)^{2n} &= \frac{2\delta^2}{1 - (1 - \delta)^2} + (1 - \delta)^{2n} \\ &= \frac{2\delta}{2 - \delta} + (1 - \delta)^{2n}. \end{aligned}$$

Podemos tornar esta última quantidade arbitrariamente pequena. De facto, se $\varepsilon > 0$ é um número minúsculo, escolha-se $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\frac{2\delta}{2 - \delta} < \frac{\varepsilon}{2}$, ou seja, garantindo que os deslocamentos são suficientemente pequenos em relação ao comprimento da base do triângulo mãe. De seguida, escolhe-se n suficientemente grande por forma a garantir que $(1 - \delta)^{2n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, a área da figura resultante após n passos é menor do que ε , aquele número minúsculo do qual partimos. Nas palavras de E. M. Stein [31, Ch. X §1], acabámos de construir um "monstro com muitos braços e um coração diminuto".

Para concluir o esboço da prova do teorema 2, convém elucidar dois detalhes finais. Em primeiro lugar, não é claro que um segmento unitário possa ser virado den-

tro do monstro que acabámos de construir. Isso decorre de um argumento geométrico de J. Pál (o mesmo que resolveu o problema de Kakeya para conjuntos convexos) que garante ser possível transladar um segmento unitário para uma posição paralela no plano *varrendo uma área arbitrariamente pequena*; cf. [33, fig 1]. Em segundo lugar, o triângulo equilátero de que partimos só contém segmentos unitários nas direções descritas por um ângulo de 60 graus, mas tomando a união disjunta de três cópias rodadas consegue-se abranger todas as direções pretendidas.

E o que tem isto a ver com Borsuk-Ulam? E com ondas?

3. ONDAS

Desde o trabalho visionário² de J. Fourier [11] que se sabe que *qualquer* função diferenciável $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0 = f(\pi)$ pode ser escrita com uma soma de "harmónicos",

$$f(x) = \sum_n a_n \text{sen}(nx), \quad (1)$$

onde os números a_n são os *coeficientes de Fourier* de f , dados pelos integrais

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \text{sen}(nx) dx. \quad (2)$$

Isto pode parecer uma tarefa impossível neste grau de generalidade, mas convém realçar que a soma (1) poderá conter um número *infinito* de termos. Nos tempos idos de Fourier, ainda não havia uma base matemática sólida para lidar com somas infinitas desse género. Adotando uma perspetiva mais moderna, podemos escolher um inteiro N suficientemente grande e somar apenas os termos $a_n \text{sen}(nx)$ de (1) correspondentes a $n \leq N$, ou seja, considerar as *somas parciais* $\sum_{n=1}^N a_n \text{sen}(nx)$. À medida que N aumenta, a soma parcial torna-se uma aproximação cada vez mais fidedigna da função original f desde que esta seja diferenciável. Caso contrário, a aproximação pode ainda valer desde que a função f seja razoavelmente bem-comportada. Ideias como esta estiveram na génese da *análise de Fourier*, que inclui ligações variadas à física, à engenharia eletrotécnica e ao processamento de sinal. Apesar de algumas questões subtis ainda não estarem completamente esclarecidas, a análise de Fourier unidimensional é hoje em dia bem compreendida; cf. [9, 32].

Somas como (1) são úteis para analisar funções definidas no intervalo $[0, \pi]$ ou, equivalentemente, funções ímpares 2π -periódicas definidas na reta real, isto é, tais que $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Funções não pe-

riódicas definidas em \mathbb{R} também podem ser estudadas com métodos de análise de Fourier. Por exemplo, uma tal função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser escrita como

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} h(s) e^{-ixs} ds \quad (3)$$

onde, para cada $s \in \mathbb{R}$, o número $h(s)$ é dado por

$$h(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{ixs} dx.$$

A função h é a *transformada de Fourier* de g , e os valores de h correspondem aos coeficientes de Fourier (2). Por analogia às somas parciais, podemos considerar os integrais parciais

$$S_N g(x) = \int_{-N}^N h(s) e^{-ixs} ds, \quad (4)$$

e indagar se a função $S_N g$ constitui uma boa aproximação para g desde que N seja suficientemente grande. Um modo de responder a esta questão é verificando se o erro

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x) - S_N g(x)|^p dx \quad (5)$$

diminui à medida que N aumenta, para algum número real $p \geq 1$. Se a função g for suficientemente bem-comportada, então de facto o integral (4) aproxima g cada vez melhor, no sentido em que o erro (5) converge para zero à medida que N tende para infinito.

E o que acontece em dimensões mais elevadas? Se $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função de *duas* variáveis, então o análogo de (3) seria

$$g(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} h(s, t) e^{-i(xs+yt)} ds dt$$

onde, para cada par $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, o número $h(s, t)$ é dado por

$$h(s, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) e^{i(xs+yt)} dx dy.$$

Uma vez mais, poderíamos esperar que, à medida que N aumenta, integrais parciais como

$$S_N^\square g(x, y) = \int_{-N}^N \int_{-N}^N h(s, t) e^{-i(xs+yt)} ds dt, \text{ ou}$$

$$S_N^\circ g(x, y) = \iint_{B_N} h(s, t) e^{-i(xs+yt)} ds dt$$

² Que no ano passado comemorou o seu 200.º aniversário - os festejos incluíram uma conferência internacional de dez dias em Edimburgo, na Escócia.

onde $B_N = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq N^2\}$, fossem boas aproximações para $g(x, y)$. Na função $S_N^\square g(x, y)$ aparece um quadrado (\square) correspondente à região de integração $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : -N \leq s, t \leq N\}$; por outro lado, na função $S_N^\circ g(x, y)$ aparece um círculo (\circ) correspondente à fronteira do disco B_N .

Acontece que $S_N^\square g$ é, de facto, uma boa aproximação para g , no sentido em que o erro $\iint_{\mathbb{R}^2} |g(x, y) - S_N^\square g(x, y)|^p dx dy$ converge para zero à medida que N tende para infinito, para todo o $p \geq 1$. Esperava-se que o mesmo acontecesse com $S_N^\circ g$. No entanto, em 1971, C. Fefferman [10] surpreendeu tudo e todos ao demonstrar que, para determinadas funções g , a aproximação $S_N^\circ g$ pode comportar-se de modo muito diferente de $S_N^\square g$, e como tal de g . A função g construída por Fefferman está intimamente relacionada com o problema de Kakeya descrito no capítulo anterior. Considere-se um conjunto de Kakeya planar $K \subset \mathbb{R}^2$ com área muito pequena, e defina-se g como a função característica de K ; isto é, $g(x, y) = 1$ se $(x, y) \in K$ e $g(x, y) = 0$ se $(x, y) \notin K$. A função g descreve um conjunto de área pequena mas que contém um segmento unitário em cada direcção possível, enquanto $S_N^\circ g$ descreve um conjunto muito diferente do anterior: a operação S_N° translada cada um dos segmentos de tal forma que deixam de se sobrepor; cf. figura 3. Por esse motivo, as funções g e $S_N^\circ g$ não são nada parecidas e, para todo o $p \neq 2$, o erro $\iint_{\mathbb{R}^2} |g(x, y) - S_N^\circ g(x, y)|^p dx dy$ não diminui à medida que N aumenta. Esta descoberta revolucionária interligou o mundo geométrico dos conjuntos de Kakeya e o mundo analítico de Fourier, e criou uma nova área da análise harmónica [31] que procura explorar estas ligações.

Decorre do teorema 2 que existem subconjuntos de

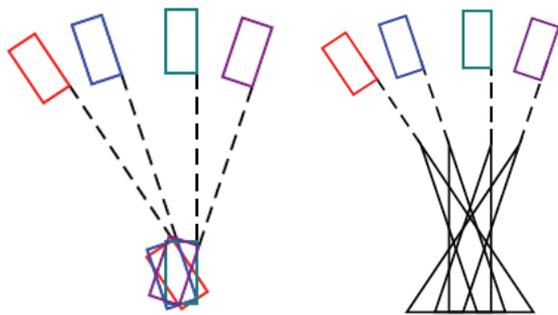


Figura 3. Antes e depois da aplicação de S_N° , que translada cada retângulo na direcção do seu eixo principal por forma a eliminar a sobreposição inicial.

\mathbb{R}^d de volume zero que contêm um segmento unitário em cada direcção possível. Uma questão mais refinada é a de determinar exactamente a *dimensão de Hausdorff*³ desses conjuntos.

Conjetura 1. *A dimensão de Hausdorff de um conjunto de Kakeya em \mathbb{R}^d é igual a d .*

A conjetura 1 foi resolvida em \mathbb{R}^2 por R. O. Davies [8] em 1971, mas permanece um problema em aberto em todas as dimensões superiores. Apesar disso, houve um progresso notável – parcialmente responsável pelas medalhas Fields atribuídas a C. Fefferman (1978), J. Bourgain (1994) e T. Tao (2006) – que tem servido de grande inspiração para o desenvolvimento da análise harmónica nas últimas décadas. Por exemplo, uma versão *multilinear* da conjetura de Kakeya foi demonstrada em 2006 por J. Bennett, A. Carbery e T. Tao [1], tendo um importante caso-limite sido depois elucidado por L. Guth [13]. As provas eram longas, técnicas e de difícil digestão, usando ferramentas sofisticadas de topologia algébrica. Em 2013, A. Carbery e S. Valdimarsson [7] descobriram uma prova alternativa do teorema multilinear de Kakeya que se baseia apenas em Borsuk-Ulam – o teorema 1 que descrevemos na introdução, e que fará uma última aparição mágica no próximo capítulo.

4. MAGIA

Quando pensamos em ilusionismo, a primeira coisa que nos vem à cabeça é... análise harmónica? Talvez não. Mas a verdade é que o mundo da matemática e a arte da ilusão se tocam de tempos a tempos. Quem nunca foi aborrecido de morte numa festa de aniversário de um primo com um truque de cartas matemático que levante a mão. Pois. Foi o que pensámos. E esta proximidade do ilusionismo à matemática não é recente. O primeiro texto conhecido com a descrição de truques mágicos com números é um manuscrito em latim, intitulado *De Arithmetis Propositionibus*, atribuído a Alcuíno de Iorque e escrito no século VIII [19]. Em livro impresso temos os primeiros truques matemáticos na obra *De Arithmetica*, de Filippo Calandri, que saiu de uma tipografia florentina em 1491, e em Portugal o primeiro a descrever truques de ilusionismo (matemático, claro está) foi Gaspar Nicolas, no célebre *Tratado da Pratica Darismetica*, de 1519 [17]. Truques de cartas, no nosso país, surgem primeiramente no *Thesouro de Prudentes*, de Gaspar Cardoso de Sequeira, em 1612 [20]. E é precisamente com dois truques de cartas que damos início a este espetá-

culo, perdão, última secção do artigo. Mas não são truques de cartas quaisquer: um deles até já foi apelidado de “o melhor truque de cartas do mundo” [21].

O baralho de cartas que usamos para estes truques é o baralho habitualmente usado nos países lusófonos, com 52 cartas, distribuídas por quatro naipes: copas (♥), espadas (♠), ouros (♦), paus (♣). Cada naipe tem 13 cartas, sendo estas um ás (representado pela letra A), todos os números inteiros de 2 a 10, e três figuras: o valete, representado pela letra J (*jack*), a dama, representada pela letra Q (*queen*) e o rei, com a letra K (*king*).

▶ **Truque 1.** “*Fitch Cheney’s five card trick*” [16, 21]

Efeito. O ilusionista pede a um espetador que retire livremente cinco cartas do baralho. De seguida, é pedido ao espetador para fazer um telefonema para o assistente do ilusionista revelando-lhe quatro das cinco cartas escolhidas. Suponhamos que as cartas reveladas são o 7♠, seguido da Q♥, do 8♣ e do 3♦. O assistente do ilusionista, utilizando o seu apurado sentido de percepção extrassensorial, consegue dizer qual é a carta que está em falta: “Senhoras e senhores, a carta mistério é o K♠!”

▶ **Truque 2.** “*El juego del teléfono*” [12]

Efeito. O ilusionista pede a um espetador que escolha livremente uma carta qualquer do baralho. De seguida, é feito um telefonema para o assistente do ilusionista que, recorrendo aos seus surpreendentes dotes de médium, consegue adivinhar à distância qual foi a carta escolhida pelo espetador.

4.1. A estratégia

Começemos pelo truque 1.⁴ A primeira reação será seguramente de espanto e incredulidade. Queixo caído. Respirar fundo, 1, 2, 3. Recuperados do choque inicial, vamos à explicação. É bom lembrar que o ilusionista tem a liberdade para fazer várias escolhas antes de instruir o espetador a fazer o telefonema: qual das cartas omitir (a “carta mistério”), quais das cartas mostrar, e por que ordem fazê-lo. Antes do telefonema, o ilusionista terá então de despreocupadamente olhar para as cinco cartas escolhidas, ordená-las num modo específico e instruir o espetador para que revele pelo telefone quatro das cinco cartas nessa mesma ordem.

