N. 0192

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA | Ano LXXXI | Nov. 2020 | 4,20€

José Monteiro da Rocha (1734-1819)

Um Matemático ao Serviço do Estado

Fernandes B. Figueiredo e António Leal Duarte

Demonstrado... Ou Talvez Não

APANHADOS NA REDE

José Carlos Santos

Aplanar a Curva

NA LINHA DE FRENTE

Fabio Chalub

TARDES DE MATEMÁTICA
ONLINE

SÁBADOS ÀS 15 HORAS

28 novembro 2020
O Universo enquanto Laboratório Matemático
João Fernandes (DM-FCTUC)

13 março 2021
A Vida de Pi
António Bento (DM-UBI)

22 maio 2021
A Matemática dos empréstimos e dos depósitos a prazo
Paulo Saraiva (FEUC)

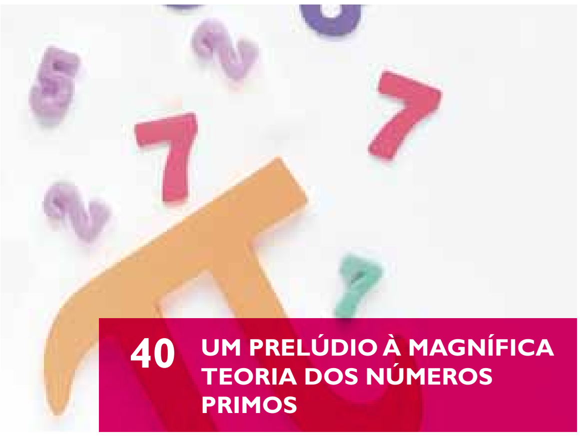
10 julho 2021
A Matemática na procura de respostas no âmbito da cardiologia
José Augusto Ferreira
(CMUC, DM-FCTUC)

MUSEU DA CIÊNCIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
Delegação Regional do Centro

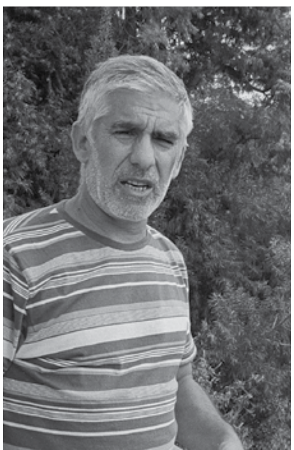
ÍNDICE

20 J. L. LAGRANGE – UMA BREVE BIOGRAFIA

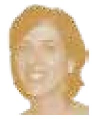


40 UM PRELÚDIO À MAGNÍFICA TEORIA DOS NÚMEROS PRIMOS

47 HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA
Par-de-Tūṣī: Entre a Astronomia Árabe e a Coperniciana



34 CONVERSA COM...
Adérito Araújo



Sílvia Barbeiro
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

VIVA A ESCOLA!

Em tempos de pandemia, valorizamos a escola como um lugar que contribui para a igualdade de oportunidades, rico em interações, onde se aprende e se convive.

O relatório anual sobre sistemas educativos da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE) de 2020, *Education at a Glance,* foi divulgado em setembro. Este relatório, dedicado ao desenvolvimento e à análise de indicadores quantitativos comparáveis internacionalmente, revela o enorme impacto que a pandemia de covid-19 está a ter na Educação a nível global. Os resultados sobre este tema foram resumidos na brochura *The impact of covid-19 on education – Insights from Education at a Glance 2020*.

Os períodos de confinamento ditaram o fecho de escolas em quase todos os países da OCDE, durante pelo menos dez semanas na maioria deles, interrompendo o ensino presencial e obrigando os alunos, os professores e as famílias a recriar a escola em casa. Embora a comunidade educativa tenha feito esforços significativos para manter a continuidade da aprendizagem durante este período, os alunos tiveram de contar sobretudo com os seus próprios recursos para dispor do ensino remotamente por meio da internet, da televisão ou da rádio. Consequentemente, foram os alunos mais desfavorecidos quem teve maior dificuldade em se adaptar ao ensino à distância. Os alunos nos grupos mais marginalizados, que não têm acesso a recursos de aprendizagem digital ou carecem de resiliência e de envolvimento para aprender por conta própria, correm o risco de ficar para trás, conclui-se no relatório.

Os professores tiveram de corresponder a modelos de ensino exclusivamente *online* para os quais não estavam preparados, nota a OCDE. As dificuldades de adaptação foram agravadas por limitações quer de recursos tecnológicos quer de familiaridade com o uso de novas tecnologias.

A pandemia de covid-19 também tem um impacto severo no Ensino Superior. Embora as instituições tenham em geral conseguido substituir rapidamente as aulas presenciais pelo regime *online*, surgiram dificuldades relativamente à concretização das aulas laboratoriais, na adaptação aos novos modelos e ferramentas de ensino, na troca de conhecimentos que vem da interação e de discussões, e na eficácia da avaliação. Por outro lado, há um efeito na diversidade de alunos, pois constata-se uma diminuição global da mobilidade de estudantes, nomeadamente pela menor participação em programas de intercâmbio e pela redução do número de estudantes estrangeiros.

O relatório da OCDE reforça a ideia da importância da escola com o regime presencial de ensino. Em causa não está apenas garantir que os alunos aprendem as matérias que fazem parte dos currículos, mas também o desenvolvimento das suas capacidades sociais e emocionais e a saúde física e mental. A escola também é fundamental para assegurar o equilíbrio das famílias e a continuidade da vida profissional dos encarregados de educação.

O início deste ano letivo, em regime presencial, fica marcado por muitas regras, novos procedimentos, grandes preocupações e um enorme entusiasmo dos alunos por regressarem às aulas. Esperemos que em breve possamos tirar as máscaras para ver os sorrisos!

Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

PIZZAS, BOLOS, HIPERPLANOS E UM VELHO TRIÂNGULO

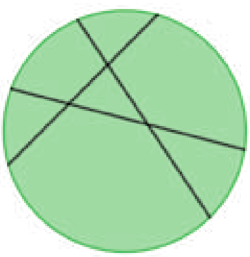
Em quantos pedaços se pode cortar uma pizza usando *n* vezes uma faca? Este é um problema bem conhecido, se bem que a formulação em termos de retas e regiões do plano seja menos comum. De forma análoga, podemos questionar-nos sobre o número máximo de pedaços de um bolo cilíndrico que se pode obter com *n* cortes planos, isto é, em quantas zonas podemos dividir o espaço euclidiano tridimensional usando *n* planos? É este o nosso tópico de hoje.

Comecemos pelo princípio. Quaisquer n pontos distintos numa reta dividem-na em $n+1$ partes.

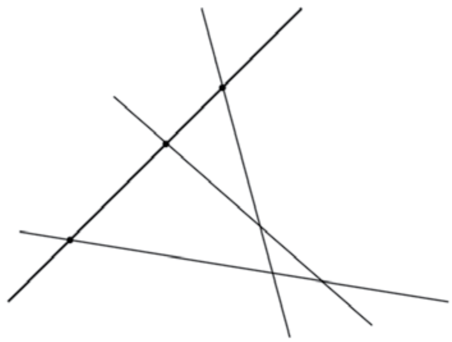
É imediato que, acrescentando um ponto, obtemos mais uma região. Assim, usando a notação $P^k(n)$ para o número máximo de regiões que n "hiperplanos" definem no espaço euclidiano k-dimensional, temos $P^1(n) = n+1$. Uma observação trivial: $P^1(n)$ é dado pela soma dos dois primeiros termos da n-ésima linha do triângulo de Pascal, isto é

$$P^1(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}$$

O próximo caso, bidimensional, é bem ilustrado pelas fatias de pizza.



