N. 0196

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXXIII | Mar. 2022 | 4,20€

Uma Cardióide no Coração do Delfos

Eduardo Marques de Sá

CANTO DÉLFICO

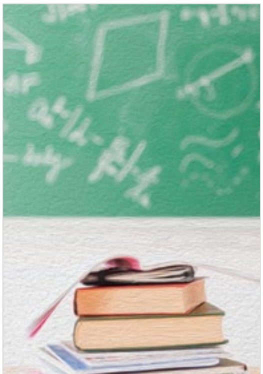
Conversa com o Professor José Vitória - Relatos de um Matemático Singular | Ana Mendes

Decidir, Decidir, Decidir

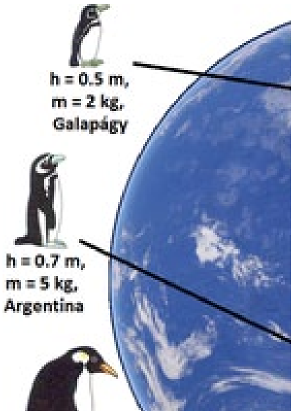
Rosário Fernandes


ENSPM 2022 | TOMAR | 18 A 20 | JULHO
ENCONTRO NACIONAL DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
PERSI DIACONIS
GAVRIL FARKAS
PATRICIA GONÇALVES
SUSAN HOLMES
PETER KEEVASH
HENRIQUE LEITÃO
MARK POLLICOTT
XAVIER TOLSA
JOSEF URBAN
WILHELM WINTER
NUNO CRATO
DOUG LEMOV
DANIEL MUIJS
HANNAH STOTEN
spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
Comissão Científica
SÍLVIA BARBEIRO
MÁRIO BESSA
FERNANDA CIPRIANO
ANA CRISTINA MOREIRA FREITAS
ELOÍSA GRIFO
ISABEL HORMIGO
DIOGO OLIVEIRA E SILVA
Comissão Organizadora
PEDRO ANTUNES
JOÃO ARAÚJO
JORGE MILHAZES FREITAS
ISABEL HORMIGO
LUÍS MERCA
HELENA MONTEIRO
ISABEL PITACAS
ESCADAS CONVENTO DE CRISTO TOMAR

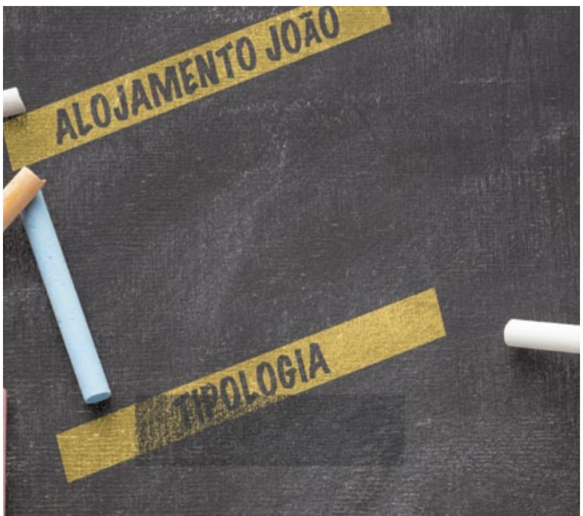
44 **CONVERSA COM O PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA - RELATOS DE UM MATEMÁTICO SINGULAR**
Ana Mendes



20 **O ENSINO DA MATEMÁTICA ESCOLAR AOS FUTUROS PROFESSORES**
Hung-Hsi Wu



09 **NA LINHA DE FRENTE**
O Grande e o Pequeno, o Quente e o Frio



12 **DECIDIR, DECIDIR, DECIDIR**
Rosário Fernandes

ÍNDICE

Sílvia Barbeiro
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

A MATEMÁTICA UNE

A união e o conhecimento são os fatores fundamentais para a construção de um mundo melhor.

O Dia Internacional da Matemática (IDM) é uma celebração global, organizado pela União Internacional de Matemática em que muitos países e organizações em todo o mundo participam. O mote para 2022 é *A Matemática Une*. Este tema, que nos toca pela força e abrangência, foi proposto por Yuliya Nesterova, uma estudante da Universidade de Ottawa, no Canadá. A escolha é fundamentada na ideia de que "A Matemática é uma linguagem comum que todos temos e um tema comum com o qual nos podemos encontrar uns aos outros".

Pela primeira vez a língua portuguesa entrou nas comemorações do Dia Internacional da Matemática como língua oficial, unindo os vários continentes onde é falada.

De facto, a Matemática une e une-nos. Parafraseando a Professora Carlota Simões, que participou na escolha do tema na qualidade de membro Conselho Diretivo do IDM, a Matemática une-nos como seres humanos (e a pandemia lembra-nos como é importante estar em contacto uns com os outros e como é importante trabalhar em conjunto com objetivos comuns), como cidadãos responsáveis (ajudando-nos a fazer as boas escolhas em política, na governação), como seres vivos (ajudando-nos a relacionar-nos de forma sustentável com outros seres vivos no nosso planeta), como criaturas sociais (a matemática, como uma ferramenta tanto de tecnologia como de educação, ajuda-nos a criar laços uns com os outros, independentemente da geografia, riqueza, género, religião, etnia, etc...); une-nos no tempo e no espaço (a matemática, trabalhando em conjunto com a astronomia e geologia, permite-nos visitar o passado e modelar o futuro do nosso planeta / o nosso sistema solar /a nossa galáxia); une todas as ciências (a matemática é a forma mais natural de relacionar diferentes ciências e áreas do conhecimento, dando-lhes uma língua comum).

A atual situação de guerra na Europa tem posto à prova a capacidade de união e o cariz solidário da nossa comunidade. Algumas organizações de matemáticos têm-se conseguido mobilizar no sentido de atender às necessidades mais prementes daqueles que, devido a esta guerra, são forçados a abandonar os seus países de origem muitas vezes em circunstâncias dramáticas. Os grupos de estudantes têm sido particularmente ativos em iniciativas em prol desta causa. As ações de apoio aos refugiados são diversas e vão desde a recolha de bens, campanhas para a angariação de fundos, ofertas de alojamento e oportunidades de emprego científico. Associações como a European Research Centres on Mathematics e a European Woman in Mathematics têm-se empenhado na compilação e divulgação de muitas das ações promovidas em diferentes países, facilitando o acesso à informação. Todos temos um papel importante na comunidade e podemos contribuir para a construção de um futuro melhor.

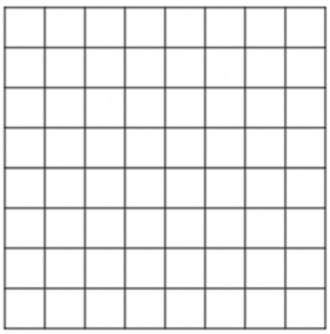
JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

TABULEIRO RECREATIVO

O jogo do xadrez, as suas peças e o seu tabuleiro são fontes inesgotáveis de problemas recreativos. De entre as múltiplas fontes bibliográficas nesta matéria, as questões das olimpíadas sobressaem, pela diversidade e pela qualidade dos desafios. Para este texto, inspirámo-nos (mais uma vez!), nas Olimpíadas de Moscovo do começo do atual milénio.

Hoje propomos somente dois desafios.

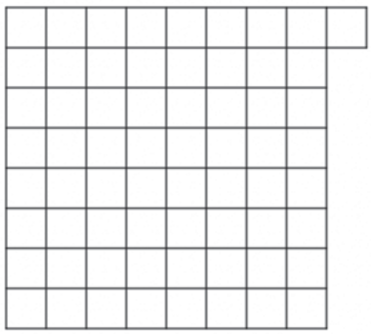
1. Considere o tabuleiro usual, 8×8:



Um dominó é uma peça que cobre duas casas ortogonalmente adjacentes.

Imagine 32 dominós colocados sobre o tabuleiro, sem sobreposições. Como cada um cobre duas casas, o tabuleiro ficará completamente coberto pelas 32 peças.

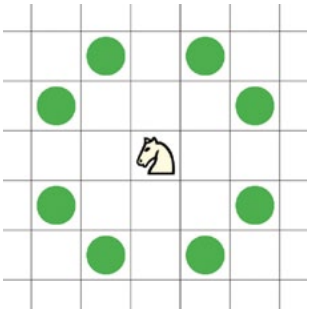
Acrescente-se agora uma casa ao tabuleiro, como ilustrado a seguir.



Podemos levantar um dominó e colocá-lo sobre duas casas descobertas adjacentes e repetir esta operação à vontade. O desafio consiste em mostrar que podemos, se assim o desejarmos, terminar com todos os dominós na posição horizontal.

2. No jogo do xadrez, o cavalo move-se de forma peculiar (até porque salta sobre as outras peças).

A figura ilustra o movimento da peça. Se introduzíssemos coordenadas nas linhas e colunas do tabuleiro, de forma natural, poderíamos dizer que um cavalo colocado na casa (a, b) pode saltar para qualquer uma das seguintes (desde que não salte do tabuleiro para fora, claro!): $(a \pm 1, b+2)$, $(a \pm 1, b-2)$, $(a \pm 2, b+1)$, $(a \pm 2, b-1)$.



Qual é o maior número de cavalos que consegue colocar num tabuleiro 5×5, de forma a que cada um ataque exatamente dois dos outros? Exiba uma configuração que atinja esse valor máximo.

Sobre as questões propostas no número anterior, algumas indicações de resolução:

1. Sejam A e B dois pontos da circunferência unitária que definem uma corda de comprimento superior a $\sqrt{2}$. Aplique a Lei dos Cossenos ao triângulo definido por esses pontos e pelo centro da circunferência. Conclua que o ângulo ao centro é superior a $\pi/2$, pelo que $n \leqslant 3$. Como temos o caso do triângulo equilátero, $n = 3$.

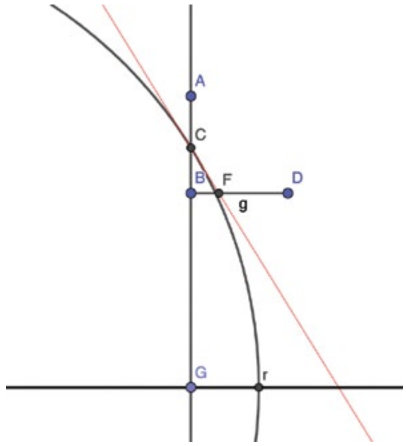
2. Seja P_n um polígono convexo com n lados e seja p um ponto no seu interior. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ as distâncias de p aos lados de P_n. Consideremos vetores unitários ortogonais aos lados de P_n, $u_1, \ldots, u_n$. Seja q outro ponto no interior do polígono. A distância de q ao lado i de P_n é $a_i + (u_i, \overline{pq})$, onde $(\cdot, \cdot)$ representa o produto interno. A soma das distâncias de q aos lados de P_n, $D(q)$, é então

$$D(q) = D(p) + \sum_{i=1}^{n} (u_i, \overline{pq})$$

pelo que a condição é $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$.

3. Mostre que se os comprimentos a e b não são realizados, então $a + b$ também não. Particularize para $1/n$ e use indução.

4. Dada a circunferência centrada na origem e raio r (arbitrariamente grande), considere a seguinte construção, onde $|OG| = \lfloor r \rfloor$, $AG \perp OG$, $BD \perp AG$, AF é tangente à circunferência em C, B e A são pontos com coordenadas inteiras consecutivos, assim como B e D.



Prove que $|BF| \leqslant |BD| = 1$ e, usando a semelhança entre os triângulos CBF e OCG, que

$$\delta(r) \leqslant |BC| \leqslant \frac{|BC|}{|BF|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r}} = o(1) \quad (r \to \infty).$$

Eduardo Marques de Sá
Universidade de Coimbra
emsa@mat.uc.pt

UMA CARDIÓIDE NO CORAÇÃO DO DELFOS

Tendo o seu banho baptismal ocorrido em Dezembro de 2001, o Projecto Delfos celebra os seus 20 anos de idade. A efeméride será recordada, durante este ano, com uma referência no logotipo. E também neste Canto Délfico, onde analisamos alguns aspectos matemáticos desse logo, da sua origem, do seu significado e da sua execução técnica.

O LIVRO E O CORAÇÃO

Em 2012, tinha já o Delfos dez anos, resolvemos renovar o logotipo. Foram mantidas as letras "δelfos", tendo-se apenas mudado a forma do livro, que sempre fora rudimentar, estilizado em poucos traços. O livro tornou-se mais airoso, como mostra a figura 1a, e passou a ter um coração, símbolo do amor ao estudo, à matemática e ao Delfos. Além disso, a estranha cúspide na aurícula direita, um sistema de coordenadas cartesianas e uma interrogação num ponto crítico de abcissa máxima sinalizam um ser matemático. A parte folclórica da adivinha era: *uma coisa plana, redonda, que tem uma cúspide e parece um coração, que coisa é?* Dito assim, poucos matemáticos falharão a resposta. Os elementos desse logotipo sugeriam o que sempre fomos: um projecto de escola onde a paixão pela Matemática e a resolução de problemas são o que nos move. O problema proposto só se revela plenamente quando o livro se abre, como na figura figura 1b, mostrando uma das criaturas mais queridas do nosso zoo: a cardióide. A questão matemática que esse logotipo colocava era a que aqui dirigimos ao leitor para que a resolva:

> *Qual a cota do ponto de abcissa máxima desta cardióide, sabendo que a dita abcissa é 1, que a origem é o ponto de cota mínima e Oy é o seu eixo de simetria?*

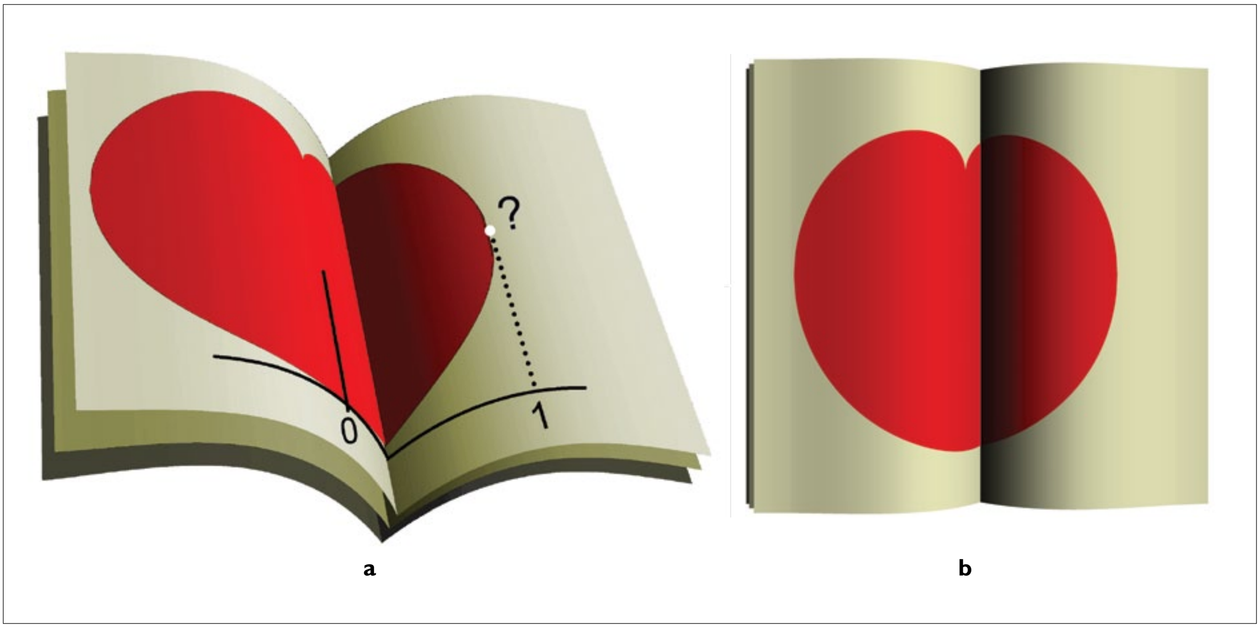


Figura 1.

Pouco depois, o logotipo simplificou-se para o que mostra a primeira figura deste artigo, sem "ano 20". O livro fechou-se um pouco mais, criando um desfiladeiro profundo onde a cardióide escondeu a sua cúspide. O tal problema já lá não está, mas o coração não esmoreceu.

SOBREPOSIÇÃO DE PRISMAS

A imagem do livro com cardióide pode gerar-se no programa *Mathematica 7*, usando meios relativamente rudimentares que vamos descrever. Cada folha do livro representa uma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo *Oy*, como mostra a figura 3, tendo por directriz uma curva suave escolhida a gosto. No entanto, em programas digitais, não há curvas nem superfícies suaves; os elementos básicos são segmentos de recta, polígonos, poliedros, etc., que o programador combina conforme o resultado pretendido. Na verdade, essas combinações geométricas apresentam-se no concreto como conjuntos finitos de *pixels*, que parecem mas não são o que idealizamos. Para dar um exemplo, um fino segmento de recta *quase paralelo* ao bordo inferior dum ecrã não é um conjunto de *pixels* totalmente alinhados...

O livro com cardióide consiste numa sobreposição de (partes de) oito prismas, seis para as folhas e dois, a vermelho, para a cardióide. O número de faces de cada um é à nossa escolha. As peças prismáticas e o método de as combinar são bem visíveis se, como na figura 2, escolhermos um pequeno número de faces para cada prisma. Estas são rectângulos, trapézios e (dois) triângulos, todos com a mesma "largura" em cada prisma. A adopção dum elevado número de faces é que confere a aparência de suavidade das superfícies. Cada prisma do logotipo tem mais de 150 faces; a curva cardióide é, por isso, um polígono com mais de 600 vértices.

Figura 2.

EMPENO DAS FOLHAS

O livro foi colocado num referencial cartesiano tridimensional, $Oxyz$, como na figura 3, que mostra as duas páginas superiores do livro, sobre as quais se instala a cardióide. As duas páginas são, inicialmente, rectângulos (a cinzento claro, na figura) assentes no plano Oxy, uma no semi-plano $x < 0$ e outra no semiplano $x > 0$, coladas ao longo do eixo Oy. Esse eixo irá funcionar como lombada do livro. Em seguida, as folhas são deformadas, transformando-se em superfícies cilíndricas de geratrizes paralelas a Oy. O cilindro do lado direito tem por directriz a curva a vermelho que, no plano Oxz é o gráfico duma função $z = f(x)$, escolhida *ad hoc*; o cilindro à esquerda terá outra directriz adequada que se pretenda. Os dois cilindros articulam-se segundo Oy, podendo cada um rodar em torno desse eixo, por forma a fechar ou a abrir o livro conforme se pretenda. Essas rotações conseguem-se mediante uma instrução primitiva muito simples do *Mathematica*.

O problema técnico que vamos estudar é o seguinte: dado um ponto P, que se imagina materialmente preso à folha ainda não deformada, no plano Oxy, qual a posição, S, que P vai ocupar na folha deformada?

Claro que P e S têm a mesma coordenada y, pelo que não perdemos generalidade supondo que $P = (c, 0, 0)$, com $c \geqslant 0$. Sendo assim, $S = \big(x, 0, f(x)\big)$, onde x é o número determinado pela condição geométrica óbvia: *c é igual ao comprimento do arco $\widehat{OS}$*. Designemos por $\mathsf{C}(x)$ o comprimento de $\widehat{OS}$. Vimos que $S = \big(x, 0, f(x)\big)$ é a imagem do ponto $P = (\mathsf{C}(x), 0, 0)$ na folha deformada. Portanto, o nosso problema fica resolvido se conseguirmos determinar a função $\mathsf{C}(x)$ *e a sua inversa*.

Em geral, $\mathsf{C}(x)$ não é uma função elementar, ou seja, uma combinação de funções nossas conhecidas – polinomiais, trigonométricas, exponenciais e suas inversas. Mas podemos calcular um valor aproximado, tão próximo quanto queiramos, de $\mathsf{C}(x)$ para cada valor fixado de x. O modo de resolver este problema numérico por meios elementares consiste em substituir o gráfico de f por uma poligonal inscrita, que servirá de avatar da curva. Pormenorizando, admitamos que $[0, a]$ é o domínio das abcissas dos pontos S do gráfico a vermelho, na figura 3; dividamos $[0, a]$ em n partes iguais, por introdução dos números $x_i = \frac{a}{n}\, i$, para $i = 0, 1, \ldots, n$. A cada i corresponde um ponto da curva, $S_i = (x_i, 0, f(x_i))$; a poligonal com vértices S_i, denotada $[S_0, S_1, \ldots, S_n]$, constitui uma aproximação da nossa curva, tanto mais próxima quanto maior for n. Pelo teorema de Pitágoras, cada lado $[S_{i-1}, S_i]$ da poligonal tem comprimento $\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta f_i^2}$, onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta f_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Portanto, para cada vértice S_k é fácil calcular o comprimento, denotado c_k, da poligonal $[S_0, S_1, \ldots, S_k]$; a fórmula é

$$c_k = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta f_i^2} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i. \quad (1)$$

Calculando todos os c_k, obtemos uma tabela de duas linhas e n colunas,

$$\begin{array}{|cccc|} \hline x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \hline c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \hline \end{array}\,, \quad (2)$$

onde, na k-ésima coluna, c_k é um valor aproximado de $\mathsf{C}(x_k)$, e x_k é um valor aproximado de $\mathsf{C}^{-1}(c_k)$. O problema fica *aproximadamente* resolvido, para os valores tabelados. Se, dado um $P = (c, 0, 0)$, o comprimento c não ocorre na segunda linha da tabela, podemos usar um método de interpolação para determinar S.

Resumindo, a projecção $P \rightsquigarrow S$ executa-se assim. Primeiro, escolhe-se n e coloca-se a tabela (2) na memória do *Mathematica*. Sendo $P = (c, y, 0)$, procura-se, na tabela, o k tal que $c_k \leqslant c < c_{k+1}$; toma-se para projecção o ponto $S = (x, y, f(x))$, onde x se obtém da tabela, no intervalo $[x_k, x_{k+1}[$, por interpolação. No caso de se optar pela interpolação linear, a fórmula será

$$x = x_k + (c - c_k)(x_{k+1} - x_k)/(c_{k+1} - c_k).$$

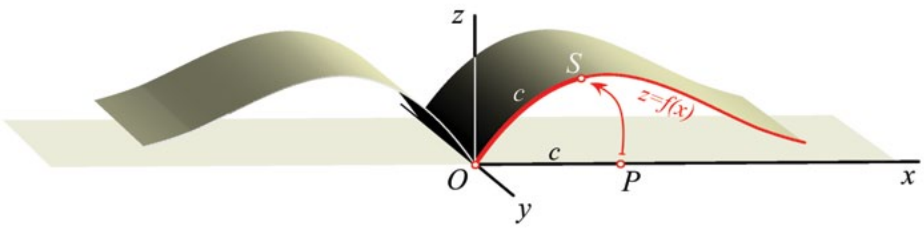


Figura 3.

Para conseguir melhores aproximações, aumenta-se o valor de n. No caso da nossa folha empenada, basta $n = 200$ para se obter um bom resultado, em particular uma imagem convincente da cardióide plana projectada na superfície cilíndrica.

Para terminar, destaque-se a elementaridade de todo o processo até agora descrito, não sendo preciso saber muita matemática para o conceber e executar. Mas a elementaridade dos conceitos usados leva a uma folha de cálculo muito extensa. Um conhecimento mais profundo ajuda muito na procura de métodos mais expeditos. Tome-se como exemplo a questão crucial de programar a projecção do plano na superfície cilíndrica. Quando se estuda cálculo integral, aprendem-se fórmulas para calcular comprimentos, áreas e volumes. No caso em que $S = (X, y, f(X))$, a fórmula do comprimento de $\widehat{OS}$ é

$$\mathsf{C}(X) = \int_0^X \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx.$$

A fórmula é *exacta*.[1] Mas $\mathsf{C}(X)$ não é uma função elementar conhecida, pois $f(x)$ é polinómio de grau 6. Acontece que o *Mathematica* tem uma subrotina, isto é, um programa pronto a usar, que faz cálculos de forma quase instantânea, custando apenas meia linha de código. Ei-lo:

```
NIntegrate[Sqrt[1 + f'[x]^2], {x, 0, X}]
```

Vale mesmo a pena saber mais matemática. Neste caso, serviu apenas para despachar um simples logotipo. Claro que o assunto é sério, "o que há é pouca gente para dar por isso"... Mas noutros mais sérios que a este mundo mais interessam, o mesmo saber pode ser precioso.

O autor escreve segundo a ortografia antiga.

[1] Ela obtém-se por passagem ao limite de (1), quando $k=n$ e $n \to \infty$.

Fabio Chalub
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

O GRANDE E O PEQUENO, O QUENTE E O FRIO

Não há dúvidas de que o mundo está mais quente a cada dia que passa. Não só as medidas diretas de temperatura indicam que o aquecimento global é um facto, como também os seus efeitos indiretos são mensuráveis. Uma nova investigação mostra como o tamanho das aves amazónicas foi alterado nas últimas décadas. Para entender a relação entre estas alterações e a mudança global do clima vamos falar de Galileu, do tamanho das células e também de guerras civis.

No século XVI, a indústria naval de Veneza estava a conhecer um grande desenvolvimento. As necessidades comerciais cresciam, e da mesma forma mudava o tamanho dos navios.

Da mesma forma?

Na verdade, estavam a descobrir, na prática, que quando queremos construir uma embarcação maior não podemos simplesmente aumentar na mesma proporção todas as suas partes. Os construtores resolveram convidar o maior cientista das proximidades – talvez o maior de sempre – para estudar o fenómeno.

Galileu não só percebeu os pontos fracos da construção naval de equipamentos cada vez maiores, mas também desenvolveu o que acabou por ser conhecido por *teoria de escala*. Esta é uma ferramenta simples e poderosa que nos permite uma compreensão qualitativa de uma enorme diversidade de fenómenos. O seu objetivo é compreender como são alteradas as propriedades básicas dos objetos de acordo com o seu tamanho.

Grosso modo, a ideia é a seguinte: quando dobramos o tamanho de uma viga, o seu próprio peso aumenta oito vezes (de acordo com o cubo da razão de aumento, já que esta é uma propriedade volumétrica); no entanto, a sua resistência aumenta apenas quatro vezes. A resistência depende do número de fibras que atravessam a viga, que, por sua vez, depende da área de uma secção transversal.

Assim, a tensão sobre a viga dobra, de forma que a probabilidade de rutura aumenta. Pequenos barcos podem ser colocados em terra; grandes barcos ruem sob o seu próprio peso quando postos nestas mesmas condições.

Galileu foi mais longe e mostrou que este efeito é prevalente na Natureza. Nominalmente, mostrou que, enquanto pequenos animais têm pernas finas, paquidermes só conseguem sustentar o próprio peso com membros de grande envergadura.

Aos poucos, estas ideias foram encontrando o seu caminho nas diversas áreas da ciência. Por exemplo: sabemos todos que quando uma célula cresce, divide-se em duas. Mas porquê?

Uma célula troca nutrientes com o meio ambiente; desta forma, a sua capacidade de obter alimentos está limitada pela sua área superficial. Por outro lado, a sua necessidade energética está relacionada com a sua massa. Supondo, para facilitar a discussão, uma célula perfeitamente esférica, o seu volume é dado por $\frac{4\pi r^3}{3}$, onde r é o seu raio. Por outro lado, a sua área superficial é dada por $4\pi r^2$. A razão necessidade/capacidade é dada por volume/área, ou seja, $r/3$.

O ponto importante é que a razão necessidade/capacidade cresce com o tamanho da célula, fazendo com que, à medida que *r* aumenta de valor, a necessidade energética cresce mais rapidamente do que a capacidade de absorver nutrientes. Isto ocorre até atigir o valor crítico em que a célula deixa de ser capaz de viver.