Com cinco cartas escolhidas, há pelo menos duas do mesmo naipe, e esse é um bom ponto de partida para o código usado neste truque: o naipe da carta revelada

em primeiro lugar deverá coincidir com o naipe da carta mistério. Falta “apenas” codificar o valor dessa carta nas três cartas restantes. Há 12 possibilidades (dentre as 13 iniciais, excluindo o valor da primeira carta) mas, permutando as três cartas restantes, o ilusionista pode transmitir apenas $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ bits de informação. Parece que chegámos a um beco sem saída, mas é aqui que as coisas se tornam interessantes. De facto, há uma decisão importante que o ilusionista pode e deve tomar: dentre as duas cartas do mesmo naipe, qual será considerada a carta mistério e qual deverá ser revelada em primeiro lugar?

Definindo valores numéricos para as cartas de figuras, $(A, J, Q, K) = (1, 11, 12, 13)$, considere-se o conjunto $S := \{1, 2, 3, \dots, 12, 13\}$ de cartas de um naipe fixado munido de aritmética modular. Isto faz com que, dados dois quaisquer elementos x, y de S , seja sempre possível transitar de x para y ou de y para x em não mais do que seis passos. Por exemplo, se $x = 3$ e $y = 11$, então o trajeto de x para y requer $y - x = 11 - 3 = 8$ passos, mas aquele de y para x requer apenas $x - y = 3 - 11 = -8 \equiv 5 \pmod{13}$ passos, onde a última identidade, “ $-8 \equiv 5$ ”, vale somente no exótico mundo da aritmética módulo 13.

A estratégia pode então ser resumida em três passos:

- (i) Escolher a primeira carta a ser revelada pelo telefone garantindo que:
 - (a) Tem o mesmo naipe da carta mistério;
 - (b) Acrescentando (módulo 13) um número de 1 a 6 ao seu valor, se obtém o valor da carta mistério;
- (ii) Ordenar a segunda, a terceira e a quarta cartas por forma a transmitir o valor de 1 a 6 do ponto (i)(b); pode-se, por exemplo, ordenar todo o baralho numericamente com desempate através dos naipes⁵ e, dadas três cartas $a < b < c$, assegurar a correspondência $(abc, acb, bac, bca, cab, cba) = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$;
- (iii) Fazer uma vénia em resposta à ovação retumbante.

No caso acima descrito em que as cartas reveladas são o 7♠, seguido da Q♥, do 8♣ e do 3♦, sabemos por (i)(a) o naipe

³ A dimensão de Hausdorff é uma medida da “rugosidade” ou, mais precisamente, da dimensão fractal, introduzida por F. Hausdorff em 1917. Para a definição rigorosa, consulte-se [25].

⁴ A nossa apresentação é largamente inspirada no artigo [21]; por vezes, acrescentamos alguns detalhes.

pe da carta mistério: ♠. Por outro lado, $3 < 8 < 12 = Q$, pelo que por (ii) devemos acrescentar $cba = 6$ unidades ao valor da primeira carta. Como $7 + 6 = 13 = K$, temos então por (i)(b) que a carta mistério é de facto o $K♠$. *Voilà!* Não esquecer o passo (iii).

4.2. Análise preliminar

O truque 1 pressupõe uma mão de cinco cartas escolhidas de entre 52 possibilidades. Desta forma, há um total de $52 \times 51 \times 50 \times 49$ mensagens que o ilusionista pode transmitir, e $\binom{52}{5} = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48/5!$ mãos que o assistente pode decodificar. O número de mensagens é assim $5!/48 = 2.5$ vezes superior ao número de mãos, e de facto esta redundância manifesta-se na estratégia delineada na secção anterior: há algumas mãos que são codificadas por mais do que uma mensagem (por ex., qualquer mão com três ou mais cartas do mesmo naipe) e algumas mensagens que nunca são usadas (por ex., qualquer mensagem que contém a carta codificada por ela própria).

4.3. A generalização

Uma generalização natural do truque 1 consiste em seleccionar uma mão de n cartas dentre N possíveis escolhas. Desta forma, há $N(N-1)(N-2)\dots(N-n+2)$ mensagens que o ilusionista pode transmitir, e $\binom{N}{n}$ mãos que podem ser decifradas. Se houver estritamente mais mãos do que mensagens, não há salvação (isto é, estratégia) possível. Por outras palavras, uma condição *necessária* para a existência duma estratégia válida é que a desigualdade $\binom{N}{n} \leq N(N-1)(N-2)\dots(N-n+2)$ valha, ou seja, que

$$N \leq n! + n - 1. \quad (6)$$

Surpreendentemente, e como veremos na próxima secção, a condição (6) também é *suficiente* para a existência duma estratégia vencedora. Isto não é nada óbvio: há pelo menos tantas mensagens como mãos, mas não é de todo claro que se possa emparelhar as mãos e as mensagens por forma a que cada mão seja codificada por uma mensagem *que use apenas as n cartas disponíveis*. Em particular, o truque 1 também funcionaria se as cinco cartas fossem escolhidas de um baralho com $5! + 5 - 1 = 124$ cartas.

4.4. A matemática que tudo explica: König, Birkhoff, Von Neumann, Hall

Um vetor diz-se *estocástico* se cada uma das suas compo-

nentes for não negativa e a soma de todas elas for igual a 1. Uma matriz diz-se *duplamente estocástica* se cada uma das suas linhas e colunas for um vetor estocástico. Uma *matriz de permutação* é uma matriz quadrada com entradas em $\{0, 1\}$ e exatamente um 1 em cada linha e em cada coluna. A matriz identidade é uma matriz de permutação e, de facto, qualquer matriz de permutação é obtida reorganizando as linhas ou colunas da matriz identidade. Dadas duas matrizes de permutação A e B , qualquer *combinação convexa* $\theta A + (1 - \theta)B$ (onde $0 \leq \theta \leq 1$) é duplamente estocástica. O recíproco, menos óbvio, também vale; é o conteúdo de um resultado de D. König [22] de 1936, normalmente atribuído aos trabalhos de G. Birkhoff [3] e de J. von Neumann [35] de 1946 e 1953, respetivamente.

Teorema 3. (König-Birkhoff-Von Neumann) *Qualquer matriz duplamente estocástica é combinação convexa de matrizes de permutação.*

A prova mais conhecida do teorema 3 é por indução, removendo uma fração apropriada de uma matriz de permutação P da matriz duplamente estocástica dada. Há vários métodos diretos para determinar a matriz P , mas em vez disso vamos considerar a seguinte versão discreta do teorema 3, que lhe é equivalente.

Teorema 4. (König-Birkhoff-Von Neumann v2). *Qualquer matriz com entradas inteiras não-negativas e soma constante de linhas e colunas pode ser escrita como uma soma de matrizes de permutação.*

A título de exemplo, apresentamos a decomposição do seguinte *quadrado mágico* (em que a diagonal e a anti-diagonal principais também têm soma igual a 15) prometida pelo teorema 4:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para provar o teorema 4 por indução na soma constante basta mostrar que cada matriz que satisfaz as hipóteses do teorema é (componente a componente) maior do que alguma matriz de permutação ou igual. Por seu turno,

isso decorre do *teorema do casamento de Hall*, provado por P. Hall [14] em 1935, que apresentamos de forma ligeiramente informal mas sugestiva.

Teorema 5. (Hall) *Sejam dados dois conjuntos de n pessoas, \mathcal{M} (mulheres) e \mathcal{H} (homens). Para cada $1 \leq k \leq n$, seja $\mathcal{H}_k \subseteq \mathcal{H}$ o conjunto de homens com os quais a k -ésima mulher consideraria casar-se. Então existe um casamento universal que deixa todos⁶ felizes se e só se*

$$\# \bigcup_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{H}_k \geq \#\mathcal{K}, \text{ para todo } \mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}, \quad (7)$$

ou seja, para cada $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$, o número de homens com os quais pelo menos uma mulher de \mathcal{K} se casaria é pelo menos igual ao número de mulheres em \mathcal{K} .

A condição (7) é claramente necessária para a existência de um casamento universal: se não for satisfeita por algum $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$, então não há homens que cheguem para as mulheres de \mathcal{K} . O teorema 5 garante que a condição (7) também é suficiente.

O teorema 4 (e por conseguinte o teorema 3) decorre imediatamente do teorema 5 se pensarmos que podemos "casar" uma linha com uma coluna sempre que a sua entrada comum seja diferente de zero. A condição de as somas de linhas e colunas serem constantes garante que quaisquer k colunas têm pelo menos k linhas que consideram elegíveis. E um casamento universal corresponde à matriz de permutação prometida pelo teorema 4.

Das várias provas conhecidas do teorema 5, a mais elegante é topológica e baseia-se no teorema de Borsuk-Ulam [15, §4] – o mesmo resultado que, como vimos, garante a existência de um par de pontos antípodas exatamente à mesma temperatura e à mesma pressão, e que foi recentemente utilizado para reprovar o caso-limite do teorema multilinear de Kakeya.

E como é que isto se relaciona com a generalização do truque 1 que descrevemos na secção anterior? Considere-se a matriz $A = (a_{ij})$ de 0s e 1s com linhas indexadas pelas $\binom{N}{n}$ mãos e colunas indexadas pelas $N!/(N-n+1)!$ mensagens, onde $a_{ij} = 1$ se e só se todas as cartas utilizadas na j -ésima mensagem aparecerem na i -ésima mão. Se vale a igualdade em (6), isto é, $N = n! + n - 1$, então a matriz A é quadrada e tem exatamente $n!$ 1s em cada linha e em cada coluna. Concluímos que algum subconjunto destes 1s forma uma matriz de permutação. Mas isto é precisamente uma estratégia para o ilusionista e o seu assistente – uma bijecção entre mãos e mensagens que

pode ser utilizada para os representar. De facto, e pelo que acabámos de dizer, não há apenas uma estratégia, mas pelo menos $n!$ estratégias distintas, cada uma correspondente a uma matriz de permutação distinta.

4.5. Duas notas finais

► O argumento da secção anterior que generaliza o truque 1 é não construtivo. Para o tornar construtivo, veja-se a última secção de [21].

► E o truque 2, esquecido desde o princípio desta secção? Tratar-se-á de pura telepatia? Dificilmente. Mas se não há mais cartas envolvidas, não pode haver transmissão de mensagem em código, certo? Errado. Quem telefona para o assistente, neste caso, é o ilusionista, que sabe qual foi a carta escolhida. Ao telefonar para o seu assistente, o que o público ouve é algo como "Olá, Diogo! Vou pôr em alta voz". Parece uma inocente troca de palavras, mas na realidade esconde o segredo, no *timing* do que é dito. Do outro lado da linha, assim que atende a chamada o assistente começa a dizer todos os valores das cartas, deixando passar um breve instante entre cada um (ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valete, dama, rei). Assim que ouve o valor da carta escolhida, o ilusionista diz: "Olá Diogo!". O assistente começa então a enumerar os vários naipes (copas, espadas, ouros, paus). Assim que ouve o naipe da carta escolhida, o ilusionista diz: "Vou pôr em alta voz". O assistente neste momento já sabe qual foi a carta escolhida e resta-lhe revelá-la ao público. Para acrescentar dramatismo à revelação, o assistente deverá aproximar-se passo a passo, com muita "intuição" e uma aura de mistério, da identidade da carta escolhida. Supondo tratar-se novamente do $K\clubsuit$, o diálogo poderia ser algo do género: "Assegure-se de que todos os presentes viram a carta durante pelo menos dois segundos... Desta forma, todos terão a imagem da carta em mente. Obrigado, é suficiente. Sinto que não se trata de uma carta vermelha, certo? É uma carta negra... com uma certa agressividade... Parece ser uma carta de espadas, estou certo? E parece-me ser uma carta com muito desenho, uma figura... Sinto uma energia masculina na carta... mas não parece um valete... Claro, é um rei. É o rei de espadas!".

⁵ Os naipes podem ser ordenados alfabeticamente: ♥ < ♠ < ♦ < ♣, dado que "copas", "espadas", "ouros" e "paus" aparecem por essa ordem no dicionário.