Consideremos o caso equivalente da divisão do plano por retas. Para garantir a maximização do número de regiões, não podem surgir retas paralelas nem três retas concorrentes no mesmo ponto (em posição genérica, diz-se).



Quando se acrescenta uma $(n+1)$-ésima reta, em posição genérica, esta vê-se dividida em $P^1(n) = n+1$ pedaços pelas interseções com as retas anteriores. Cada pedaço destes divide uma região plana em duas, pelo que

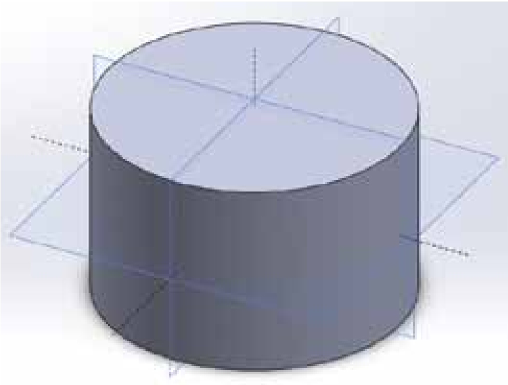
$$P^2(n+1) = P^2(n) + n + 1$$

a partir do que não é difícil obter

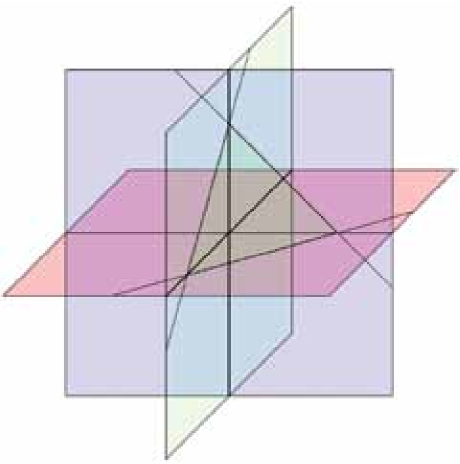
$$P^2(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

A soma dos três primeiros termos da n-ésima linha do triângulo de Pascal!

No espaço tridimensional, um plano divide o espaço em duas regiões, dois planos em quatro e três em oito. Esta última divisão está ilustrada no bolo cilíndrico seguinte.



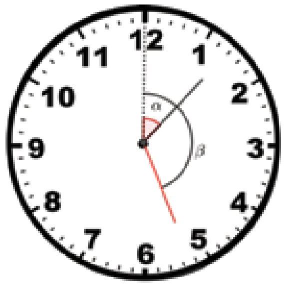
Consideremos agora o modelo equivalente das divisões do espaço euclidiano por planos. Acrescentar um quarto plano em posição genérica (ie, sem planos paralelos e sem haver nenhuma reta comum a três planos) gera 15 regiões, como se pode (tentar) ver na figura.



Será que teremos expressão semelhante, baseada no triângulo de Pascal, para $P^3(n)$? E para dimensão superior, k, como se pode calcular $P^k(n)$?

Respostas às questões do número anterior:

1. $1\,h\,5'\,(27\,3/11)''$
2. $7\,h\,5'\,(27\,3/11)''$
3. $10\,h\,20'\,(49\,1/11)''$
4. $8\,h\,18'\,(27\,9/11)''$
5. Consideremos os ângulos que os ponteiros das horas e dos minutos fazem com a vertical, α, β, respetivamente.



Seja

$$\alpha = \alpha_0 + k \qquad \beta = \beta_0 + \ell \qquad 0 \leqslant k, \ell, \leqslant 11$$

onde k, ℓ são os últimos números do mostrador que os respetivos ponteiros passaram (hora certa, para as horas, múltiplo de 5, para os minutos).

Para surgir ambiguidade, a proporção de hora percorrida pelo ponteiro dos minutos deve ser igual à proporção do espaço entre horas consecutivas percorrida pelo ponteiro das horas:

$$\frac{\beta}{360} = \frac{\alpha}{30} - k \qquad \text{e} \qquad \frac{\alpha}{360} = \frac{\beta}{30} - \ell$$

donde

$$\alpha = \frac{360(12k + \ell)}{143} \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{360(12\ell + k)}{143}$$

destes valores é preciso descontar os 12 casos em que $k = \ell$, porque correspondem à sobreposição dos ponteiros, que não estão associados a configurações ambíguas. Sobram assim $12 \times 11 = 132$ casos de ambiguidade num período de 12 horas. O nosso assíduo leitor Luís Madureira teve a amabilidade de enviar uma resolução deste problema, que muito agradecemos.

Fabio Chalub
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

APLANAR A CURVA

Uma doença espalhada por assintomáticos, muitos dos quais crianças. O período de incubação é de até 14 dias. Não havendo vacina disponível, é importante manter medidas profiláticas, tais como o distanciamento social e a quarentena dos infetados. Apesar das difíceis condições de trabalho, os profissionais de saúde dão o seu melhor em benefício da população.
A chegada do inverno antecipava uma segunda onda. No entanto, a doença desapareceu. O que se passou?

O tifo é uma doença causada por uma bactéria transmitida pelos piolhos, após picar e sugar o sangue de uma pessoa contaminada. Ao atacar uma nova vítima, o patógeno é expelido nas fezes do vetor e acaba por entrar na corrente sanguínea de um novo infetado.

Hoje em dia, é uma doença razoavelmente sob controlo, mas que ainda grassa em situações socialmente precárias como prisões, campos de refugiados e zonas de guerra. Evolui de forma atroz, iniciando os sintomas com febre alta, dores de cabeça e erupções na pele. Leva à morte em cerca de 20% dos casos. Há outras formas da doença, mas é esta a mais comum nos surtos causados por baixas condições de higiene.

Pode-se passar a eternidade a discutir as motivações que levaram a Alemanha nazi à *solução final*; o discurso oficial, no entanto, é mais claro. O gueto de Varsóvia, na Polónia, foi inicialmente justificado como uma medida de contenção do tifo. Apesar de ser já bem estabelecido que o tifo era causado por uma bactéria, cujo vetor era o piolho humano comum, a propaganda nazi colocava esta como uma doença de judeus, e assim a necessidade de impor um forte confinamento. (Apesar de ser tecnicamente correto utilizar o termo quarentena para toda uma região, vou chamar de "quarentena" o isolamento domiciliar de um ou poucos indivíduos, e "confinamento" o de toda uma região, em linha com o que se faz hoje em dia na comunicação social).

As condições do gueto eram péssimas: a densidade demográfica era de cerca de 100 mil pessoas por quilómetro quadrado (em Lisboa há 5000 habitantes para a mesma área). A alimentação era de cerca de 200 calorias por pessoa por dia, 10% do necessário para uma vida digna. Não havia recolha de lixo. Com isto, não foi surpresa que os poucos casos iniciais, que serviram de pretexto da criação do gueto, se espalhassem rapidamente num surto mortal − como um "incêndio na floresta", o primeiro uso desta expressão para designar um surto.

Não havia, como era de se esperar, qualquer apoio externo. Quanto mais casos houvesse, maior era o confinamento. O tifo era, provavelmente, a doença que mais causava medo aos nazis. No entanto, a mortalidade elevada do gueto não era algo que tirasse o sono à força ocupante.