A solução é dividir-se em duas, mantendo o volume, mas aumentando a área superficial. Este simples ato diminui a razão necessidade/capacidade em 20%, tornando a célula viável novamente.

Este fenómeno é geral na Natureza. Considere os mamíferos, que são homeotérmicos, isto é, a sua temperatura corporal é aproximadamente constante. Quanto menor for o animal, maior será a sua área superficial relativa, e portanto perderá calor com maior facilidade.

Para conseguir manter o calor corporal, um pequeno animal necessita de um maior gasto energético, comparativamente ao seu tamanho. Para fazer com que todos os nutrientes e o oxigénio necessários para que todas as partes do seu corpo gerem a quantidade correta de energia, ele precisa que o sangue circule com maior velocidade. Por isso, o seu coração bate rapidamente.

Concluímos que quanto maior é um animal, mais lentamente ele perde calor e mais lentamente bate o seu coração!

Se nunca tirou o pulso de um bebé, faça-o. É muito mais rápido do que o de um adulto. Num exemplo extremo, o coração de um gato bate mais de uma centena de vezes por minuto, enquanto a baleia azul tem uma pulsação a cada dez segundos.

Esta relação é verdadeira mesmo entre grupos de indivíduos da mesma espécie, o que é conhecido como "Regra de Bergmann", em homenagem ao biogeógrafo alemão do século XIX que primeiro identificou a correlação entre o tamanho dos animais e a latitude em que vivem [1]. Quanto maior for a latitude, mais frio é o clima (em média) e, portanto, maior será o tamanho de um único indivíduo – minimizando a relação área/volume.

O próprio ser humano não escapa a esta regra, sendo os nórdicos mais corpulentos do que as populações originárias das zonas tropicais. Esta é uma das diversas adaptações do corpo humano à vida em diferentes geografias, explicável utilizando a teoria de escala. Veja a figura 1.

É exatamente esta alteração do tamanho corporal que uma investigação recente identificou como mais uma evidência do aquecimento global [2]. Aves de regiões remotas, tanto na Amazónia brasileira quanto na equatoriana, estão a alterar o tamanho do seu corpo e das suas asas, mesmo em regiões ainda não devastadas pelo ser humano. Apesar da notória lentidão característica dos processos evolutivos, o acompanhamento da adaptação de 77 espécies de aves amazónicas durante quatro décadas permitiu quantificar as alterações devidas a um clima mais quente mesmo nas

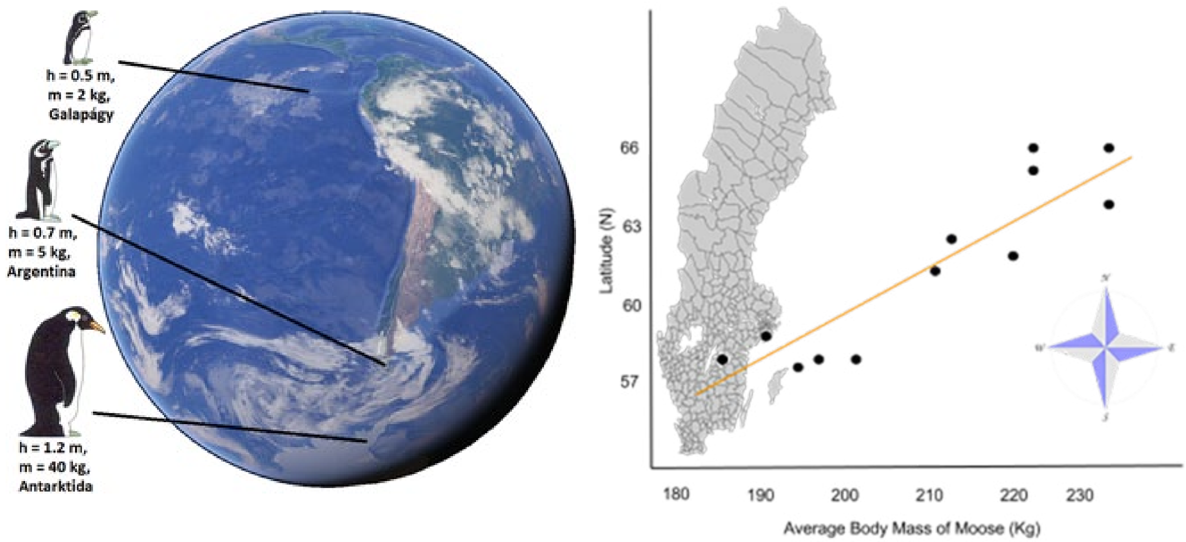
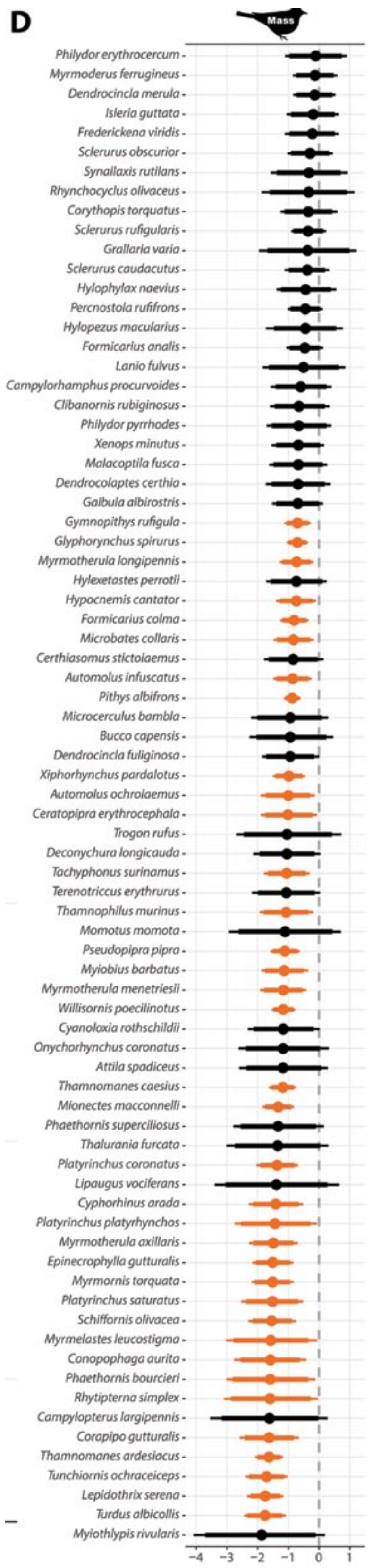


Figura 1. A regra de Bergmann. Esquerda: os pinguins são tão maiores quanto mais próximo dos polos é o seu *habitat*. **Direita:** o tamanho dos alces em função da latitude em que vivem, na Suécia. **Fonte: Wikimedia Commons.**



regiões mais remotas da Terra. Veja a figura 2.

A investigação, de 12 cientistas em cinco países – incluindo Portugal – teve a participação de Thomas E. Lovejoy, um dos maiores especialistas a nível mundial em biologia tropical, que faleceu pouco depois da sua publicação.

Não resisto a um último comentário: na introdução referi uma relação entre esta discussão e as guerras. Perguntar sobre a razão de as batalhas pelas cidades grandes serem mais importantes do que pelas pequenas parece um truísmo, mas foi esta pergunta que me chamou a atenção ao ler um blogue que se aliava ao grupo revolucionário durante a guerra civil da Líbia (2011). A resposta surpreendeu-me. Disse o comentador que a capacidade de defesa de uma cidade depende da sua população e, portanto, grosso modo da sua área. Numa guerra civil, os combates pela sua conquista dão-se na periferia (lembre-se de que havia uma zona de exclusão aérea sobre a Líbia nestes tempos). Portanto, quanto maior a cidade, mais difícil é a sua toma por uma força superior. Numa pequena cidade, o exército invasor simplesmente entra, sem maiores oposições. Numa grande cidade, cada centímetro tem de ser duramente conquistado. É lá que as grandes batalhas ocorrem!

REFERÊNCIAS

[1] *https://en.wikipedia.org/wiki/Bergmann's_rule*

[2] Jirinec et al., "Morphological consequences of climate change for resident birds in intact Amazonian rainforest" *Sci. Adv. 7* (46), eabk1743 (2021).

Pós-escrito: O último parágrafo foi escrito no início de janeiro de 2022, portanto antes da invasão da Rússia à Ucrânia. Desta forma, este texto não tem nenhuma relação direta com os eventos correntes no leste europeu. No entanto, infelizmente, as análises mostraram-se muito atuais. Deixo aqui a minha solidariedade ao povo ucraniano, tanto aos que estão na sua pátria como aos que estão em Portugal.

◀ Figura 2. Variação da massa (em percentagem) de diversas espécies amazónicas por década, ao longo das quatro últimas décadas. Veja que todas as espécies estudadas apresentam tendência de decrescimento, com cerca de metade das espécies estudadas a diminuírem de forma significativa. Modificação da figura 1D da referência [2], publicada sob a licença Creative Commons Attribution NonCommercial License 4.0 (CC BY-NC).

DECIDIR, DECIDIR, DECIDIR

Rosário Fernandes
Universidade Nova de Lisboa
mrff@fct.unl.pt

Em 1971, o matemático Thomas L. Saaty descreveu um processo de apoio à decisão de situações que envolvessem diversas alternativas, o AHP, sigla de *Analytic Hierarchy Process*, Processo Analítico Hierárquico em português. Ainda hoje, passados 50 anos, é um dos processos mais utilizados por gestores, economistas, engenheiros, matemáticos.... Neste artigo é apresentado, de uma maneira muito leve, este processo.

Desde os tempos mais remotos que o Homem é confrontado diariamente com situações que exigem da sua parte uma escolha entre duas ou mais alternativas. Muitas vezes são situações muito simples, relacionadas com o seu quotidiano: O que vou vestir hoje? O vestido azul ou o amarelo?; O que vou comer ao almoço? Bife de vaca, robalo grelhado ou cozido à portuguesa?; Como me devo comportar perante o meu patrão? Convido-o pessoalmente para o meu casamento ou envio-lhe o convite por correio?; O que vou oferecer ao Rui pelo seu aniversário? Um livro, um telemóvel ou o carro dos seus sonhos? Estas e muitas outras questões são resolvidas usando o bom senso, os conhecimentos adquiridos, a intuição, o protocolo, a opinião de terceiros... Mas, apesar de todas serem situações que não acarretam grandes complicações, inconscientemente ou conscientemente estabelecemos critérios para basearmos a nossa decisão: hoje ao almoço como robalo grelhado porque ontem comi bife de vaca e o cozido é um alimento de difícil digestão; Vou oferecer ao Rui um livro porque o carro é muito caro e ele tem um telemóvel novo...

No entanto, existem situações cuja decisão pode acarretar consequências indesejáveis: a compra de uma casa, a compra de um carro, a contratação de um funcionário para uma determinada empresa, a retirada de um medicamento do mercado, o lançamento no mercado de um produto, a abertura de uma loja... Nestes casos, torna-se complicadíssima a decisão se esta envolver muitas alternativas com parâmetros diferentes. Com este tipo de situações foi confrontado o matemático Thomas L. Saaty, nos anos 70 do século passado, quando trabalhava no Departamento de Defesa dos Estados Unidos. Para facilitar a decisão final de uma situação que exigisse uma escolha, em 1971 ele criou o AHP, sigla de Analytic Hierarchy Process, Processo Analítico Hierárquico em português. De 1972 a 1978, Saaty efetuou alterações no AHP com a aplicação deste a casos concretos, por exemplo, o racionamento da energia nas indústrias e o estudo dos transportes no Sudão. Passados 50 anos da sua conceção, continua a ser um dos processos mais amplamente utilizados e estudados no apoio à decisão na resolução de situações que envolvem múltiplos critérios, como refere Brunelli em [1, pág. 64] e está patente no artigo [2] e na tese de mestrado [3].

De mencionar que os problemas de decisão - enquanto problemas de escolha entre alternativas, ou até de ordenação das mesmas - incluem não só problemas de decisão multicritério, mas também de decisão sob incerteza (ou "sob risco"), decisão em grupo, decisão multiestágio, etc. Apesar de o processo AHP ser o mais conhecido e também o mais discutido, existem muitos outros processos para análise de decisão multicritério, nenhum isento de limitações e defeitos. Por estas razões, muitas variantes do processo AHP têm sido propostas ao longo dos anos.

Neste artigo iremos descrever o processo AHP de uma maneira leve e didática, para uma leitura mais detalhada ver [1, 4, 5].

Este processo baseia-se em três etapas, que iremos descrever e exemplificar usando a seguinte situação:

Problema: O João, depois de finalizar o 12.º ano em Elvas, concorreu à universidade e ficou colocado na licenciatura em Matemática na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, que era a licenciatura dos seus sonhos. Como alojamento para o João frequentar a licenciatura, os seus pais têm duas alternativas de aluguer: um quarto amplo num apartamento que fica a cinco minutos a pé da faculdade ou um apartamento, de tipologia T3, que dista 20 minutos em transportes públicos. Os pais do João consideram que o mais importante para o filho, nesta primeira fase, é estar perto da faculdade. Mas gostariam de passar temporadas com o filho para o ajudarem. Quanto ao valor que estão dispostos a gastar mensalmente no alojamento do João, este ronda os 700 euros. A renda mensal do quarto é de 300 euros e a do apartamento é de 900 euros. Com base nestes dados e critérios, qual o alojamento que os pais do João deverão alugar?

Uma vez que temos a situação definida, passamos à primeira etapa do AHP.

1. CONSTRUÇÃO DE HIERARQUIAS. No processo AHP o problema é estruturado em níveis hierárquicos através de um diagrama (grafo). No primeiro nível hierárquico colocamos o objetivo do problema, no segundo os critérios e no terceiro as alternativas. Assim, na figura 1 temos o grafo hierárquico da nossa situação concreta (problema) com o objetivo (alojamento João), os critérios (localização, tipologia, preço) e as alternativas (quarto, apartamento).

De mencionar que este processo admite outros níveis hierárquicos, que correspondem aos subcritérios e que no grafo hierárquico estão entre o dos critérios e o das alternativas, [1]. Por exemplo, se no nosso problema o critério "localização" exigisse outros parâmetros como "distância à faculdade", "distância ao supermercado", "distância a Lisboa", estes seriam considerados subcritérios da "localização", [1].

Com o grafo construído, entramos na segunda etapa do AHP.

2. DEFINIÇÃO DE PRIORIDADES. Comparamos dois a dois os elementos do mesmo nível hierárquico, relativamente a um elemento do nível hierárquico imediatamente inferior, através da escala numérica de Saaty (figura 2). Nesta escala é colocado sempre em primeiro lugar o elemento que não tem importância inferior ao que surge em segundo lugar. Assim, podemos atribuir um valor numérico a quaisquer dois elementos do mesmo nível hierárquico: se, pela tabela de Saaty, obtivermos o valor numérico, i, da comparação do elemento j com o elemento k, então atribuiremos o valor $1/i$ à comparação do elemento k com o elemento j, para que se verifique a condição recíproca, ou seja, para que o produto do valor numérico da comparação

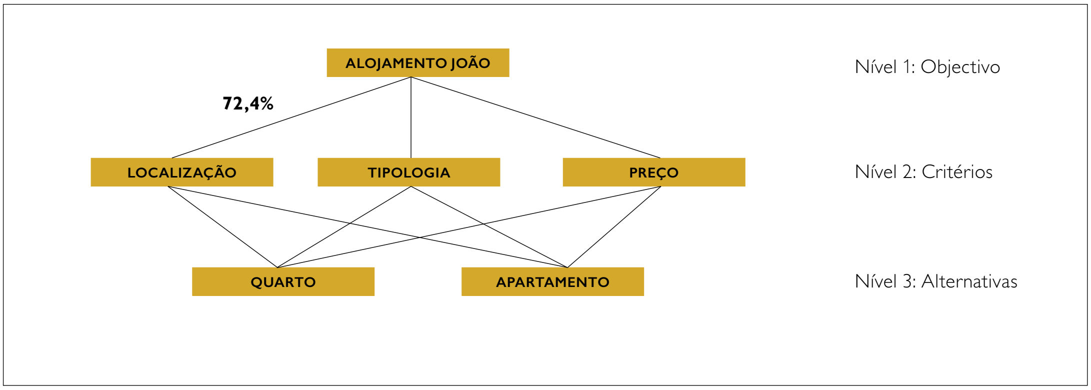


Figura 1. Grafo Hierárquico do Problema.

Escala Númerica	Definição	Explicação
1	Igual importância	Os dois elementos contribuem igualmente para o objetivo
3	Fraca importância	O primeiro elemento contribui ligeiramente mais para o objetivo
5	Forte importância	O primeiro elemento contribui mais para o objetivo
7	Fortíssima importância	O primeiro elemento contribui fortemente para o objetivo
9	Importância extrema	O primeiro elemento tem uma contribuição extrema para o objetivo
2, 4, 6, 8	Valores intermédios	Quando é necessária uma escala mais pormenorizada
Incremento de 0,1	Graduação mais fina	Quando é necessária uma escala pormenorizadíssima

Figura 2. Escala Numérica de Saaty.

de j com k pelo valor numérico da comparação de k com j seja 1, que corresponde ao valor numérico da comparação de j com j. Desta forma, torna-se possível a construção de quadros com o valor numérico das comparações dos elementos de cada nível hierárquico, relativamente a um elemento do nível hierárquico imediatamente inferior. Estes quadros são chamados matrizes de julgamento. Retomando a nossa situação e usando os dados do problema teremos as seguintes matrizes de julgamento das alternativas relativamente a cada um dos critérios.

$$A_1$$

$$\begin{array}{c|c} \text{Localização} & \text{Quarto} \quad \text{Apartamento} \\ \hline \begin{array}{c}\text{Quarto}\\ \text{Apartamento}\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1/7 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_2$$

$$\begin{array}{c|c} \text{Tipologia} & \text{Quarto} \quad \text{Apartamento} \\ \hline \begin{array}{c}\text{Quarto}\\ \text{Apartamento}\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1/7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_3$$

$$\begin{array}{c|c} \text{Preço} & \text{Quarto} \quad \text{Apartamento} \\ \hline \begin{array}{c}\text{Quarto}\\ \text{Apartamento}\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Reparando a que critérios os pais do João dão mais valor, temos a seguinte matriz de julgamento dos critérios relativamente ao objetivo.

$$A_4$$

$$\begin{array}{c|c} \text{Alojamento João} & \text{Localização} \quad \text{Tipologia} \quad \text{Preço} \\ \hline \begin{array}{c}\text{Localização}\\ \text{Tipologia}\\ \text{Preço}\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1/5 & 1 & 3 \\ 1/7 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

A normalização de todas as matrizes que obtivemos é o passo seguinte, ou seja, dividimos cada número que se encontra na coluna l, da matriz A_p, pela soma dos números dessa coluna. A normalização das matrizes permite que os números que se encontram na matriz sejam comparáveis, pois estão reduzidos à mesma unidade. Às novas matrizes, denotadas por A'_p, determinamos a média dos números de cada linha, para obtermos a prioridade dos itens de cada nível hierárquico relativamente a um item do nível hierárquico imediatamente inferior. As matrizes finais são denotadas por A''_p e são chamadas matrizes das prioridades parciais. Para o nosso problema,

$$\begin{array}{ll} & A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1/7 & 1 \end{bmatrix} \to A'_1 = \begin{bmatrix} 1/\frac{8}{7} & 7/8 \\ \frac{1}{7}/\frac{8}{7} & 1/8 \end{bmatrix} \\ \text{Soma} & \quad\;\; \overline{\;8/7 \quad 8\;} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Média} \\ = \begin{bmatrix} 0,875 & 0,875 \\ 0,125 & 0,125 \end{bmatrix} \to A''_1 = \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,125 \end{bmatrix}. \end{array}$$

O que significa que para o critério "localização", o quarto tem prioridade igual a 0,875 e o apartamento tem prioridade igual a 0,125.

$$\begin{array}{ll} & A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \to A'_2 = \begin{bmatrix} 1/8 & \frac{1}{7}/\frac{8}{7} \\ 7/8 & 1/\frac{8}{7} \end{bmatrix} \\ \text{Soma} & \quad\;\; \overline{\;8 \quad 8/7\;} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Média} \\ = \begin{bmatrix} 0,125 & 0,125 \\ 0,875 & 0,875 \end{bmatrix} \to A''_2 = \begin{bmatrix} 0,125 \\ 0,875 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \to A'_3 = \begin{bmatrix} 1/\frac{4}{3} & 3/4 \\ \frac{1}{3}/\frac{4}{3} & 1/4 \end{bmatrix} \\ \text{Soma} & \quad\;\; \overline{\;4/3 \quad 4\;} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Média} \\ = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,75 \\ 0,25 & 0,25 \end{bmatrix} \to A''_3 = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,25 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1/5 & 1 & 3 \\ 1/7 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \to A'_4 = \begin{bmatrix} 1/\frac{47}{35} & 5/\frac{19}{3} & 7/11 \\ \frac{1}{5}/\frac{47}{35} & 1/\frac{19}{3} & 3/11 \\ \frac{1}{7}/\frac{47}{35} & \frac{1}{3}/\frac{19}{3} & 1/11 \end{bmatrix} \to A''_4 \simeq \overset{\text{Média}}{\begin{bmatrix} 0,724 \\ 0,193 \\ 0,083 \end{bmatrix}}. \\ \text{Soma} & \quad\;\; \overline{\;47/35 \quad 19/3 \quad 11\;} \end{array}$$

O que significa que para o objetivo "alojamento do João", a localização tem prioridade igual a 0,724, a tipologia tem prioridade igual a 0,193 e o preço tem prioridade igual a 0,083, ou seja, os pais do João atribuem 72,4% à localização, 19,3% à tipologia e 8,3% ao preço.

Para determinarmos as prioridades (globais), que são obtidas das prioridades parciais dos critérios através da proporção estabelecida pelas prioridades parciais do objetivo, temos de calcular

$$0,724A''_1 + 0,193A''_2 + 0,083A''_3.$$

Em termos matemáticos, isto é o mesmo que construir as matrizes com as prioridades parciais de cada nível hierárquico e multiplicá-las. Ou seja,

$$\begin{bmatrix} A''_1 & A''_2 & A''_3 \end{bmatrix} A''_4 \simeq \begin{bmatrix} 0,875 & 0,125 & 0,75 \\ 0,125 & 0,875 & 0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,724 \\ 0,193 \\ 0,083 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0,72 \\ 0,28 \end{bmatrix}.$$

Estamos em condições de colocar as percentagens, obtidas nas matrizes das prioridades parciais A''_j, no diagrama do nosso problema, assim como as prioridades globais (figura 3).

Baseados nos resultados mas sujeitos ainda a uma última etapa do processo, os pais do João deverão alugar o quarto, já que possui um resultado numérico, 0,72 (72%), maior do que o apartamento, 0,28 (28%).

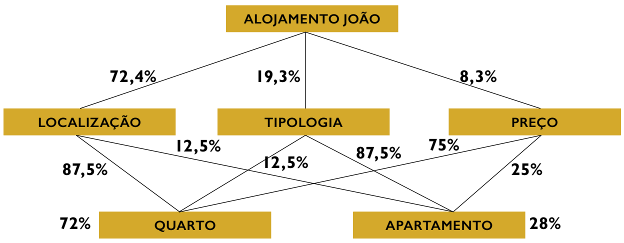


Figura 3. Grafo com os resultados do AHP.

Por último, temos a terceira etapa do AHP.

3. COERÊNCIA. Esta etapa consiste na prova de coerência do resultado obtido na etapa anterior. A coerência do método é obtida com a coerência de todas as suas matrizes de julgamento com pelo menos três colunas, já que as outras matrizes são sempre coerentes, [1]. Fazemos a prova de coerência pois os valores que são colocados nas matrizes de julgamento têm por base julgamentos subjetivos, o que leva a que ocorram desvios em relação ao valor ideal. Sendo A uma matriz de julgamento, com $n \geq 3$ colunas (de ordem n), que na etapa 2 teve A'' como sua matriz das prioridades parciais, então efetuamos o produto AA'', que como mencionado anteriormente é o mesmo que obter o resultado da proporção entre as prioridades parciais e as colunas de A. Seguidamente dividimos cada elemento da linha r de AA'' pelo elemento da linha r de A''. Denotamos a última matriz que obtivemos por A'''. Saaty definiu a razão de coerência de A, denotada RC, por $RC = IC/IA$, em que IA é o Índice Aleatório de uma matriz de ordem n, proposto por Saaty através de matrizes aleatórias de ordem n e constante na tabela seguinte

n	3	4	5	6	7	8	9	10
IA	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

e em que IC é o Índice de Coerência da matriz A, dado por $IC = \frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$, onde λ_{max} é a média dos elementos da matriz A'''. Segundo Saaty, a matriz A é coerente se o seu RC for inferior a 0,1, ou seja, 10%. Assim, no nosso problema temos

$$A_4A_4'' \simeq \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1/5 & 1 & 3 \\ 1/7 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,724 \\ 0,193 \\ 0,083 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 2,273 \\ 0,588 \\ 0,251 \end{bmatrix}$$

$$A_4''' \simeq \begin{bmatrix} 2,273/0,724 \\ 0,588/0,193 \\ 0,251/0,083 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 3,141 \\ 3,043 \\ 3,014 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\lambda_{max} \simeq \frac{3,141 + 3,043 + 3,014}{3} \simeq 3,066.$$

Como neste caso $n = 3$, $IC \simeq \frac{3,066-3}{2} = 0,033$ e $RC = IC/IA \simeq 0,033/0,58 \simeq 0,057 < 0,1$. Logo, A_4 é coerente e o nosso problema é coerente pelo AHP, pelo que se confirma a conclusão anterior: os pais do João deverão optar por alugar o quarto.

Se o RC não fosse inferior a 0,1, deveríamos refazer os cálculos, atribuindo um valor mais razoável a algum ou alguns julgamentos que surgem nessa matriz, [1].

Como se comprovou, através da pequena situação que os pais do João tinham, com o processo AHP temos uma resposta admissível para as mais diversas situações que envolvam múltiplos critérios.

REFERÊNCIAS

[1] M. Brunelli. *Introduction to the Analytic Hierarchy Process*. Springer (2015). *https://core.ac.uk/download/pdf/80714029.pdf.*

[2] N. Bebiano, R. Fernandes e S. Furtado. "Reciprocal matrices: properties and approximation by a transitive matrix". *Computational and Applied Mathematics* 39 (2020) 50.

[3] R.R. Pinho. *Modelo de Apoio à Decisão Multicritério para Seleção de Fornecedores de Folha de Flandres - Um Estudo de Caso na Empresa CAN.* Dissertação de Mestrado em Logística, I.P. Porto (2019). *http://hdl.handle.net/10400.22/14488*

[4] T.L. Saaty. *Decider face à la complexité, "Une approche analytique multicritère d'aide à la dècision"*, tradução de Lionel Dahan. Paris (1984).

[5] R.W. Saaty. "The analytic hierarchy process—what it is and how it is used". *Mathematical Modelling* 9 (1987) 161-176.

SOBRE A AUTORA

Rosário Fernandes licenciou-se em Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e é professora associada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. É autora de diversos artigos científicos sobre grafos, matrizes e combinatória.

José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

COMO DIVIDIR E CONQUISTAR A MULTIPLICAÇÃO

Podia pensar-se que a maneira como todos aprendemos a multiplicar números naturais é a mais rápida de todas. Mas não é.

A maneira como aprendemos a multiplicar números naturais no primeiro ciclo do Ensino Básico é usada há séculos em muitas regiões da Terra. É tão comum que possivelmente muita gente pensará que é a maneira de multiplicar quaisquer dois números naturais, embora, de facto, haja mais algoritmos tão ou mais antigos, como o método da gelosia,[1] que vem dos árabes e que foi introduzido na Europa por Fibonacci, ou o método dos camponeses,[2] que não exige conhecer a tabuada.