⁶ Assumimos, tal como na formulação original de Hall, que qualquer homem ficaria feliz em casar-se com qualquer mulher disposta a desposá-lo. *No comments.*

REFERÊNCIAS

- [1] J. Bennett, A. Carbery, T. Tao, "On The Multilinear Restriction and Kakeya Conjectures". *Acta Math.* vol. 196, n.º 2, pp. 261-302, 2006.
- [2] A. S. Besicovitch, "On Kakeya's Problem and a Similar One". *Math. Z.* vol. 27, n.º1, pp. 312-320, 1928.
- [3] G. Birkhoff, "Three Observations on Linear Algebra". *Univ. Nac. Tucumán. Revista A.* vol. 5, pp. 147-151, 1946.
- [4] K. Borsuk, "Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre". *Fund. Math.* vol. 20, pp. 177-190, 1933.
- [5] J. Bourgain, C. Demeter, L. Guth, "Proof of the Main Conjecture in Vinogradov's Mean Value Theorem for Degrees Higher than Three". *Ann. of Math.* vol. 184, n.º2, pp. 633-682, 2016.
- [6] L. E. J. Brouwer, "Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten". *Math. Ann.* vol. 71, pp. 97-115, 1911.
- [7] A. Carbery, S. Valdimarsson, "The Endpoint Multilinear Kakeya Theorem via the Borsuk-Ulam Theorem". *J. Funct. Anal.* vol. 264, n.º7, pp. 1643-1663, 2013.
- [8] R. O. Davies, "Some Remarks on the Kakeya Problem". *Proc. Cambridge Philos. Soc.* vol. 69, pp. 417-421, 1971.
- [9] D. G. de Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Projecto Euclides, IMPA, 5.ª ed., 2018.
- [10] C. Fefferman, "The Multiplier Problem For The Ball". *Ann. of Math.* vol. 94, n.º2, pp. 330-336, 1971.
- [11] J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*. Firmin Didot Père et Fils, Paris, 1822.
- [12] R. Giobbi, *Roberto Light: Juegos de Cartas Automáticos Para Magos Aficionados y Profesionales*. Ediciones Laura Avilés, Madrid, 1996.
- [13] L. Guth, "The Endpoint Case of the Bennett-Carbery-Tao Multilinear Kakeya Conjecture". *Acta Math.* vol. 205, n.º2, pp. 263-286, 2010.
- [14] P. Hall, "On Representatives of Subsets". *J. Lond. Math. Soc.* vol. 10, pp. 26-30, 1935.
- [15] P. Haxell, "On Forming Committees". *Amer. Math. Monthly* vol. 118, n.º9, pp. 777-788, 2011.
- [16] P. Freitas, T. Hirth, A. Silva, J. N. Silva, *Matemagia*. Associação Ludus, 2.ª ed., 2017.
- [17] G. Jorge, "Tratado da Prática Darismetyca: Um Livro Quinhentista Português com Segredos de Ilusionismo". *Magicamente - Revista da Associação Portuguesa de Ilusionismo*, n.º31, pp. 2-6, 2021.
- [18] S. Kakeya, "Some Problems on Minima and Maxima Regarding Ovals". *Tôhoku Science Reports* vol. 6, pp. 71-88, 1917.
- [19] W. Kalush, *Arithmetical Divination From Charlemagne's Court to Leonardo da Vinci*. Published for the Gathering for Gardner #4, Atlanta, 2000.
- [20] T. Klaufl, *A Importância do Baralho Ordenado no Ilusionismo*. Ed. de autor, Grijó, 1998.
- [21] M. Kleber, "The Best Card Trick". *Mathematical Intelligencer* vol. 24 #1 (Winter 2002).
- [22] D. König, "Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe". *Math. in Monogr. und Lehrb. XVI*. Leipzig: Akad. Verlagsges. 1936. XII, 258 S.
- [23] I. Łaba, "From Harmonic Analysis to Arithmetic Combinatorics". *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* vol. 45, n.º1, pp. 77-115, 2008.
- [24] L. Lyusternik, L. Shnirel'man, *Topological Methods in Variational Problems*. (1930) Issledowatelskii Institut Matematiki i Mekhaniki Pri O. M. G. U. Moscow.
- [25] P. Mattila, *Fourier analysis and Hausdorff dimension*. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 150. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [26] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*. *Written in Cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [27] R. O'Donnell, *Analysis of Boolean Functions*. Cambridge University Press, New York, 2014.

[28] J. Pál, "Ein Minimumproblem für Ovale". *Math. Ann.* vol. 83, n.º.3-4, pp. 311-319, 1921.

[29] O. Perron, "Über einen Satz von Besicovitsch". *Math. Z.* vol. 28, n.º.1, pp. 383-386, 1928.

[30] I. J. Schoenberg, "On Certain Minima Related to the Besicovitch-Kakeya Problem". *Mathematica (Cluj)* vol. 4 (27), pp. 145-148, 196.

[31] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[32] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier analysis. An introduction. Princeton Lectures in Analysis*, vol. 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[33] T. Tao, "From Rotating Needles to Stability of Waves: Emerging Connections Between Combinatorics, Analysis, And PDE." *Notices Amer. Math. Soc.* vol. 48, n.º.3, pp. 294-303, 2001.

[34] M. Viazovska, "The Sphere Packing Problem in Dimension 8". *Ann. of Math.* vol. 185, n.º.3, pp. 991-1015, 2017.

[35] J. von Neumann, "A Certain Zero-Sum Two-Person Game Equivalent to the Optimal Assignment Problem". *Contributions to the Theory Of Games*, vol.2, pp. 5-12. *Annals of Mathematics Studies*, n.º.28. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1953.

SOBRE OS AUTORES

Gonçalo Jorge é ilusionista e integra a dupla Tá na Manga, premiada internacionalmente em numerosos eventos dedicados às artes mágicas, nomeadamente no Campeonato do Mundo de Magia. Para além do ilusionismo, GJ é médico.

Diogo Oliveira e Silva é matemático, e trabalha na interface da análise harmónica com a teoria geométrica da medida e as equações com derivadas parciais. Depois de um périplo de vários anos pela Califórnia, Alemanha e Inglaterra, DOS regressou recentemente a Portugal.

Os autores são amigos há mais de duas décadas, mas este é o primeiro artigo que escrevem juntos.

Agradecem ao *referee* anónimo a leitura cuidadosa do artigo, bem como algumas sugestões e comentários.



LOJA
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em www.spm.pt



MARIA DE NATIVIDADE: O QUE EU ANDEI PARA AQUI CHEGAR

Nasceu em 1962, filha de camponeses, numa pequena aldeia da província angolana do Cunene. A sua formação, pontuada por interregnos e episódios próprios de um país em guerra, é um caso exemplar de resiliência e luta por objetivos, numa nação na qual os incentivos reais para que alguém (uma mulher, para mais) alcançasse formação matemática de nível superior eram escassos ou nulos. Maria de Natividade é professora associada da Universidade Agostinho Neto (UAN), em Luanda, onde leciona desde 1995. Atualmente, é chefe do Departamento de Investigação Científica, Inovação, Empreendedorismo e Pós-graduação da Faculdade de Ciências Naturais da UAN, coordenadora dos cursos de pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da mesma faculdade e também do primeiro mestrado em Matemática naquela universidade. Estudou na Universidade Autónoma de Madrid (UAM), na primeira década do séc. XXI, onde começou por obter um Diploma de Estudos Avançados, tendo concluído, em 2010, o doutoramento em Matemática com uma tese em Análise Harmónica, corolário de uma época repleta de dificuldades que sempre soube enfrentar. Desde 2017, ocupa lugares de destaque na União Africana de Matemática, na qual é atualmente presidente da Comissão de Educação Matemática em África. O que de seguida se transcreve é um excerto de uma conversa com a única mulher angolana doutorada em Matemática.

ANA MENDES
Escola Superior de
Tecnologia e Gestão
do Politécnico de
Leiria
aimendes@ipleiria.pt

PAULO SARAIVA
Faculdade de
Economia da
Universidade de
Coimbra, CMUC e
CeBER
psaraiva@fe.uc.pt



Maria de Natividade (janeiro de 2023)

GAZETA [DE MATEMÁTICA] Um cantor português tem um tema em que diz “*Eu vim de longe/De muito longe/O que eu andei pr’aqui chegar*”. Conte-nos como foi o seu percurso educativo, em Angola, até chegar à universidade.

MARIA DE NATIVIDADE A minha infância foi difícil. Sou filha de pais camponeses, a mais velha de 13 irmãs de pai e mãe e mais três só de pai. A minha mãe faleceu muito cedo e depois o meu pai casou-se outra vez. Nasci numa localidade [Nankuiu] que dista cerca de 3,5 km da missão católica do Chiulo [Cunene], onde havia escola primária. Lá podíamos estudar até à quarta classe, não havendo continuidade de estudos. Quando concluí a terceira classe [em 1971] tinha 9 anos e isso

era um problema para o meu pai, porque não sabia o que fazer comigo depois de terminar a quarta classe. O que passou pela cabeça dele foi pedir que o professor me reprovasse, até atingir os 15-16 anos, para depois ser professora ou enfermeira. Assim, em dois anos consecutivos, o meu nome nunca constou na lista dos alunos que estavam em condições de fazer o exame. Só depois é que o professor me contou a verdade! Então, fiquei aí até 1972. Nessa época, fui estudar para Cuamato, acompanhando uma tia que era enfermeira. Foi lá que concluí a quarta classe, em 1973/74. Eu devia ir para o primeiro ano do liceu, mas, por causa da guerra, não era aconselhável permanecer nas cidades. Tivemos de regressar à nossa povoação, onde ficámos até 1977, durante a chamada guerra

de libertação nacional. Nessa altura, o exército do MPLA estava fundamentalmente na parte norte e o da UNITA, que era apoiado pela África do Sul, dominava todo o sul e grande parte do país. A independência do país, em 1975, realizou-se praticamente só em Luanda¹. Depois de 1975, houve uma cooperação entre Angola e Cuba para a formação de crianças angolanas. O meu tio, irmão mais novo do meu pai, propôs que eu fosse estudar para Cuba, mas, infelizmente, não fui e fiquei em Luanda, onde estudei a quinta e a sexta classes, num internato de freiras, o qual veio a ser nacionalizado em 1979. Nessa altura, o meu tio preferiu que eu regressasse ao Cunene, e estudei a sétima e a oitava classes em Ondjiva, capital do Cunene, de 1979 até 1981. O Ensino Médio – que corresponde a do 9.º ao 12.º ano – foi de 1981 a 1985, no Instituto Normal de Educação do Lubango, porque no Cunene não havia Ensino Médio. Nós éramos encaminhados para lá, pois não tínhamos opção de escolha de curso. Tínhamos de fazer um curso em Educação, porque havia muita falta de professores. A licenciatura foi de 1992 a 1997, na Faculdade de Ciências da UAN. Foi a primeira licenciatura em Matemática no país após a independência.

GAZETA Que episódios marcantes recorda dos tempos da guerra civil?

MARIA DE NATIVIDADE Como disse, de 1974 a 1977 não era seguro ir às cidades. Havia uma “caça às bruxas”. Se alguém suspeitasse de que uma pessoa era do outro partido, era simplesmente assassinada. Ninguém podia enterrá-la, ninguém podia chorá-la! Foram anos muito terríveis... Repare que, nesses anos, eu não pude estudar. A outra fase da guerra foi a de 1981, na qual houve a grande invasão sul-africana, que acabou por ser o conflito mais devastador sofrido na minha província, e infelizmente eu nessa altura estava em Ondjiva. Também aí a guerra nos “encontrou”. Tivemos de nos abrigar num refúgio subterrâneo onde também estava o comando da tropa angolana. O meu tio era dirigente e eu e a minha irmã tivemos o privilégio de estar nesse subterrâneo, porque a maior parte da população não estava lá. Eu dormi no quarto das comunicações. O ataque, aéreo e terrestre, começou mais ou menos por volta das 6h30. A essa hora, recebemos a comunicação de que os invasores tinham tomado o aeroporto. A intenção, segundo eles, não era matar civis. Realmente, na semana prévia ao bombardeamento, houve uma comunicação por parte deles nesse sentido, apelando às populações que abandonassem a

cidade, porque eles iriam invadi-la. Num cenário de cidade arrasada, ficámos uns tempos sob o domínio dos sul-africanos, os quais, após muita insistência, nos deixaram regressar às povoações rurais. E só em 1981 fomos para o Lubango, para dar continuidade aos meus estudos no Ensino Médio.

GAZETA Sabemos que esteve prestes a prosseguir os seus estudos na Bulgária. Quando foi isso e por que razão tal não se veio a concretizar?