Os moradores do gueto estavam entregues à própria sorte. Curiosamente, isto permite que alguns registos sejam considerados fidedignos, em particular o número de habitantes e o de mortos.

A administração ficava a cargo de um conselho, historicamente visto como colaboracionista − talvez seja necessário rever alguns destes conceitos, ao fim da leitura. Para a distribuição de alimentos eram utilizados vales, que

Figura 1. Imagem dos guetos judaicos durante a segunda guerra, organizados pelos Conselhos Judaicos Locais. Esquerda: Polícia judaica no gueto de Varsóvia. **Fonte: Wikimedia Commons.** Direita: Clínica médica no gueto de Będzin, Polónia. **Fonte: Yad Vashem.**

serviam apenas para indicar o número de pessoas que iriam receber a alimentação. A quantidade total de comida disponível era controlada e independente do número de moradores: de nada valia tentar aumentar artificialmente o número de bocas a alimentar. Assim, estes, cuidadosamente registados, fornecem uma excelente aproximação da quantidade de habitantes em confinamento.

Por outro lado, os cuidados médicos eram organizados internamente, fazendo com que, ao menos, houvesse uma tentativa de cura e um diagnóstico positivo não fosse uma sentença de morte ou de deportação.

Claro que a fiabilidade destes registos tem de ser tomada com cuidado. Não eram as condições ideais para montar bases de dados, longe disto, mas ao menos permitem ter alguma noção quantitativa do que estava a acontecer.

Em suma: temos uma região limitada, com alta densidade populacional, dados aceitáveis, uma doença bem documentada em diversas fontes independentes. Então estamos prontos para usar a modelação matemática e tentar avançar na nossa compreensão dos eventos históricos.

É neste momento que entram os autores do artigo [1], em particular, Lewi Stone, matemático da universidade de Tel-Avviv, Israel, e que trabalha há muitos anos em modelação epidemiológica.

O modelo proposto para os surtos de tifo no gueto de Varsóvia é um modelo compartimental, como seguidamente discutido nesta coluna na *Gazeta*, e não só. O modelo SEIRL, para os **S**uscetíveis, **E**xpostos, **I**nfeciosos, **R**ecuperados para os piolhos (ou **L**ice, em inglês).

Os piolhos contaminam-se ao picar os infeciosos: $L' = \kappa I - \lambda L$, onde κ é a taxa com que indivíduos da classe **I** contaminam os piolhos e λ a vida média do inseto. A dinâmica dos piolhos é muito mais rápida do que as dos humanos e podemos considerar que, em cada momento, L satisfaz uma relação mais simples: $L = \kappa I / \lambda$.

A quantidade de indivíduos nas restantes classes satisfazem o sistema

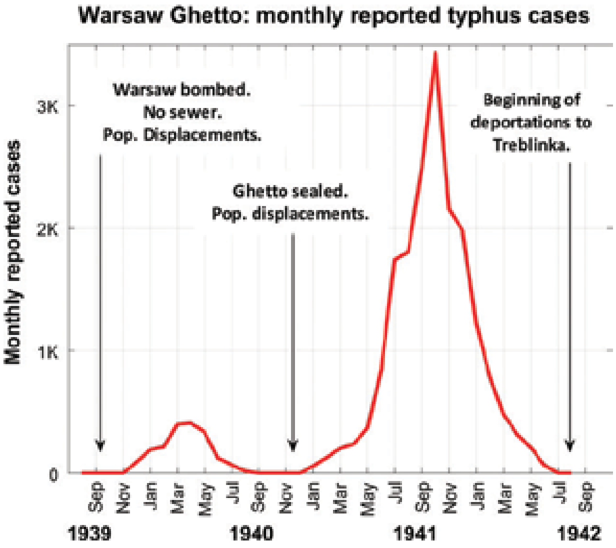
$$\begin{aligned} S' &= A(t) - \frac{\beta(t)}{N(t)} SL - \mu S \ , \\ E' &= \frac{\beta(t)}{N(t)} SL - (\sigma + \mu) E \ , \\ I' &= \sigma E - (\gamma + \mu) I - m(\gamma + \mu) I \ , \\ R' &= \gamma I - \mu R \ . \end{aligned}$$

Nas equações acima, $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ é a população total, $A(t)$ indica as novas chegadas ao gueto, μ é a mortalidade natural, $\sigma^{-1} = 14$ dias, o tempo de incubação, $\gamma^{-1} = 28$ dias, o tempo médio da doença, após a qual o indivíduo recupera ou morre com probabilidade m=0,2. O único parâmetro desconhecido é $\beta(t)$, a taxa de transmissão, que é obtido através dos dados históricos.

Como sempre, mas mais ainda nestas circunstâncias, temos de considerar que muitas informações não são precisas. De qualquer forma, para um conjunto muito alargado de suposições, a conclusão é clara. Foram as medidas feitas dentro do gueto, e que estão historicamente documentadas pelos sobreviventes, que impediram uma segunda onda de infeções que todos consideravam inevitável, já que o tifo é uma doença com forte componente sazonal, com surtos mais frequentes no inverno.

Em outubro de 1941, quando começava a fazer frio, a curva epidémica desceu. Veja a figura 2.

O modelo mostra que não foi a ausência de suscetíveis que derrubou a curva – ou seja, a famosa imunidade



Archives.

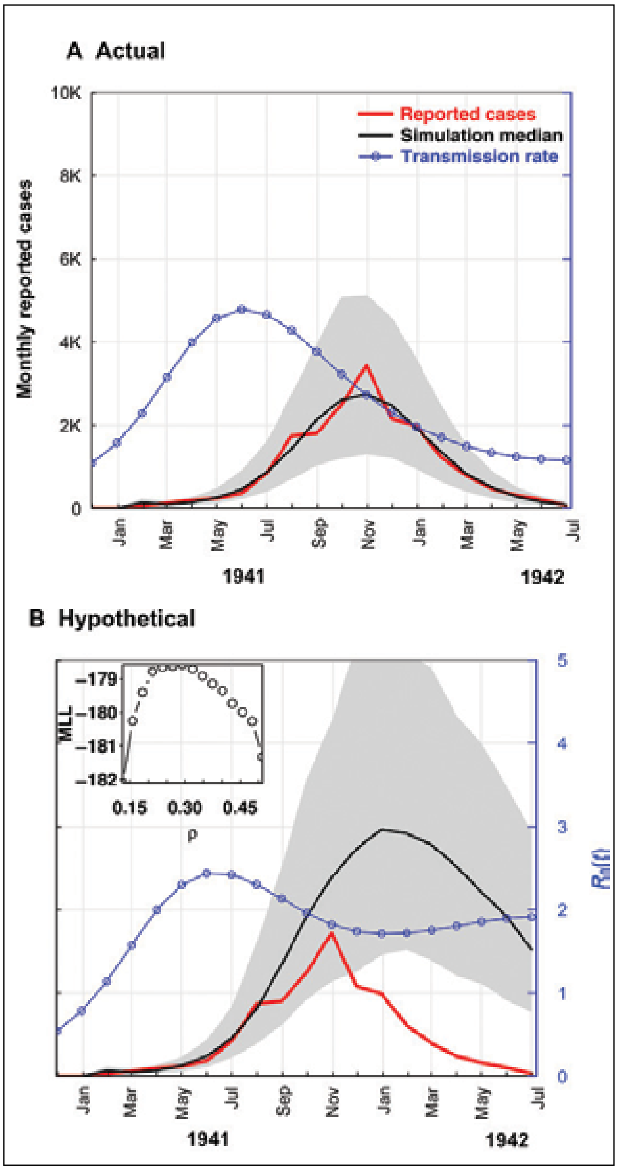
Figura 2. Número de casos de tifo em função do tempo registados no gueto de Varsóvia. Note uma primeira onda, menor, que atinge o seu máximo nos meses mais frios. Tudo fazia crer numa segunda onda, muito maior, mas antes do frio do inverno,