Ao multiplicarmos dois números de n algarismos cada pelo método tradicional, temos de levar a cabo a multiplicação de cada algarismo de cada número por cada algarismo do outro número. Isso leva a um total de n^2 multiplicações. Será necessário ainda fazer mais algumas adições para completar o cálculo.

Uma questão natural a colocar aqui é a de saber se é ou não o método mais rápido de levar a cabo este cálculo. Visto que é um algoritmo muito antigo, é razoável pensar que, caso houvesse um algoritmo mais rápido, no sentido de o número de operações a levar a cabo ser de uma ordem de grandeza menor do que no caso do algoritmo tradicional, este já teria sido descoberto há muito. Aqui, "ordem de grandeza menor" significa um algoritmo cujo número de passos seja proporcional, não a n^2 operações, como no caso do algoritmo tradicional, mas, por exemplo, proporcional a $n^{1,8}$ operações.

A título de exemplo, consideremos o algoritmo de Euclides para calcular o máximo divisor comum de dois números naturais. Surge nos *Elementos* de Euclides, que foram escritos por volta de 300 a.C. E continua, ao fim destes milénios a ser o algoritmo mais rápido para o fim a que se destina. De facto, em 1967 o físico Josef Stein publicou um artigo (veja-se [3]) onde divulgava outro algoritmo para o cálculo do máximo divisor comum de dois números que é mais rápido do que o de Euclides, mas somente no sentido de exigir cerca de 60% dos cálculos, não no sentido de o número de cálculos ser de uma ordem de grandeza menor do que no caso do algoritmo de Euclides.[3]

Na década de 1950, o matemático russo Andrey Kolmogorov conjeturou que o algoritmo usual de multiplicação é o melhor que pode existir, no sentido atrás descrito. Em 1960, organizou um seminário de Cibernética

[1] Veja-se *O Método da Gelosia para Multiplicações*, de Kleber Kilhian: *https://www.obaricentrodamente.com/2011/12/o-metodo-da-gelosia-para-multiplicacoes.html*

[2] Veja-se *Método da Multiplicação dos Camponeses Russos*} de Kleber Kilhian: *https://www.obaricentrodamente.com/2011/03/metodo-da-multiplicacao-dos-camponeses.html*

[3] Veja-se *Binary GCD Algorithm*: *https://iq.opengenus.org/binary-gcd-algorithm/*

A. Karatsuba

na Faculdade de Mecânica e Matemática da Universidade de Moscovo, que tinha como objetivo demonstrar essa conjetura. Para sua grande surpresa (imagina-se), o que aconteceu foi que Anatoly Karatsuba, na altura com 23 anos, demonstrou o contrário, ao encontrar um algoritmo mais eficiente para a multiplicação. Karatsuba expôs o seu algoritmo a Kolmogorov. Na sessão seguinte do seminário, este divulgou o algoritmo e, em seguida, declarou o seminário terminado (veja-se [1, §6]). Karatsuba viria a ser um especialista em Teoria Analítica dos Números.

Dois anos mais tarde, foi publicado o artigo [2], onde era exposto o algoritmo de Karatsuba. De facto, Karatsuba não esteve envolvido na publicação do artigo. Foi escrito por Kolmogorov (provavelmente com a colaboração de Yuri Ofman) e Karatsuba só tomou conhecimento da publicação do artigo ao receber as separatas que lhe eram devidas, na sua qualidade de (suposto) autor.

Vejamos então como funciona este algoritmo. Queremos multiplicar dois números naturais a e b, com $a \geqslant b$. Vamos supor que os escrevemos em base 10 (o algoritmo funciona em qualquer base) e que a se escreve em base 10 com n algarismos. Toma-se um número natural $m < n$ e escreve-se

$$a = 10^m a_1 + a_0 \quad \text{e} \quad b = 10^m b_1 + b_0,$$

com $a_1, a_0, b_1, b_0 \in \mathbb{N}$. Então

$$ab = 10^{2m} a_1 b_1 + 10^m (a_1 b_0 + a_0 b_1) + a_0 b_0.$$

Isto exige então quatro multiplicações. A ideia de Karatsuba consistiu em aplicar a seguinte relação:

$$a_1 b_0 + a_0 b_1 = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) - a_0 b_0 - a_1 b_1. \tag{1}$$

Parece que estamos aqui a substituir duas multiplicações por três, mas é preciso ter em conta que as multiplicações $a_0 b_0$ e $a_1 b_1$ já tinham sido feitas anteriormente. Assim sendo, o cálculo de ab envolve somente três multiplicações: $a_0 b_0$, $a_1 b_1$ e $(a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$. Observe-se que (1) também envolve subtrações, mas há aqui uma ideia implícita (e intuitiva) segundo a qual somas e subtrações têm um peso insignificante relativamente à multiplicação.

Vejamos, por exemplo, como multiplicar 13 579 por 2 468. Será usado $m = 3$. Temos então $13\,579 = 13 \times 10^3 + 579$ e $2\,468 = 2 \times 10^3 + 468$. Então, seguindo o algoritmo, calculam-se

- $13 \times 2 = 26$
- $579 \times 468 = 270\,972$
- $(13 + 579)(2 + 468) - 26 - 270\,972 = 7\,242.$

Então

$$\begin{aligned} 13\,579 \times 2\,468 &= 26 \times 10^6 + 7\,242 \times 10^3 + 270\,972 \\ &= 26\,000\,000 + 7\,242\,000 + 270\,972 \\ &= 33\,512\,972. \end{aligned}$$

Uma análise cuidadosa ao algoritmo de Karatsuba, revela que a sua aplicação exige cerca de $n^{\log_2 3}$ multiplicações de números com um único algarismo. Como $\log_2 3 \approx 1{,}58 < 2$, este algoritmo é claramente melhor do que o algoritmo tradicional.

Em informática teórica, o algoritmo de Karatsuba faz parte de uma família de algoritmos que se designa por "Divisão e conquista". São algoritmos que, para resolver um problema, o separam em dois ou mais subproblemas, resolvem estes problemas e empregam as soluções para resolver o problema original. Por vezes, aplica-se a designação "Divisão e conquista" a algoritmos que começam, não por reduzir o problema original a vários problemas mais simples, mas a um problema mais simples. É o caso do algoritmo de Euclides: para encontrar o máximo divisor comum de dois números naturais m e n, com $m > n$, o primeiro passo consiste em encontrar o máximo divisor de n e do resto da divisão de m por n.

O algoritmo de Karatsuba não é a última palavra sobre este tópico. O que aconteceu foi que a descoberta deste algoritmo estimulou a procura de outros que fossem ainda mais rápidos. Logo em 1963 surgiu o algoritmo de Toom-Cook, que exige cerca de $n^{\log_3 5}$ multiplicações de números formados por um algarismo. Como $\log_3 5 \approx 1{,}46$, é mais rápido do que algoritmo de Karatsuba. E, em 1971, surgiu o algoritmo de Schönhage-Strassen, que exige $n\log(n)\log(\log(n))$ multiplicações; é menor do que $n^{\log_3 5}$ para n suficientemente grande. Já se passaram mais de 50 anos e ainda não surgiu nenhum algoritmo mais rápido.

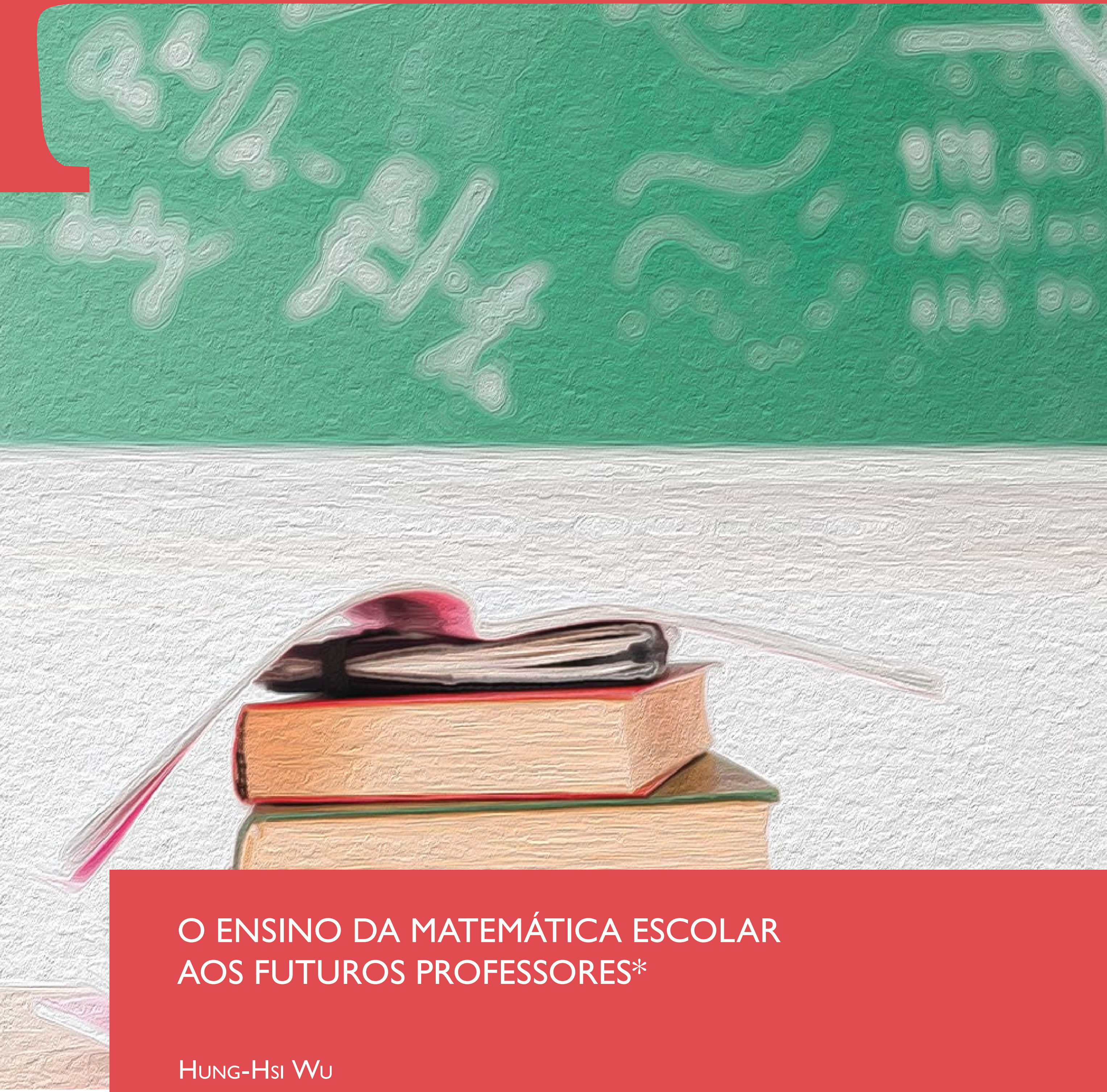
E porque é que falha o argumento segundo o qual se houvesse um algoritmo melhor, então já teria sido descoberto há muito? Acontece que os algoritmos atrás mencionados não justificam o esforço para lidar com números à escala humana. De facto, levam a mais cálculos e não a menos se forem aplicados a números pequenos. É ao fazer-se a multiplicação de números com dezenas ou centenas de algarismos que a vantagem do uso daqueles algoritmos se torna avassaladora.

REFERÊNCIAS

[1] Anatoly A. Karatsuba, "The complexity of computations, *Proceedings of the Sketlov Institute of Mathematics*, 211, pp. 169-183, 1995

[2] Anatoly A. Karatsuba e Yuri Ofman (1962). "Multiplicação de números com muitos algarismos por computadores automáticos" (em russo), *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 145: 293–294, 1962. Tradução para inglês em *Physics-Doklady*, 7, pp. 595-596, 1963

[3] Josef Stein, "Computational problems associated with Racah algebra", *Journal of Computational* **1** (3), pp. 397-405, 1967



O ENSINO DA MATEMÁTICA ESCOLAR AOS FUTUROS PROFESSORES*

Hung-Hsi Wu
Universidade da Califórnia
wu@berkeley.edu

*Tradução por Fernando Pestana da Costa, do artigo "Teaching School Mathematics to Prospective Teachers", publicado, em dezembro de 2021, no N.º 22 do *European Mathematical Society Magazine*. A *Gazeta de Matemática* agradece ao autor e à EMS a autorização para a publicação desta tradução.

Que matemática deve ser ensinada no Ensino Superior aos estudantes que irão ser professores nos ensinos Básico e Secundário é uma questão que, sendo recorrente, merece, ainda assim, um olhar atento dos matemáticos docentes e responsáveis dos cursos superiores das universidades e dos institutos politécnicos encarregues desta importante tarefa. A questão é tanto mais relevante quanto, muitas vezes, não é encarada com a devida seriedade porque a matemática envolvida é considerada "elementar".

Sendo claro que um professor deve ter, além de uma compreensão profunda dos assuntos que está a ensinar, um conhecimento apreciavelmente mais vasto, acontece que, dada a natureza elementar de muitos assuntos que o futuro professor terá de ensinar, há a tendência para, não poucas vezes, em unidades curriculares de matemática dedicadas à formação de professores, a temática ser centrada em aspetos puramente didáticos ou, então, em aspetos matemáticos mais abstratos e essencialmente irrelevantes para os futuros professores, em vez de se debruçar sobre os (supostamente elementares) aspetos matemáticos dos tópicos tratados. Que isto é um erro e que o Ensino Superior deve dar a devida atenção à "Matemática Escolar", assumindo-a como uma disciplina matemática autónoma que deve ser devidamente estruturada, seriamente encarada e cuidadosamente ensinada aos futuros professores, é tema do artigo de Hung-Hsi Wu.

O autor é bem conhecido da comunidade matemática portuguesa, tendo, por várias vezes, sido orador nos encontros nacionais da Sociedade Portuguesa de Matemática sobre temas de ensino da matemática e formação de professores, e tendo a tradução e a publicação em Portugal de um dos seus livros sido também promovidas pela Sociedade.

O presente artigo, tradução do original publicado no European Mathematical Society Magazine, é uma importante contribuição para a discussão deste tópico e, pensamos, será útil também no contexto português.

Fernando Pestana da Costa

(Prof. catedrático da Univ. Aberta; ex-presidente da SPM)

O tipo de matemática que devemos ensinar a prospetivos professores de matemática dos ensinos Básico e Secundário tem sido um problema longamente debatido em educação matemática. Neste artigo defendemos que o que lhes devemos ensinar é aquilo de que eles precisarão para o seu trabalho: a matemática escolar.

1. INTRODUÇÃO

Uma boa educação em matemática escolar requer que os professores sejam conhecedores de Matemática. No fim de contas, não se pode ensinar o que não se sabe. No entanto, pelo menos nos Estados Unidos, ainda não estamos muito seguros sobre que tipo de matemática devemos ensinar aos futuros professores para os tornar conhecedores (cf. [12]). Num bem conhecido artigo de 1990, [1], Deborah Ball reportou o seu estudo sobre o conhecimento de conteúdos de 252 candidatos a futuros professores (217 a professores do Ensino Básico e 35 do Ensino Secundário) em cinco universidades. O estudo focou-se num tópico: a divisão de frações. Perante a divisão $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ e quatro problemas de palavras, apenas 30% foram capazes de selecionar o problema que era corretamente representado por esta divisão. Num estudo com menos intervenientes, pediu-se a 35 dos 217 professores (25 do Básico e 10 do Secundário) para criarem um problema de palavras que representasse corretamente aquela divisão. Apenas quatro dos 35 (ou seja, 11%) conseguiram dar uma resposta satisfatória, e todos eles eram professores do Secundário. As entrevistas (separadas) de Deborah Ball, acerca do mesmo tópico da divisão de frações, com estudantes de matemática do Ensino Superior que não planeavam ir para o ensino não produziu resultados melhores. A conclusão a que a autora chegou foi que a preparação dos prospetivos professores precisava urgentemente de uma séria reavaliação.

Naturalmente que a pesquisa sobre a melhor forma de ajudar os prospetivos professores a adquirirem a necessária compreensão da matemática para ensinar é anterior ao estudo de Ball, datando, pelo menos, do início do século XX. Nos dias do declínio da "Matemática Moderna", nos anos 1960, E. G. Begle também refletia sobre a possível correlação entre o conhecimento dos assuntos por parte dos professores e os êxitos dos seus estudantes. No seu estudo [2], de 1972, sobre 308 professores de Álgebra no Ensino Secundário, ele não encontrou evidência de que a extensão do treino em matemática dos professores resultasse em melhores resultados dos alunos. Esta conclusão foi também confirmada mais tarde, em 1979, em [3].

As décadas que passaram desde os estudos de Begle e Ball contribuíram para clarificar o fenómeno por eles descoberto. Iremos, primeiro, analisar os dados de Ball sobre $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, e, depois, colocar esses dados na perspetiva adequada ao aceitar o facto de que a *Matemática Escolar* é uma disciplina distinta da matemática que ensinamos nas universidades.

2. A DIVISÃO DE FRAÇÕES: DUAS VISÕES

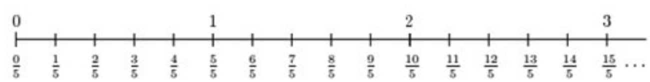
Iremos abordar o tópico da divisão de frações usando duas perspetivas. Primeiro, iremos descrever o que os alunos do Ensino Básico necessitam de saber para responder às perguntas de Deborah Ball e, depois, o que é que estudantes universitários podem aprender sobre divisão de frações numa disciplina de Álgebra. Por limitações de espaço, iremos apenas concentrar-nos nas diferenças *matemáticas* críticas entre os dois, deixando de parte as ramificações pedagógicas.

Quando o assunto da divisão de frações é abordado no Ensino Básico os estudantes enfrentam um verdadeiro desafio conceptual: o conceito de fração envolve um nível de abstração superior ao de qualquer outra coisa que encontraram até essa altura e a divisão é a mais elusiva das quatro operações aritméticas definidas sobre frações. Os estudantes não conseguem superar qualquer destes obstáculos se não lhes for dito *exatamente* o que é que cada um destes conceitos significa. Como disse Kyle Kirkman, uma professora do Ensino Básico do Arizona,

> "Tenho aprendido que é crítico possuir definições matemáticas precisas. Se a precisão está ausente, os estudantes colmatarão qualquer elemento vago ou em falta na definição com o que quer que seja que esteja presente no seu paradigma e que pareça adaptar-se à ideia. Nem toda a matemática tem uma natureza intuitiva, pelo que isto pode originar conclusões erróneas." [12, Secção 4.2.4].

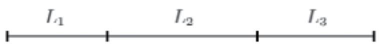
Infelizmente, acontece que, usualmente, em matemática escolar, as frações são explicadas aos estudantes em termos de metáforas vagas, sem dar uma definição precisa, ou, pelo menos, não uma que os estudantes possam usar para raciocinar sobre as quatro operações quando aplicadas às frações. Temos, primeiro, de descrever um modo de remediar esta deplorável situação. Definiremos uma fração em termos que são sentidos como "reais" e "tangíveis" para estudantes do Ensino Básico. A definição comummente aceite atualmente para tal fim é a de fração como um ponto na chamada *reta numérica* (ver secções 12.1 e 12.2 de [9], ou pp. 1-18 de [10]), da maneira que se segue. Assumimos que conseguimos decidir quando é que dois segmentos (i.e., intervalos fechados) têm, ou não, o mesmo comprimento. Uma **reta numérica** é uma linha horizontal na qual os números inteiros positivos foram identificados como pontos tais que os números 1, 2, 3, ... são colocados sucessivamente para a direita de 0 e os segmentos [0,1], [1,2], [2,3], ..., *têm, todos, comprimento igual*:

As frações com denominador igual a (por exemplo) 5 consistem nos números inteiros positivos juntamente com os pontos obtidos pela divisão de cada um dos segmentos [0,1], [1,2], [2,3], ..., em cinco **partes de igual comprimento.**



Chamamos a esta sucessão a **sucessão dos quintos**. Do mesmo modo, para cada número inteiro positivo n podemos introduzir a **sucessão dos *n*-ésimos**. (Observe a semelhança entre a sucessão dos n-ésimos, para cada n, e a sucessão dos inteiros positivos.) As **frações** são, por definição, a totalidade de todos os pontos nas sucessões dos n-ésimos, para todos os números inteiros positivos n.

Introduzimos, a seguir, o conceito de *comprimento* para certos segmentos. Por definição, o **comprimento** do segmento $[0, \frac{a}{b}]$ (onde $\frac{a}{b}$ é uma fração) é igual a $\frac{a}{b}$. Portanto, um segmento com o mesmo comprimento de $[0, \frac{a}{b}]$ também tem comprimento igual a $\frac{a}{b}$. Para dar uso a esta definição introduzimos o conceito de **concatenação** de uma coleção de segmentos - digamos, L_1, L_2 e L_3 - como sendo o segmento formado colocando estes segmentos juntos, com o final de um coincidente com o início do outro:



Segue-se daqui que o comprimento da concatenação de três das partes obtidas quando [0,1], é dividido, digamos, em sete partes iguais é $\frac{3}{7}$, porque esse segmento tem o mesmo comprimento de $[0, \frac{3}{7}]$.

Como a divisão está baseada na multiplicação, prosseguiremos diretamente para a **multiplicação de frações** sem discutir previamente as *frações equivalentes* ou a *adição de frações*. Por definição, $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ é o comprimento da concatenação de duas das partes que se obtêm quando o segmento $[0, \frac{3}{4}]$ é dividido em cinco partes iguais. A multiplicação de duas frações em geral é definida de modo análogo (veja-se, por exemplo, Secção 1.5 de [10] ou Secção 1.4 de [13]). É um facto não trivial (para estudantes do Ensino Básico) provar a seguinte **fórmula do produto**:

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} \tag{1}$$

Veja-se, por exemplo, o Teorema 1.5 na página 60 de [10][1].

Esta definição de multiplicação de frações não surgiu do nada. Se, na definição de $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$, substituirmos a fração $\frac{3}{4}$ por 1 ($= \frac{1}{1}$), então a definição de $\frac{2}{5} \times 1$ ("o comprimento total de duas das partes que se obtêm quando [0, 1] é dividida em cinco partes iguais") é exatamente a definição, acima, de $\frac{2}{5}$, pelo que, não surpreendentemente, $\frac{2}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$. Além disto, se considerarmos o produto de números inteiros positivos, digamos, 2×3, podemos também encará-lo como a multiplicação das frações $\frac{2}{1}$ e $\frac{3}{1}$. Então, a definição de multiplicação de frações diz-nos que este produto é o comprimento total de duas das partes que se obtêm quando o segmento [0,3] é dividido numa única parte, isto é, quando se considera o segmento [0,3] inteiro. Por outras palavras, o produto 2×3, quer quando considerado como o produto de dois *números inteiros positivos* quer como o produto de duas *frações*, é apenas $3 + 3$. Deste modo, vemos que a definição da multiplicação de frações é uma extensão muito natural de conceitos familiares.

Como é que este conceito de multiplicação se relaciona com o mundo real? Para alunos do Ensino Básico isto é uma preocupação importante, como o problema seguinte mostra.

Exemplo 1. Sabendo que $4\frac{2}{3}$ baldes de água são necessários para encher um tanque de água, qual é o volume do tanque, se a capacidade de cada balde for de 5,5 litros?

Solução. É importante começarmos por compreender os dados do problema. Como, por definição, $4\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3}$ o tanque contém quatro baldes e $\frac{2}{3}$ de um balde de água. O volume total de quatro baldes é claramente $4 \times 5\frac{1}{2}$ litros. Agora os estudantes têm de compreender (e o professor deverá explicar) que "$\frac{2}{3}$ de $5\frac{1}{2}$ litros" significa que é o volume de "duas partes quando $5\frac{1}{2}$ litros é dividido em três partes de igual volume". *Pela nossa definição de multiplicação de frações,* isto é precisamente $\frac{2}{3}$ de $5\frac{1}{2}$ litros na reta numérica em que "1" é interpretado como significando "1 litro". Pela propriedade distributiva, o volume do tanque é

$$\left(4 \times 5\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} \times 5\frac{1}{2}\right) = 4\frac{2}{3} \times 5.,5 \text{ litros.}$$

Portanto, "$4\frac{2}{3}$ *de* 5,5 litros" é igual a "($4\frac{2}{3} \times 5,5$) litros".

Incidentalmente, isto *explica* porque é que quando os livros de texto não definem multiplicação de frações, dão a regra (para memorizar) que a palavra "de" significa "multiplicar".

Passemos, agora, à divisão. Devemos, primeiro, rever o conceito de *divisão inteira* (veja-se pp.127-130 de [9]). Observe-se que, ao passo que podemos somar ou multiplicar *quaisquer* dois números inteiros positivos, não podemos subtraí-los nem dividi-los. Por exemplo, no contexto de números inteiros positivos, a subtração $3 - 7$ não é permitida, nem a divisão $21 \div 5$. Examinemos esta última: no contexto dos inteiros positivos, podemos escrever $21 \div 7$ (respetivamente $15 \div 3$) apenas porque sabemos antecipadamente que 21 (respetivamente 15) é um múltiplo *inteiro* de 7 (respetivamente 3). Por exemplo, a definição de $21 \div 7$ é:

$$21 \div 7 = (\text{número inteiro positivo } k \text{ tal que } k \times 7 = 21). \tag{2}$$

[1] Ou as páginas 298-300 de [9], *(N. do T.).*

É por isto que $21 \div 7 = 3$. A definição deixa perfeitamente claro que, sem a garantia *a priori* de que 21 é um múltiplo de 7, seria impossível definir o *inteiro positivo* $21 \div 7$. De modo equivalente, se não soubermos que 21 pode ser particionado em três grupos de 7, então não poderemos falar sobre $21 \div 7$. Se os estudantes acharem (2) confuso, será bom lembrar que (2) não é diferente da definição de subtração:

$$21 - 7 \;=\; \big(\text{número inteiro positivo } \ell \text{ tal que } \ell + 7 = 21\big). \tag{3}$$

A importância desta revisão prende-se com o facto de a divisão de inteiros servir de modelo para a divisão de frações, uma vez que inteiros são também frações (veja pp. 316-322 de [9]). Portanto, de acordo com (2), a divisão $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ ($1\frac{3}{4}$ é apenas $\frac{7}{4}$) não fará sentido a menos que $1\frac{3}{4}$ seja *múltiplo fracionário* de $\frac{1}{2}$ no sentido de que $1\frac{3}{4} = \frac{m}{n} \times \frac{1}{2}$ para alguma fração $\frac{m}{n}$. (Esta fração $\frac{m}{n}$ é única; veja o lema na página 319 de [9] ou o lema 1.7 na página 75 de [10].) *Assumindo que existe uma tal fração* $\frac{m}{n}$, então podemos definir $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ exatamente do mesmo modo que em (2):

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} \;=\; \left(\text{a fração } \tfrac{m}{n} \text{ tal que } \tfrac{m}{n} \times \tfrac{1}{2} = 1\tfrac{3}{4}\right). \tag{4}$$

Veja a página 321 de [9] ou a página 75 de [10].