MARIA DE NATIVIDADE Antes disso, importa referir algo mais acerca do período após a conclusão do meu Curso Médio [1985-1992]. Este curso não permitia o acesso direto à universidade. Era necessário dar aulas durante dois anos no Ensino Secundário (chamava-se “produção obrigatória”) e depois é que teria direito a seguir para a universidade, mas continuávamos a não ter o direito de escolher o curso. Éramos encaminhados para a Educação [formação de professores do Ensino Médio], para fazer um curso no Instituto Superior de Ciências da Educação (ISCED). Foi então que surgiu também uma bolsa para ir para a Bulgária, para fazer a licenciatura em Medicina, e o meu tio decidiu candidatar-me. Vim então do Lubango para Luanda e a bolsa deixou de existir e não tive direito a ir para a Bulgária. Decidi ficar em Luanda, porque nessa altura já lá havia um ISCED. Fiz apenas o primeiro ano, porque verifiquei que não tinha qualidade, não tinha o nível que eu pretendia. Então pedi ao reitor para fazer a transferência para Engenharia Química, o que veio a ser autorizado. Mas, apesar disso, houve um problema. Engenharia Química era um curso de elite e não entrei simplesmente porque sou negra! Ainda fiquei três anos a lutar por isso. E as pessoas pensaram que não, que não podia ser! Só quando fui acompanhada por uma amiga branca (minha colega do Ensino Médio) é que o responsável me disse para trazer a documentação! Mas nessa altura ponderei, e optei por não seguir Engenharia Química. Como já tinham alterado as modalidades de acesso à universidade – já não era pelo encaminhamento, mas pelo expediente académico –, e como tinha concluído o Ensino Médio com média de 18 (fui a melhor aluna da época), decidi fazer a licenciatura em Matemática na Faculdade de Ciências.

GAZETA Ou seja, Medicina e outras áreas nunca foram o seu sonho. Acabava por fazer um bocadinho aquilo que as pessoas esperavam de si, ou não foi assim?



▲ Os filhos Daniel e Mário em momento de recreio (Madrid)

◀ Maria de Natividade, com os filhos, Didier, Daniel e Mário (Madrid)

MARIA DE NATIVIDADE Era difícil [naquela época] ter sonhos! O objetivo era estudar qualquer coisa, para sair da miséria. Quando surgiu a oportunidade...

GAZETA Esse é um aspeto muito importante para dizer aos nossos alunos portugueses atuais, porque eles não entendem isso, que de facto o ensino era a forma que as pessoas tinham para escapar de um destino miserável. Disse-nos que a sua foi a primeira licenciatura em Matemática numa universidade angolana. Que professores iam dar-vos aulas?

MARIA DE NATIVIDADE Em 2022, o Ensino Superior completou 60 anos em Angola e em Moçambique. Era no início chamado Estudos Gerais. Após a independência, passámos a ter a Universidade de Angola, atualmente chamada Universidade Agostinho Neto, primeiro Presidente de Angola. No início, como não havia professores suficientes, os estudantes apenas tinham aulas até ao 3.º ano, e depois tinham de continuar os estudos noutro país. Fundamentalmente, iam para Portugal e alguns para o Brasil, para terminar a licenciatura em Matemática. Mas nessa altura, praticamente não houve licenciados

em Matemática. Só houve um, pois todos os que saíram formados acabaram por fazer Computação ou Estatística. Quando eu entrei, em 1992, passámos a ter licenciatura em Matemática no país. Havia nessa altura alguns professores estrangeiros, por exemplo da então Checoslováquia, outros eram búlgaros, alguns vietnamitas e, mais tarde, alguns angolanos licenciados em Computação e Ensino da Matemática no exterior.

GAZETA Além das dificuldades próprias de um país em guerra civil, que já nos descreveu, e de entraves culturais, que outras barreiras teve de vencer para prosseguir os seus estudos?

MARIA DE NATIVIDADE Essas já vieram na universidade. Quando fui para a UAN, eu já era mãe de um filho.

GAZETA Quando e em que circunstâncias conheceu o pai do seu primeiro filho?

¹ Na época, três territórios angolanos chegaram a declarar-se independentes.

MARIA DE NATIVIDADE Conheci-o em Luanda, em 1987. Porque eu ainda trabalhei durante uns tempos nas chamadas Brigadas Populares de Vigilância, para poder sobreviver, e ele era também um jovem militar e ligado à organização juvenil do MPLA. O meu filho nasceu em 1988. Foi fruto de “amor à primeira vista” e um pouco acidente! Nesses tempos, eu dava aulas no Ensino Médio. Mas eu não tinha casa em Luanda. Arrendava uma casa sem condições, porque os salários eram muito baixos. Nós nunca chegávamos ao fim do mês [com dinheiro]. E então passei algum tempo com o meu filho vivendo em casas de amigas. Não fiquei com o pai do meu filho. As nossas condições eram más. Uma vez, o meu filho chegou a desmaiar com fome, porque ficávamos tempos sem comer. Eu tinha ido à universidade a pé. Havia autocarros, sim, mas chegavam sempre sobrelotados e era muito difícil conseguir subir a um. Passava a manhã na universidade e da parte da tarde dava aulas e só regressava à noite. Quando cheguei a casa, tinha o meu filho inanimado. Apesar das dificuldades, consegui tirar a licenciatura cinco anos depois, já grávida do meu segundo filho.

GAZETA Como é que tomou a decisão de continuar os seus estudos na UAM?

MARIA DE NATIVIDADE Nós aqui não tínhamos praticamente nenhum apoio para fazer as pós-graduações. Mas eu sempre quis e lutei por continuar a estudar. Quando estava a fazer a licenciatura, fui convidada para ser monitora, porque era a melhor aluna naquela altura. Aliás, fui a única a terminar o curso ao fim de cinco anos. Quando terminei o 3.º ano, passei a ser monitora e já dava aulas práticas, e quando concluí a licenciatura passei a dar aulas já como professora, sendo também responsável pela área de Matemática. Mas eu disse que queria sair para fazer o mestrado, porque não me sentia capacitada e em condições de ser professora responsável por disciplinas, tendo apenas a licenciatura. Mas não queriam que eu saísse, porque não havia suficientes professores e porque eu era a responsável do curso. Como não me deixavam prosseguir os estudos, tomei a seguinte posição: “Se não saio, não vou reger nenhuma disciplina, porque não estou em condições de o fazer. Vou passar a dar apenas aulas práticas e nem sequer vou continuar a assumir a responsabilidade pelo setor da Matemática.” Foi assim que a direção da faculdade autorizou que eu fosse para o estrangeiro continuar os meus estudos. Teria de conseguir uma matrícula numa universidade no estrangeiro e só depois a UAN iria conceder-me um apoio. Nessa altura, comecei a luta para conseguir tal matrícula. Um amigo meu que estava em Cuba



Harmonic Analysis International Conference – 60th anniversary of José García Cuerva (El Escorial, novembro de 2009)

ainda tentou que eu fosse para lá, mas eu não quis, porque a minha primeira intenção sempre foi continuar os estudos em Inglaterra. Depois, um amigo meu da embaixada de Espanha em Luanda disse-me que conhecia alguém que tinha feito o seu doutoramento na área de Economia na UAM e que, se eu quisesse, ele falaria com esta pessoa para me matricular. Enviei-lhe a documentação necessária e ele acabou por me matricular na UAM.

GAZETA Quando viajou para Madrid, tinha já contactos na UAM na área de Matemática?

MARIA DE NATIVIDADE Eu não sabia nada! Aquilo foi uma aventura das mais fortes. Porque em 2001 eu já tinha três filhos e o mais pequeno tinha apenas 11 meses (o segundo tinha 3 anos e o mais velho, 12) e tinha de levá-los para Espanha, mas a embaixada disse-me que a lei não mo permitia. A audiência com o cônsul de nada serviu e passaram-me um visto de estudante. Tratei do meu passaporte e também dos dos meus filhos. Nessa altura havia um negócio de vendas de vistos na embaixada portuguesa em Angola (750 USD cada). Como na faculdade já me tinham dado o dinheiro para o ano inteiro, eu aproveitei o “esquema” e comprei os vistos dos meus filhos para o espaço Schengen. Eu, que nunca tinha saído do país, fi-lo com três crianças! A pessoa que tinha feito a minha matrícula na UAM tinha-me garantido que já tinha casa arrendada para nós. E fui nessa aventura. Cheguei a Madrid, mas infelizmente o senhor que nos recebeu não tinha nada do que havia prometido e vi-me sem casa onde morar. Não tinha nada! Levou-me para um *hostal* no centro de Madrid, no Sol [bairro de Madrid], em novembro, uma pensão que não tinha sequer condições para cozinhar. As aulas já tinham começado e para conhecer a universidade o senhor foi comigo apenas no primeiro dia, dando-me as indicações para lá chegar de metro, e por ali me deixou. Foi um momento bastante duro, porque naquela época em Espanha as pessoas não alugavam casas a estrangeiros (e ainda menos aos que tinham crianças), e eu desesperava, porque não conseguia arranjar casa. De modo que fiquei durante um mês no *hostal* sem poder cozinhar, fundamentalmente para o meu bebé, porque nós comíamos num restaurante próximo da pensão. Tinha de aquecer o leite do biberão na torneira de água quente para o meu filho mais pequeno, que tinha problemas de saúde. E eu deixava-os na pensão para ir à universidade. O meu filho de 12 anos era quem cuidava dos seus irmãos. Até que, passado um mês, com ajudas dos meus colegas de Angola que estavam

lá a fazer o doutoramento, lá consegui uma casa. Mas era uma casa completamente vazia, sem luz, sem água, sem gás, e em dezembro fazia muito frio. Não era bom, mas o que eu queria era apenas um teto!

GAZETA Tendo em conta esta fase muito dura e conturbada dos seus primeiros tempos em Madrid, quem é que a apoiou em termos científicos?

MARIA DE NATIVIDADE Quando cheguei a Madrid, não sabia como funcionavam as coisas. Antes de ir para lá, devia ter contactado algum professor da universidade, para começar logo a trabalhar com ele, mas eu não sabia isso. Como se costuma dizer, fui para lá às cegas. Assisti às aulas, fiz o Diploma de Estudos Avançados (DEA, equivalente ao mestrado) em Equações Diferenciais e Análise. Em Equações Diferenciais tinha bastantes problemas de base. Quando pensava que tinha uma licenciatura, constatei nessa altura que não tinha licenciatura nenhuma! Comecei a perceber por mim própria que precisava de adquirir bases e decidi frequentar também as aulas da licenciatura, mais concretamente da disciplina de 4.º ano de Equações Diferenciais com Derivadas Parciais, sobretudo para fazer o meu trabalho para o DEA. Mas depois a minha tutora viu que eu estava muito melhor em Análise do que em Equações Diferenciais e aconselhou-me a seguir para doutoramento nesta área. Aí começou outra “guerra”, porque não tinha diretor de tese. Tive de ir falar com os professores da especialidade e perguntar se algum estava disposto a dirigir a minha tese. Então todos me disseram que não, porque já tinham estudantes de doutoramento [a seu cargo]. Até que um dia, na sala onde comiam os professores e bolsiros do Departamento de Matemática – há que dizer que tive muito apoio da UAM, pois apesar de não ter bolsa de Espanha, tinha gabinete, tinha chave [de acesso ao edifício], podia lá comer com os meus colegas bolsiros espanhóis –, estávamos sentados a comer e um dos professores, o Gustavo Garrigós – que está neste momento na Univ. de Múrcia e com quem tenho alguns trabalhos conjuntos – perguntou-me se eu já tinha diretor de tese. Respondi-lhe que não. Ele informou-me que o professor Eugenio Hernández nesse momento estava sem ninguém. E aconselhou-me a falar com ele. Fui ter com o Eugenio Hernández e na conversa ele disse-me que em Espanha o doutoramento “*no se regala*” (não se oferece), que dependia do trabalho de cada um. E eu disse-lhe que não estava à espera que me oferecessem coisas. Se o Eugenio, ao fim de algum tempo, visse que eu não estava em condições de



Escola Africana de Matemática (Univ. Agostinho Neto, Luanda, agosto-setembro de 2016)

avançar para doutoramento, ele que me dissesse e eu iria fazer outra coisa. Obviamente que eu estava ali para fazer tudo como deve ser. Ficou então o trato feito e avançámos para o trabalho. O Eugenio trabalha em Análise Harmónica e eu, durante o DEA, não tinha feito nenhuma disciplina ligada a esta área, pelo que não sabia muito bem o que é que eu, afinal de contas, iria fazer. O Eugenio aconselhou-me então a começar por estudar Análise Harmónica e depois Teoria da Aproximação. Além disso, ele tem um bom livro sobre *wavelets*² e aconselhou-me depois a estudar este tema. Fiquei praticamente dois anos a estudar Análise Harmónica e Teoria da Aproximação. O Eugenio foi-me dando alguns artigos que tinham sido produzidos naquela área. Demonstrei com detalhe os resultados desses artigos e fazia várias apresentações no quadro.

GAZETA Começou depois a trabalhar na sua tese. Que tipo de problemas abordou?