de grupo, frequentemente referida como única forma de terminar uma epidemia. Foi a própria transmissão (modelada no parâmetro β, ou no seu parente mais famoso, o R-zero $\mathcal{R}_0$) que caiu, como se pode ver na figura 3. E esta deu-se pelas medidas individuais de autoisolamento, de distanciamento social e pela criação de uma rede de assitência médica, formada no interior do gueto, muito efetiva no apoio aos necessitados. Tudo administrado pelo *Judenrat*, ou Conselho Judeu.

Certamente há lições a tirar deste estudo para a pandemia corrente, afinal nenhum habitante do gueto poderia desvalorizar uma epidemia de tifo, ou considerar que era importante a economia não parar − mesmo considerando a fome generalizada. Ou ainda, sobre a atuação das administrações dos diversos guetos espalhados pela Europa durante a Segunda Guerra Mundial. No entanto, não é nenhuma destas lições que quero destacar, e sim que a matemática mostra como medidas simples podem impedir grandes tragédias. Mesmo que tenhamos de esperar mais de meio século pela demonstração!

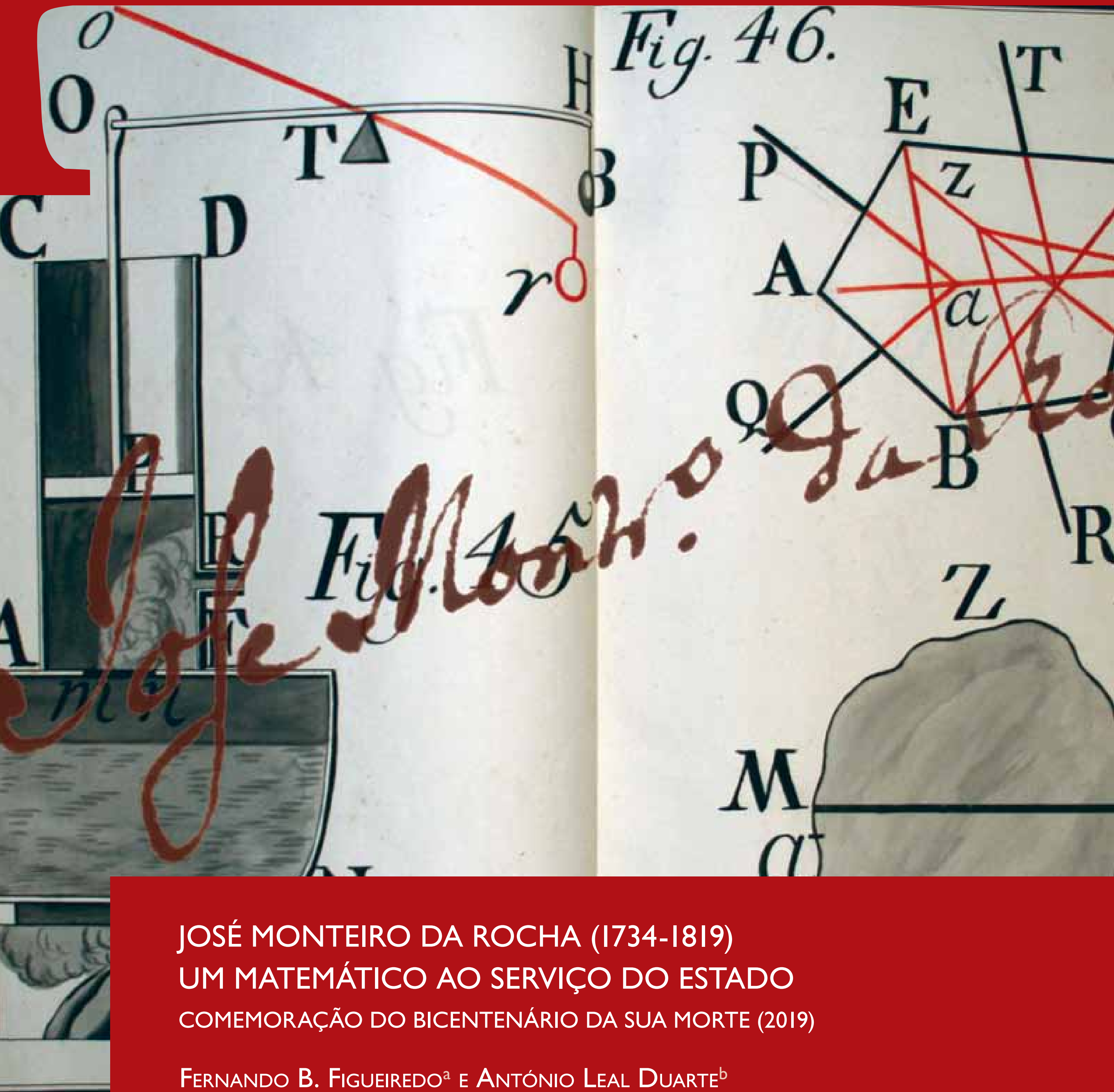
REFERÊNCIAS

[1] Lewi Stone, Daihai He, Stephan Lehnstaedt, Yael Artzy-Randrup. "Extraordinary curtailment of massive typhus epidemic in the Warsaw Ghetto" *Science Advances* Vol. 6, no. 30, eabc0927 (2020) DOI: 10.1126/sciadv.abc0927



a curva epidémica muda de direção.

Figura 3. Em cima. conjunto de simulações, com mediana marcada preto, que reproduzem os dados históricos (vermelho). A margem de erro é dada pela região sombreada. Os valores da transmissão $\beta(t)$ utilizados são tais que $\mathcal{R}_0 = \beta(t)/\gamma$ e estão indicados a azul. Em baixo: resultado das simulações se nenhuma medida preventiva fosse tomada, utilizando os valores esperados em situações usuais para a transmissão e, por consequência, para $\mathcal{R}_0$.



JOSÉ MONTEIRO DA ROCHA (1734-1819) UM MATEMÁTICO AO SERVIÇO DO ESTADO

COMEMORAÇÃO DO BICENTENÁRIO DA SUA MORTE (2019)

FERNANDO B. FIGUEIREDO[a] E ANTÓNIO LEAL DUARTE[b]

DM, CITEUC, UNIVERSIDADE DE COIMBRA[a], DM, CMUC, UNIVERSIDADE DE COIMBRA[b]

bandeira@mat.uc.pt[a], leal@mat.uc.pt[b]

Como homem de ciência, professor, académico, administrador e legislador, Monteiro da Rocha é sem dúvida uma das principais figuras da história da cultura e da ciência portuguesas. Desempenhou um papel central em todo o processo de institucionalização da ciência moderna em Portugal.
A sua visão e ação direcionaram toda a dimensão reformista da Universidade de Coimbra para a contemporaneidade.