Surpreendentemente, ao contrário do que acontece no caso de números inteiros, acontece que tal fração $\frac{m}{n}$ no membro direito de (4) pode sempre ser encontrada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 1\frac{3}{4} &= 1 \times 1\frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{1}\right) \times 1\frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{1} \times 1\frac{3}{4}\right) \quad \text{(propriedade associativa da multiplicação)} \\ &= \left(\frac{2}{1} \times 1\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} \quad \text{(propriedade comutativa da multiplicação).} \end{aligned} \tag{5}$$

De (5) vemos que se fizermos $\frac{m}{n} = \frac{2}{1} \times 1\frac{3}{4}$ então $1\frac{3}{4} = \frac{m}{n} \times \frac{1}{2}$ e (4) permite-nos concluir que

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} \;=\; \frac{2}{1} \times 1\frac{3}{4}. \tag{6}$$

Claro que isto é a **regra de multiplicação pela fração inversa** para a divisão de frações. Verifica-se que este raciocínio é perfeitamente geral.

Damos agora um problema de palavras do artigo de Ball ([1]) cuja solução requer a utilização da divisão de frações $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ *e também explicamos como é que ele surge.*

Exemplo 2. Quantos copos de água são necessários para encher um jarro com um volume de $1\frac{3}{4}$ litros sabendo que cada copo tem uma capacidade de $\frac{1}{2}$ litro?

Solução. Seja $\frac{m}{n}$ o número de copos de água necessários para encher o jarro. Usando o raciocínio apresentado no Exemplo 1 acerca do volume de água no tanque, vemos que

$$\frac{m}{n} \times \frac{1}{2} \;=\; 1\frac{3}{4}.$$

Pela definição de divisão de frações, isto significa que

$$\frac{m}{n} \;=\; \mathbf{1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}} \;=\; \frac{2}{1} \times 1\frac{3}{4} \;=\; 3\frac{1}{2},$$

onde a última igualdade se obtém por um cálculo rotineiro.

Chegados a esta altura, mostrámos qual o mínimo conhecimento matemático que um professor deve ter para ensinar corretamente a divisão de frações aos seus alunos. Salientamos mais uma vez que este conhecimento mínimo *não* é o que, tipicamente, os alunos do Ensino Básico são ensinados nas escolas dos Estados Unidos. Seja como for, é agora tempo para discutir a outra preocupação no artigo de Ball de 1990, nomeadamente sobre a razão de os estudantes do Ensino Superior de matemática também poderem não ter esse conhecimento básico. Na discussão que se segue apenas poderemos abordar muito superficialmente este assunto.

Uma unidade curricular universitária[2] de Álgebra Abstrata que inclui um modo matematicamente correto de definir frações é, essencialmente, a primeira introdução de um estudante à matemática abstrata. O principal objetivo de uma tal unidade curricular é o de guiar os primeiros passos do estudante no ambiente do que é a chamada *matemática abstrata*. Isto explica porque, nessas disciplinas, a ênfase é colocada em definições corretas, nas demonstrações, e, pela utilização da lógica, na redução de todos os fenómenos matemáticos complexos aos mínimos essenciais. Para o caso que estamos a considerar, coloquemo-nos na situação em que os estudantes estão já na posse dos inteiros, que serão designados por $\mathbb{Z}$, e ter-se-ão apercebido de que o maior defeito de $\mathbb{Z}$, de um ponto de vista abstrato, é que, com exceção de 1 e de -1, mais nenhum inteiro não nulo tem um *inverso multiplicativo,* i.e., dado um inteiro z, $z \neq 1$ ou -1, não existe qualquer inteiro z' tal que $zz' = z'z = 1$. A maneira de eliminar este defeito consiste em expandir $\mathbb{Z}$ incluindo os desejados inversos multiplicativos e formando, assim, o corpo dos quocientes $\mathbb{Q}$.

É claro que este $\mathbb{Q}$ é aquilo a que chamamos **números racionais** (frações positivas e negativas), mas, de um ponto de vista abstrato, não podemos apenas juntar a $\mathbb{Z}$ os novos números $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, etc., e declarar: "Aqui está!" Afinal, *o que é que são estes novos números e como é que os adicionamos e multiplicamos?* Queremos que os estudantes aprendam a fazer coisas semelhantes nos chamados *domínios de integridade,* sistematicamente e de uma vez por todas, e a maneira de fazer isso é formar o conjunto de todos os pares ordenados de inteiros, $\{\langle u, v\rangle\}$, (onde u e v são inteiros) e introduzir neste conjunto uma *relação de equivalência* (essencialmente declarando válido o algoritmo da multiplicação cruzada) e, depois, declarando que $\mathbb{Q}$ é, por definição, o conjunto das *classes de equivalência.* Após isto podemos mostrar que cada inteiro u em $\mathbb{Z}$ pode ser identificado com a classe de equivalência contendo $\langle u, 1\rangle$, e podemos também escrever a classe de equivalência contendo $\langle u, v\rangle$ como $\frac{u}{v}$ de modo a alinhar a nova notação com a antiga. Em particular, isto quer dizer que $\frac{u}{1}$ é identificado com o inteiro u, para qualquer u.

Para principiantes, apenas a familiarização com esta construção geral e ficar confortável com a ideia de que cada "número" em $\mathbb{Q}$ é agora uma classe de equivalência (contendo um número infinito de elementos) é já um esforço formidável. Mas há mais. Até esta altura apenas temos um conjunto maior, $\mathbb{Q}$, contendo $\mathbb{Z}$, mas ainda não sabemos como fazer aritmética em $\mathbb{Q}$, i.e., dados dois elementos arbitrários de $\mathbb{Q}$ ainda não sabemos como adicioná-los ou multiplicá-los. Consequentemente, o próximo passo é o de *definir* as regras para a adição e para a multiplicação de elementos de $\mathbb{Q}$ (que são classes de equivalência) com o objetivo de mostrar que $\mathbb{Q}$ é um objeto abstrato chamado *corpo*, o que significa, em particular, que cada elemento não nulo de $\mathbb{Q}$, z, terá um inverso multiplicativo z^{-1}, i.e., $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$. Eis as definições relevantes: para u, v, s, t em $\mathbb{Z}$ com $v \neq 0$ e $t \neq 0$,

$$\frac{u}{v} + \frac{s}{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ut + sv}{vt} \tag{7}$$

$$\frac{u}{v} \times \frac{s}{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{us}{vt}. \tag{8}$$

É importante sublinhar a notável mudança de perspetiva que acabou de ter lugar. Em matemática escolar as frações são consideradas como sendo uma parte da Natureza que os estudantes devem conhecer, e a ideia de que duas frações podem ser multiplicadas é um dado adquirido. O que necessita de explicação é como é que o produto de duas frações está relacionado com fenómenos que nos rodeiam no dia a dia e porque é que a fórmula do produto (1) está correta. Em contraste com isto, a matemática abstrata prossegue de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ encarando apenas os inteiros como sendo conhecidos, pelo que, agora, adicionar e multiplicar os *desconhecidos* números racionais não inteiros é algo totalmente em branco que aguarda ser estabelecido; tal é feito definindo judiciosamente o que estas operações devem ser. A estrutura interna de $\mathbb{Q}$ é, aqui, a única preocupação, e não como é que $\frac{u}{v} \times \frac{s}{t}$ está relacionado com algum fenómeno do dia a dia. Em particular, enquanto (1) é um teorema da matemática escolar, a mesma expressão (8) é uma mera *definição.*

Agora podemos perceber por que razão, em geral, os estudantes universitários de matemática são incapazes de explicar a estudantes do Ensino Básico como se multiplicam duas frações. Antes de mais, se não todos, pelo menos a maioria dos estudantes universitários em causa não foi confrontada com este tipo de conhecimento quando, eles próprios, eram estudantes do Ensino Básico (veja-se, por exemplo, [16]). Mais ainda, o que eles aprenderam sobre frações na universidade tem a ver com a estrutura abstrata do corpo dos números racionais e não sobre como as frações estão relacionadas com situações do dia a dia. Consequentemente, não é que um estudante universitário seja ignorante sobre frações, mas a sua compreensão das frações está divorciada das preocupações dos estudantes do Ensino Básico. Na medida em que a multiplicação é a base da divisão, o mesmo comentário aplica-se à divisão de frações na matemática escolar, como mostraremos de seguida.

Como parte da missão dos estudos universitários de redução dos vários fenómenos à sua essência básica, as quatro operações são reduzidas a apenas duas, a saber: a adição e a multiplicação. Num corpo a subtração $a - b$ é, *por definição,* a adição $a + (-b)$, onde $-b$ é o *inverso aditivo* de b, e a divisão $a \div b$ $(b \neq 0)$ é, *por definição,* apenas a multiplicação $a \times b^{-1}$, onde b^{-1} é o inverso multiplicativo de b. Como o inverso multiplicativo de um racional não nulo $\frac{s}{t}$ é, claramente, apenas o seu recíproco $\frac{t}{s}$, a regra de multiplicação pela inversa é agora - tal como a fórmula do

[2] A referência do autor a universidades e ao ensino universitário deve, no contexto português, ser entendido como dizendo respeito a qualquer dos subsistemas, universitário ou politécnico.

produto (8) - uma questão de definição:

$$\frac{u}{v} \div \frac{s}{t} \overset{\text{def}}{=} \frac{u}{v} \times \left(\frac{s}{t}\right)^{-1} = \frac{u}{v} \times \frac{t}{s}. \qquad (9)$$

Do ponto de vista da matemática abstrata, tendo estabelecido a multiplicação, a divisão é apenas uma consideração *a posteriori*. Os estudantes de matemática estarão, nesta altura, normalmente, ocupados explorando as novas estruturas algébricas (grupos, corpos, anéis, etc.) e qualquer questionamento sobre a divisão e as suas ramificações na vida real não entrará o seu espírito. Se eles não conseguem ajudar os alunos do Ensino Básico a ultrapassar o seu medo da regra da multiplicação pela inversa[3] , não é, mais uma vez, porque eles saibam menos do que os professores do Ensino Básico, mas porque sabem algo *diferente* daquilo que preocupa os estudantes do Ensino Básico.

3. O QUE É A MATEMÁTICA ESCOLAR?

Por intermédio de um único tópico, muito limitado, - a divisão de frações - ficámos cientes da diferença crítica entre o que pode ser chamada de *matemática superior* (a matemática ensinada no Ensino Superior para preparar os estudantes para a investigação em matemática) e a *matemática escolar* (a matemática ensinada nas escolas do Ensino Básico e Secundário). O objetivo principal da primeira é introduzir os estudantes à matemática abstrata e, para este fim, a sua ênfase é em completude lógica e na abstração. Independentemente do modo como seja feito, é uma abordagem austera e demasiadamente sofisticada para ser usada em escolas do ensino não superior.

Os alunos do Ensino Básico, vindos predominantemente do mundo das experiências táteis, necessitam de uma ponte que os ajude na transição para o mundo da abstração. A matemática escolar é uma tal ponte e deveria ser reconhecida como uma disciplina independente, dedicada à *adaptação* da matemática universitária às necessidades dos estudantes do ensino não superior. Neste sentido preciso, a *matemática escolar* é **engenharia matemática** (veja [7]).

No entanto, observe-se que há boa engenharia e há, também, má engenharia. A boa engenharia tem sempre presente os princípios básicos das ciências que lhe estão associadas - por exemplo, a engenharia mecânica não se empenha no projeto de uma máquina de movimento perpétuo - mas má engenharia pode fazer exatamente o oposto. No caso da matemática, má engenharia matemática tem estado em ação há demasiado tempo, pelo menos nos Estados Unidos, e tem produzido matemática escolar que parece fazer questão de desafiar princípios fundamentais da matemática (veja-se, e.g., [16]). Antes de prosseguir, explicitemos uma versão dos **princípios fundamentais da matemática** ([8]):

(*i*) **Definições claras.** Cada conceito é definido com precisão, de modo a poder ser usado para raciocinar.

(ii) **Raciocínio lógico.**Toda a afirmação é suportada por um raciocínio que explica o *porquê* da sua veracidade. (É compreensível que em alguns casos especiais, como o teorema fundamental da Álgebra, o raciocínio possa ser deferido.)

(iii) **Linguagem precisa.** Não existe espaço para a ambiguidade numa disciplina onde a distinção entre verdadeiro e falso é absoluta.

(iv) **Coerência**. Os conceitos e competências não são peças e bocados fragmentados, mas fazem parte de um todo coerente.

(v) **Finalidade.** Cada conceito ou competência tem uma finalidade.

Tivemos ocasião de observar todos estes princípios em ação na discussão precedente sobre a divisão de frações: fração, multiplicação de frações e divisão de frações foram todos definidos com precisão de modo a tornar possível o uso do raciocínio para explicar fórmulas como (8) e (9); um exemplo da precisão existente em matemática escolar é a definição de divisão inteira, que mostra porque "$m \div n$ " não faz sentido para dois inteiros positivos arbitrários m e n; quanto à coerência, esforçámo-nos por explicar como é que a definição de multiplicação de frações surge da definição de fração, bem como da multiplicação de inteiros positivos. Mostrámos também que a definição de divisão de frações é modelada a partir da divisão de inteiros positivos. Finalmente, se bem que a *finalidade* dos conceitos de fração, multiplicação e divisão de frações seja perfeitamente óbvia, existem muitos outros conceitos ou competências cuja presença no currículo escolar não está bem explicada, por exemplo: porquê aprender a arredondar um número para a dezena ou para o milhar mais próximo (veja Capítulo 10 de [9]), porquê tomar o valor absoluto de um número real (veja pp.130-131 de [13], e pp.120 e 123 de [15]), etc. Veja-se também a discussão sobre *declive*, mais abaixo.

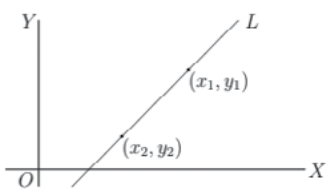
Referir-nos-emos à matemática escolar que observa os princípios fundamentais acima como **MEBP}** (Matemática Escolar Baseada em Princípios; veja [5]).

Temos, agora, as ferramentas necessárias para revisitar o problema relativo à educação matemática dos professores que Begle, Ball, e outros descobriram mas não articularam claramente. Na nossa linguagem, a mensagem deles é a de que, para obter professores matematicamente competentes temos de lhes ensinar *MEBP* em vez de matemática universitária. Isto porque a matemática escolar e a matemática universitária são disciplinas relacionadas mas essencialmente distintas, pelo que saber matemática universitária não implica que se saiba MEBP. Sublinhámos as suas diferenças usando um pequeno tópico - a divisão de frações- mas existem muitos outros exemplos. Vejamos, brevemente, dois exemplos adicionais: o conceito de *declive* de uma linha reta, e o vasto tema do currículo escolar de Geometria. Exemplos semelhantes são assinalados ao longo dos seis volumes [9]-[11] e [13]-[15].

Consideremos como a matemática escolar trata o conceito de declive. O principal ponto de partida é deixar os estudantes reterem a sua conceção naif de uma linha reta na geometria euclidiana e definir *declive* em termos dessa conceção ingénua. Então, seja dada uma linha reta L no plano $\mathbb{R}^2$. Suponha-se que L é não *vertical,* (i.e., não paralela ao eixo dos yy). Então, a matemática escolar define o **declive** de L como o quociente

$$\text{declive de L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad (10)$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são quaisquer dois pontos distintos de L.



Podemos explicar aos estudantes que o declive de uma reta (não vertical) é uma medida da sua inclinação relativamente ao eixo dos xx (veja-se pp.338-346 em [13]). A propósito: esta explicação é um exemplo da *finalidade* de um conceito. De qualquer modo, o facto central acerca do declive é o seguinte teorema (Teorema 6.11, na página 354 de [15]).

Teorema 1. *O gráfico de uma função afim $y = mx + b$ (com m e b constantes) é uma linha reta com declive m, e reciprocamente, uma linha reta com declive m é o gráfico de uma função $y = mx + b$.*

Existe uma subtileza escondida na definição de declive: como é que sabemos que o membro direito de (10) não muda qualquer que sejam os dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) escolhidos em L? A maioria dos manuais escolares evade esta questão, o que origina muitas confusões na compreensão do declive por parte dos estudantes. O facto é que para responder a esta questão precisamos do teorema que afirma que dois triângulos são semelhantes se tiverem dois ângulos iguais. São raros os *curricula* que cobriram a semelhança de triângulos quando chegam à altura de tratar o tópico do declive[4]. Consequentemente, o declive é raramente definido de modo correto. Se um conceito não é definido corretamente, então não pode existir um teorema envolvendo esse conceito. Portanto, o Teorema 1 quase nunca é demonstrado na matemática escolar.

Não surpreendentemente, a matemática universitária aborda o declive ignorando qualquer referência ao conhecimento ingénuo dos estudantes, simplesmente *definindo* uma linha reta no plano como o gráfico da função $y = mx + b$ (com m e b constantes) ou $x = b$ (uma reta vertical). Depois, o **declive** do gráfico de $y = mx + b$ é, por definição, m. Muito simples! Portanto, a brevidade e a total clareza são conseguidas à custa da intuição do estudante. (Infelizmente, existem manuais do professor para os professores do Ensino Básico que também ignoram a necessidade da engenharia matemática e também definem uma reta do mesmo modo.) Claramente, essa compreensão do declive de uma reta, se bem que matematicamente correta, não ajudará os estudantes do ensino pré-universitário na assimilação do conceito de declive.

Finalmente, umas breves observações sobre o currículo escolar da Geometria. Existem defeitos óbvios nesse currículo que clamam por correção. Já alertámos para

[3] No original: "The Fear of 'Ours is not to reason why, just invert and multiply'" *(N. do T.)*

[4] O autor está a referir-se a programas do Estados Unidos. Em Portugal, no Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico, a semelhança de triângulos era tratada no 7.º ano e o declive no 8.º. Este programa vigorou entre junho de 2013 e julho de 2021, tendo sido revogado a 6 de julho e substituído pelas chamadas "Novas Aprendizagens Essenciais", um texto que parece ter sido propositadamente escrito para falhar os princípios fundamentais da MEBP. *(N. do T.)*

a necessidade de coordenar o estudo da semelhança de triângulos com o ensino do declive, o que, em geral, não sucede. Também é necessário explicar os conceitos de *congruência* e de *semelhança*, porque estes surgem naturalmente na vida do dia a dia, mas o currículo escolar considera, usualmente, apenas a congruência e a semelhança de *triângulos* mas não as de outras figuras geométricas gerais[5]. Tal é, não apenas, uma deficiência do ponto de vista da educação em geral, como é prejudicial para o próprio currículo da matemática escolar porque o conhecimento da congruência e da semelhança de parábolas clarificaria o tratamento de funções e equações quadráticas (veja-se secções 2.1 e 2.2 de [14]). Finalmente, o estudo da geometria euclidiana é normalmente apresentado como a joia da coroa da educação escolar, ao ensinar aos alunos como usar a lógica para provar *tudo* estritamente com base nos axiomas. Quanto mais cedo contrariarmos, nos estudantes, esta ilusão, tanto melhor! De facto, sabemos desde o trabalho de Hilbert (1862-1942) que o sistema axiomático da geometria euclidiana é extraordinariamente subtil e os seus detalhes internos não são adequados para a educação escolar (veja-se os capítulos iniciais do livro de Hartshorne, [4]; eles extenuarão até a dedicação dos estudantes universitários mais dedicados). A matemática escolar deve afastar-se destes faz-de-conta sobre sistemas axiomáticos da geometria euclidiana e, em vez disso, deve tentar introduzir na geometria euclidiana um número razoavelmente grande de hipóteses *redundantes* para minimizar a necessidade de os estudantes provarem um número elevado de resultados maçadores, óbvios, e difíceis de demonstrar para um principiante. Compare-se os capítulos 4 e 5 de [13] e 6 e 8 de [14].

É desnecessário dizer que nenhuma parte da matemática universitária abordará algum destes problemas levantados pela apresentação da geometria no Ensino Secundário. O que é necessário para tornar a geometria no plano verdadeiramente digerível pelos estudantes do Ensino Secundário é uma séria engenharia matemática.

4. UMA PROVA DE EXISTÊNCIA

Até aqui, advogámos a necessidade de ensinar MEBP aos prospetivos professores. A hipótese implícita é que a MEBP sempre esteve à nossa volta e basta apenas usá-la. Isto é uma hipótese agradável de fazer e ainda mais agradável de acreditar. No entanto, será cauteloso constatar que, com tantas variedades de matemática escolar defeituosa no mundo, existe a clara possibilidade de que pode ser impossível ajustar a matemática superior para o consumo das escolas básicas e secundárias sem violar um, ou mais, dos princípios fundamentais da matemática. Alan Schoenfeld parece ter sido o primeiro dos investigadores em educação matemática a reconhecer, em 1994, que, se bem que ele acreditasse que algo como MEBP deveria existir, não existia ainda nenhuma prova documental de que tal fosse o caso ([6]). O que podemos reportar em 2021 é que existe, agora, pelo menos uma exposição sistemática da MEBP desde a pré-escola ao 12.º ano, na forma de seis volumes com, *grosso modo,* a seguinte organização: [9] para professores desde a pré-escola até ao 2.º ciclo do Ensino Básico, [10] e [11] para professores dos 2.º e 3.º ciclos, e [13]-[15] para professores do 3.º ciclo e secundário.

Podemos explicar a necessidade para uma tal exposição *completa* de 13 anos de MEBP. Tem havido artigos e livros que demonstram a possibilidade de introduzir argumentos rigorosos em um ou dois tópicos da matemática escolar, mas discussões nessa escala limitada não conseguem ilustrar a essência dos princípios fundamentais da matemática. Por exemplo, para expor os professores à necessidade de definições precisas, não podemos mostrar-lhes MEBP em apenas uns quantos tópicos porque eles necessitam de sentir essa necessidade em *todos* os aspetos da matemática escolar, incluindo nas definições dos conceitos mais mundanos, tais como percentagem, rácio, velocidade, equação, variável, ângulo, gráfico de uma desigualdade, etc. Por outro lado, considere o tema da coerência: é normalmente invisível quando observamos a matemática escolar ao microscópio, como quando nos focamos na adição ou na divisão de frações. Mas quando o tema das frações é tomado como um todo, então o modo como o teorema das frações equivalentes agrega todas as diversas partes do estudo das frações é qualquer coisa de admirável (veja-se, e.g., pp. 28-86 de [10]). Numa escala ligeiramente maior, também testemunhamos a coerência em ação quando se mostra que o conceito de divisão é qualitativamente o mesmo para inteiros positivos, frações, números racionais e números reais (cf. [9]). Podemos também acrescentar que, na ausência de uma tal visão abrangente da matemática escolar, os defeitos do currículo de geometria poderiam não ter sido detetados.

Os seis volumes da exposição da MEBP, além de poderem servir de fundação para manuais de matemática escolar para estudantes, mostram, de modo detalhado, como podemos atingir uma melhor educação matemática para os professores. Nos Estados Unidos, os professores são formados em três bandas de anos: elementar (do pré-escolar ao 5.º ano), médio (6.º-8.º anos), e secundário (9.º-12.º anos). Como se observou, estes seis volumes foram escritos tendo presente esta banda de anos, pelo que, em conjunto, eles constituem uma resposta à questão implicitamente colocada por Begle, Ball e outros, a saber: que tipo de matemática devemos ensinar aos futuros professores? (Uma resposta mais detalhada a esta questão é dada na página 21 do prefácio de [13].) Escusado será dizer que os *currícula* matemáticos das escolas não são, nem nunca serão, todos iguais, mas temos esperança de que uma apresentação completa da MEBP possa, apesar disso, contribuir para uma melhor educação matemática escolar, libertando os educadores da necessidade de realizar de novo esta tarefa de engenharia matemática. Deverá, agora, ser relativamente simples modificar os modelos existentes ([9]-[11] e [13]-[15]) para os adaptar às diversas necessidades.

Agradecimentos. Agradeço a Larry Francis as suas importantes sugestões de melhoria.

REFERÊNCIAS

[1] D. L. Ball, "The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education", *Elementary School Journal* **90** (1990), 449-466.

[2] E. G. Begle. "Teacher knowledge and student achievement in algebra", *SMSG Reports*, No. 9. 1972. *https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED064175.pdf*

[3] E. G. Begle. *Critical Variables in Mathematics Education: Findings from a Survey of the Empirical Literature*, Mathematical Association of America / National Council of Teachers of Mathematics, Washington DC / Reston VA, 1979.

[4] R. Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.

[5] R. C. Poon,. "Principle-Based Mathematics: An Exploratory Study." Dissertation at University of California, Berkeley. 2014. *http://escholarship.org/uc/item/4vk017nt*

[6] A. Schoenfeld. "What do we know about Mathematics Curricula?" *Journal of Mathematical Behavior*, **13** (1994), 55-80.

[7] H. Wu, "How mathematicians can contribute to K-12 mathematics education", *Proceedings of International Congress of Mathematicians, Madrid 2006*, Volume III, 1676-1688. European Mathematical Society, 2006. *http://math.berkeley.edu/~wu/ICMtalk.pdf*

[8] H. Wu. "Phoenix rising. Bringing the Common Core State Mathematics Standards to life." *American Educator*, **35** (3), 2011, 3-13. *http://www.aft.org/pdfs/americaneducator/fall2011/Wu.pdf*

[9] H. Wu. *Compreender os Números na Matemática Escolar.* Porto Editora / Sociedade Portuguesa de Matemática, Porto, 2017. (Tradução portuguesa de: *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*. American Mathematical Society, Providence RI, 2011.)

[10] H. Wu. *Teaching School Mathematics: Pre-Algebra*. American Mathematical Society, Providence RI, 2016.

[11] H. Wu. *Teaching School Mathematics: Algebra*. Providence, RI: American Mathematical Society, Providence RI, 2016.

[12] H. Wu. "The content knowledge mathematics teachers need". In: Y. Li, W. J. Lewis, J. Madden (Eds.). *Mathematics Matters in Education: Essays in Honor of Roger E. Howe*. pp. 43-91. Advances in STEM Education, Springer, Cham, 2018. *https://math.berkeley.edu/~wu/Contentknowledge1A.pdf*

[13] H. Wu. *Rational Numbers to Linear Equations*. American Mathematical Society, Providence RI, 2020.

[14] H. Wu.*Algebra and Geometry*. American Mathematical Society, Providence RI, 2020.

[15] H. Wu. *Pre-Calculus, Calculus, and Beyond*, American Mathematical Society, Providence RI, 2020.

[16] H. Wu. "Learnable and unlearnable school mathematics". 2021. *https://math.berkeley.edu/~wu/AE2020A.pdf*

[5] Mais uma vez, em Portugal, no Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico, revogados recentemente, o caso geral era abordado no 7.º ano.

SOBRE O AUTOR

Hung-Hsi Wu é professor emérito de Matemática da Universidade da Califórnia, em Berkeley, Estados Unidos. É um geómetra que passou os últimos 25 anos formando professores dos ensinos Básico e Secundário.

Adérito Araújo
Universidade de Coimbra
alma@mat.uc.pt

COMO GERAR UM MANUAL DE INSTRUÇÕES AUTOMÁTICO PARA BRINQUEDOS DE CONSTRUÇÃO?

Durante o 125º European Study Group with Industry (ESGI), realizado em Limassol, Chipre, 5 a 9 de Dezembro de 2016, uma das empresas participantes colocou um desafio muito interessante aos matemáticos do grupo de estudo. A Engino.net Ltd, fundada em 2014, é uma empresa cipriota que produz conjuntos de brinquedos de construção. Cada conjunto de brinquedos, vendido em caixas de blocos, permite obter uma série de modelos que podem ser montados de múltiplas formas. A questão colocada ao grupo de estudo foi: como obter um procedimento que permita gerar automaticamente as instruções de montagem de um determinado brinquedo? A resposta dada, que iremos resumir neste artigo, baseia-se na teoria dos grafos dirigidos. O leitor mais curioso é convidado a ler a versão detalhada em [1].

1. INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

Os brinquedos de construção Engino® (*engino.com*) são criados através da montagem de pequenos blocos e vendidos em conjuntos de modelos, tal como apresentados na figura 1. Cada um dos conjuntos tem um número específico de blocos, que podem ser montados de variadíssimas formas, dando origem a modelos muito diversos. O potencial criativo dos brinquedos aumenta exponencialmente à medida que o número de blocos do conjunto aumenta, tanto mais que os blocos Engino® permitem a conectividade simultânea em múltiplas direções espaciais.

O desafio proposto pela empresa no 125º ESGI[1] consistiu em determinar um algoritmo capaz de gerar automaticamente o manual de montagem para cada brinquedo. Até então, para a maioria dos conjuntos de brinquedos, as instruções de montagem eram criadas manualmente. Os programadores da empresa criaram um sistema de montagem automática (ver exemplo na

Figura 1. Conjunto de brinquedos Engino®.

[1] Mais informações sobre os ESGIs podem ser vistas em [4].

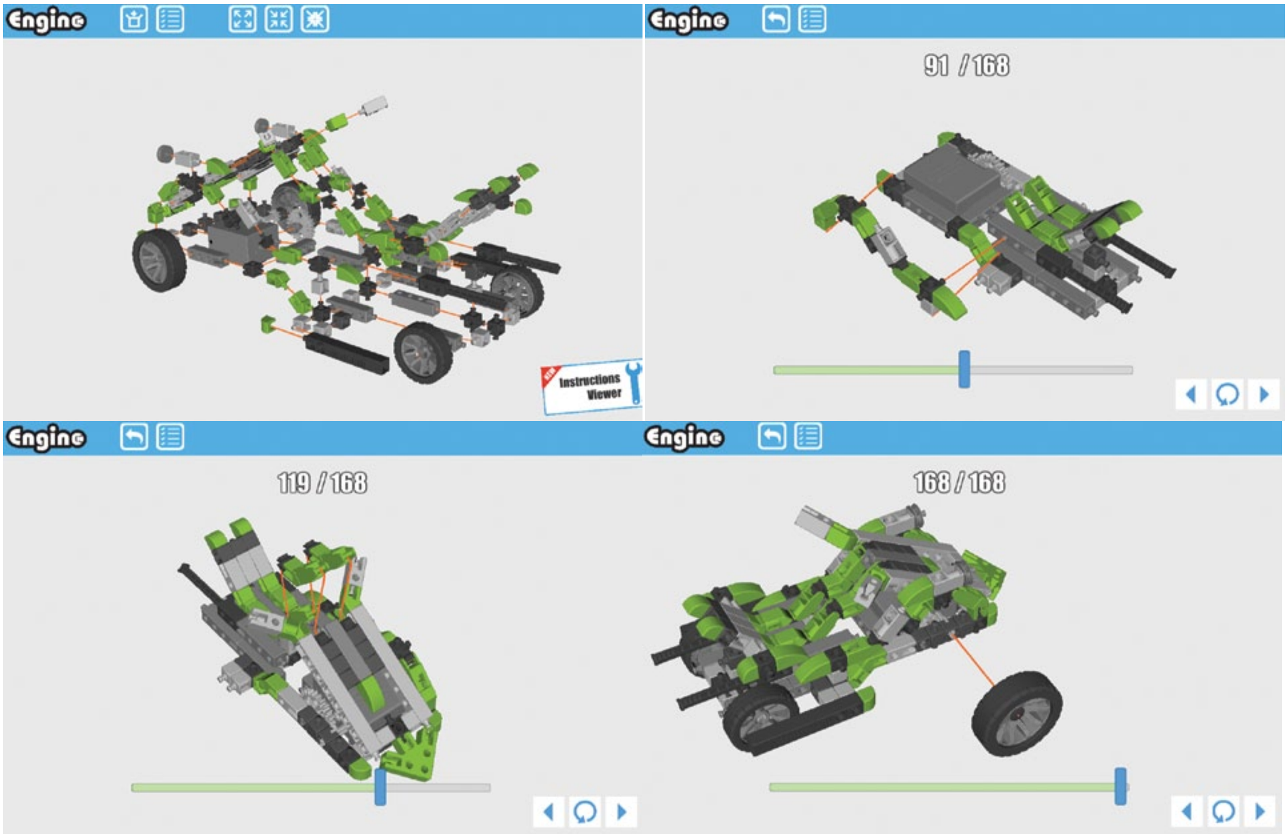


Figura 2. Excerto de um manual de instruções online.

figura 2) baseado na plataforma de construção tridimensional UNITY 3D-Game Engine (*unity.com*) que, à data do ESGI, apresentava inúmeros erros. Em particular, o sistema não conseguia prever a ordem com que os blocos deveriam ser ligados durante as instruções de montagem e a prioridade das peças era apresentada de uma forma quase aleatória e incorreta, fazendo com que as instruções geradas pelo programa não fossem sempre fisicamente viáveis. O grupo de estudo foi desafiado a propor um algoritmo capaz de dar prioridade às diferentes partes da estrutura do modelo, definindo uma sequência de passos que correspondam a ligações fisicamente viáveis entre conjuntos de blocos, e que pudesse ser usado na melhoria do sistema automático existente.

As instruções de montagem propostas à empresa seguem um processo recursivo inverso baseado na teoria dos grafos dirigidos. Mais concretamente, considera-se um grafo dirigido associado a cada modelo, onde os vértices correspondem aos blocos que constituem o modelo e os arcos representam ligações físicas entre os blocos. Os arcos são rotulados com um vetor de direção por forma a identificar a direção geométrica da ligação entre os blocos. Removendo grupos de arcos que partilham o mesmo vetor de direção, identificamos os submodelos resultantes que, por sua vez, são utilizados para construir um novo grafo dirigido. A ausência de ciclos dirigidos nesse novo grafo desempenha um papel fundamental na determinação do subconjunto de arcos cuja remoção implica uma decomposição fisicamente viável do modelo. Uma vez decomposto o modelo nos blocos que o constituem, as etapas da decomposição podem ser invertidas para produzir o manual de instruções de montagem pretendido.

O problema de determinar os passos necessários para decompor uma estrutura complexa nas suas componentes tem sido objeto de vários estudos que datam dos anos 80 do século passado. Esta classe de problemas é denominada na literatura por *disassembly sequencing*, que poderemos traduzir por sequência de desmontagem (ver [6] para um estudo exaustivo). A motivação por detrás do estudo das sequências de desmontagem tem origem, principalmente, no facto de que, invertendo as etapas de uma sequência de desmontagem, se pode obter um procedimento de montagem da estrutura em estudo. Nesse sentido, as sequências de desmontagem estão intimamente relacionadas com a geração automática de instruções de montagem de estruturas complexas (ver, por exemplo, [3, 5, 7]). O procedimento proposto em [1], cuja versão simplificada é aqui considerada, pode ser comparado com o apresentado em [3, 7]. No entanto, ao contrário da abordagem utilizada por esses autores, que considera a separação das peças individuais da estrutura uma a uma e aplica uma estratégia de procura para a extração hierárquica das componentes, o método que iremos descrever obtém diretamente uma decomposição fisicamente viável de componentes ao longo de uma dada direção espacial.

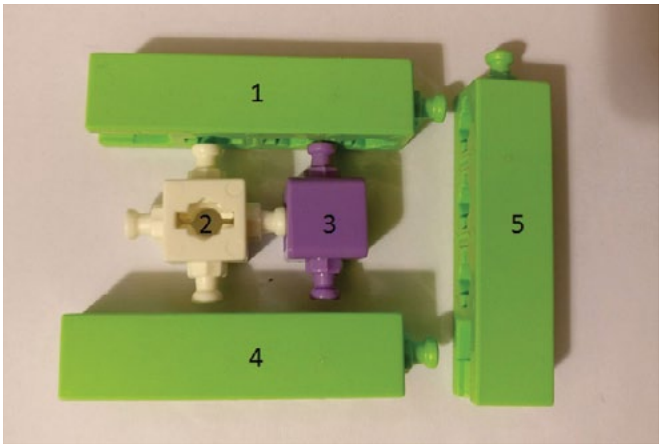
O conteúdo do artigo está organizado da seguinte forma: na secção 2 iremos recordar alguns conceitos e resultados básicos da teoria dos grafos dirigidos. Na secção seguinte, apresentamos o quadro teórico proposto e, através de um exemplo motivador, introduzimos a noção de decomposição fisicamente viável de um modelo de brinquedo. Apresentamos também a noção de grafo de conectividade entre componentes, obtido pela remoção de um conjunto de arcos do grafo original, e provamos que tal remoção corresponde a uma decomposição fisicamente viável se e só se o respetivo grafo de conectividade entre componentes for acíclico. Na secção 4 esboçamos o procedimento algorítmico que permite obter a decomposição do modelo de brinquedo, utilizando como etapas intermédias as decomposições fisicamente viáveis máximas ao longo das várias direções espaciais escolhidas. De notar que tais decomposições podem ser obtidas através da aplicação de algoritmos de tempo linear (ver [1]). Na secção 5 serão feitos breves comentários finais.

2. MODELOS DE BRINQUEDOS E GRAFOS DIRIGIDOS

A noção de grafo dirigido irá ser usada para capturar a estrutura dos brinquedos de construção. Não iremos detalhar todas as definições e os resultados da teoria dos grafos dirigidos usados no texto, mas estes podem ser vistos em [1] e nas referências aí contidas.

Dado um modelo de brinquedo $\mathcal{M}$, associamos-lhe um grafo dirigido $G(V, A)$, onde $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é o conjunto de vértices de G, com cada vértice v_i correspondente a um bloco de $\mathcal{M}$, e $A = \{(u, v) : u, v \in V\}$ é o conjunto de arcos de G, com cada arco representando uma ligação entre dois blocos do modelo. Cada ligação física entre dois blocos do modelo pode ser representada no espaço por um determinado vetor de direção, escolhido a partir de um conjunto finito de direções. Uma ligação entre dois blocos u e v do modelo ao longo de uma direção particular $\hat{d}$ no espaço físico, dá origem a um arco $(u, v) \in A$ ao qual se associa o rótulo $\hat{d}$.

Exemplo. Considere-se o modelo dado na figura 3 (lado esquerdo). O grafo dirigido $G(V, A)$ associado ao modelo está representado no lado direito da mesma figura, onde $\hat{d}_1, \hat{d}_2$ são, respetivamente, os vetores correspondentes à direção horizontal (esquerda - direita) e à direção vertical (de baixo para cima). Neste caso, $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{(4,2), (4,3), (4,5), (2,3), (2,1), (3,1), (1,5)\}$.



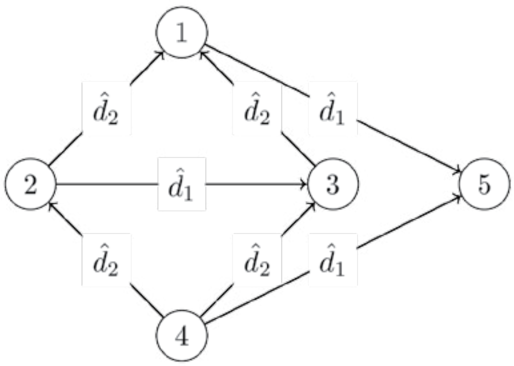


Figura 3. Modelo de brinquedo (esquerda) e respetivo grafo (direita).

Assumindo que todas as ligações do modelo $\mathcal{M}$ correspondem a p direções espaciais distintas $\hat{d}_i$, podemos particionar o conjunto dos arcos A numa família de p conjuntos mutuamente disjuntos A_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, cada um dos quais contendo os arcos associados a ligações partilhando a mesma direção no espaço. Para o modelo dado na figura 3, temos $A_1 = \{(2,3), (4,5), (1,5)\}$ e $A_2 = \{(4,2), (4,3), (2,1), (3,1)\}$.

3. DECOMPOSIÇÕES FISICAMENTE VIÁVEIS

Apresentamos agora o quadro teórico que permite definir a metodologia para a obtenção da decomposição de um modelo de forma fisicamente viável. Começamos por definir as noções de decomposição fisicamente viável e de grafo de conectividade entre componentes, provando, posteriormente, que uma decomposição é fisicamente viável se e só se o respetivo grafo de conectividade entre componentes é acíclico. Relembremos que, por definição, num grafo acíclico dirigido *G(V, A)* não existem arcos $(v, v) \in A$, com $v \in V$.

3.1 Definição e exemplos

Consideremos um modelo constituído por dois blocos correspondentes aos vértices $v_1, v_2 \in V$, ligados através de um arco $(v_1, v_2) \in A$ alinhado segundo uma direção $\hat{d}_i$. Notemos que os blocos v_1, v_2 podem ser separados segundo as direções $-\hat{d}_i, \hat{d}_i$, respetivamente, quando forças opostas apropriadas são aplicadas nos dois blocos. Recorrendo, de novo, à figura 3, se considerarmos o modelo apenas com os blocos 2 e 3 – isto é, sem os blocos verdes 1, 4 e 5 –, a separação destes blocos é fisicamente viável por aplicação de duas forças horizontais opostas, uma vez que a sua aplicação resulta em deslocamentos opostos ao longo da direção horizontal. No entanto, se adicionarmos, por exemplo, o bloco 1 ao modelo, os blocos 2 e 3 já não podem ser separados através da aplicação de forças horizontais opostas sobre eles, uma vez que a sua deslocação está bloqueada pelas suas ligações verticais.

Consideremos agora a situação em que temos um modelo complexo que pretendemos decompor em dois submodelos de uma forma fisicamente viável. Em geral, a remoção de um conjunto de arcos rotulados com uma dada direção corresponde a uma decomposição do grafo do modelo em duas ou mais componentes cujos grafos dirigidos que lhes estão associados são fracamente conexos, isto é, onde todos os vértices estão ligados entre si por algum caminho, ignorando a direção dos arcos.

Decomposição fisicamente viável em duas componentes (2-DFV): A remoção de um conjunto de arcos, alinhados segundo uma direção espacial particular, $\hat{d}_i$, é fisicamente viável se e só se as duas componentes (fracamente conexas) C_1 e C_2 resultantes podem ser deslocadas ao longo das direções $-\hat{d}_i, \hat{d}_i$ respetivamente, quando forças opostas apropriadas são aplicadas sobre estas componentes (ver figura 4).

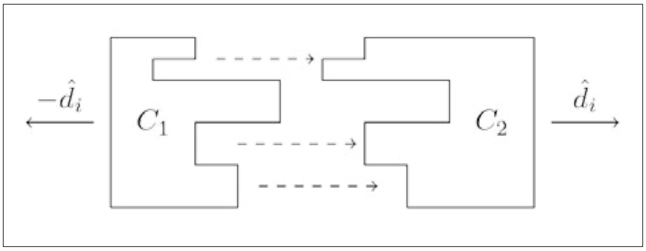


Figura 4. Exemplo de uma 2-DFV.

O nosso próximo objetivo consiste em obter uma caracterização das 2-DFV's que são possíveis ao longo de uma dada direção. Para isso, vamos começar por introduzir a noção de grafo de conectividade entre as componentes de um modelo que resultam da remoção de um conjunto de arcos identificados com o mesmo rótulo.

Grafo de conectividade entre componentes (GCC): Seja *G(V, A)* o grafo dirigido associado a um modelo $\mathcal{M}$ e $\bar{A}_i \subseteq A_i$ um conjunto (não vazio) de arcos, onde A_i é o conjunto de todos os arcos de *G(V, A)* ao longo da direção espacial $\hat{d}_i$. O grafo de conectividade entre componentes (GCC), resultante da remoção dos arcos $\bar{A}_i$, é um grafo dirigido $G_C(V_C, A_C)$ cujos vértices são as componentes fracamente conexas C_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, obtidas pela decomposição de *G(V, A)* resultante da remoção dos arcos $\bar{A}_i$. Duas componentes C_i, C_j estão ligadas através de um arco $(C_i, C_j) \in A_C$ se e só se $i \neq j$ e existe um arco $(v, u) \in \bar{A}_i$ com $v \in C_i$ e $u \in C_j$. Note-se que, de acordo com esta definição, o GCC resultante da remoção de um conjunto de arcos $\bar{A}_i \subseteq A_i$ é um grafo dirigido simples, uma vez que, por construção, não pode conter nenhum ciclo nem arcos paralelos que partilhem os mesmos vértices de origem e de destino.

Recorrendo, de novo, ao modelo apresentado na figura 3, se removermos todos os arcos ao longo da direção horizontal, ou seja, os arcos (2,3), (1,5) e (4,5), o grafo é decomposto em duas componentes fracamente conexas, $C_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C_2 = \{5\}$, representadas na

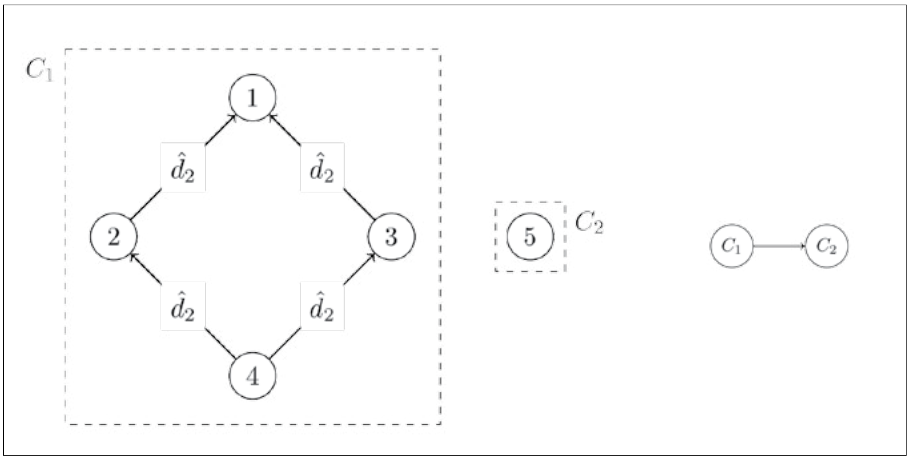


Figura 5. Grafo *G(V, A)* depois da remoção de todos os arcos ao longo da direção $\hat{d}_1$ (esquerda) e respetivo GCC (direita).

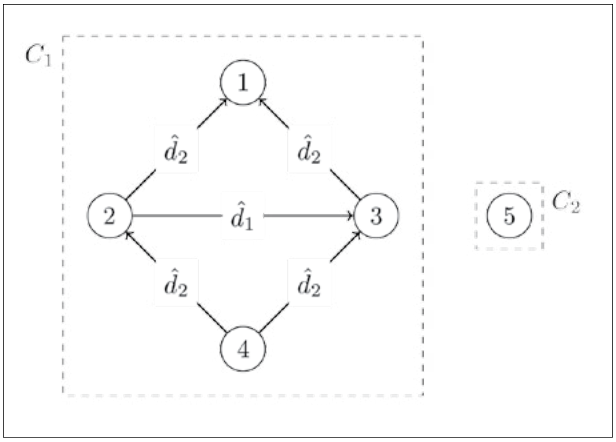


Figura 6. Grafo *G(V, A)* depois da remoção de todos os arcos fisicamente removíveis ao longo da direção $\hat{d}_1$.

figura 5 (lado esquerdo). O GCC resultante desta remoção de arcos está representado na figura 5 (lado direito). Claramente, nada impede a deslocação das duas componentes C_1, C_2 de avançar na direção $-\hat{d}_1, \hat{d}_1$, respetivamente, quando lhes são aplicadas forças horizontais adequadas. Assim, a remoção dos arcos horizontais implica uma 2-DFV do modelo.

Nem todos os arcos removidos na obtenção do GCC correspondem a uma decomposição fisicamente viável de dois blocos. É o caso do arco (2,3), que não aparece na figura 5 devido à sua remoção no processo de construção do GCC. Apesar de este arco poder ser teoricamente removido durante a remoção de todos os arcos horizontais, os blocos 2 e 3 não podem ser separados por causa das ligações perpendiculares aos blocos 1 e 4. Por outro lado, os arcos (1,5) e (4,5) contribuem ativamente para a decomposição do grafo em duas componentes C_1 e C_2. A propriedade distintiva entre estes dois tipos de arcos é que a primeira tem ambos os seus pontos finais na mesma componente, enquanto as duas últimas têm os seus pontos iniciais e finais em componentes distintas. Os arcos que contribuem ativamente para a formação de componentes fracamente conexas de um GCC são chamados fisicamente removíveis para esse GCC. Na figura 6 representamos o grafo obtido após a remoção de todos os arcos fisicamente removíveis segundo a direção $\hat{d}_1$.

Se optarmos por remover todos os arcos ao longo de $\hat{d}_2$, obtemos as componentes fracamente conexas C_1' e C_2' mostradas na figura 7 (lado esquerdo). O GCC obtido por esta remoção de arcos é mostrado na figura 7 (lado direito). Apesar de a remoção dos quatro arcos verticais, rotulados com $\hat{d}_2$, separar o grafo em duas componentes fracamente conexas, é evidente que tal decomposição não é fisicamente viável. De facto, os blocos 2 e 3 de C_1' não podem ser deslocados verticalmente porque estão presos entre os blocos 1 e 4 de C_2'.

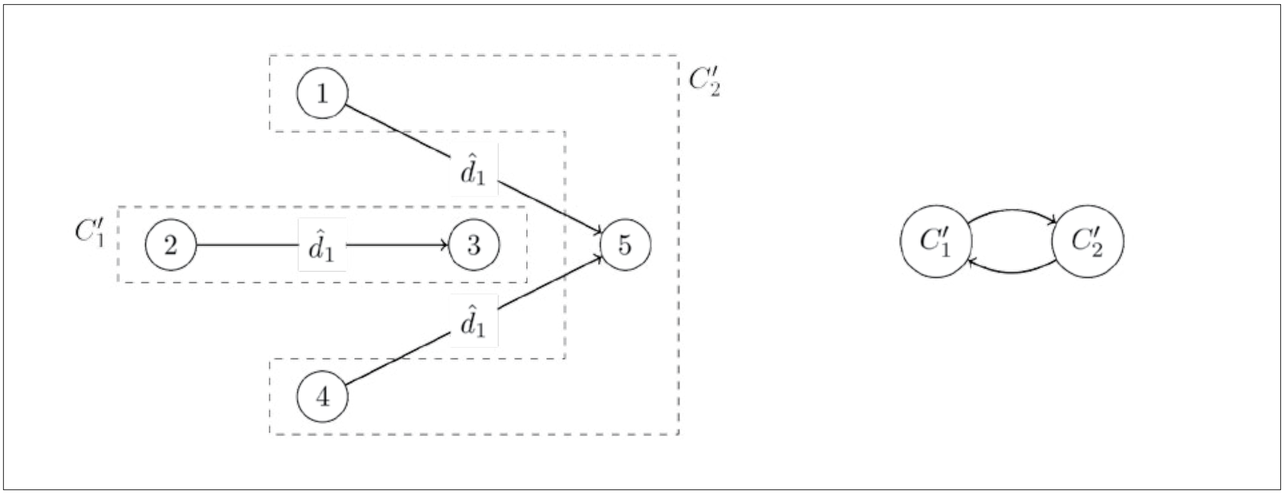


Figura 7. Grafo G(V, A) depois da remoção de todos os arcos ao longo da direção $\hat{d}_2$ (esquerda) e respetivo GCC (direita).

3.2 Caracterização das decomposições fisicamente viáveis

A questão que se coloca é a de saber como caracterizar uma decomposição fisicamente viável de um modelo em termos das propriedades particulares dos arcos do GCC correspondente.

Comecemos por considerar o caso das 2-DFVs. Se $G_C(V_C, A_C)$, com $V_C = \{C_1, C_2\}$, for o GCC associado a um determinado modelo resultante da remoção de um conjunto (não vazio) de arcos $\bar{A}_i \subseteq A_i$ com A_i o conjunto de todos os arcos do grafo *G(V, A)* do modelo ao longo da direção $\hat{d}_i$, pode provar-se que a remoção dos arcos de $\bar{A}_i$ é uma 2-DFV do modelo se e só se A_C contiver exatamente um dos arcos (C_1, C_2) ou (C_2, C_1). De facto, se assumirmos que A_C contém apenas um desses arcos, digamos o arco (C_1, C_2), isto significa que, no modelo, as componentes C_1 e C_2 estão ligadas apenas por um lado, deixando os seus lados externos livres (ver figura 4). Assim, removendo os arcos $\bar{A}_i$ que ligam os vértices de C_1 aos de C_2, obtemos uma 2-DFV do modelo, já que C_1 pode ser deslocado na direção de $-\hat{d}_i$ e C_2 na direção de $\hat{d}_i$. Se, ao invés, assumirmos que A_C contém os dois arcos (C_1, C_2) e (C_2, C_1), conclui-se facilmente, usando argumentos semelhantes aos já apresentados, que tal decomposição não é fisicamente viável.

Vamos assumir agora que após a remoção de um conjunto de arcos $\bar{A}_i \subseteq A_i$, obtemos $k > 2$ componentes. Uma decomposição fisicamente viável que pode ser realizada através de sucessivas aplicações de 2-DFVs é chamada uma *k*-DFV do modelo (ver [1] para uma definição formal deste conceito). O teorema seguinte serve para caracterizar esta propriedade.

Teorema. *Seja $\mathcal{M}$ um modelo de brinquedo e G(V, A) o seu grafo dirigido associado. Seja ainda $G_C(V_C, A_C)$ o GCC resultante após a remoção de um conjunto não vazio de arcos $\bar{A}_i \subseteq A_i$, onde A_i é o conjunto de todos os arcos de G(V, A) ao longo da direção $\hat{d}_i$. A remoção dos arcos $\bar{A}_i$ implica uma k-DFV, $k \geq 2$ do modelo $\mathcal{M}$, se e só se G_C é um grafo acíclico dirigido.*

A demonstração deste teorema recorre a um resultado da teoria dos grafos que estabelece que se $G_C(V_C, A_C)$ é um grafo acíclico dirigido, então existe uma ordenação topológica dos seus vértices $C_1, C_2, \ldots, C_k$, ou seja, uma ordenação tal que, para todos os arcos $(C_i, C_j) \in A_C$, se tem $i \leq j$ (ver [1] para mais detalhes). Sendo C_1 o primeiro elemento nesta ordenação, só existem arcos de saída de C_1 para $V_C \backslash \{C_1\}$ e, portanto, como foi visto anteriormente e é ilustrado na figura 8, a remoção dos arcos com origem em C_1 e terminando em $V_C \backslash \{C_1\}$constitui uma 2-DFV.

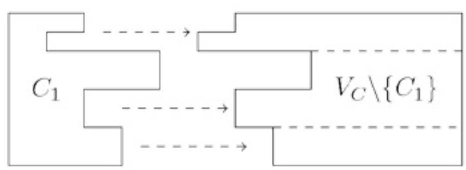


Figura 8. Uma 2-DFV de C_1 e $V_C \setminus \{C_1\}$.

Se denotarmos por G'_C o subgrafo de G_C induzido por $V_C \backslash \{C_1\}$, podemos ver que $C_2, \ldots, C_k$, é uma ordenação topológica dos seus vértices. Assim, C_2 pode ser destacado a partir de G'_C através de uma 2-DFV seguindo um procedimento semelhante ao anteriormente descrito. Após $k-1$ aplicaçõess de 2-DFV, utilizando subconjuntos apropriados de arcos $\bar{A}_i$, obtemos uma decomposição do modelo $\mathcal{M}$ em k componentes fracamente conexas $C_1, C_2, \ldots, C_k$, que constitui uma k-DFV. Provámos assim se G_C é um grafo acíclico dirigido, a remoção dos arcos correspondente implica uma k-DFV. A demonstração da implicação inversa pode ser vista em [1].

4. UM MODELO HIERÁRQUICO

Nesta secção descrevemos o procedimento que permite obter o manual de instruções automático para a montagem dos modelos de brinquedos Engino®. O processo corresponde a um algoritmo recursivo inverso, pois é obtido invertendo o processo recursivo de decomposição do modelo nos blocos que o constituem. É, pois, essencial o resultado apresentado na secção anterior que permite caracterizar as decomposições fisicamente viáveis.