MARIA DE NATIVIDADE Bem, um dos propósitos centrais da Teoria da Aproximação é caracterizar os espaços de aproximação, ou seja, caracterizar o conjunto de fun-

ções que têm uma certa ordem de aproximação estabelecida por um determinado método de aproximação. Dado um índice de decaimento do erro da aproximação, pretende-se ver quais são os espaços que podem ser aproximados com esse índice. Suponhamos que estamos a trabalhar com as chamadas bases incondicionais. É preciso saber quais são as bases que nos dão a quase melhor aproximação (as que minimizam o erro). Chegámos aos resultados de Temlyakov que demonstram que as bases que conduzem à quase melhor aproximação são as incondicionais e democráticas. Então, os três problemas principais que abordei na minha tese foram os seguintes. Primeiramente, supondo que trabalhamos com bases incondicionais não necessariamente democráticas num espaço quasi-Banach, descrevemos as melhores inclusões possíveis dos espaços de aproximação utilizando certas classes de subespaços. Isto consegue-se recorrendo a espaços de Lorentz discretos com pesos. Depois, procurámos descrever explicitamente as chamadas funções de democracia (os pesos a que me referi no primeiro problema são estas funções de democracia) quando se consideram bases de *wavelets* em diversos espaços de funções para os quais tais bases

são incondicionais. Por fim, estudámos a possibilidade de identificação dos espaços de Lorentz como espaços de Besov generalizados. Ou seja, quando possível, identificámos a classe de subespaços que antes referi como espaços de tipo Besov generalizados quando se consideram bases de *wavelets*. Generalizam-se deste modo certos resultados clássicos de caracterização de espaços de aproximação em termos de espaços de Besov.

GAZETA Para que permanecesse em Espanha, em vez de voltar para Angola, e pudesse avançar para o doutoramento, teve de haver conversações com a UAN. Foi um processo pacífico?

MARIA DE NATIVIDADE Comigo muito poucas coisas são pacíficas. Quando fui para Espanha, de facto, a auto-riização era apenas para poder fazer o mestrado. Depois, teria de fazer o “vaivém”, se quisesse seguir para doutoramento: seis meses em Espanha e seis meses em Angola. Claro que, com três crianças a cargo, essa possibilidade era manifestamente impraticável. Então simplesmente decidi matricular-me no doutoramento assim que concluí o DEA. Em Angola, cortaram-me nessa altura a bolsa de estudos e eu fiquei sem recebê-la durante dois anos. Não pude voltar para Angola, porque nem sequer tinha dinheiro para o avião. Então o que eu fazia era cozinhar para os meus colegas. Eles, em vez de irem à cantina ou ao restaurante da universidade, davam-me os *bonos* da comida para me ajudar. Tive também ajuda de alguns familiares e o salário em Angola ainda se manteve. A dada altura, disseram-me que iria deixar de ter apoio. Nesses dois anos, consegui que alguém me emprestasse dinheiro para ir a Luanda falar com o decano da minha faculdade e pedir-lhe que me ajudasse, uma vez que já tinha começado o doutoramento. Ele disse-me que teria de regressar. Eu respondi-lhe que, tendo crianças (uma das quais com problemas de saúde), não era possível fazer o “vaivém”. O mais pequeno é autista (tem síndrome de Asperger). O decano passou-me então uma carta para ser recebida pelo Ministro da Educação, a quem expus a minha situação. Ele autorizou a bolsa, mas apenas por dois anos. Expliquei-lhe que, na minha situação, era impossível concluir o doutoramento em Matemática nesse tempo, mas o ministro foi intransigente. Não terminei, e pedi a renovação da bolsa, que ao princípio me foi negada. Perante a minha insistência, pediram-me que o diretor de tese produzisse um relatório descrevendo o estado de progressão dos trabalhos e uma data previsível para conclusão. O Eugenio elaborou o rela-

tório, referindo que iríamos precisar de pelo menos mais dois anos. Perante isto, o ministério renovou-me a bolsa. Nessa altura, também por sorte, a Universidade Óscar Ribas – uma universidade privada em Luanda – precisava de convénios de cooperação com o estrangeiro e precisava de um representante para Espanha. Fizem então contrato comigo com esse objetivo e pagavam-me o mesmo valor que a bolsa, o que foi uma grande ajuda.

GAZETA A dada altura, teve de colocar os seus filhos na escola. Teve de fazer isso tudo sozinha?

MARIA DE NATIVIDADE Sozinha, no início. O meu filho mais novo tinha problemas respiratórios e teve de fazer pelo menos cinco cirurgias. Aos 3 anos ainda era bebé, mas tinha de ir à escola. Houve as situações de racismo, mas em termos gerais, onde encontrei apoio à saúde, ajuda, amor ao próximo, foi em Espanha. Angola é o meu país, mas não há comparação possível. O meu filho levava aparelhos para respirar e chegava a ter de ser hospitalizado semanalmente. Nessas ocasiões, eu dormia no hospital, depois pedia a uma amiga que ficasse com ele e eu ia para a universidade. Tive de tirá-lo do sistema público de saúde para ser operado no privado. Foi-lhe detetada uma anemia crónica e os médicos do hospital público entendiam que ele não tinha condições para ser operado. A criança quase morreu, respirava com imensa dificuldade e passava a vida a tomar antibióticos. Tive de fazer um seguro de saúde para ele ser operado numa clínica privada. E foi só aí que ele começou a melhorar, mas até aos 4 anos o meu filho era como um bebé: revelava atrasos no desenvolvimento, na escola praticamente só gritava e ainda não se tinha detetado o autismo. Teve uma professora espetacular. Em Espanha, quando uma criança não consegue ir aos 3 anos ao quarto de banho, é chamada a mãe. Mas ela nunca me chamou. Ela levava a roupa para o menino e mudava-a! O do meio ficava nessa escola todo o dia, recebia apoio da Assistência Social, que lhe fornecia as refeições. E era o mais velho quem ia buscá-los todos os dias. Até que um dia ele chegou tarde e fui avisada de que a situação não era aceitável em Espanha. Foi então que contratei uma babá.

GAZETA Foi sem dúvida uma fase muito difícil na sua vida. E suponho que a adaptação à língua também terá

² Eugenio Hernández and Guido Weiss, *A First Course on Wavelets*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, USA, 1996.

sido complicada nos primeiros tempos.

MARIA DE NATIVIDADE Vivi dez anos em Madrid e nunca fui a um museu. Foi uma vida de sacrifício. Saía da universidade, corrigia trabalhos, via filmes infantis, aos sábados levava os meus filhos ao parque porque não tinham culpa de ter nascido e ao domingo passava a ferro. Ainda assim, senti-me bem em Espanha. Quanto à língua, para mim foi um pouco difícil, mas no caso dos meus filhos eles estavam a estudar, o que facilitou. Sublinho que, em Espanha, existe uma política em que as crianças, estando legais ou não, têm sempre direito a assistência na saúde e na educação.

GAZETA Acabado o seu doutoramento, voltou para Angola. Provavelmente, teve oportunidade de ficar em Espanha. Porque optou por regressar? Espírito de missão?

MARIA DE NATIVIDADE Sim, tive bastantes oportunidades. Apesar de ser estudante, era como se fosse um elemento do departamento. Participava em projetos de investigação, em congressos, em Escolas de Verão e outros eventos. Sempre tudo pago pela UAM. Vigiei exames quando foi necessário e, em muitos momentos, o Departamento de Matemática da UAM pediu que eu ficasse para dar aulas.

Não fiquei, em primeiro lugar, porque tinha obrigações familiares. Em segundo lugar, senti que era mais útil em Angola para o desenvolvimento da Matemática, porque não havia doutorados e havia (e continua a haver) poucos professores de Matemática. Muitas aulas eram dadas por engenheiros geógrafos e licenciados em Ensino da Matemática.

GAZETA Já focados no seu regresso a Angola e no seu contributo para a melhoria do ensino da Matemática em Angola, que disciplinas e em que cursos tem lecionado ao longo dos anos?

MARIA DE NATIVIDADE No regresso, assumi a coordenação do curso de Matemática, à época dirigido pelos meus colegas engenheiros geógrafos, uma vez que Matemática, Engenharia Geográfica e Ciências da Computação formavam um só departamento. Considerei que não estavam aptos para dirigir o curso e só mais tarde, já comigo na direção, é que começaram a entrar os primeiros licenciados em Matemática contratados como assistentes estagiários. Esta foi a minha primeira missão. Consegui

também que o Departamento de Matemática, Engenharia Geográfica e Ciências da Computação fosse dividido em três. Em 2014 fui nomeada chefe do Departamento de Matemática. Lutei para que os assistentes estagiários pudessem fazer pós-graduações e mestrados fora de Angola. Fiz esse trabalho de forma individual, quer falando com o reitor, quer com o Ministério do Ensino Superior. Infelizmente, só consegui fazer sair um assistente estagiário para fazer o mestrado na UAM. A situação em Angola é muito difícil, porque as regras não se cumprem. Reparem que, em princípio, um assistente estagiário só deveria ocupar esse lugar, sem mestrado, por dois anos. Na realidade, o que acontece é que temos casos em que estão nessa posição há mais de 20 anos. Por outro lado, esses assistentes estagiários podem dar aulas em vários sítios (e fazem-no nas universidades públicas e nas privadas), e não estão dispostos a sair do país para estudar.

Outra coisa que tentei fazer foi admitir professores convidados de universidades estrangeiras, para suprir as falhas que tínhamos enquanto os nossos professores faziam a sua formação. Trouxe professores de Espanha, Itália, Cuba, etc., que ficavam um semestre. No entanto, como não havia uma fiscalização séria, esta foi uma tarefa difícil, porque os jovens acabaram por se acomodar, em vez de continuar a formação pós-graduada.

Esta fase foi muito cansativa, pois tinha também a meu cargo a orientação de todos os assistentes estagiários, e ainda tinha de contratar os professores visitantes para dar aulas de superação aos licenciados.

Estas reformas começaram a criar situações difíceis. Previamente à minha chegada à coordenação do curso, até ao segundo ano das suas licenciaturas, os alunos tinham tido disciplinas com poucas bases de Matemática, e de repente começam a ter, no terceiro e no quarto anos, disciplinas optativas que requerem muitas bases de Matemática, lecionadas por mim e pelos professores convidados. Foi aí que começaram a existir revoltas por parte dos estudantes e não contei com apoio por parte da direção da universidade. Aqui em Angola é tudo político, o que interessava era dizer que estava a funcionar e que os estudantes aprovavam e que se licenciavam não sei quantos. Não interessava se os estudantes sabiam ou não. A qualidade não era importante. Foi nessa altura que deixei de ser chefe de departamento, para que acabasse essa revolta dos estudantes. O departamento voltou a ser gerido outra vez por pedagogos, geólogos, engenheiros geógrafos e geofísicos. Só mais recentemente é que as posições mudaram. O país está a tentar ser mais sério, a tentar cumprir as regras. Te-

mos uma nova direção no departamento que quer mudar as coisas e que está a reformular o curso.

GAZETA Tem pugnado por introduzir rigor matemático e qualidade no ensino universitário angolano. Qual é a sua visão acerca da qualidade do ensino pré-universitário?

MARIA DE NATIVIDADE É verdade que a universidade está mal, mas as lacunas no conhecimento são prévias. O grande problema está no Ensino Geral. Dou aulas aos cursos no ISCED, mesmo não sendo pedagoga, para tentar perceber se há forma de resolver os problemas dos cursos na área do ensino. Muitos estudantes entram nas universidades com dificuldades ao nível do 7.º e do 8.º anos de escolaridade, porque os seus professores não têm nível para dar aulas no Ensino Geral.

É muito difícil recuperar esse tipo de estudante numa universidade, implica muito esforço. Reforço esta ideia, porque tais professores são meus alunos no mestrado de Ensino, revelando imensas dificuldades nas disciplinas de Matemática. Muitos deles não sabem fazer a divisão polinomial, quanto mais ensiná-la! Logo, se não conhecem a ciência que ensinam, nunca poderão ensinar convenientemente. Este é o perfil do professor do Ensino Geral.

Podíamos pensar que uma forma de solucionar este problema é a contratação de professores convidados com qualidade. Só que os professores estrangeiros, quando vêm para Angola, encontram estudantes com muito baixo nível e, conseqüentemente, baixam também eles o nível do ensino que ministram. São poucos os professores que continuam com o mesmo rigor. Eu muitas vezes dizia-lhes que não deveriam baixar o nível, mas eles acabavam por ceder. Os nossos estudantes não estão em condições de fazer uma pós-graduação numa universidade séria. Nós temos um problema sério com os doutoramentos em Angola. Há agora uma febre em realizar doutoramentos em Cuba, noutras áreas que não a Matemática. Teoricamente, passam seis meses em Angola, outros seis em Cuba e regressam com uma tese e sem publicações. Parece que na área da Matemática isso não acontece, já que as universidades cubanas que outorgam pós-graduações em Matemática são bastante rigorosas.

Angola tem cooperação com Cuba desde 1977. Até onde eu sei, Cuba só formou dois mestres angolanos em matemática até aos dias de hoje, e ambos em Ensino de Matemática. Porque quando tentam fazer em Matemática não conseguem. Não têm bases. Ora, os professores do Ensino da Matemática nunca fizeram formação em Matemática pura



Durante o 9.º Congresso Pan-Africano em Matemática (Rabat, julho de 2017)

e dura. Quando regressam a Angola, são esses professores que depois irão lecionar na universidade.