Há 200 anos a *Gazeta de Lisboa* (publicação oficiosa portuguesa, um misto de jornal de referência e de Diário do Governo) de janeiro de 1820, noticiava o falecimento, ocorrido há menos de um mês, de uma figura maior da ciência, e da elite político-administrativa do Portugal de então:

> "Doutor José Monteiro da Rocha, Mestre de SS. AA. o Príncipe Real, e os Sereníssimos Infantes, do Conselho de Sua Majestade, Comendador da Ordem de Cristo, Vice-Reitor da Universidade de Coimbra, Lente de Prima Jubilado na Faculdade de Mathematica, do Conselho dos Decanos, Director Perpétuo do Observatório Astronómico da mesma Universidade, Primeiro Deputado da Real Junta da Directoria Geral dos Estudos, e Escolas do Reino, Sócio da Academia Real das Ciências, de Lisboa, e da Marinha, Cónego Magistral da Sé de Leiria, Director dos Estudos da Província de Santa Maria da Arrábida, etc. etc. faleceu na sua quinta de S. José de Ribamar, subúrbio de Lisboa. No dia 11 de Dezembro de 1819, …"

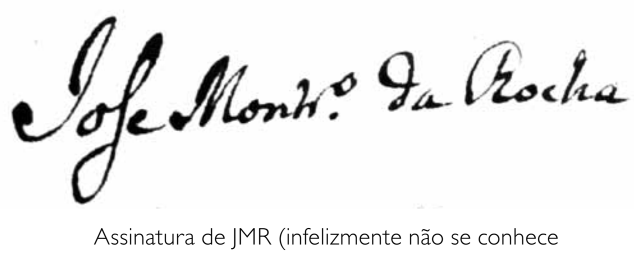
O obituário é extenso, reconhecendo com grandes elogios Monteiro da Rocha como uma das grandes personalidades do País: "Muito respeitável por seus vastos conhecimentos em várias Ciências, com especialidade nos diferentes ramos de Matemática, não o foi menos pela exacção, e esmero, com que desempenhou os importantes lugares que ocupara durante todo o tempo de sua vida pública."

É a vida e a obra desta personalidade multifacetada que iremos apresentar neste trabalho.

José Monteiro da Rocha nasceu perto do Marco de Canavezes, a 25 de junho de 1734, no seio de uma família de agricultores. Pouco se sabe sobre os seus anos de infância e juventude. Sabe-se que ainda jovem foi para o Brasil, ingressando em 1752 na Companhia de Jesus que viria a abandonar em 1759 aquando da expulsão dos Jesuítas de Portugal e seus domínios. Foi educado no Colégio Jesuíta de São Salvador da Baía (então uma das melhores escolas do Brasil, comparável a uma universidade), onde fez a sua formação inicial em matemática e astronomia. Os seus trabalhos iniciais (finais da década de 1750 e inícios da de 1760), que só recentemente começaram a ser estudados, e que permanecem, em geral, inéditos, mostram já alguém perfeitamente a par dos avanços científicos do seu tempo.

Regressou a Portugal em 1766 e matriculou-se em Cânones na Universidade de Coimbra, obtendo, em 1770, o grau de Bacharel. Por essa altura, o Marquês de Pombal (1699-1782) começava a preparar a reforma da universidade.

As Reformas Pombalinas, em geral, e as reformas da educação, em particular, tinham o propósito de recuperar o atraso de Portugal em relação aos países considerados mais avançados e cultos da Europa. A Reforma da Universidade de Coimbra de 1772 foi pensada com a finalidade de ajustar Portugal às ideias da Europa das Luzes, no sentido do conhecimento científico e do desenvolvimento. Um dos objetivos estruturantes da Reforma era a formação de quadros técnicos para os vários setores



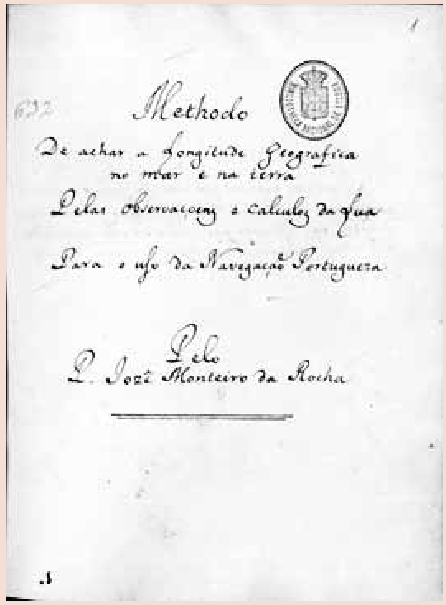
Assinatura de JMR (infelizmente não se conhece retrato ou imagem alguma sua).

LONGITUDES (MS511)

Na década de 1760 o debate sobre a solução para o problema da determinação da longitude no mar está no seu auge. Duas soluções estão em cima da mesa, a solução mecânica, com o relógio, e a solução astronómica, baseada no movimento da Lua. Poucos são os astrónomos com experiência direta a bordo da questão, de facto o seu número pode ser facilmente contado pelos dedos de uma mão (Lacaille, Pingré, Maskelyne, Borda e Rochon).

Monteiro da Rocha está ciente do debate e num manuscrito que escreve por volta de 1765-66 faz uma análise crítica da questão propondo uma modificação do método das distâncias lunares de Lacaille (1713-1762), que mais tarde seria adotado pelo astrónomo real inglês Maskelyne (1732-1811), para o inglês *Nautical Almanac* (1766), e que também Lalande (1732-1807) adota e copia para o *Connaissance des Temps* (1772).

O "Methodo de achar a Longitude Geográfica no mar y na terra Pelas observaçõens y cálculos da Lua Para o uso da Navegação Portugueza" (Ms. 511, Colecção Pombalina, BNP, Lisboa) – que infelizmente não chega a publicar, mas que possivelmente será um dos principais motivos da sua vinda do Brasil para Lisboa, coloca interessantes discussões ao debate historiográfico que atualmente ocorre em torno da prioridade inglesa ou francesa do método das distâncias lunares.



"Methodo de achar a Longitude Geográfica no mar y na terra Pelas observaçõens y cálculos da Lua Para o uso da Navegação Portugueza" (Ms. 511, Colecção Pombalina, BNP, Lisboa).

do funcionalismo público, dando suporte aos interesses económico-políticos do País e das suas inúmeras colónias, em particular o Brasil.

Em 1771, Francisco de Lemos (1735-1822), Reformador Reitor da Universidade de Coimbra, chama Monteiro da Rocha para colaborar com a Junta da Providência Literária, que então preparava os novos Estatutos da Universidade, integrando a comissão responsável pela conceção das faculdades científicas (Medicina, Matemática e Filosofia Natural) e pela elaboração dos respetivos estatutos. Nesta comissão terá tido um papel preponderante, pelo menos no que diz respeito à Matemática.

Em setembro de 1772, o Marquês de Pombal desloca-se a Coimbra com poderes equivalentes aos de vice-rei para proceder à entrega solene dos novos estatutos à universidade (29-09-1772) e *in loco* tomar as medidas necessárias à nova Reforma. Monteiro da Rocha é incorporado como professor da Faculdade de Matemática, cabendo-lhe a honra de, na presença do Marquês, ler a lição inaugural da nova Faculdade de Matemática (9 de outubro de 1772). Começa por lecionar a cadeira de Foronomia (Fisíca-Matemática), transitando em 1783 para a de Astronomia.