Vamos supor que *G(V, A)* é o grafo dirigido associado ao modelo $\mathcal{M}$ e que cada arco em A está alinhado com uma das p direções espaciais distintas $\hat{d}_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Consideremos que MaxDFV(C, i) é uma função que tem como primeiro argumento uma componente fracamente conexa C de *G(V, A)* e como segundo argumento um inteiro $i = 1, 2, \ldots, p$. Esta função devolve uma lista ordenada de componentes $C_1, C_2, \ldots, C_k$, $k \geq 1$, com C um conjunto máximo de arcos fisicamente removíveis ao longo da direção $\hat{d}_i$. Como foi demonstrado em [1], a obtenção de um subconjunto máximo de arcos fisicamente removíveis ao longo de uma dada direção espacial pode ser obtido com recurso a algoritmos de tempo linear. O algoritmo seguinte esquematiza o processo de decomposição do modelo.

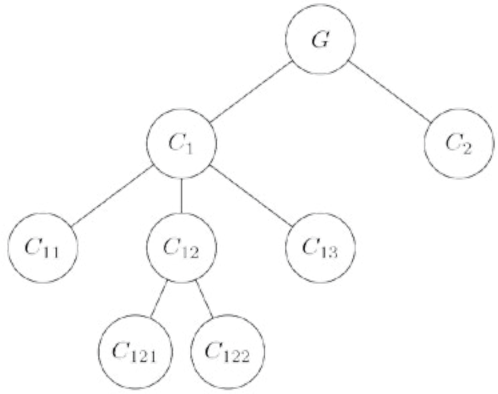


Figura 9. Modelo hierárquico de decomposição do brinquedo dado na figura 3.

Resumindo, em cada passo do algoritmo é obtida uma coleção de componentes fracamente conexas, correspondendo a uma decomposição fisicamente viável máxima ao longo de alguma direção espacial. O algoritmo global de decomposição corresponde a um modelo hierárquico de componentes que pode ser representado por uma árvore com raiz, tendo como raiz o grafo dirigido correspondente de brinquedo original e como folhas cada um dos blocos que o constituem.

Para exemplificar, embora de forma abreviada, o algoritmo proposto, atentemos, de novo, no modelo dado na figura 3. Considerando a direção $\hat{d}_1$, temos (C_1, C_2)= MaxPFD*(G,1)*, com $C_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C_2 = \{5\}$ (ver figura 6). Estas duas componentes são anexadas como descendentes de G e voltamos a aplicar o algoritmo. Atendendo a que C_2 é constituído por um único vértice, vamos considerar a recursão apenas relativamente à componente C_1. Atendendo a que $\hat{d}_2$ é a única direção disponível, consideramos (C_{11}, C_{12}, C_{13})=MaxDFV$(C_1, 2)$, com

Algoritmo: HMaxDFV*(C)*

chama $(C_1, C_2, \ldots, C_k) = \text{MaxDFV}(C, i)$, para cada direção $i = 1, 2, \ldots, p$;

se para todas as direções $i = 1, 2, \ldots, p$, se tem $k = 1$, a recursão termina;

caso contrário

    para $j = 1, 2, \ldots, k$

        anexa C_j como descendente de C no modelo hierárquico;

        chama HMaxDFV*(C)*;

    fim do ciclo

fim do se

$C_{11} = \{1\}$, $C_{12} = \{2,3\}$ e $C_{13} = \{4\}$. Finalmente, atendendo a que (C_{121}, C_{122})=MaxDFV$(C_{12}, 1)$, com $C_{121} = \{2\}$ e $C_{122} = \{3\}$, obtemos o modelo hierárquico de decomposição ilustrado na figura 9.

Após obtida a decomposição hierárquica do modelo, o processo de decomposição é invertido, produzindo o manual de instruções de montagem pretendido. Se considerarmos o modelo da figura 3, o seu manual de instruções pode ser dado da seguinte forma. Passo 1: unir as componentes $C_{121} = \{2\}$ e $C_{122} = \{3\}$, obtendo a componente $C_{12} = \{2,3\}$; Passo 2: unir as componentes $C_{11} = \{1\}$, $C_{12} = \{2,3\}$ e $C_{13} = \{4\}$, obtendo a componente $C_1 = \{1,2,3,4\}$; Passo 3: unir as componentes $C_1 = \{1,2,3,4\}$ e $C_2 = \{5\}$, obtendo o modelo pretendido.

5. COMENTÁRIOS FINAIS

A proposta aqui descrita para a obtenção de um manual automático de montagem para os modelos de brinquedos da Engino® foi apresentada à empresa, sob a forma de relatório, no final do ESGI. Nesse relatório (ver [2]), o grupo de estudo recomendou a realização de testes-piloto por forma a validar o procedimento proposto em brinquedos mais sofisticados. Este é um passo crucial que, como também foi sugerido no relatório, pode ser realizado através de um projeto de curto prazo ou com recurso a um aluno estagiário, numa colaboração estreita entre a academia e a empresa. Apesar de não conhecer as diligências efetuadas pela Engino®, a verdade é que os erros inicialmente identificados no sistema de montagem automática de modelos disponível na página da empresa foram corrigidos com sucesso.

REFERÊNCIAS

[1] Antoniou, E., Araújo, A., Bustamante, M. D. & Gibali, A., "Physically feasible decomposition of Engino® toy models: a graph-theoretic approach". *European Journal of Applied Mathematics*, **30**, 278-297, 2019.

[2] Araújo, A., Gibali, A., Kyprianou, A., Antoniou, E., Bustamante, M.D., Kaminski, Y. & Okrasinsk W., "Increasing the creativity of ENGINO toy sets and generating automatic building instructions". *Mathematics in Industry Reports*, 2021.

[3] Agrawala, M., "Designing Effective step-by-step assembly instructions". *ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proceedings of ACM SIGGRAPH 2003*, **47**, 108-124, 2003.

[4] Costa e Silva, E., Lopes, I.C. & Correia, A. "Dez anos de encontros entre a matemática e a indústria em Portugal". *Gazeta de Matemática*, **180**, 10-20, 2016.

[5] Hsu, Y.-Y., Tai, P.-H., Wang, M.-W. & Chen, W.-C., "A knowledge-based engineering system for assembly sequence planning". *Int J Adv Manuf Technol*, **55**, 763-782, 2011.

[6] Lambert, A. J. D., "Disassembly sequencing: A survey". *International Journal of Production Research*, **41**, 3721-3759, 2003.

[7] Li, W., Agrawala, M., Curless, B. & Salesin, D., "Automated generation of interactive 3D exploded view diagrams". *ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proceedings of ACM SIGGRAPH 2008*, **27**, 1-7, 2008.

SOBRE O AUTOR

Adérito Araújo é professor associado no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e membro do grupo de Análise Numérica e Otimização do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra. Os seus interesses científicos incluem o desenvolvimento de modelos matemáticos e numéricos em aplicações biomédicas, mantendo colaboração ativa com engenheiros, médicos, físicos e químicos em múltiplos projetos de cariz interdisciplinar. Ao longo da sua carreira, tem exercido cargos diretivos em várias associações científicas nacionais e internacionais, sendo atualmente membro da direção da Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação (PT-MATHS-IN) e das direções executivas do ECMI (European Consortium for Mathematics in Industry) e da EU-MATHS-IN (European Service Network of Mathematics for Industry and Innovation).

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação

pt-maths-in@spm.pt

Daniele Molinini
CFCUL, Universidade de Lisboa
dmolinini@gmail.com

EUREKA, PARTE I: A DESCOBERTA DO *PALIMPSESTO DE ARQUIMEDES*

A descoberta do *Palimpsesto de Arquimedes* é sem dúvida um dos episódios mais extraordinários e fascinantes da história da ciência e da matemática. Neste artigo, que é o primeiro de dois artigos dedicados a Arquimedes, ofereço ao leitor uma reconstrução de tal descoberta.

No seu tratado *De architectura*, escrito na segunda metade do primeiro século a.C., o arquiteto e engenheiro romano Vitrúvio dá-nos o relato mais antigo do episódio "Eureka". Segundo Vitrúvio, o rei Hierão de Siracusa solicitou a Arquimedes que determinasse se uma coroa votiva encomendada a um ourives seria de ouro puro ou, fraudulentamente, feita de ouro misturado com prata. Ao entrar numa banheira, Arquimedes observou que o volume de água deslocada por um corpo imerso era igual ao volume do próprio corpo. Como esta observação indicava a forma de explicar o caso em questão, Arquimedes "saltou da banheira e correu para casa nu, gritando em voz alta que tinha encontrado o que procurava; pois ao correr gritou repetidamente em grego, Εὕρηκα εὕρηκα! [5, Livro IX, tradução do autor].

Infelizmente para o ourives, Arquimedes descobriu que a coroa não era feita de ouro puro. Infelizmente para aqueles que aprenderam esta história na escola (ou para aqueles que simplesmente gostam da imagem engraçada de Arquimedes a correr nu pelas ruas de Siracusa e a chorar em voz alta), a história de Vitrúvio não deve ser considerada mais do que um falso episódio. Na verdade, os historiadores da ciência concordam que Vitrúvio, que escreve 200 anos após a morte de Arquimedes, não é um historiador muito fiável. Isto pode ser dececionante para alguns leitores, eu sei. No entanto, nada está perdido. Há, de facto, uma história "Eureka" ainda mais fascinante que pode ser contada sobre Arquimedes. É a história da descoberta do *Palimpsesto de Arquimedes*, um manuscrito do século X que é a nossa fonte única para alguns textos de Arquimedes. Entre os textos contidos neste manuscrito, há um que é particularmente importante, porque contém as reflexões de Arquimedes sobre o seu método de descoberta em matemática. É a este tratado, o *Método dos Teoremas Mecânicos* (ou *Método*), que dedicarei a atenção no meu próximo artigo. No presente artigo, que serve de introdução geral ao conteúdo (mais técnico) do segundo, o meu objetivo é traçar uma breve história da descoberta do *Palimpsesto*.

(RE)DESCOBRINDO ARQUIMEDES NO SÉCULO XX

Um *códice* é o antepassado histórico de um livro moderno. Amplamente utilizado por estudiosos dos séculos IV a XV, um códice agrupa vários textos (não necessariamente por um único autor). Conhecemos a obra de Arquimedes a partir de três códices, chamados A, B, e C. Dois destes códices, o Códice A e o Códice B, perderam-se há séculos. O último registo do Códice A foi na biblioteca do humanista italiano Giorgio Valla, em 1564. O Códice B desapareceu ainda antes, uma vez que o último vestígio do mesmo aparece num catálogo de manuscritos pertencentes à biblioteca do Papa, em Viterbo, em 1311. Felizmente, os textos contidos nestes dois códices foram copiados, o que permitiu a circulação de (algumas) obras de Arquimedes. Foi, de facto, através de tais cópias que, durante o Renascimento, cientistas e polímatas como Piero della Francesca, Leonardo da Vinci e Galileu, conheceram os estudos de Arquimedes. E quanto ao Códice C? O Códice C, também conhecido como o *Palimpsesto de Arquimedes*, foi descoberto há pouco mais de um século e não era conhecido durante o Renascimento e a Revolução Científica.

Antes de abordar a descoberta do *Palimpsesto*, é importante acrescentar uma palavra sobre o conteúdo dos códices A, B e C. Os três códices, que reuniam vários tratados de Arquimedes, tinham alguns textos em comum. A *Quadratura da Parábola*, por exemplo, era comum ao Códice A e ao Códice B. No entanto, alguns tratados só apareciam num único códice. Em particular, o Códice A foi a única testemunha de *Conoides e Esferoides* e o *Contador de Areia*, enquanto o *Palimpsesto de Arquimedes*, que ainda existe, é a única testemunha do *Método* e do *Stomachion* (ver tabela 1).

A história da descoberta do *Palimpsesto* começa em Constantinopla na década de 1840. Em 1846, o estudioso bíblico alemão Constantin Tischendorf publicou um livro intitulado *Viagens ao Oriente*. Neste livro ele relata que, durante uma das suas visitas à biblioteca do Metochion do Santo Sepulcro, em Constantinopla, não encontrou nada de particular interesse, "com exceção de um palimpsesto sobre matemática" [4, p. 274, tradução do autor]. Um palimpsesto é o produto de uma camada acumulada de textos ao longo de um período de tempo. A palavra é derivada das palavras gregas *palin* (novamente) e *psan* (esfregar/raspar). Isto significa que o pergaminho utilizado para fazer o manuscrito foi raspado mais de uma vez para ser reutilizado. No caso do *Palimpsesto*, para a sua elaboração foram utilizadas páginas (ou, como seria mais correto dizer, fólios) retiradas de um manuscrito anterior contendo tratados de Arquimedes. Assim, os textos de Arquimedes foram quase totalmente apagados para dar lugar a outro texto, que era um livro de orações bizantinas do século XIII, ou *Euchologion* (ver figura 1). Tischendorf reconheceu um texto matemático debaixo das orações do *Euchologion* e retirou uma página do manuscrito (a página encontra-se hoje na Biblioteca da Universidade de Cambridge; foi vendida a essa biblioteca em 1876, pelos executores de uma propriedade que tinha pertencido a Tischendorf). No entanto, ele não foi capaz de reconhecer a importância das palavras apagadas que mal eram visíveis sob as orações do século XIII.

Tabela 1. Tratados de Arquimedes contidos nos códices A, B e C.

	Código A	Código B	Código C
Sobre o Equilíbrio dos Planos	✓	✓	✓
Quadratura da Parabola	✓	✓	
Sobre a Esfera e o Cilindro	✓		✓
Medida do Círculo	✓		✓
Sobre as Espirais	✓		✓
Sobre os Corpos Flutuantes		✓	✓
Sobre Conoides e Esferóides	✓		
Contador de Areia	✓		
Método			✓
Stomachion			✓

Após a visita de Tischendorf, o *Palimpsesto* permaneceu na biblioteca do Metochion em Constantinopla. Sabemos isso porque o livro aparece num catálogo da biblioteca feito em 1899 por Papadopoulos-Kerameus, um estudioso grego. Papadopoulos-Kerameus não só listou o manuscrito no seu catálogo, como também encontrou nele uma folha de papel que foi acrescentada no século XVI, na qual havia uma inscrição indicando que o livro pertencia ao Mosteiro de S. Sabas (este mosteiro, ainda hoje ativo, está localizado a meio caminho entre Jerusalém e o mar Morto). Além disso, descreveu o manuscrito e transcreveu uma secção do texto inferior.

É aqui que entra em jogo o famoso filólogo e historiador dinamarquês Johan Ludvig Heiberg. Heiberg, uma autoridade em Arquimedes, tomou conhecimento da existência do catálogo de 1899 através do filólogo clássico alemão Hermann Schöne. Ao examinar o catálogo, encontrou a descrição de um manuscrito, com nome "Ms 355", que chamou a sua atenção. Em particular, na transcrição do texto apagado relatado por Papadopoulos-Kerameus, Heiberg foi capaz de reconhecer um fragmento de *Sobre a Esfera e o Cilindro de Arquimedes*. Assim, viajou para Constantinopla no verão de 1906 e conheceu o Sr. Tsoukaladakis, o bibliotecário do Metochion, que lhe deu a permissão para estudar o *Palimpsesto*.

Heiberg visitou a biblioteca do Metochion duas vezes, em 1906 e 1908. Durante estas curtas visitas, pôde estudar o manuscrito, transcrever grande parte do seu conteúdo com a ajuda de uma lupa, e tirar-lhe algumas fotografias.

Estas fotografias, que se encontram hoje na Biblioteca Real Dinamarquesa, forneceram a Heiberg material para trabalhar depois do seu regresso a Copenhaga. Através de um exame meticuloso do manuscrito, Heiberg conseguiu recuperar grande parte do texto inferior no *Palimpsesto* e descobrir três extraordinários tratados de Arquimedes sob as orações: o *Método* e o *Stomachion*, que não tinham sido transmitidos por outras fontes, mais um texto grego de *Sobre os Corpos Flutuantes*. Esta descoberta foi extraordinária, um verdadeiro momento "Eureka" na história da ciência, e levou Heiberg a escrever uma segunda edição da obra completa de Arquimedes, publicada entre 1910 e 1915.

O que aconteceu ao manuscrito após as visitas de Heiberg? O *Palimpsesto* desapareceu de Constantinopla nos anos 20 e, após um longo período de obscuridade, reapareceu finalmente em 1998 numa venda da Christie's em Nova Iorque (em baixo, falaremos mais sobre esta venda). Hoje, graças a investigações recentes, podemos reconstruir com boa precisão o que aconteceu ao *Palimpsesto* entre os anos 20 e 1998. Em 1938, os manuscritos do Metochion tinham sido transferidos para a Biblioteca Nacional da Grécia, em Atenas, mas sabemos que o nosso *Palimpsesto* nunca chegou a Atenas. Provavelmente foi roubado (ou comprado) aos monges do mosteiro do Metochion durante, ou antes, da relocalização. Uma correspondência que teve lugar em março e abril de 1932 mostra que neste ano o *Palimpsesto* está em França, nas mãos de Salomon Guerson. Guerson era um comerciante judeu francês de tapetes raros e tapeçarias antigas, a trabalhar em Paris. Presumivelmente, o manuscrito foi-lhe vendido pelo comerciante arménio de antiguidades Dikran Kelekian, que tinha acesso fácil aos manuscritos do Metochion e era conhecido de Guerson. Em julho de 1942, dois anos após a entrada dos alemães em Paris, a polícia de Vichy começou a deportar os judeus parisienses. Foi provavelmente neste ano que Guerson, na pressa de escapar de Paris, vendeu o *Palimpsesto* a Marie Louis Sirieix, um herói da Resistência. Marie Louis Sirieix manteve o manuscrito na sua cave durante muitos anos e, após a sua morte em 1956, a sua filha Anne começou a investigar o livro que herdou. Em 1970, graças ao conselho do Institut du Recherche et d'Histoire des Textes em Paris, Anne Sirieix descobriu o tesouro que possuía. Tentou vendê-lo a vários indivíduos e instituições, mas todos eles recusaram. Finalmente, recorreu a Felix de Marez Oyens, do Departamento de Manuscritos da Christie's.

A 29 de outubro de 1998, o *Palimpsesto de Arquimedes* foi levado a leilão na casa de leilões da Christie's em Nova Iorque. O seu código de venda era "Eureka-9058". O manuscrito foi vendido por 2 200 000 dólares a Simon Finch, um negociante de livros londrino, em representação de um colecionador privado americano não identificado. Após o leilão, o misterioso comprador (conhecido como "Sr. B") depositou o manuscrito no Museu de Arte Walters, em Baltimore, para fins de conservação e investigação. Através da ajuda da tecnologia moderna – luz ultravioleta, bem como através da captação e do melhoramento de imagem digital – investigadores e estudiosos da matemática grega antiga começaram a estudar o texto por baixo do livro de orações (ver figura 2). Estes estudos têm sido extremamente complicados devido ao mau estado de conservação do manuscrito, que não tinha sido conservado adequadamente durante o século XX. No entanto, com a

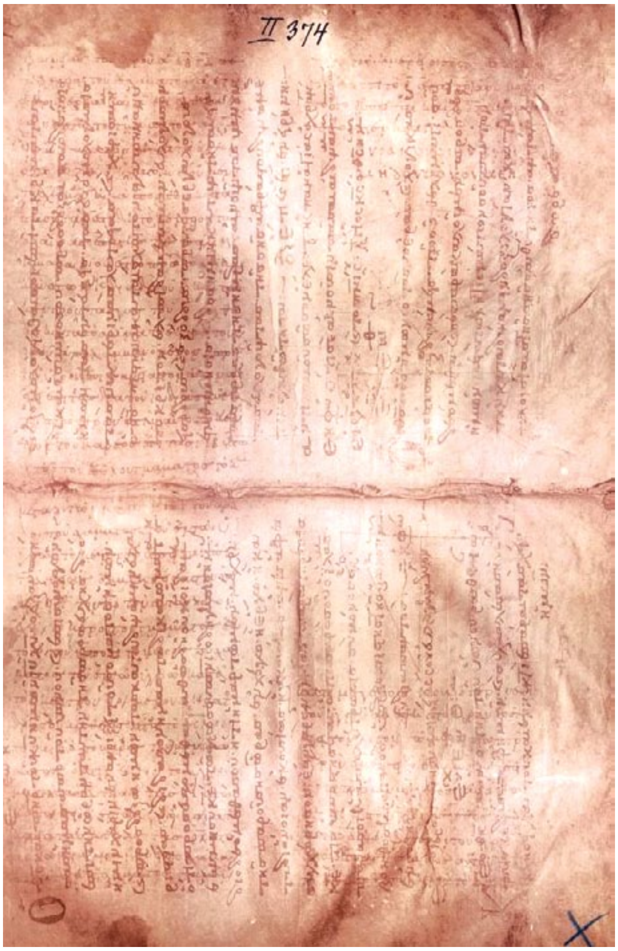


Figura 1. Uma página desdobrada do *Palimpsesto de Arquimedes* (fonte: Museu de Arte Walters, Baltimore; *http://www.archimedespalimpsest.net*).

ajuda de tecnologia e tratamentos de conservação e restauro, os estudiosos puderam aceder ao conteúdo oculto do *Palimpsesto* e fazer progressos substanciais sobre o trabalho de Heiberg.

Hoje sabemos que o *Palimpsesto* contém sete manuscritos diferentes: sete tratados de Arquimedes (*Sobre o Equilíbrio dos Planos, Sobre a Esfera e o Cilindro, Sobre as Espirais, Medida do Círculo*, *Sobre os Corpos Flutuantes*, *Método* e *Stomachion*), discursos do político Hipérides do século IV a.C., um comentário sobre as *Categorias* de Aristóteles, um Menaion (um livro litúrgico), uma coleção hagiográfica e dois textos que ainda não foram identificados. Dos sete tratados de Arquimedes, os últimos três têm o maior interesse para a nossa compreensão do génio matemático do terceiro século a.C. De facto, embora os primeiros quatro tratados tenham sobrevivido através de outros manuscritos, não existe nenhum outro exemplar sobrevivente de *Sobre os Corpos Flutuantes* em grego – a língua em que Arquimedes escreveu – e não existe nenhuma versão em nenhuma língua do *Método* e do *Stomachion*.

Graças ao estudo do *Palimpsesto*, temos também uma melhor imagem da viagem do manuscrito ao longo dos séculos. Por exemplo, sabemos que os textos de Arquimedes escondidos no livro de orações foram escritos durante o século X, e provavelmente em Constantinopla. Podemos deduzir isto a partir de duas pistas: primeiro, o estilo de escrita dos textos de Arquimedes (uma escrita minúscula) é característico do terceiro quarto do século X; segundo, o manuscrito é um produto típico do Renascimento bizantino dos séculos IX e X. Além disso, é muito provável que o livro de orações que inclui os textos de Arquimedes tenha sido terminado em Jerusalém, e não em S. Sabas. Os estudiosos chegaram a esta conclusão observando que as orações contidas no códice também estavam presentes, por vezes na mesma ordem, num manuscrito que foi produzido em Jerusalém e que pode ser descrito como o gémeo do nosso livro de orações. Assim, é muito provável que o *Palimpsesto* tenha sido feito em Jerusalém e acabado em S. Sabas apenas no século XVI (como indicava o caderno de papel encontrado por Papadopoulos-Kerameus, agora perdido). Sabemos também que os manuscritos de S. Sabas foram incorporados na biblioteca do Patriarcado Grego no início do século XIX, e esta informação forneceria uma explicação da razão pela qual o *Palimpsesto* estava em Costantinopla quando Tischendorf lhe tirou uma página. Finalmente, e surpreendentemente, temos até uma data para a composição do livro de orações: 14 de abril de 1229. Esta data está numa inscrição que foi encontrada no

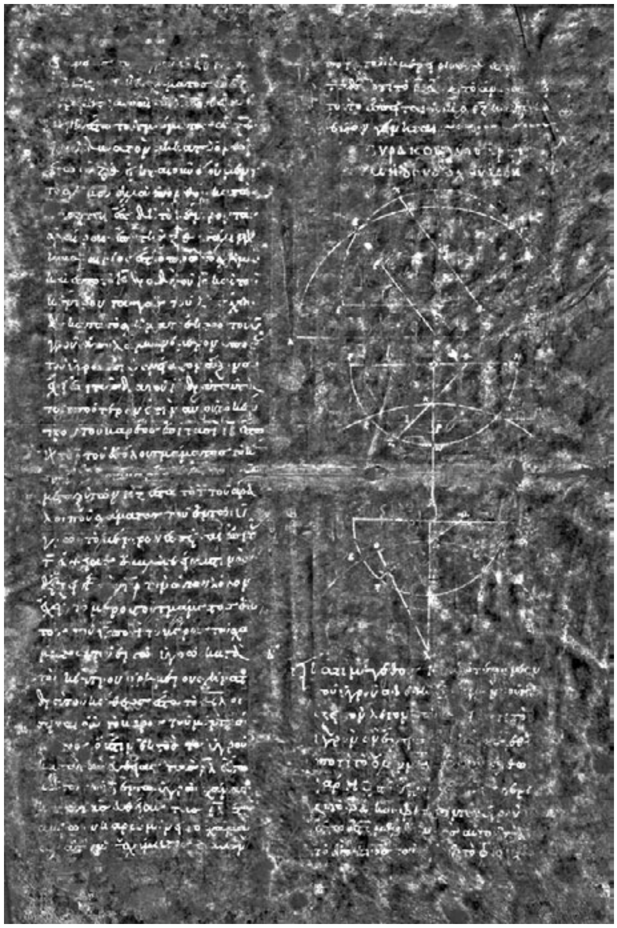


Figura 2. Uma página típica do Palimpsesto de Arquimedes após o processamento da imagem (fonte: Museu de Arte Walters, Baltimore; *http://www.archimedespalimpsest.net*).

Palimpsesto. O escriba do livro de orações datou a sua obra de 14 de abril de 1229.

Assim, temos boas pistas que sugerem onde e quando os textos de Arquimedes foram compostos (Constantinopla, século X), e mesmo onde e quando esses textos foram transformados num livro de orações (Jerusalém, 14 de abril de 1229). Mas o estudo do *Palimpsesto* está longe de estar concluído. Uma das (muitas) questões que permanecem em aberto é: como é que os textos de Arquimedes chegaram a Jerusalém no século XIII? Infelizmente, os estudiosos ainda não têm uma resposta a esta pergunta. Para resolver este mistério, temos de esperar até ao próximo momento "Eureka" na história da ciência.

REFERÊNCIAS

[1] Heiberg, J. L. (1910-1915). *Archimedes Opera Omnia*. Leipzig: Teubner (Vol.1 1910, Vol. 2 1913, Vol. 3 1915).

[2] Netz, R. and Noel, W. (2007). *The Archimedes Codex: How a Medieval Prayer Book Is Revealing the True Genius of Antiquity's Greatest Scientist*. Cambridge, MA: Da Capo Press.

[3] Netz, R., Noel, W., Tchernetska, N., and Wilson, N., editors (2011). *The Archimedes Palimpsest. Volume I: Catalogue and Commentary*. Cambridge: Cambridge University Press, for the Walters Art Museum.

[4] Tischendorf, C. (2010). *Travels in the East*. Cambridge: Cambridge University Press.