Esta é a minha grande luta. Foi isto que eu precisei de dizer à sociedade: que cursos em Ensino de Matemática não são Matemática. Luta que travo até hoje.

GAZETA Nesta sua preocupação, sente-se devidamente acompanhada pelos seus colegas e pelos órgãos diretivos da sua universidade?

MARIA DE NATIVIDADE Atualmente já entendo um pouco esta minha preocupação, mas antes não. Por exemplo, na primeira edição do mestrado em Matemática e Aplicações, que coordeno e de cuja existência discordo ao início, por não ter professores qualificados (sem doutores), funciona mesmo que o próprio regulamento diga que é obrigatório o corpo docente ser constituído por 70% de professores nacionais. Isso não acontece: apenas somos dois. Se eu tivesse optado por não coordenar o mestrado, os órgãos diretivos iriam criá-lo de qualquer forma, porque já era essa a sua intenção. Para evitar que tal aconte-

cesse e que se perpetuasse esta má massificação, decidi arrancar com o projeto de criação do mestrado.

GAZETA Pode então explicar-nos melhor como nasceu e em que ponto está o mestrado em Matemática e Aplicações da UAN?

MARIA DE NATIVIDADE Se, por um lado, o Ministério do Ensino Superior, Ciência, Tecnologia e Inovação colocou barreiras ao projeto, por outro, fomos bafejados pela sorte, porque a Fundação Calouste Gulbenkian (FCG) nessa mesma época decidiu apoiar a criação de mestrados em Matemática nos PALOP. Nessa altura, já era membro da União Africana de Matemática, onde tinha alguns contactos que me ajudaram, e obtive ainda o apoio de alguns colegas, quer da UAM quer da Universidade de Coimbra, como universidade parceira. Posteriormente submeti o projeto da sua criação à FCG, que o apoiou.

O ministério levantou vários problemas alegando que não tinha condições, mesmo sabendo que era preferível para os professores de Matemática da UAN frequentarem um mestrado na própria UAN a terem de se deslocar para outro país. Apesar disto, só quando a responsável da FCG falou diretamente com a ministra é que desbloquearam a situação, aprovando o mestrado. Temos agora a acabar o mestrado cerca de dez estudantes. Foi necessário que estes estudantes fizessem um curso de nivelamento de seis meses, em que estudaram Análise Funcional, Topologia, Teoria da Medida, Geometria, Álgebra, etc. O curso foi lecionado por mim, por dois mestres e um professor do departamento e colegas da UAM e da Universidade de Múrcia.

GAZETA Nesta sua luta sente-se sozinha ou há gente que luta ao seu lado?

MARIA DE NATIVIDADE Esta luta é muito solitária e percebo porque o é. O que não percebo é porque é que os políticos não deixam atuar os especialistas e não ouvem o que estes dizem. As coisas estão a mudar. Por exemplo, temos um convénio do programa Erasmus+ com a Universidade de Múrcia. Todos os anos enviamos um bom estudante para lá. Os que vão percebem como as coisas são diferentes e começam a apoiar-me quando regressam. Só que no que respeita aos gestores, nada mudou. A UAN fez agora 60 anos de existência e há 53 que existe a licenciatura em Matemática. Como é que, até agora, a universidade só formou um doutor em Matemática (que fui eu)? Os outros

dois angolanos doutores em Matemática (um deles, atual chefe do departamento) estudaram e obtiveram a licenciatura e o mestrado em Ensino da Matemática em Cuba. Isso é muito grave e revela um atraso imenso face aos nossos irmãos em Moçambique, pois estes já estão a trabalhar no projeto de criação de um doutoramento. Como já disse, não existe uma política integrada do desenvolvimento da Matemática em Angola. Não há controle. Abrem-se universidades e não se verifica a sua qualidade. Para mim, Angola nunca foi próspera ou rica: foi e é pobre porque não tem qualidade de ensino. O que se passa em Angola na área da Matemática não tem comparação com nenhum outro país de África. A Matemática é em todos os países o suporte para as ciências, porque todos os cursos de engenharia têm disciplinas de matemática lecionadas por matemáticos. Cá isso não acontece.

GAZETA Como chega a secretária da Comissão de Educação Matemática em África, uma das comissões de trabalho da União Africana de Matemática?

MARIA DE NATIVIDADE África não reconhece Angola em termos académicos. Organizei em 2016 em Angola a Escola Africana de Matemática em Análise Harmónica, Equações Diferenciais com Derivadas Parciais e Aplicações, patrocinada pelo CIMPA (Centro Internacional de Matemática Pura e Aplicada), direcionada aos mestrados e doutorandos. Vieram muitos estudantes de África. Participaram professores europeus e africanos e fui convidada para dar uma conferência na Costa do Marfim em Teoria de Aproximação. Nessa altura, estava a ser preparado o 9.º Congresso Pan-Africano em Matemática. Foi aí que a ex-presidente da União e outras pessoas me perguntaram diretamente como é que eu trabalhava em matemática em Angola, se em Angola não havia nada. Expliquei-lhes que colaborava com a UAM e dessa conversa resultou que fui proposta como secretária da Comissão de Educação Matemática em África.

GAZETA Que tarefas e que objetivos estão associados a este cargo?

MARIA DE NATIVIDADE A União Africana de Matemática é uma organização similar à União Internacional de Matemática. O objetivo da comissão que dirijo consiste em trabalhar com os governos de cada país, através dos seus ministérios, para melhorar as condições e a qualidade do ensino da Matemática. Todas as instituições que visam al-

cançar tais objetivos colaboram com a comissão.

Em África, a maioria dos países percebe esses objetivos e os seus governos colaboram, mas lamento que em Angola isso não aconteça. Por exemplo, nunca fomos chamados para apreciação dos manuais, nem para elaboração dos programas. Podia pensar-se que é porque é comigo e eu tenho anticorpos, mas não. É mesmo porque não ligam e porque consideram que só eles é que têm de tratar disso. Em todas as áreas tomam medidas sem estudo prévio, sem consultarem especialistas e técnicos nos temas. Nos restantes países de África já não é assim.

Estive em Moçambique a coordenar, pela parte angolana, a comissão científica da conferência nas comemorações dos 60 anos do Ensino Superior em Moçambique e Angola. Tratou-se de uma organização conjunta. Trabalhei com o Ministério do Ensino Superior de Moçambique. Nunca os quadros do ministério tomaram alguma decisão sem nos consultar, e nessa época tudo o que conversávamos era à distância.

GAZETA Falou-nos já de alguns projetos de cooperação em que está envolvida. Em termos de atividade científica, continua a publicar na sua área de doutoramento?

GAZETA Em Angola temos alguma dificuldade em fazer investigação. Primeiro porque não temos colegas com quem trabalhar ou grupos de investigação, e depois porque temos uma quantidade enorme de horas de docência, dada a falta de professores. Acabei por ter de parar, pois a ideia era continuar os meus trabalhos de doutoramento utilizando outras bases, como os fractais. Recentemente, estive numa estada em Navarra. Apesar de não haver um grupo de Análise Harmónica, colaborei com o grupo de investigação de Lógica em *fuzzy systems* aplicada à teoria de grupos. Acabei por estudar estes temas e gostei bastante, bem como da colaboração com os colegas de lá. A minha ideia é continuar a trabalhar, porque estamos a iniciar um projeto de criação de um doutoramento regional em Matemática apoiado pela FCG, coordenado por Angola e Cabo Verde em parceria com a Universidade de Coimbra, mas onde também colaborarão professores de Espanha e da África do Sul. Será nas áreas de Análise, Álgebra e uma pequena parte em Matemática Aplicada. É focado na Matemática Pura, onde Cabo Verde e Angola têm as maiores carências.

GAZETA Depois destas suas lutas e imaginando-se daqui a uns largos anos, qual é o sonho que gostava de ver cum-

prido na sua universidade?

MARIA DE NATIVIDADE Sei que é uma luta, mas também sei que não vou ser eu a conseguir resolver. Ficaria satisfeita se eu conseguisse que a UAN pudesse comparar-se com as universidades vizinhas, da África Austral. Falta muito. Metaforicamente falando, eles estão já a subir as escadas e nós fomos imitando caminhos que não são os caminhos. Quero pelo menos que consigamos estar no caminho certo, no primeiro degrau da escada, mas com alicerces firmes.

GAZETA Face às recentes eleições em Angola, sente que há ventos de mudança?

MARIA DE NATIVIDADE Sou um pouco radical nesse sentido. Na minha opinião, a continuidade do mesmo governo não me dá ideia de grande mudança, mas os resultados das eleições mostram que há maturidade por parte dos cidadãos e há esperança de que isso altere algo. No meu ponto de vista, as eleições não foram nem livres nem transparentes, mas apesar disso existe um povo que não está satisfeito e que está mais consciente. Não vai ser fácil continuar a fazer tudo da forma que se fazia antes. Há pelo menos uma vontade de mudança. Mas uma coisa é a vontade, outra coisa é a capacidade de o fazer. No meu ponto de vista, o fundamental é a capacidade de se fazer as coisas. Às vezes uma pessoa tem muita vontade, mas não está capacitada. E o problema é que não se nomeiam pessoas capacitadas para tratar de assuntos tão sérios como a Educação ou o Ensino Superior. Em Angola há ainda muita criança que não estuda – crianças do mato, mas também de Luanda. No tempo colonial, eu que sou do mato tive oportunidade de estudar. Havia essa preocupação com a educação, de que as crianças estudassem, independentemente da sua origem. Hoje isso não existe. Quem hoje nasce no mato nem sequer é registado.

GAZETA Para terminarmos, de onde lhe vem a sua força?

MARIA DE NATIVIDADE É também uma questão que o meu filho do meio me coloca. Nasci no campo, num país onde não tinha nenhuma motivação de nenhuma espécie para estudar, e ele pergunta-me de onde veio essa capacidade para estudar e lutar. Não recebi essa característica de ninguém, mas sempre gostei muito de estudar e tive um grande incentivo do meu tio durante a primeira etapa dos meus estudos. Acho que foi isso.



NUNO CAMARINHO
Universidade
de Aveiro
nfc@ua.pt

A LITERATURA ARTIFICIAL

O que separa o ser humano de uma máquina? Ou será que somos todas máquinas programáveis?

A utilização da Inteligência Artificial (IA) para tarefas cada vez mais complexas e intimamente associadas ao que consideramos ser a essência humana, como sejam a produção de arte, a literatura ou o conhecimento, está na ordem do dia e prevê-se que venha a estar cada vez mais. Por um lado, discute-se o limite da tecnologia, até que ponto uma máquina programada e “educada” por humanos poderá, eventualmente, replicá-los ou mesmo ultrapassá-los do ponto de vista cognitivo, criativo e do domínio técnico das áreas em que possa ser aplicada; por outro, existem vastas implicações éticas, sociais, políticas e práticas que abordam a progressiva substituição de trabalhadores humanos por algoritmos capazes de desempenhar as suas funções.

A alavancagem tecnológica é tão antiga como a nossa condição de *Homo sapiens*. Esta passou pela utilização da pedra lascada, pelo domínio do bronze, depois do ferro e de todas as tecnologias que lhes sucederam até chegarmos à actual era digital. Afinal queremos viver cada vez melhor e despende menos esforço para obtermos igual ou maior rendimento, ter bens de consumo e calorias baratas e acessíveis. A novidade introduzida pela IA (e o medo, e o espanto) é a sua capacidade de substituir não apenas o esforço físico ou o desempenho de tarefas simples e repetitivas, como tantas máquinas fazem, mas de replicar o pensamento, a tomada de decisões e, eventualmente, a criatividade que tínhamos como exclusiva da espécie.

As perguntas são muitas e ninguém sabe ainda de onde virão as respostas. A maior questão, e a que mais assusta, é se um dia poderemos tornar-nos escravos das máquinas que desenvolvemos, fruto da chamada “Singu-

laridade Tecnológica”, uma evolução da inteligência não humana tão acentuada que escape ao nosso controlo e ao nosso entendimento. Mas se esse cenário é ainda longínquo, outras questões vão-se já colocando no dia-a-dia: Quem escolhe o que vemos na TV, o que compramos online e os trajectos que fazemos no automóvel? Quem decide se alguém deve ser contratado, despedido ou aumentado? Podem as eleições ser manipuladas através das redes sociais usando algoritmos?

Temos, finalmente, a questão da criação e da criatividade. Pode um algoritmo produzir uma obra literária, artística ou científica de real valor e originalidade? Poderá um novo Proust surgir por entre transístores e linhas de código? Ou um Picasso, ou um Newton? Afinal, também a nossa criatividade e as nossas ideias assentam em matéria, somos corpos com cérebros dentro, foram células, ligações químicas e impulsos eléctricos que criaram a *Nona Sinfonia*, o *Dom Quixote* e a teoria da relatividade. O que nos separa então de forma tão categórica de uma máquina? A “alma”, o “espírito”, a nossa “humanidade”? O que são todas essas coisas, existirão realmente ou são apenas mistificações que nos ajudam a sentir-nos especiais e únicos?