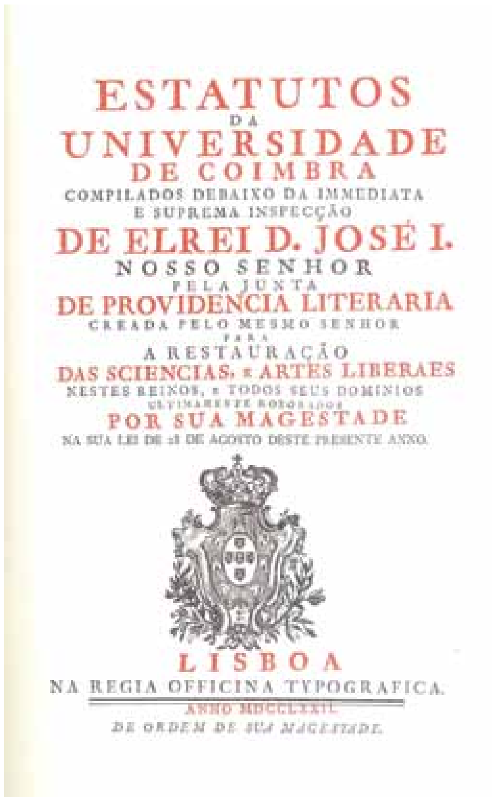
Com a morte de D. José (1714-1777) e a demissão do Marquês de Pombal, inicia-se com o reinado de D. Maria I (1734-1816) o chamado período da *Viradeira*. As várias reformas de Pombal são fortemente atacadas e a Universidade Reformada não foi exceção. Vários professores são levados a abandonar a universidade, J. Anastácio da Cunha (1744-1787) é preso pela Inquisição e o reitor D. Francisco de Lemos é substituído por D. José Francisco de Mendoça (1725-1808, reitor entre de 1779 a 1785), que não estava sintonizado com o ideário reformador. A universidade entra num período de algum marasmo e de desleixo académico. É neste contexto que surge uma crítica violenta à situação existente com o poema satírico anónimo "O Reino da Estupidez", que por volta de 1785 corre manuscrito por Coimbra. Aí o lente de Prima de

Cidade de S. Salvador da Baía (c. 1760). Pormenor. Mapa de autor anónimo holandês, publicado por Isaak Tirion, c. de 1760.

Teologia, em Claustro Pleno convocado pelo reitor, toma a palavra e faz o elogio da estupidez, ridicularizando as novas cadeiras e métodos de ensino. As suas palavras recebem forte aplauso de quase todos os professores, com exceção de Tirceo, que lhe responde com o elogio de Pombal, declarando-se inimigo, enquanto viver, da estupidez. Tirceo é sistematicamente identificado com Monteiro da Rocha, o que testemunha como o meio Coimbrão o via como um símbolo da Universidade Pombalina. O Reino da Estupidez provocou verdadeiras ondas de choque, contribuindo para a substituição do reitor.

Os tempos são já outros, o período da Viradeira passara, e o novo reitor, D. Francisco Rafael de Castro (1750-1816, reitor de 1786 a 1799), de espírito moderno, está decidido a cumprir e, fazer cumprir os estatutos pombalinos. É por isso com alguma naturalidade que se vê Monteiro da Rocha nomeado (1786) vice-reitor, cargo que desempenhará até 1804.

Uma vez que o reitor passava longas temporadas em Lisboa, tratando, junto do governo, dos assuntos da universidade, era ao vice-reitor que cabia a gestão do dia a dia universitário. Monteiro da Rocha será um dos principais eixos em torno do qual girará toda a dinâmica científica e pedagógica da instituição. Entre os aspetos da sua gestão, contam-se: a elaboração de diversa legislação (lei dos Cosmógrafos, lei dos Concursos, etc.); lançamento de programa regular de viagens científicas de jovens professores ao estrangeiro; a criação da cadeira de Música (1802) e o apoio dado ao respetivo Professor, José


ESTATUTOS
DA
UNIVERSIDADE
DE COIMBRA
COMPILADOS DEBAIXO DA IMMEDIATA
E SUPREMA INSPECÇÃO
DE ELREI D. JOSÉ I.
NOSSO SENHOR
PELA JUNTA
DE PROVIDENCIA LITERARIA
CREADA PELO MESMO SENHOR
PARA
A RESTAURAÇÃO
DAS SCIENCIAS, E ARTES LIBERAES
NESTES REINOS, E TODOS SEUS DOMINIOS
ULTIMAMENTE ROBORADOS
POR SUA MAGESTADE
NA SUA LEI DE 28 DE AGOSTO DESTE PRESENTE ANNO.
LISBOA
NA REGIA OFFICINA TYPOGRAFICA.
ANNO MDCCLXXII.
DE ORDEM DE SUA MAGESTADE.

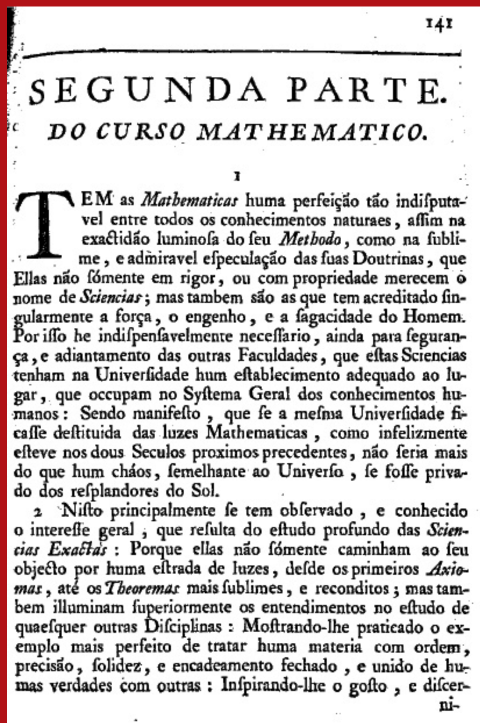
CURSO MATHEMATICO E LIVROS DE TEXTO

Apesar da vastidão das matérias que comportava o Curso Mathematico – "são tantas, e cada uma delas de tão grande vastidão e inexaurível fecundidade de doutrinas, que é pouco o estudo de toda a vida para adquirir um conhecimento perfeito e consumado de todas elas" –, ficou definido que a sua duração seria de quatro anos (mais um ano para o doutoramento).
O plano de estudos constava de sete cadeiras (quatro da Faculdade de Matemática e três da Faculdade de Filosofia (ou Faculdade de Ciências, como hoje lhe chamaríamos):

- 1.º ano: Geometria + Filosofia Racional e Moral + História Natural
- 2.º ano: Álgebra + Física Experimental
- 3.º ano: Foronomia (hoje Física-Matemática)
- 4.º ano: Astronomia

Havia ainda uma cadeira anexa de Desenho e Arquitetura, que poderia ser frequentada no 3.º ou 4.º ano.