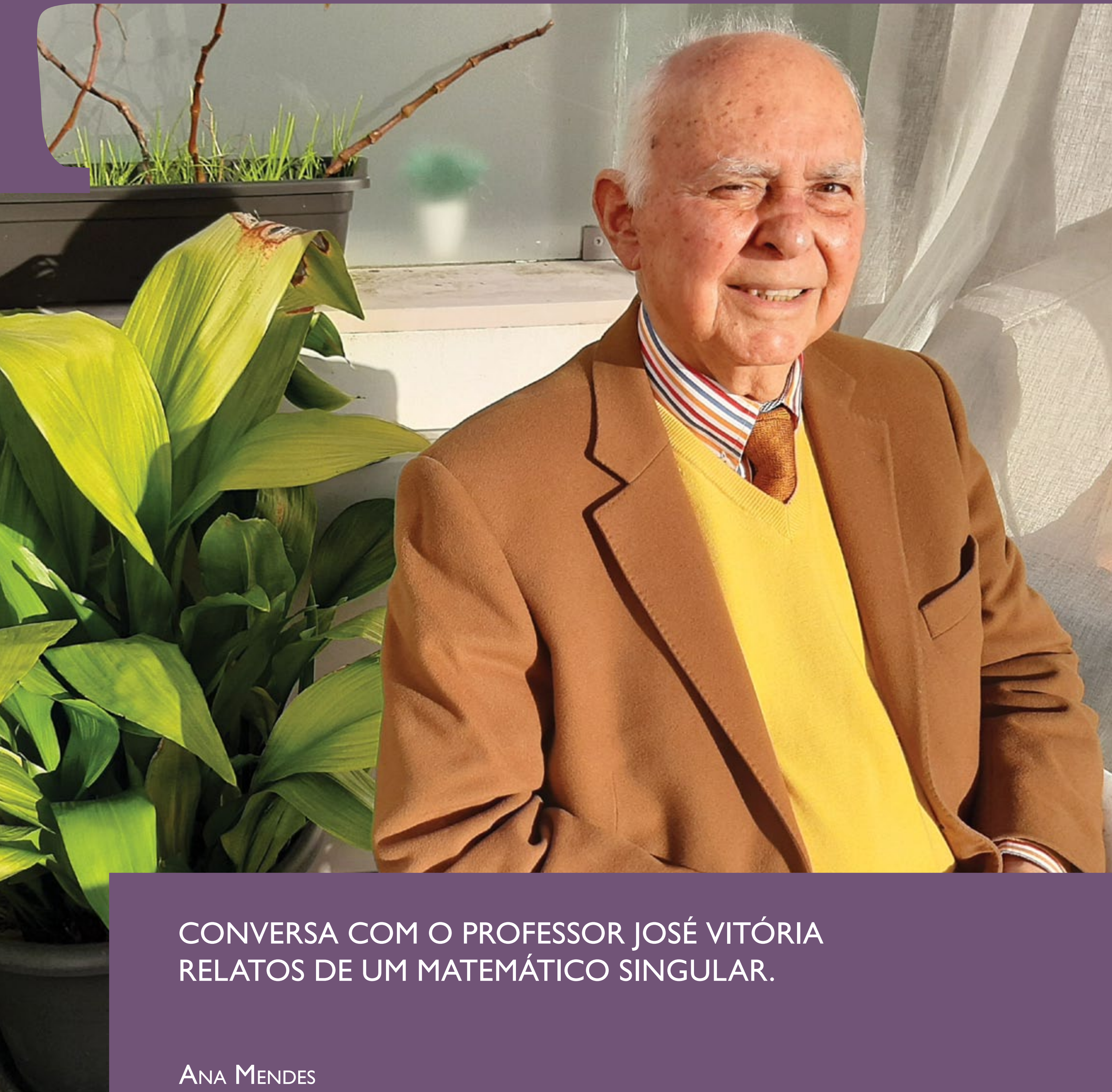
[5] Vitruvius (1914). *Vitruvius: The Ten Books on Architecture*. M. H. Morgan (trans.). Cambridge: Harvard University Press.

SOBRE O AUTOR

Daniele Molinini é Investigador Principal FCT no Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa (CFCUL), onde é PI do projeto de investigação "Exploring the Weak Objectivity of Mathematical Knowledge" (n.º CEECIND/01827/2018).

Agradecimentos: O autor deseja agradecer a Pedro Freitas pelos comentários e pela ajuda na tradução deste artigo.

Coordenação do espaço HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:
Pedro Freitas, Universidade de Lisboa, *pjfreitas@fc.ul.pt*



CONVERSA COM O PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA RELATOS DE UM MATEMÁTICO SINGULAR.

Ana Mendes
Politécnico de Leiria
aimendes@ipleiria.pt

Escolheu matemática porque na época as escolhas não eram muitas e considera que foi um aluno "muito irregular". Num tempo em que "ir estudar" era uma exceção, acabou por vencer as condicionantes do contexto português da primeira metade do século XX. Falamos do Professor José Vitória e as suas memórias são o testemunho vivo do que significa ser professor e matemático. Aposentado da Universidade de Coimbra, começou a sua carreira académica em Lourenço Marques, passou por França e, até, pela Coreia do Norte.

Escolhi conversar com o Professor José Vitória porque é para mim uma pessoa singular. A sua educação, a sua simpatia e o seu reconhecimento pelo outro não deixam ninguém indiferente.

Nesta conversa emerge um contador de histórias. Tantas que, infelizmente, não é possível integrá-las todas neste espaço limitado da *Gazeta*. Com esta conversa esperamos começar a "levantar o véu" sobre as suas muitas memórias, a sua vida e o seu percurso como matemático português, ao longo de quase meio século. Num século marcado por tanta evolução social e tecnológica, a sua experiência e a sua sabedoria não podem deixar de ser partilhadas. Com 82 anos, está mais produtivo cientificamente do que nunca e continua muito atento ao que se passa à sua volta, mantendo-se informado pela leitura diária dos jornais *The Guardian* e *Le Monde.*

ANA MENDES Professor José Vitória, como foi o seu encontro com a matemática?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA O meu percurso é um percurso atípico porque eu venho de uma aldeia, de Abrantes, onde não existia luz elétrica e até à 4.ª classe não havia alguma hipótese de futuro. Fui criado com os meus avós paternos que discutiam a minha ida para o seminário do Gavião, por causa do enxoval. Mas eu não tinha vocação e a ideia de os padres não se casarem incomodava-me. No entanto, surgiu o Colégio de Alvega. No primeiro ano, andei sozinho. Depois foram os meus primos. Durante cinco anos fazíamos a pé mais de 6 km, para cada lado, todos os dias, inclusive aos sábados. Estudávamos no chamado curso de explicações, porque era proibido ter aulas, tendo sido preparados para todos os exames de admissão ao liceu e do 1.º ao 4.º ano por um médico e um professor de Letras. Todos os exames de admissão e do 1.º ao 5.º ano foram realizados em Castelo Branco. Depois, a seguir ao 5.º ano de liceu, era preciso sair dali e ter meios, pois só havia 6.º e 7.º anos nas capitais de distrito. Acabei por ficar um ano em casa. No ano seguinte fui para o Colégio de Tomar, onde fiz num ano o 6.º e 7.º anos. Fiz exame em Castelo Branco com boas notas. A ideia em minha casa era que eu fosse para Medicina, mas eu, Medicina não era capaz. Não sou capaz de lidar com a saúde, nem com a doença nem com a morte, não fui capaz, nunca. Então comecei a ver, fui para Matemática por exclusão de partes. Na altura, a gente tinha poucas vocações. E vim para Coimbra porque o meu pai também estudou em Coimbra e arranjou-me uma pensão chamada Astória da Alta.

ANA MENDES E o que tinha estudado o seu pai em Coimbra?

Momentos da vida académica em Coimbra
1. Tomada da Bastilha 1959
2. Queima das Fitas 1961
3. Formatura 1962

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA O meu pai já tinha estudado em Coimbra e ingressou num curso voluntário de Letras na mesma época que eu. Da parte do meu avô paterno eram todos artífices, com oficinas, da parte da minha avó eram lavradores.

ANA MENDES Em que ano chegou a Coimbra?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Cheguei a Coimbra no ano académico de 1957-1958. Mas só cheguei em novembro, porque houve a chamada "gripe asiática" e eu fiquei "de molho". Impressionaram-me dois professores, Manuel Esparteiro, porque metia medo, e um excelente professor que era Pereira Dias, um professor notável de Geometria.

ANA MENDES Nessa altura existia uma formação transversal, ou seja, quando vinham para aqui estudar os temas eram comuns aos cursos de engenharias…

15º Centenário da República Palácio da Loucura,
17 de fevereiro de 1962

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA As Matemáticas Gerais e o Cálculo eram para toda a gente. Só escapavam alguns, como Biologia ou Geologia. Depois havia o Desenho no primeiro ano, com Luís Albuquerque, e o Desenho de Máquinas, uma cadeira temível de segundo ano, com Simões da Silva, que era muito rigoroso. Luís Albuquerque era da idade do meu pai, tinha 40 anos e falava muito com os alunos. Fiquei a saber depois de me ter aposentado que ele dizia que era pena eu ser um grande preguiçoso e não estudar Matemática. Dizia que eu tinha muitas qualidades e gostou sempre de mim. As aulas de Manuel Esparteiro eram a uma velocidade estonteante. Na altura só se podia avaliar o que fosse exposto, então quando tocava o badalo da cabra ele deixava cair o giz e terminava a aula. Já Pereira Dias fazia uns desenhos incríveis só com o giz branco a ponteado, dois pontos e tracinho construindo sólidos e superfícies.

Mesmo tendo iniciado tarde, tirei 16 a Geometria e 14 na primeira frequência de Química. Entretanto, comecei a apreciar a "liberdade", andei na rua e vi-me aflito para fazer as cadeiras de Manuel Esparteiro. Fiz um curso muito irregular. Eu estudava, mas estudava fora de horas. Consequentemente, só com Pacheco de Amorim em Mecânica Racional e Geometria é que tive boas notas, isto porque havia um livro onde eu podia estudar fora de horas.

ANA MENDES E como geria a sua vida académica, nesses anos?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Como disse, foi um percurso muito irregular. Eu entrei aqui em 57, passei um ano na tal pensão. No ano seguinte, fui para a república Palácio da Loucura e aí foi um descalabro.

Aquilo era tudo gente muito mais velha do que eu. Para mim foi muito bom porque me fez amadurecer. Eu estudava sempre fora, principalmente com quatro colegas (Télio, Serote, Chaves e Fonseca) que eram mais velhos do que eu, e que já tinham feito a tropa, portanto queriam formar-se. Iam às aulas da manhã e de tarde passávamos os apontamentos a limpo e estudávamos assim. Mas faltávamos muito. É claro, os bons alunos iam às aulas e não faltavam.

As cadeiras anuais eram as que eu deixava para a época de outubro. Depois ia para casa da minha avó e estudava de sol a sol porque não havia luz elétrica. E estudava em voz alta, como treino para as longas provas orais. Eu era para me formar em 61, mas acabei por chumbar na última cadeira com Manuel dos Reis.

ANA MENDES Reprovou por que razão?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Não era demérito meu, nem dos colegas que reprovavam na prova escrita, mas da cadeira de Mecânica Celeste! Manuel dos Reis ensinava muito bem, mas faltava muito. As orais eram temíveis! Todos os anos ameaçava incluir no programa o problema dos três corpos, o que nos assustava. Nas aulas práticas, nós estudávamos por ano cinco ou seis objetos celestes.

Havia, para cada objeto, a chamada "marcha" (aquilo a que chamaríamos hoje algoritmo) com os itens a tomar em consideração. Como apoio, tínhamos as *Efemérides Astronómicas*, editadas pelo Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra. Com base nas *Efemérides*, ao longo da referida marcha, tínhamos de calcular logaritmos com sete casas decimais. No último item seria obtida a posição do objeto celeste na data pretendida, possibilitando ao observador saber o azimute e a altura a que o objeto deveria surgir caso se observasse através do instrumento. Como consequência dos nossos erros, o objeto nunca era encontrado nas coordenadas previstas. Eu errei muito as contas, daí a reprovação. Foi um ano intenso!

Foi, também, o ano anterior à crise académica, de greves e coisas complicadas!

ANA MENDES Como foi a sua vivência na crise académica?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA As Assembleias Magnas realizavam-se no pátio do Palácio dos Grilos, com os de "direita" ao fundo do pátio e os de "esquerda" na frente. As assembleias faziam-se quase às escuras, mas a mesa conseguia contar os votos – não sei como – e dizer que os da esquerda eram muito mais do que o dobro dos da direita. Estas assembleias demoravam muito tempo. O Carlos Candal, presidente da Associação Académica em 1960-61, tentava acalmar as massas e havia os colegas, junto à mesa, que apresentavam as moções, mas eu nunca tive jeito para isso. Ficava mais atrás.

Foi uma época muito agitada e, no ano seguinte, com muitas mudanças de presidentes da Associação Académica porque os mandavam sucessivamente para a tropa. Em 1961-62, acabou por ficar à frente da direção da Associação Académica o José Augusto Rocha, que era muito combativo e empolgava as assembleias.

Até que proibiram o Dia do Estudante. Então convocámos uma assembleia para declarar o luto académico. Vários colegas permaneceram no Palácio dos Grilos a compor o texto a ser distribuído na madrugada seguinte. Eu e Custódio ficámos encarregados de distribuir os panfletos. O Custódio ficou com a Praça da República e eu fiquei com a Porta Férrea.

No dia seguinte fui para as aulas da manhã muito cedo e comecei a distribuir os panfletos. Até que apareceu um chefe da polícia, o chefe Carlos, num carro com mais dois ou três polícias. Nessa altura ouvi dizer: fuja, fuja! E fugi! Disfarcei e fiquei junto a um dos portões a fazer de conta que estava a ver os avisos e editais. Só que o chefe Carlos entrou lá, mostrou-me a pistola e prendeu-me.

ANA MENDES Estava dentro da Porta Férrea e foi preso. Pode contar-me o episódio?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Qual era a lei na altura? A polícia não podia entrar na universidade. Pensava eu que essa era a minha segurança. O guarda-mor que estava a acabar de abrir o portão de dentro, viu-me prender e ficou danado. Foi dizer ao reitor que ficou danado, que disse ao ministro da Educação que ficou danado que por sua vez disse ao ministro do Interior. Então qual foi o desenvolvimento? Fui parar à cadeia!

O meu colega Custódio, que se formou em Medicina, foi também preso na Praça da República e acabámos por dormir agarrados aos panfletos pois já não dormíamos há dois dias. Queria era dormir! As nossas caras de mal dormir estão todas documentadas em fotografias nos arquivos da PIDE em Lisboa.

Mais tarde, levaram-me para a PIDE, onde almocei. Depois, começaram o interrogatório pelo meu amigo Custódio, que dizia que se lhe tocassem os partia a todos! Eu dizia-lhe para ter calma. Enquanto acontecia o interrogatório do Custódio, eu ouvia muito barulho e fiquei assustado, pensando que estavam a dar cabo do rapaz. Quando foi a minha vez, declarei: "Não estamos a fazer greve, estamos em luto académico! A Assembleia Magna é soberana!" etc… Aquelas coisas que aprendíamos na altura. Entretanto fomos chamados ao Sacchetti, diretor da PIDE de Coimbra, que, pelas dez horas da noite, acabou por nos soltar.

ANA MENDES E depois de libertados, ganharam juízo?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Nada disso! Montámos uma festa na república e às seis da manhã estava eu pendurado em dois colegas, num grupo de estudantes cansados e determinados, em frente da esquadra a chamar fascistas à polícia que já estava de capacete e metralhadora em punho, porque já havia guerra!

Entretanto aconteceu a Tomada da Associação Académica, a 10 de maio, onde a população nos trazia a comida. Ficamos lá uma noite ou duas e depois foi um grupo de professores negociar.

A crise académica de 62 está muito bem descrita num trabalho de Garrido, atual diretor da Faculdade de Economia.

ANA MENDES Soube que nessa altura teve um acidente. Como foi?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA A 17 de maio houve nova tomada da Associação Académica. Não sei como conseguimos lá entrar. As janelas estavam todas pregadas. Havia confusão e entusiasmo. Eu fiquei no Museu Académico, cujas janelas dão para a Rua José Falcão. Havia um sino rachado da torre montado num cavalete. Um colega manejava o badalo vigorosamente. Eu, através das frinchas da janela, estava a contar os polícias, comandados pelo capitão Veiga Simão, e tinha o pé esquerdo debaixo do tal sino. O sino despegou-se do cavalete e esmagou-me quatro dedos. Um deles foi-me amputado no hospital.

Estava lá um colega meu da república que me diz: "Pá, tens de ir embora!" Eu lá saí pela escada, onde já estava a polícia de choque a fechar aquilo para não sair ninguém, mas a mim deixaram-me sair. Apanhei um táxi, logo ali na Sé Velha, e fui para o hospital. Saí ladeado por um amigo da república, João Goulão, e por um outro rapaz, o Barros Madeira, que é médico no Algarve. Um homem grande e que cantava muito bem!

Tanto eu como o Barros Madeira teríamos sido presos, como aconteceu aos colegas que lá estavam dentro, se não tivéssemos saído antes de a polícia bloquear o edifício. Eram dois cursos que não se acabavam nesse ano!

Estive um mês no hospital e estudei para finalmente fazer Mecânica Celeste. Tive boa nota! Quinze dias depois estava na tropa. Não havia hipótese de escapar.

ANA MENDES E como foi esse processo de adiar a tropa?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Na tropa, eu tinha adiamento até 63, mas em 62 lá fui. A partir do momento em que entrei no radar da PIDE, começaram a perguntar por mim. Como eu nasci em Lisboa, a princípio não me encontravam, mas quando chegaram a Abrantes tive de ir. Ainda me doía o pé porque tinha acabado de tirar o gesso! Ainda fui à junta a ver se me safava, mas mandaram-me para Angola e fui sempre operacional. Tive sorte, como era artilheiro nunca andei a pé. E, entretanto, casei-me.

ANA MENDES Conheceu a sua mulher lá ou cá?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Conheci a minha mulher no termo do cortejo da Queima das Fitas de 1961. Fiz todo o cortejo de braço dado com uma colega que tinha vindo de Lisboa, no contexto das chamadas "migrações académicas". Naquela altura, havia duas migrações para Coimbra. No terceiro ano havia migração provinda do Porto para fugir da Mecânica Racional. No quarto havia para fugir de Mecânica Celeste em Lisboa.

José Vitória e Isabel Vitória, Nampula, janeiro de 1977

ANA MENDES Ou seja, como não conseguiam fazer nas suas faculdades vinham tentar fazer em Coimbra…

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Os professores daqui não gostavam nada disso e então faziam de tudo para dar cabo dos que vinham do Porto e de Lisboa. Ora num desses grupos de raparigas "migrantes" vinha uma pequenita que usava uma saia mais curta do que as nossas colegas de cá! Essa colega simpatiza comigo, nunca chegámos a namorar porque eu era demasiado tímido e bisonho. A tal colega "perdi-a" no final do cortejo. No parque da cidade, onde terminava o cortejo, estava o pessoal da minha república. Foi aí, apesar de não me lembrar muito bem, que conheci a minha mulher, a Isabel. Voltei a revê-la num casamento de um amigo em setembro. Fruto desse encontro acabámos por nos casar, em 1963. Eu pensava que já não ia para a guerra porque o novo curso começava em agosto e em maio eu tinha cinquenta e tal camaradas atrás de mim, fiquei bem classificado na parte militar. Os primeiros a ir eram os mais mal classificados. A certa altura, chamaram quarenta e tal para outra especialidade. Fiquei desprotegido e pronto. Lá fui!

ANA MENDES E a sua mulher ficou cá?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Não. Ela, em 1964, foi ter comigo. Tinha 20 anos.

ANA MENDES Foram para Luanda, mas acabaram por ir para Moçambique?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Estivemos uns meses em Luanda e lá fizemos o cachopo! Então chegou uma altura em que eu disse: tens de te ir embora porque eu vou para o mato. Mas aquilo na tropa muda muito depressa. Pensava que ela tinha ainda um mês para partir, mas no dia a seguir mandaram-me para outro sítio. Ela regressou e só vi, pela primeira vez, o meu cachopo já ele tinha uns 7 ou 8 meses.

Entretanto, em junho de 65, antes de sair da tropa, escrevi a Graciano de Oliveira, que estava em Moçambique, e a Luís Albuquerque, em Coimbra, para ver o que se podia arranjar.

ANA MENDES O Professor Graciano de Oliveira estava em Moçambique por opção ou por…

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Graciano tinha sido mobilizado para a tropa em Moçambique e dizia que lá as condições eram boas. Pagavam 12 contos, incluindo a renda de casa. Luís Albuquerque dizia que andavam há muito à minha procura, mas só pagavam três contos. Escrevi à minha mulher, que já cá estava em Portugal, a explicar, e lá fomos para Moçambique ter com o Graciano de Oliveira, em 1966.

ANA MENDES E começou a fazer o doutoramento lá?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA A gente na altura fazia o que queria. Quando lá cheguei, o único matemático ativo era o Graciano. Já Renato Pereira Coelho estudava os livros, mas não fazia investigação. Era outra escola. O Graciano era o único que queria fazer investigação. Então o Graciano disse-me: "Tens aqui o problema de 'matrizes de blocos comutativos.'" Fiz metade da carreira à custa dos blocos comutativos e ainda hoje faço!

Parti de Moçambique com destino a Oxford, para trabalhar no laboratório de Fox. Quando cheguei a Coimbra, e depois de falar com a Fernanda Aragão Oliveira, acabada de vir de Oxford, decidi ir para Grenoble. Meti-me a caminho de Grenoble sem pedir autorização a ninguém, nem ao diretor, nem à Fundação Gulbenkian, da qual era bolseiro. Isto hoje era impossível!!!

ANA MENDES Foi para Grenoble sem conhecer ninguém?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Já tinha trocado umas cartas com eles. Cheguei a Grenoble depois de duas noites de comboio, com barba grande. Às oito da manhã fui logo falar com o diretor do departamento, Kuntzman. Uma argentina chamada Vitória serviu de tradutora. Ele perguntou-me: "Quer fazer máquina ou matemática?" Eu nunca tinha visto máquina nenhuma. Eu queria fazer umas contitas. Então ele passou-me para o "andar de cima", para Gastinel. Ele olhou para mim e, porque ia todo moreno, pensou sempre que eu era das Antilhas. Disse-me para estudar na *Computing Reviews* os últimos cinco anos de trabalhos em análise numérica. Eu voltei lá com um grande ficheiro e Gastinel deu-me um artigo de Householder sobre normas de matrizes. Esta foi, praticamente, toda a orientação que tive até hoje… Iniciei, em Grenoble, o estudo das normas de matrizes cujo valor é uma matriz não negativa, com as quais fiz a outra metade da minha carreira e que ainda hoje usamos. Fiz tudo sozinho!

José Vitória, Isabel Vitória, Manuela Sobral, José Sobral, Fátima Leite, João David Vieira.
Jantar do Congresso do Grupo de Matemáticos de Expressão Latina (GMEL)
Coimbra, 9 de setembro de 1985

ANA MENDES No fundo, trabalhou a sua carreira como quis. Foi sempre fazendo coisas de que gostava?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Sim, mas sempre com alguma insegurança porque não é fácil ser um autodidata. Na altura, trabalhar sozinho era a norma e era uma angústia. Só na década de 1990 é que isso mudou e o trabalho em equipas despoletou. E essa mudança aconteceu porque éramos criticados quando íamos lá fora, pelos nossos pares, por trabalharmos sozinhos e só entre portugueses. Estávamos muito isolados!

ANA MENDES Poderia dizer-se que o seu percurso é incrível nesse aspeto.

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA O paradigma é a pessoa sobrevoar vários assuntos. Eu tenho na minha cabeça dezenas de teoremas que nunca usei na vida. Estudei Otimização, Análise Funcional, Topologia, Análise Numérica… tudo sozinho. Na altura eu não tinha capacidade para perceber que nos livros está tudo explicadinho. Ganhei, contudo, muita flexibilidade a fazer as demonstrações. E depois fiz-me de esperto. Pedia para lecionar cadeiras que eu nunca tinha dado para me obrigar a estudar. Porque de outra maneira não tinha tempo.

ANA MENDES O que acha do ensino da matemática na atualidade?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Eu neste momento não tenho a noção. Com esta coisa da avaliação, a gente é pontuada pelos alunos. Já vinha habituado a isso na Covilhã, onde também lecionei. Mas não sabia ler aquilo. Em geral, tinha muito boas classificações na exposição, na disponibilidade, em tudo… menos no que respeita aos métodos de avaliação que utilizava.

ANA MENDES Pois, quando entrei aqui em Coimbra como estudante as suas orais eram famosíssimas, ou seja, toda a gente tinha pânico de ter orais com o professor Vitória!

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Sem razão, porque só ia à oral quem estava praticamente aprovado e também nunca reprovou ninguém na oral. Mas é certo que obrigava os estudantes a mais uma semana de leituras e atenção! No primeiro ano temos de acarinhar os estudantes, mas ser simultaneamente exigentes.

ANA MENDES Como conseguia conciliar a carreira científica com as muitas tarefas burocráticas que também assumiu?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Não se podia. Tinha aulas com muitos estudantes e eu nas aulas era muito cuidadoso e sempre dei muita assistência aos alunos no gabinete. Eu nunca mandei embora um aluno. Às vezes, iam lá alunos que perguntavam coisas que estavam já no exame e eu respondia-lhes tudo certinho. Se o rapaz tinha aquela curiosidade, porque é que não havia de lhe explicar? Mas eram as aulas que me consumiam muito… Desgastavam-me muito. Além disso, tinha muitas tarefas administrativas. Por isso é que sou mais produtivo cientificamente agora.

ANA MENDES Chegou a ser diretor no Departamento de Matemática na Universidade de Coimbra?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Várias vezes e também diretor da Faculdade de Ciências e Tecnologia. E fui eleito para muitas outras coisas. Fui várias vezes presidente da Assembleia de Representantes e até fui membro da direção da SPM no mandato de João dos Santos Guerreiro.

ANA MENDES Na altura o reitor era…?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Rui Alarcão. Quando fui para a Assembleia da Faculdade de Ciências e Tecnologia, tomei uma posição clara sobre a minha discordância como estava organizada. Demasiado peso dos estudantes. Sempre fui frontal. Como as eleições para o departamento eram por nomes e não por listas, acabei eleito presidente. Ou seja, os estudantes consideravam-me de confiança.

Entretanto, mudaram os regulamentos. Antigamente quando acontecia a eleição do reitor, estava toda a academia mobilizada. Atualmente ninguém repara em nada. É triste!

ANA MENDES É verdade, este RJIES tem de ser modificado.

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Sim. Tem de ser dar mais peso aos órgãos colegiais.

ANA MENDES Podemos considerar que essa tomada de posição revela a sua veia política?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Na nossa terra eu era republicano porque o meu pai também era. E em Alvega celebrava-se à meia-noite e meio às escondidas o dia 5 de Outubro. Atirava-se um foguete e fugia-se para casa a correr. De maneira que eu cheguei a Coimbra com a bandeira da República, no emblema da lapela. Houve no Departamento quem me aconselhasse a tirar. Na altura diria que além dos republicanos, havia outras duas "correntes" a disputar espaço em Coimbra, os monárquicos e a Opus Dei. Em Coimbra, na época, quem espalhou a Opus Dei foi um tal Martinez espanhol, das Químicas. O monárquico mais velho mais conhecido era Costa Lobo. Os monárquicos no departamento eram, na altura, os Pacheco de Amorim pai (Diogo) e o filho (José). Poderia dizer-se que durante a crise académica a veia política desabrochou e que depois da tropa comecei a ler textos marxistas. Antes do 25 Abril a questão colonial assombrava-me. E o meu grande sonho era que ela se resolvesse. Tive em Moçambique alguma atividade que se podia chamar política, mas sempre enquadrada pela atividade universitária. Participei numa grande assembleia na Faculdade de Medicina, aberta a toda a população, não só à academia. Fiz uma intervenção polémica e depois "apaguei". Não me lembro como cheguei a casa. Trinta e tal anos mais tarde, um antigo aluno moçambicano, Lorena, disse-me que, após a minha intervenção, os alunos rodearam-me e retiraram-me da sala. Estava próximo da saída e penso que os Pides que lá estavam não conseguiram identificar quem falou.