Se nós somos máquinas, também será possível programar um carácter ou uma personalidade? Pode um computador ter desejos, caprichos, obsessões e medos? Poderá amar? Talvez seja essa a questão derradeira, o teste do algodão que permita distinguir uma obra formalmente correcta e tecnicamente perfeita de outra apaixonante, com a qual possamos identificar-nos. Até lá, temos ainda muitos humanos para ler.

CHOVEU NUM DIA O QUE ERA PARA
CHOVER EM TODO O MÊS DE DEZEMBRO.



FAZ SENTIDO.



FAZ SENTIDO?



SE HÁ ASSIMETRIAS SOCIAIS, ASSIMETRIAS
SALARIAIS, ASSIMETRIAS REGIONAIS... PORQUE
NÃO HAVERIA ASSIMETRIAS NA PRECIPITAÇÃO?



Publicado originalmente no jornal Público, em 15/12/2022. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

Paulo Saraiva Universidade de Coimbra

EDITORES:

Patrícia Beites Universidade da Beira Interior

Rui Santos Politécnico de Leiria

Sandra Bento Universidade da Beira Interior

CONSELHO EDITORIAL:

Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira**

ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do

Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho,

Lisboa • **Carlos Farias** E. S. Campos Melo, Covilhã • **Hel-**

der Vilarinho Universidade da Beira Interior • **Henrique Leitão**

Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de

Coimbra • **Maria de Natividade** Universidade Agostinho Neto,

Angola • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Sílvia**

Barbeiro Universidade de Coimbra • **Teresa Monteiro Fernandes**

Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

FR Absolut Graphic

Rua Professor Egas Moniz n 38 4^o Dto - 2620-138 Póvoa Sto. Adrião

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO

Sociedade Portuguesa de Matemática

SEDE: Av. República 45, 3^o Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: <http://gazeta.spm.pt/politica>

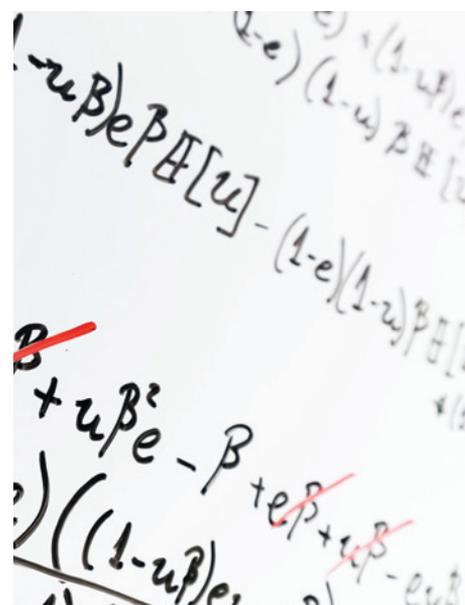
TIRAGEM **1250 Exemplares**

ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**



TARDES DE MATEMÁTICA EM LISBOA 2023

As Tardes de Matemática em Lisboa estão de volta ao formato presencial, desta vez com a novidade de cada palestra decorrer num local diferente. A primeira palestra, *Sou uma Atuária. Mas Afinal o que Faço Eu?*, com Lourdes Afonso, decorreu no dia 21 de março, no Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa. A 18 de abril será a vez de Jorge Buescu apresentar *Sobre as Medalhas Fields em Matemática: Ontem, Hoje e Amanhã*, na Universidade Aberta. A 23 de maio, na Escola Superior de Educação de Lisboa, Nelson Chibeles Martins proferirá *Os Miúdos Não Gostam Nada de Matemática!!! Ótimo!*. A última palestra do ciclo será *Atuariado Vida Vintage*, a decorrer no dia 20 de junho, na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova, no Monte da Caparica, e terá como oradores Gracinda Rita Guerreiro e Pedro Corte Real. Todas as palestras têm início às 15h.



SPM@TESTES 2023

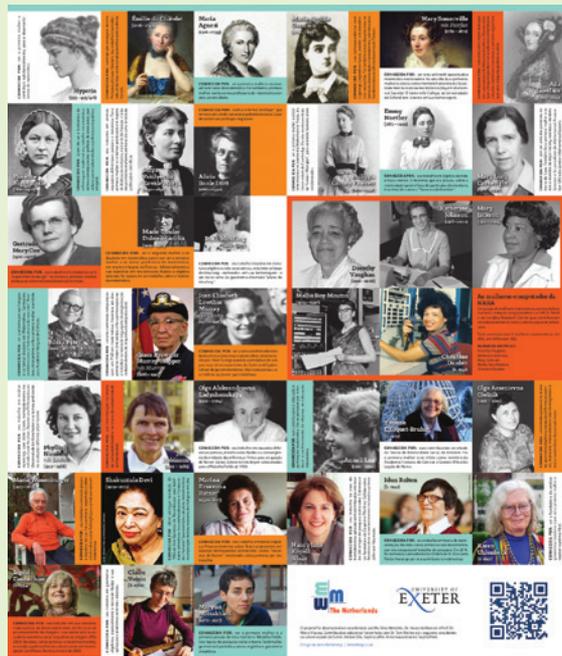
As inscrições para os SPM@Testes 2023, que decorrerão de 9 a 19 de maio, continuam abertas. Os SPM@Testes são provas oferecidas às escolas associadas SPM, sejam públicas ou privadas, para os 2.º, 4.º, 6.º, 9.º, 10.º, 11.º e 12.º anos, com as mesmas características de um exame nacional. Têm a chancela de qualidade da SPM e o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian.

Estas provas permitem a cada escola ter um parecer externo e contextualizado acerca do desempenho dos seus alunos. Além disso, são elaboradas por alguns dos professores que melhor conhecem os documentos curriculares de referência.

Após o período de correção dos testes, cada escola terá acesso aos resultados dos seus alunos e saberá como estes se comparam a nível nacional e regional. No entanto, nenhuma escola saberá o lugar ocupado pelas restantes escolas.

CONFERÊNCIA WOMEN IN MATHEMATICS 2023

A terceira edição da conferência Women in Mathematics em Portugal (WM23) irá decorrer de 24 a 26 de julho de 2023, na Universidade de Coimbra. Os principais objetivos desta conferência são motivar e inspirar novas gerações de mulheres matemáticas, através de apresentações científicas de alta qualidade e discussões que cobrem múltiplas áreas da matemática, sendo acessíveis a um público amplo. As submissões de palestras e pósteres devem ser enviadas até 10 de maio de 2023. O evento é aberto a todas as pessoas interessadas (independentemente do género) e a participação é gratuita, no entanto será necessário fazer a inscrição até 15 de junho (ver <https://ucpages.uc.pt/events/wm23/>). A WM23 é uma organização conjunta do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra, do Centro de Matemática da Universidade do Minho e do Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos da Universidade de Lisboa.



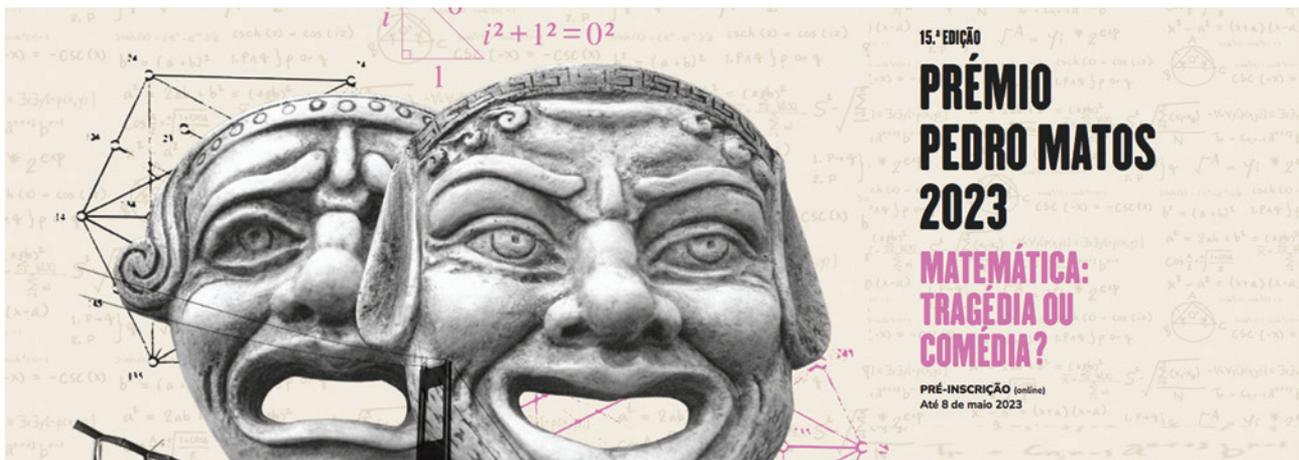
15.ª EDIÇÃO DO PRÉMIO PEDRO MATOS

A 15ª edição do Prémio Pedro Matos tem como tema Matemática: Tragédia ou Comédia? As pré-inscrições devem ser feitas até ao dia 8 de maio e as candidaturas e entrega de trabalhos até 9 de junho. O concurso, organizado pelo Politécnico de Leiria, pretende desafiar estudantes e professores a refletir sobre como desdramatizar o ensino e a aprendizagem da

matemática.

Podem candidatar-se estudantes do Ensino Secundário e do 3.º ciclo do Ensino Básico, individualmente ou em grupo. Do grupo pode ainda fazer parte um professor, ao qual caberá o papel de orientador.

Os trabalhos elaborados serão expostos no evento Mat-Oeste 2023.



WOMEN OF MATHEMATICS FROM AROUND THE WORLD

A gallery of portraits



WOMEN OF MATHEMATICS FROM AROUND THE WORLD – A GALLERY OF PORTRAITS

A exposição *Women of Mathematics From Around the World – A Gallery of Portraits* esteve patente na Galeria da Real Fábrica de Panos do Museu de Lanifícios da Universidade da Beira Interior (UBI), com extensões na Biblioteca Central da UBI e no Bloco VI (Departamento de Matemática), desde o dia 10 de fevereiro até ao dia 18 de março de 2023.

Durante o período de exibição, integrou as celebrações do Dia Internacional das Mulheres e Raparigas na Ciência (11 de fevereiro), do Dia Internacional da Mulher (8 de março) e do Dia Internacional da Matemática (14 de março).

Esta exposição oferece um vislumbre da matemática através de fotografias (por Noel Tovia Matoff) e excertos de entrevistas (por Sylvie Paycha e Sara Azzali) de 23 mulheres matemáticas de todo o mundo.

A curadoria é de Sylvie Paycha e Noel Tovia Matoff, a

coordenação local foi da responsabilidade de Helder Vilarinho (UBI) e teve o apoio do Departamento de Matemática da UBI (DM-UBI) e do Centro de Matemática e Aplicações da UBI (CMA-UBI).

A exposição poderá ser requisitada ao DM-UBI ou CMA-UBI para exibição noutras instituições. Contacto: Helder Vilarinho: helder@ubi.pt, sob a prévia autorização das curadoras. Para mais informações contactar Noel Tovia Matoff (n.matoff@mailbox.org).

5.º CAMPEONATO NACIONAL DE MULTIPLI

As inscrições para o 5.º Campeonato Nacional de Multipli já estão abertas. A competição, a decorrer exclusivamente online, é dirigida aos alunos dos 3.º, 4.º, 5.º e 6.º anos de escolaridade. Serão admitidos a concurso 2500 alunos por ano letivo, num total de 10 000 candidatos. A competição é composta por sete semifinais regionais, que decorrerão de 3 a 15 de maio, e por uma grande final, que terá lugar a 5 de junho.



OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA EM FARO

A final nacional das 41.^{as} Olimpíadas Portuguesas de Matemática decorrerá em Faro, no Agrupamento de Escolas Tomás Cabreira, de 30 de março a 2 de abril. Na competição estarão 90 alunos de todo o País, distribuídos em três categorias: categoria júnior (6.º e 7.º anos), A (8.º e 9.º anos) e B (10.º, 11.º e 12.º anos).

A sessão de encerramento terá lugar no Grande Auditório da Universidade do Algarve, no dia 2 de abril, e contará com a presença do presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática,

José Carlos Santos, do reitor da Universidade do Algarve, Paulo Águas, do presidente da Câmara Municipal de Faro, Rogério Bacalhau, da diretora do Ciência Viva, Rosalia Vargas, da diretora do Agrupamento de Escolas Tomás Cabreira, Ana Paula Marques, e de Hélder Pais, da Direção-Geral de Educação.

Antes da entrega das medalhas, Jorge Nuno Silva, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, ainda apresentará a palestra *Os Problemas da Matemática*.