Para cada uma destas cadeiras havia a exigência de manuais, cuja escolha dos autores devia obedecer essencialmente a dois princípios: a atualidade – "pois nelas [nas lições de matemática] se aperfeiçoam cada dia muitas coisas e se inventam outras" –, e a clareza de método dos mesmos.
Para os dois primeiros anos adotaram-se os volumes referentes à aritmética, à trigonometria plana, à álgebra e ao cálculo do Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine (Paris, 1764-69), de Bézout (1730-1783), e ainda os Elementos de Euclides, para o ensino da geometria.
Para as cadeiras de Foronomia e Astronomia (3.º e 4.ºs anos) foram escolhidos quatro outros autores: Lacaille (1713-1762), Marie (1738-1801), Bossut (1730-1814) e Lalande (1732-1807).
Monteiro da Rocha seria o responsável pela tradução para português dos Elementos de Aritmética, Elementos de Trigonometria, Tratado de Mecânica e Tratado de Hidrodinâmica.


141

SEGUNDA PARTE.
DO CURSO MATHEMATICO.

1

TEM as *Mathematicas* huma perfeição tão indiſputavel entre todos os conhecimentos naturaes, aſſim na exactidão luminoſa do ſeu *Methodo*, como na ſublime, e admiravel eſpeculação das ſuas Doutrinas, que Ellas não ſómente em rigor, ou com propriedade merecem o nome de *Sciencias*; mas tambem são as que tem acreditado ſingularmente a força, o engenho, e a ſagacidade do Homem. Por iſſo he indiſpenſavelmente neceſſario, ainda para ſegurança, e adiantamento das outras Faculdades, que eſtas Sciencias tenham na Univerſidade hum eſtablecimento adequado ao lugar, que occupam no Syſtema Geral dos conhecimentos humanos: Sendo manifeſto, que ſe a meſma Univerſidade ficaſſe deſtituida das luzes Mathematicas, como infelizmente eſteve nos dous Seculos proximos precedentes, não ſeria mais do que hum cháos, ſemelhante ao Univerſo, ſe foſſe privado dos reſplandores do Sol.

2 Niſto principalmente ſe tem obſervado, e conhecido o intereſſe geral, que reſulta do eſtudo profundo das *Sciencias Exactas*: Porque ellas não ſómente caminham ao ſeu objecto por huma eſtrada de luzes, deſde os primeiros *Axiomas*, até os *Theoremas* mais ſublimes, e reconditos; mas tambem illuminam ſuperiormente os entendimentos no eſtudo de quaeſquer outras Diſciplinas: Moſtrando-lhe praticado o exemplo mais perfeito de tratar huma materia com ordem, precisão, ſolidez, e encadeamento fechado, e unido de humas verdades com outras: Inſpirando-lhe o goſto, e diſcerni-

1.ª página dos estatutos referentes à Faculdade de Matemática (3.º volume)


TRATADO DE HYDRODYNAMICA POR M. BOSSUT DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS de Paris, Examinador dos Ingenheiros &c. &c.

TRADUZIDO E ABBREVIADO do Francez.

COIMBRA: NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE. M.DCC.LXXV. Por Ordem de Sua Magestade, e com Privilegio Real.

Maurício (1752-1815); as diligências efetuadas em 1804 para adquirir a vacina contra a varíola para a Faculdade de Medicina.

E no âmbito da sua área, a Astronomia, participou ativamente no projeto do Observatório Astronómico de Coimbra (1792), já previsto nos estatutos de 1772, supervisionando a sua construção. A ele se devem o respetivo regulamento, o estabelecimento do programa científico e o apetrechamento instrumental, sendo nomeado seu director. O Observatório Astronómico constituiu-se como um dos principais centros de investigação do País, publicando periodicamente as "Ephemerides de Coimbra" (1803), obra reconhecida na Europa pelo seu caráter inovador.

Enquanto professor das cadeiras de Foronomia e de Astronomia, foi um dos diretos e principais responsáveis pela formação dos matemáticos e astrónomos em Portugal, no final do Antigo Regime. A sua influência estende-se, indiretamente, aos quadros formados pelas novas instituições de ensino militar (Academias da Marinha e do Exército), uma vez que os seus professores foram formados, na grande parte, na Universidade de Coimbra.

A sua ação estendeu-se ainda ao ensino não superior: em 1794 o Governo criou a Junta da Diretoria Geral de Estudos e Escolas do Reino, funcionando junto da Universidade de Coimbra, sob a presidência do reitor da universidade, com vogais nomeados pelo Governo e que tinha como missão a direção de todos os estudos não superiores em Portugal. Monteiro da Rocha foi nomeado "primeiro deputado" (vice-presidente), tendo aí tido um papel ativo.

Monteiro da Rocha teve ainda um papel fundamental nos primeiros tempos da Academia das Ciências de Lisboa (fundada em 1779), da qual era sócio, nomeadamente na definição da sua orgânica interna, e à qual apresenta vários trabalhos. A sua obra científica é vasta, compondo-se de traduções de livros de texto franceses, trabalhos de matemática aplicada e trabalhos de astronomia teórica e prática; alguns seriam publicados nas Memórias da Academia, nomeadamente, um dos seus principais trabalhos sobre a determi-

POLÉMICA COM ANASTÁCIO DA CUNHA

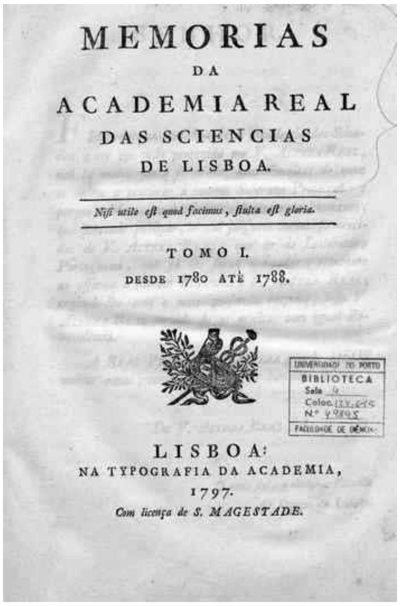
A polémica travada entre Monteiro da Rocha e José Anastácio da Cunha (1744-87) em torno de questões de integração e convergência de séries é um dos episódios marcantes na história da matemática portuguesa.

A polémica estala com um parecer negativo de Anastácio da Cunha sobre o trabalho vencedor de Manuel Coelho da Maia (1750-1817), ex-aluno de ambos e à data já professor da Faculdade de Matemática, a um concurso que a Academia das Ciências de Lisboa havia lançado em 1782 para o ano de 1785 – "Demonstrar a regra de aproximação, que Mr. Fontaine ensina nas suas memórias para integrar ∫ydx, sendo y função de x; e determinar os casos em que a dita aproximação é mais convergente."

Os comentários críticos de Anastácio da Cunha estendem-se ao próprio Monteiro da Rocha, que havia sido membro do júri no concurso, levando a que ambos trocassem entre si várias acusações mais ou menos fortes.

Embora centrada no problema das quadraturas, a polémica vai muito além desta questão estendendo-se a outras matérias científicas, e alcança tais contornos que chega a criar partidários de um e outro lado.

Em 1797, é publicado no 1.º volume das Memórias da Academia Real das Sciencias de Lisboa o "Additamentos á regra de M. Fontaine para resolver por approximação os Problemas que se reduzem às Quadraturas", trabalho escrito por Monteiro da Rocha em 1786 como resposta às críticas de Anastácio da Cunha.


MEMORIAS
DA
ACADEMIA REAL
DAS SCIENCIAS
DE LISBOA.

Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria.

TOMO I.
DESDE 1780 ATÉ 1788.

LISBOA:
NA TYPOGRAFIA DA ACADEMIA,
1797.
Com licença de S. MAGESTADE.

nação da órbita dos cometas.