Quando comecei a sentir que a minha ação podia extravasar os muros da universidade, saí, já tinha 30 e tal anos.

Em 1973, a PIDE fechou a Associação Académica e desterrou para norte de Moçambique alguns dirigentes associativos. Umas dezenas de assistentes protestaram em abaixo-assinado dirigido aos ministros da Educação e do Ultramar. O reitor moveu-nos um processo disciplinar. Alguns de nós fomos chamados à Reitoria para explicar a nossa ação. Só soube do processo disciplinar quando li a História da Associação Académica de Moçambique, publicada em 2016. Nunca fui inquirido nesse processo. Por curiosidade, consultei os ficheiros na Torre do Tombo e soube, então, que integrava uma lista dos

Democratas de Moçambique. A lista era encabeçada por Almeida Santos, a seguir vinha eu e a minha mulher, imagine!

ANA MENDES Sei que visitou a Coreia do Norte. Pode contar-me um pouco dessa estada?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Estive na Coreia do Norte, em 1982. Luís Albuquerque conhecera um coreano a quem disse que na costa da Coreia havia um navio português naufragado. Tal informação gerou um grande interesse e organizaram-se reuniões. Numa delas, estavam dois coreanos que consideraram que eu sabia muito de Ciência Política. E convidaram-me. E eu fui. Aquilo parecia um colégio interno, rodeado de arame farpado! Passei lá três semanas em discussões muito sérias. Estavam dinamarqueses, nepaleses, egípcios, ganeses, etc.. Para cada grupo estavam designados um professor e um tradutor. Como só eu comunicava em francês, tinha à minha disposição um Volvo, um chauffeur, um professor e um tradutor. Trabalhou-se à séria.

Sobre o povo, com quem nunca falei porque nunca me deixaram, vive mal, com fome, e com uma pressão sobre as pessoas muito grande. Os altifalantes estavam sempre a divulgar propaganda para doutrinar o povo. Quer na cidade quer nos campos de trabalho. Quando nos aproximamos da zona desmilitarizada que separa as duas fronteiras, percebe-se que é realmente perigosa. Há armamento dos dois lados. Sente-se muita tensão.

ANA MENDES Curiosidades pessoais. O Professor Vitória, desde que o conheço, tem um ar muito jovem. Qual é o seu segredo? Tem alguns cuidados especiais?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Eu sempre comi de tudo. Bebia vinho em algumas refeições e era relativamente frugal. Eu tinha alguns projetos e tinha ações integradas como as luso-espanholas, recebia muita gente… Ou recebia-os em casa, onde a minha mulher os tratava maravilhosamente, ou levava-os ao leitão, entre outras coisas. E então aí comia e bebia bem. Os outros olhavam para mim e questionavam: "Como é que come e bebe tanto e está assim?!". E eu dizia: "Eu faço isto uma vez por semestre mas não todos os semestres!"

ANA MENDES Depois de se aposentar, tornou-se muito ativo cientificamente. Conte-nos um pouco do seu trabalho atual.

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Ao contrário de outros colegas meus, eu não tinha nenhuma capacidade especial, como pintar, tocar um instrumento ou fazer poesia. Minto, interesso-me por poesia e filosofia. Como não sei fazer mais nada e não tenho paciência para matemática "recreativa", vou pensando em problemas. Exponho o problema a alguns colegas, que me ajudam a formulá-lo e a resolvê-lo. Trabalhamos em equipa e a submissão dos artigos para publicação é feita pelos colegas. Em 2021, conseguimos publicar três artigos!

ANA MENDES E o que sente nesta fase da vida? Há algum problema matemático, por exemplo um dos Desafios do Milénio, que gostaria de resolver?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Neste momento, da forma como está a avaliação do ensino português, ninguém se atreve a abraçar problemas matemáticos difíceis e que levem anos a resolver. A avaliação é impeditiva de grandes sonhos investigativos, a longo prazo. E, hoje, sem uma equipa ninguém vai a lado nenhum.

ANA MENDES Que conselho deixa para os mais jovens?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA Que é conveniente trabalhar em equipa e que isso exige muita humildade de cada um. É importante ter a capacidade de admitir as suas fraquezas. Esse é o benefício que a minha idade me dá. Não tenho problemas em admitir o que não sei!

ANA MENDES Para terminar, o que é o move?

PROFESSOR JOSÉ VITÓRIA O trabalho. A minha inspiração é trabalhar.

SOBRE A AUTORA

Ana Mendes é professora do Politécnico de Leiria, Escola Superior de Tecnologia e Gestão (ESTG), Doutora em Matemática e investigadora em problemas de classificação de lesões melanocíticas. É elemento do Conselho Fiscal da Sociedade Portuguesa de Matemática e é coordenadora das atividades do Ginásio Matemático da ESTG.

Nuno Camarneiro
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

REALIDADE E FICÇÃO

A realidade é lenta, vaga, críptica e diluída. Tudo acontece, mas nem sempre estamos lá para o presenciar. Já a ficção é uma depuração da realidade, é a vida sem as partes monótonas e rotineiras.

Afinal, para que serve a ficção? A pergunta será tão antiga quanto a Humanidade e alguém a deve ter feito quando a primeira história de deuses, ou monstros ou outros seres imaginários, foi contada à volta de um assado de bisonte há muitos milhares de anos.

Se há tanta coisa que existe, porque insiste a nossa espécie em contar, escrever e filmar o que é inventado? Que função cumprirá esse exercício aparentemente infantil, ou próprio de seres delirantes? Se há tanto real à nossa volta, porque passamos tempo a produzir e a consumir séries e filmes, a ler livros e a jogar no computador? Porque pagamos bilhete para irmos ao teatro se na rua há tantos milhares de personagens (atores de outros tantos milhares de vidas) que podemos ver à borla?

Ao passarmos meia hora numa esplanada com um livro, talvez obtenhamos a resposta. Trinta minutos de leitura correspondem, para um leitor médio, ao mesmo número de páginas, e, dependendo da obra, nessas 30 páginas podemos acompanhar a transformação de Gregor Samsa numa barata, a perseguição tenaz do capitão Ahab à Moby Dick, as angústias existenciais de Hamlet, percorrer as estantes da biblioteca de Babel ou passear vagarosamente pelo interior do Ramalhete.

Se nos encontrarmos mais céticos e avessos à fantasia e decidirmos pousar o livro para nos concentrarmos no "real", o mais provável é que nessa meia hora fiquemos a saber que nas mesas ao lado alguém decidiu trocar de telemóvel, que o Carlos não anda bem desde que a namorada o deixou e que a nova dieta de uma apresentadora de TV passa pelo consumo desregrado de nabos e beringelas.

A realidade é lenta, vaga, críptica e diluída. Tudo acontece, mas nem sempre estamos lá para o presenciar, ou talvez só nos apercebamos muitos anos mais tarde, possivelmente através do relato de alguém. Já a ficção é uma depuração da realidade, é a vida sem as partes monótonas ou rotineiras, é feita de todo o tipo de deformações que nos ajudam a reconstituir o que é deformado. Através do exagero, da caricatura, da redução ao absurdo, dos saltos temporais, do fluxo de consciência e de outras ferramentas narrativas, damos por nós a ler a tal "realidade" de um outro modo, mais reflexivo, talvez, mais crítico ou mais universal. Por isso nos encontramos em situações "kafkianas", ou a sermos Dons Quixotes, ou mesmo em busca dos nossos tempos perdidos.

Todos gostamos de acreditar que as nossas vidas davam filmes, é verdade para alguns, não tanto para outros, mas cada vez mais me convenço de que os livros que lemos, os filmes que vemos e as peças de teatro a que assistimos quase sempre nos dão mais vidas.

B A

COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos.
Contacte-nos!

VALOR DE QUOTAS 2022:

Sócio Efetivo: **40 euros**

Sócio Estudante: **20 euros**
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante
comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais
 Escolar: **80 euros**
 Académico: **400 euros**
 Corporativo: **600 euros**

CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

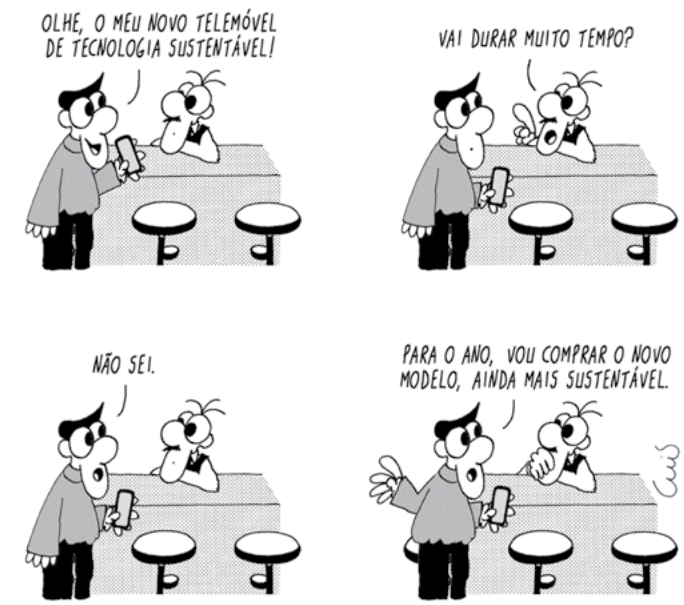
INFORMAÇÕES

Av. da República, 45 3.º esq
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785
E-mail: spm@spm.pt

www.spm.pt

Luis Afonso



Publicado originalmente no jornal Público, em 18/09/2021. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETORA (EDITORA-CHEFE):
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:
Daniel Pinto Universidade de Coimbra
Hugo Tavares Instituto Superior Técnico

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Juvenal Espírito Santo** Instituto Nacional de Segurança Social de S. Tomé e Príncipe e Universidade de S. Tomé e Príncipe • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Nisa Figueiredo** Thomas More Hogeschool Roterdão • **Paolo Piccione** Universidade de São Paulo • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
FR Absolut Graphic
Rua Professor Egas Moniz n 38 4º Dto - 2620-138 Póvoa Sto. Adrião

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO
Sociedade Portuguesa de Matemática
SEDE: Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt
NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: http://gazeta.spm.pt/politica

TIRAGEM **1250 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

DENNIS PARNELL SULLIVAN VENCE PRÉMIO ABEL 2022

A Academia Norueguesa de Ciências e Letras anunciou no dia 23 de março que o matemático americano Dennis Parnell Sullivan é o galardoado com o Prémio Abel 2022, no valor de € 777 000. Na opinião do júri, Sullivan foi distinguido "pelas suas contribuições inovadoras para a topologia no seu sentido mais amplo e, em particular, nos seus aspetos algébricos, geométricos e dinâmicos."

Dennis Parnell Sullivan, de 81 anos, passou por diversas universidades de vários países, mas neste momento está afeto à Universidade de Stony Brook e à Escola de Pós-Graduação e Centro Universitário da City University de Nova Iorque, ambas nos Estados Unidos da América.

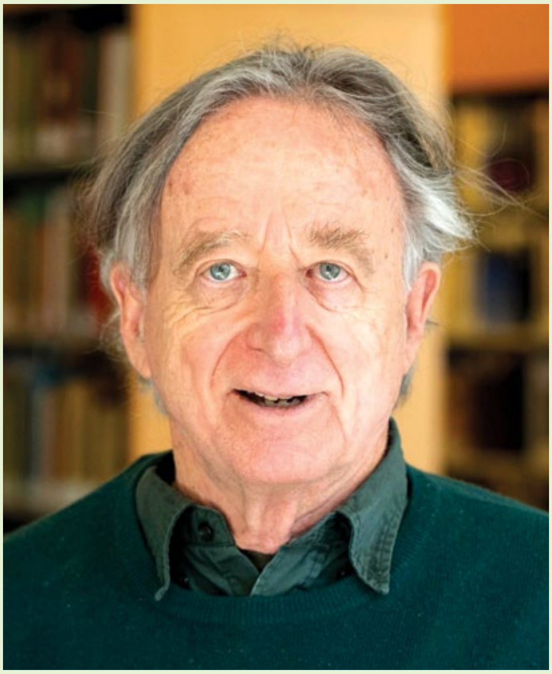
Hans Munthe Kaas, presidente do Comité Abel diz que "Dennis P. Sullivan mudou repetidamente o panorama da topologia, introduzindo novos conceitos, provando teoremas de referência, respondendo a velhas conjeturas e formulando novos problemas que impulsionaram a área". E reforça: "Sullivan mudou de área para área, aparentemente sem esforço, usando métodos algébricos, analíticos e geométricos como um verdadeiro virtuoso."

Uma história que confirma o talento do matemático é a de que, nos anos 70, Sullivan modernizou a topologia e condensou as suas ideias num artigo, enquanto pesquisava no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT). Nunca publicou essas ideias, mas os seus colegas começaram a fotocopiá-las e elas circularam pelo mundo, em exemplares cada vez mais difíceis de ler, mas que mantinham uma aura de texto sagrado. Só em 2005 foram finalmente publicadas as chamadas MIT Notes.

Um dos seus avanços mais importantes inclui uma nova maneira de entender a teoria da homotopia racional, um subcampo da topologia algébrica. A topologia tem sido inestimável em toda a matemática e não só, com aplicações significativas em campos que vão da física à economia e à ciência de dados.

Dennis Sullivan ganhou inúmeros prémios, entre eles o Prémio Steele, o Prémio Wolf 2010 em Matemática e o Prémio Balzan 2014 para a Matemática.

O Prémio Abel será entregue numa cerimónia na Universidade de Aula, em Oslo, no dia 24 de maio, e será transmitido em direto no canal de Youtube The Abel Prize.



ICM 2022 SERÁ UM EVENTO ONLINE

Inicialmente previsto para decorrer na Rússia, o Congresso Internacional de Matemáticos 2022 (ICM 2022) será um evento totalmente virtual, dado não haver condições de realização do evento no formato presencial. O ICM decorrerá de 6 a 14 de julho de 2022 e a participação será gratuita, mas obriga a inscrição prévia. Neste momento, a comunidade matemática está a reunir esforços para organizar eventos presenciais e online para complementar o ICM 2022 virtual. A organização destes eventos satélite está a cargo dos matemáticos Alexei Borodin, Martin Hairer e Terence Tao.

NOVOS SÓCIOS HONORÁRIOS DA SPM

A Sociedade Portuguesa de Matemática tem seis novos sócios honorários. São eles :

- Jorge Almeida,
- Nuno Crato,
- Gracinda Gomes,
- Henrique Leitão,
- Luís Magalhães e
- Luciano Santos.

Conheça-os em *https://www.spm.pt/socios_/honorarios/*.

IRENE FONSECA GALARDOADA COM O ISIMM SENIOR PRIZE 2022

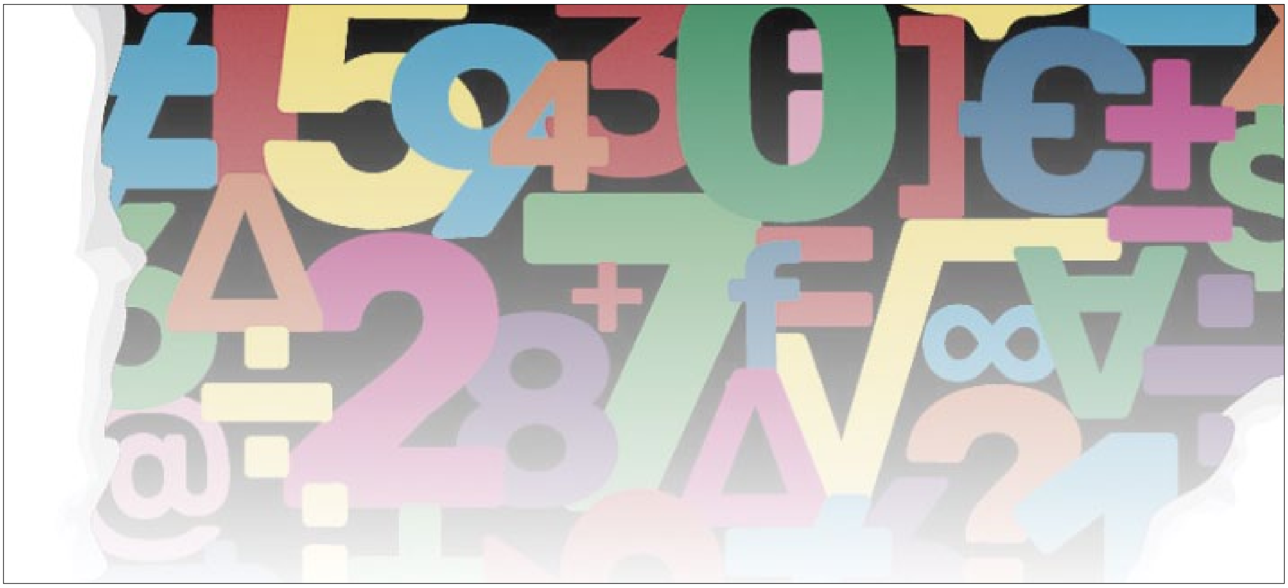
A matemática portuguesa Irene Fonseca venceu o ISIMM Senior Prize 2022, atribuído pela International Society for the Interaction of Mechanics and Mathematics (ISIMM).

O prémio representa o reconhecimento pelos seus contributos valiosos na área do cálculo das variações e matemática das ciências de materiais e pelo seu desempenho exemplar ao serviço da comunidade matemática. É destacada por ser uma orientadora inspiradora e um modelo para outras mulheres matemáticas.

Irene Fonseca é professora de matemática do Mellon College of Science da Universidade Carnegie Mellon, onde é diretora do Center for Nonlinear Analysis. Nasceu em Lisboa, onde completou com 20 valores a licenciatura na Faculdade de Ciências e doutorou-se na Universidade do Minnesota (EUA).

A cerimónia de entrega do prémio terá lugar em Brescia, a 16 de Junho, no Symposium on Trends in Applications of Mathematics to Mechanics (STAMM).

CONCURSO MATEMÁTICA E ARTE DE RUA JÁ TEM VENCEDORES



O concurso Matemática e Arte de Rua, que decorreu de 5 de janeiro a 14 de fevereiro, teve mais de 350 candidaturas, num total de aproximadamente 1100 alunos e professores envolvidos. Dirigido às escolas do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário, o concurso apelava à criação de um mural aliando a matemática e a arte.

Os vencedores foram anunciados na página oficial no dia 5 de março e, além dos três primeiros prémios em cada categoria, foram atribuídas ainda oito menções honrosas, cinco da categoria A e três da categoria B.

De entre os trabalhos submetidos, foram selecionados 67 trabalhos para serem exibidos na exposição A Matemática em União com..., que esteve patente de 12 a 25 de março no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Neste momento, a exposição está disponível online, na página do concurso.

O concurso foi organizado pela Delegação da Região do Centro da Sociedade Portuguesa de Matemática, pelo Centro de Matemática da Universidade de Coimbra e pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da mesma Universidade.

Página do concurso: *https://ucpages.uc.pt/cmuc/mat-arte-rua/*

35.º ENCONTRO DO SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O 35.º Encontro do SNHM vai ser realizado no Auditório da Biblioteca Municipal Vergílio Ferreira, em Gouveia, a 17 e 18 de Junho de 2022 (sexta e sábado).

As submissões de palestras decorreram até 31 de março. O Encontro será acreditado. *https://www.spm.pt/seminario.*

ENCONTRO CONJUNTO PORTUGAL BRASIL EM MATEMÁTICA

O Encontro Conjunto Brasil-Portugal em Matemática irá decorrer de 14 a 20 de agosto de 2022, na Universidade Federal da Bahia, em Salvador – Bahia, a primeira capital do Brasil. O evento marca o bicentenário da independência do Brasil e celebra a intensificação da cooperação científica entre Portugal e Brasil na área da matemática. Com dez sessões plenárias e 18 sessões paralelas, o evento ainda contará com uma sessão de pósteres no último dia.

4.ª EDIÇÃO DO CAMPEONATO NACIONAL MULTIPLI 2022

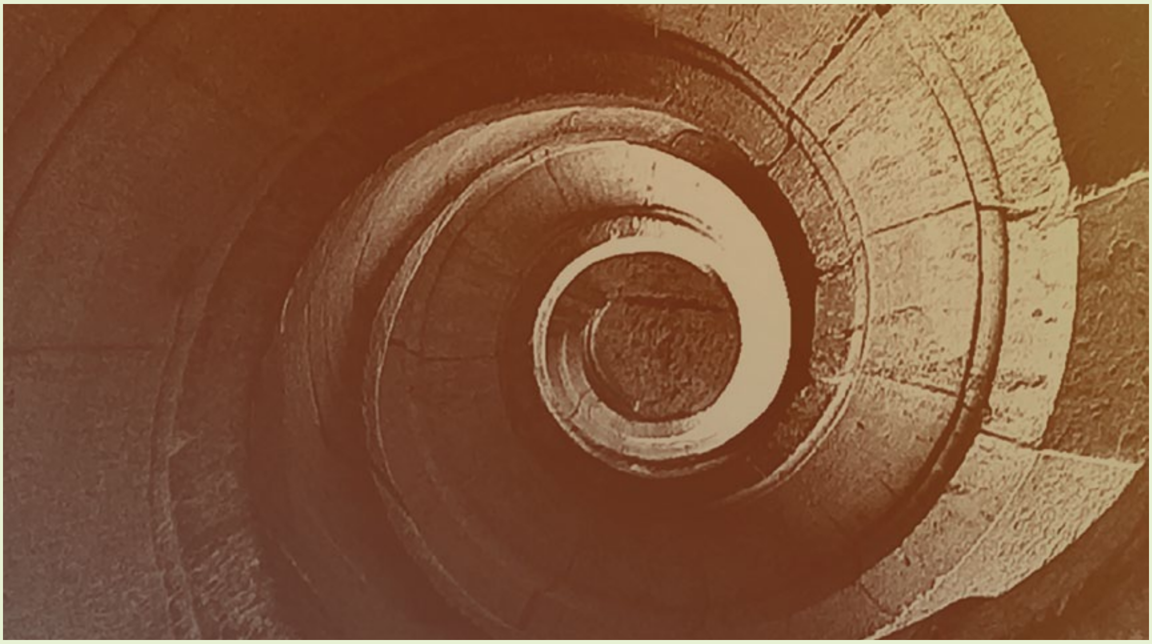
O Campeonato Nacional Multipli está de volta e irá decorrer num formato totalmente online. Será disputado em sete semifinais Regionais, de 6 a 17 de maio, e uma grande final, no dia 8 de junho. As inscrições estão abertas até ao dia 29 de abril para todos os alunos dos 3.º, 4.º, 5.º e 6.º anos.

Esta é uma iniciativa promovida pelo Politécnico de Leiria em parceria com a Alfiii, que conta com o apoio da Associação de Professores de Matemática, da Sociedade Portuguesa de Matemática e da Associação Ludus e com o patrocínio do Crédito Agrícola.

INSCRIÇÕES ABERTAS PARA O ENSPM 2022

O Encontro Nacional SPM 2022 (ENSPM 2022) volta a ter um programa presencial e decorrerá de 18 a 20 de julho, em Tomar. Nesta edição, haverá investigação de topo, disruptiva, ambiciosa e ímpar, convidados distinguidos pelo Conselho Europeu de Investigação (ERC), cientistas ilustres, prestigiados especialistas em ensino e muito mais. Marcarão presença no ENSPM 2022 Gavril Farkas, Patrícia Gonçalves, Peter Keevash, Henrique Leitão, Mark Pollicott, Xavier Tolsa, Josef Urban, Wilhelm Winter e ainda Persi Diaconis, Susan Holmes e Nuno Crato, entre outros.

Além das sessões plenárias, existem ainda seis blocos para sessões propostas, com três oradores e duração de 75 minutos. A organização destas sessões paralelas não terá qualquer custo até 30 de maio e as inscrições no Encontro têm preço especial até 31 de maio. *https://enspm2022.spm.pt/*



COLABORE COM A GAZETA DE MATEMÁTICA

A Gazeta de Matemática está aberta à submissão de artigos originais sobre as várias áreas da matemática ou de natureza interdisciplinar que retratem a diversidade das comunidades e pensamentos matemáticos.

Tem ideias para artigos? Submeta o seu texto para gazeta@spm.pt.

Conhece algum aluno de licenciatura, mestrado ou doutoramento que tenha trabalhado num projeto interessante para um público mais vasto? Sugira-lhe que submeta um artigo para a Gazeta.

Jorge Milhazes de Freitas
Vice-presidente da SPM
jmfreita@fc.up.pt

UM ANO COM MUITA ATIVIDADE

Depois de dois anos de pandemia, o Encontro Nacional da SPM 2022 volta ao formato presencial, com um painel de palestrantes considerados figuras de referência mundial. Será um evento memorável.

Neste tempos conturbados, o aliviar das limitações impostas pela pandemia tem permitido um paulatino regresso a uma certa normalidade nas diversas atividades da SPM.

Começamos por registar a tomada de posse do novo corpo editorial da *Portugaliae Mathematica* para um mandato de três anos. A *Portugaliae Mathematica* é uma revista da SPM, publicada pela European Mathematical Society, com o apoio da Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

Desde a sua fundação, em 1937, que a P*ortugaliae Mathematica* tem como objetivo publicar artigos de investigação de alto nível em todos os ramos da Matemática. Com grande esforço dos seus fundadores, a revista conseguiu atrair, numa fase inicial, artigos de alguns dos melhores matemáticos da época. No entanto, em grande parte devido às mudanças dramáticas na publicação científica ocorridas na última década, a revista recebe atualmente um número relativamente reduzido de submissões de qualidade.

O novo corpo editorial da *Portugaliae Mathematica* tem como objetivo consolidar a *Portugaliae* como uma revista de Matemática generalista, mantendo os elevados padrões científicos que a caraterizam. Esta tarefa só será possível atraindo um maior número de submissões de qualidade e, nesse sentido, juntamo-nos ao apelo dos editores-chefe, exortando a comunidade matemática portuguesa a submeter artigos de qualidade à *Portugaliae Mathematica*.

Assinalamos também a criação do Prémio António Aniceto Monteiro que visa reconhecer e motivar ainda mais a excelência da investigação matemática nacional, galardoando um(a) matemático(a) de nacionalidade portuguesa e com menos de 40 anos de idade que se tenha distinguido por uma contribuição significativa para o desenvolvimento da disciplina. Esta iniciativa da SPM, que conta com o precioso apoio da Unilabs, pretende instituir um prémio - nomeado em homenagem a António Aniceto Monteiro, um dos fundadores da SPM e da *Portugaliae Mathematica* – que se torne uma referência entre os prémios na área da Ciência em Portugal. O prémio tem uma periodicidade bianual e a primeira edição ocorrerá em 2022.

Finalmente, aproveitamos a oportunidade para divulgar o Encontro Nacional da SPM 2022, que decorrerá em Tomar, entre 18 e 20 de julho, prometendo manter um nível científico da mais alta craveira internacional, apresentando um painel de palestrantes convidados considerados figuras de referência mundial, muitos dos quais reconhecidos com bolsas ERC (European Research Council), cobrindo-se diversas áreas de investigação e ensino da matemática. Terminamos, exortando à participação da comunidade matemática nacional, estimulando a submissão de sessões paralelas e de inscrições, incluindo de alunos dos ensinos básico, secundário e superior para que se redunde num acontecimento memorável.

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2022

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S.Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3º esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*