DIA INTERNACIONAL DA MATEMÁTICA 2023

As celebrações do Dia Internacional da Matemática (IDM) ocorreram um pouco por todo o mundo no dia 14 de março, e foram muitas as escolas, as universidades e as instituições que assinalaram a data. A Sociedade Portuguesa de Matemática aliou-se ao Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa, que teve um programa alusivo ao dia, com atividades que se prolongaram até à meia-noite.

Em 2023, o tema do IDM foi Matemática para Toda a Gente e o evento principal, que decorreu na página oficial www.idm314.org, dividiu-se em duas sessões, uma com matemáticos convidados e outra com os vencedores da Medalha Fields 2022. A portuguesa Inês Guimarães, mais conhecida por MathGurl, foi uma das apresentadoras das sessões. As apresentações ainda estão disponíveis para quem tiver interesse em assistir. Também no site oficial é possível apreciar as bandas desenhadas levadas a concurso.

4.º ENCONTRO IBÉRICO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O 4.º Encontro Ibérico de História da Matemática (EIHM) terá lugar no Museu de Leiria, de 22 a 24 de junho de 2023. O evento é uma organização conjunta da Sociedade Portuguesa de Matemática, através do seu Seminário Nacional de História da Matemática, e da Real Sociedad Matemática Española. Nesta edição, o EIHM conta ainda com o apoio do Politécnico de Leiria e do Museu de Leiria.

As inscrições beneficiarão de um preço reduzido até 31 de maio. Consulte todas as informações em <https://sites.ipleiria.pt/4eihm>

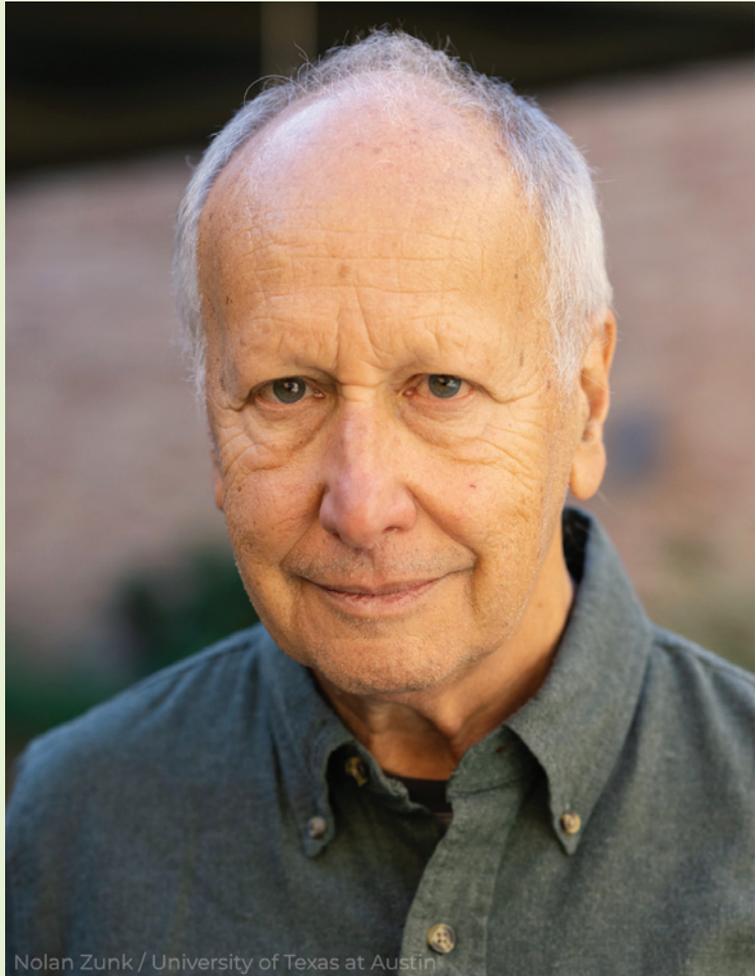
PRÉMIO ABEL DISTINGUE LUIS A. CAFFARELLI

A Academia Norueguesa de Ciências e Letras concedeu, no dia 22 de março, o Prémio Abel 2023 a Luis A. Caffarelli, professor na Universidade do Texas, em Austin, tornando-o o primeiro sul-americano a conquistar a distinção. O matemático argentino, de 74 anos, recebe o prémio “pelas suas contribuições seminais à teoria da regularidade para equações diferenciais parciais não lineares, incluindo problemas com fronteiras livres e a equação de Monge-Ampère”, afirma a Academia. Luis A. Caffarelli, nascido em Buenos Aires, recebeu o seu PhD pela Universidade de Buenos Aires em 1972 e emigrou, em seguida, com uma bolsa de estudos para os Estados Unidos.

Helge Holden, presidente do Comité Abel, destacou as contribuições de Caffarelli durante mais de 40 anos à teoria da regularidade: “Ao combinar o seu brilhante conhecimento geométrico com engenhosas ferramentas analíticas e métodos, ele teve e continua a ter um impacto muito importante na área.”

Também o reitor da Universidade do Texas, Jay Hartzell, tece os maiores elogios ao argentino: “Durante mais de um quarto de século aqui na Universidade do Texas, Luis Caffarelli introduziu novas técnicas engenhosas que mostram uma visão geométrica brilhante.”

A cerimónia de entrega do Prémio Abel decorrerá em Oslo, no dia 23 de maio. Juntamente com



Nolan Zunk / University of Texas at Austin

galardão, Caffarelli receberá um prémio pecuniário no valor de 7,5 milhões de coroas norueguesas, o equivalente a 618 mil euros.

Caffarelli é autor de 320 artigos, que somam 19 mil citações, tendo escrito trabalhos em parceria com mais de 130 colaboradores, e orientou mais de 30 doutorandos. O investigador integra a Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos da América desde 1991 e é membro de várias outras sociedades científicas.

Luis A. Caffarelli já foi laureado com o Rolf Schock Prize de 2005, o Steele Prize for Lifetime Achievement da American Mathematical Society de 2009, o Wolf Prize de 2012, a Solomon Lefschetz Medal de 2013 e o Shaw Prize de 2018.

ISABEL HORMIGO
VICE-PRESIDENTE DA SPM
ishormigo@gmail.com

POR UM ENSINO DA MATEMÁTICA DE QUALIDADE

É impossível uma educação exigente num sistema que não promove a exigência. Tudo o que se sabe sobre ensino mostra que objetivos pouco exigentes conduzem a menor aprendizagem. Apostar-se no mais simples apenas serve para elevar artificialmente o sucesso de quem aprende.

A SPM, enquanto sociedade científica, em Portugal, tem vindo a prestar um papel ativo no apoio, na promoção e na defesa de um ensino de Matemática de qualidade.

Entre as atividades que desenvolve em Educação, algumas há décadas, destacam-se as que vieram a constituir-se como fortes impulsos a uma melhoria, após a sua colaboração com o Ministério da Educação, quer na identificação de problemas no ensino da Matemática quer na concretização de atividades que estimularam a sua resolução. Destacam-se, por exemplo, as auditorias aos exames nacionais, a avaliação e a certificação de manuais escolares, a formação contínua de professores e a tomada de posições – emitindo pareceres rigorosos e fundamentados – sobre as diversas alterações curriculares ao longo dos anos. Estas atividades têm vindo a ser desenvolvidas com grande sentido de compromisso. Todas as direções da SPM, durante as últimas décadas, têm empenhado esforços em prol de um ensino rigoroso, de qualidade, que permita uma igualdade de oportunidades para todos os jovens portugueses.

É neste contexto que a SPM se tem pronunciado publicamente, e fê-lo a 16 de janeiro sobre o novo documento curricular intitulado *Aprendizagens Essenciais para o Ensino Secundário*¹ que foi homologado dias antes, a 13 do mesmo mês².

A SPM procurou, neste seu parecer assim como em pareceres anteriores, enquanto ainda projetos apresenta-

dos a consulta pública, tanto para o Básico como para o Secundário³, alertar as equipas de autores, o Ministério da Educação e o público em geral para a notória e preocupante inversão no ensino da Matemática. Essa estava patente tanto nos documentos apresentados – vãos, desconexos, pouco exigentes, pouco ambiciosos... – como nos discursos ilusórios, nos quais transparecia uma revolução fraturante com os documentos orientadores do ensino anteriores. Repare-se que estes documentos surgem com a ideia geral de se optar, segundo os seus autores, por uma “Matemática para todos”, em que os “formalismos e os níveis de abstração excessivos deverão ser evitados”.

É difícil compreender esta ideia, embora sedutora para os jovens, sabendo o que objetivamente defende e promove para as próximas gerações – que aprendam menos, até mesmo o que podia dar-lhes maior vantagem no futuro.

Estas novas *Aprendizagens Essenciais* homologadas recuam, assim, no que as anteriores metas curriculares contribuíram para o desenvolvimento dos alunos – há-

¹ <https://www.spm.pt/files/images/documentos/pareceres/Homologacao%20AEs%20%20Secundario%20janeiro2023.pdf>

² <https://www.dge.mec.pt/noticias/homologacao-das-novas-aprendizagens-essenciais-de-matematica-para-o-ensinosecundario>

³ <https://www.spm.pt/ensino-gebs-pareceres>

bitos de raciocínio, de abstração, de disciplina mental –, em suma, para o desenvolvimento de capacidades avançadas e estruturantes que distinguem a formação matemática e a habilitam para muitas outras diversificadas áreas. Por outro lado, estas *Aprendizagens Essenciais*, em linha com as intituladas com a mesma designação, que vigoravam desde 2018, ignoram o que a investigação moderna nos tem aconselhado relativamente à forma mais eficaz de organizar o ensino.

Ao se despedaçar o ensino estruturado e bem organizado, com metas curriculares claras e ambiciosas, e ao se apostar no mais simples para elevar artificialmente o sucesso de quem aprende, esquece-se que excluir o mais complexo pode tolher o desenvolvimento de uma boa organização do pensamento e impede grandes satisfações – o gosto – de quem está a aprender. E também se passa a interromper um ensino que protege todos os alunos, independentemente do seu contexto económico-social.

Sem qualquer acompanhamento dos programas que estavam em vigor, como forma a se detetar aperfeiçoamentos necessários, e sem a apresentação de fundamentos credíveis, é preocupante o documento homologado – *Aprendizagens Essenciais* –, pois interrompe o acesso a um currículo que desde os princípios do século XXI tinha vindo a estruturar-se melhor, dando lugar novamente a orientações antigas, do século passado. Mais, é difícil entender que, depois da pandemia, não existisse um momento de reflexão que levasse a investir esforços na recuperação da aprendizagem perdida e que não se tenha ponderado que uma eventual alteração ao programa não era desejável, pois dificultaria a ação dos professores em prol das dificuldades detetadas nos seus alunos.

É, pois, com preocupação que vemos estas decisões alheias ao histórico que devia orgulhar-nos a todos. Sabemos que em 2015, no estudo PISA, Portugal alcançou os melhores resultados de sempre e, pela primeira vez, passou para uma posição acima da média da OCDE em todas as áreas avaliadas. Também, no mesmo ano, o estudo TIMSS colocou os nossos jovens de 4.º ano em patamares raros na Europa. Será, então, inoportuna esta revolução, tanto mais depois de termos tido alertas que mostraram que após as inversões curriculares introduzidas em 2016/17 o retrocesso aconteceu – em 2018, o estudo PISA já revelou um declínio significativo e em 2019, o estudo TIMSS assinalou uma queda brutal nos níveis de conhecimento, para valores anteriores aos de 2012. É difícil entender que o Ministério, enquanto tutela, não tivesse considerado seriamente estes sinais de alarme

como avisos que mostravam que um ensino menos bem estruturado não conduz a bons resultados.

É impossível uma educação exigente num sistema que não promove a exigência. Tudo o que se sabe sobre ensino mostra que objetivos pouco exigentes conduzem a menor aprendizagem: este é o problema que teremos novamente a prazo!

A SPM continuará, no âmbito da sua missão, a dedicar um papel ativo no apoio, na promoção e na defesa de um ensino de Matemática que se deseja de qualidade em Portugal.

Não estamos sós! A Sociedade Portuguesa de Estatística, no seu parecer⁴ crítico do dia 2 de fevereiro, também recomenda o que temos vindo a mencionar:

“Dadas as circunstâncias referidas (...), sugerimos ao Ministério da Educação que por um lado reavalie urgentemente a sua posição em relação ao documento homologado e por outro que de futuro consulte as Sociedades Científicas das áreas dos programas a homologar (no caso em apreço, a SPE e a SPM).”

Parece impossível não o ter feito, mas é essa a “austera, apagada” e triste realidade.

⁴ <https://spestatistica.pt/storage/app/media/parecer.pdf>

M Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: gazeta@spm.pt.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2023

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para imprensa@spm.pt

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