O seu papel foi igualmente decisivo na preparação das bases para a construção da Carta Geográfica do Reino, cujos trabalhos geodésicos foram dirigidos, a partir de 1790, por um dos seus mais brilhantes discípulos: Francisco António Ciera (1763-1814). Para os respetivos levantamentos topográficos, concebeu as chamadas 'réguas de Monteiro', que ainda hoje existem no Instituto Geográfico Cadastral. Foi também membro da Sociedade Real Marítima, Militar e Geográfica (1798).

Em 1804 deixa a universidade, chamado para novas funções: percetor e responsável pela educação do príncipe real D. Pedro (1798-1834, futuro D. Pedro IV de Portugal e I do Brasil), e dos infantes seus irmãos. Nessas funções se

EPHEMERIDES ASTRONOMICAS

Com o primeiro volume a ser publicado em 1803 com dados astronómicos para o ano de 1804, as *Ephemerides Astronómicas do Observatório Real da Universidade de Coimbra* distinguiram-se desde logo das suas congéneres europeias por adotarem algumas particularidades técnicas.

Ao contrário da maior parte, que usava o tempo verdadeiro ou aparente, as de Coimbra eram calculadas para o tempo médio do meridiano do observatório, usavam ainda a medida dos 360º e não a amplamente utilizada unidade de signo, e forneciam também as distâncias da Lua aos planetas.

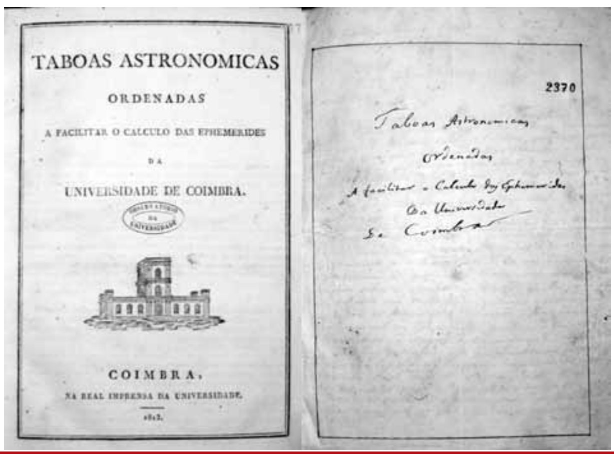
Muitas destas particularidades seriam adotadas pelo inglês *Nautical Almanac* e pelo francês *Connaissance des Temps*, na década de 1830.

"The attention of the Committee was, in the first instance, directed to a subject of general importance, as affecting almost all the results in the Nautical Almanac; viz., whether the quantities therein inserted should in future be given for apparent time (as heretofore), or for mean solar time. Considering that the latter is the most convenient, not only for every purpose of Astronomy, but also (from the best information they have been able to obtain) for all the purposes of Navigation; at the same time that it is less laborious to the computer, and has already been introduced with good effect into the national Ephemerides of Coimbra and Berlin, the Committee recommend the abolition of the apparent time in all the computations of the Nautical Almanac; excepting only the place, &c of the sun at the time of its transit over the meridian.", John Pond (1767-1836), 6º Astrónomo Real, in Nautical Almanac (1833: xii).

As *Ephemerides de Coimbra* seriam publicadas, quase ininterruptamente, desde 1803 até ao ano 2000.

Em 1813, Monteiro da Rocha publica as *Taboas Astronómicas ordenadas a facilitar o Calculo das Ephemerides da Universidade de Coimbra*, que passam a constituir, a partir do volume 11 (1814), a base de cálculo das posições do Sol, da Lua e dos planetas nas *Ephemerides Astronomicas*.


EPHEMERIDES
ASTRONOMICAS
CALCULADAS
VOLUME I.
Para o anno de 1804.
COIMBRA:
NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.
1803


TABOAS ASTRONOMICAS
ORDENADAS
A FACILITAR O CALCULO DAS EPHEMERIDES
DA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA.
COIMBRA,
NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

2370
Taboas Astronomicas
Ordenadas
A facilitar o Calculo das Ephemerides
da Universidade
de Coimbra

mantém até à partida da família real para o Brasil, permanecendo em Lisboa, na sua Quinta de Ribamar, onde viria a falecer a 11 de dezembro de 1819 após uma vida longa, plena e cheia de honrarias.

(Este texto é adaptado de outros textos publicados pelos autores)

ALGUMA BIBLIOGRAFIA SELECIONADA

Albuquerque, Luís; *O Reino da Estupidez e a Reforma da Universidade* (Coimbra, 1975).

Araújo, Ana Cristina (Coord.). *O Marquês de Pombal e a Universidade* (Coimbra, 2000).

OBSERVATÓRIO ASTRONÓMICO

A criação do Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra (OAUC) foi fundamental para a institucionalização da ciência astronómica em Portugal, nele se irá formar a primeira geração de matemáticos e astrónomos que mais tarde integrará as novas instituições de Ensino Superior criadas no reinado Mariano-Joanino.

Tal como em muitos observatórios europeus, são questões ligadas aos problemas de navegação, geodesia e cartografia, determinação de órbitas de planetas e cometas e medições astrométricas que estão também na base da criação e da planificação do Observatório de Coimbra – o primeiro observatório astronómico do País ligado à universidade mas com profundas caraterísticas de um observatório nacional.

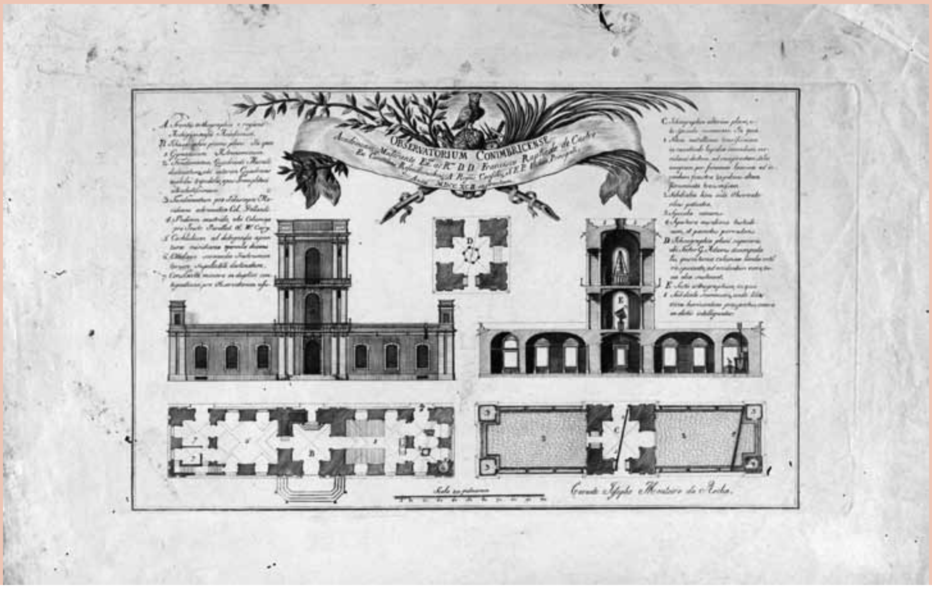
A ideia da sua criação surge desde logo nos estatutos (1772) a propósito da cadeira de Astronomia e com dois objetivos distintos: um, a lecionação e a prática da astronomia universitária, e o outro, o desenvolvimento da própria ciência astronómica.

Inicialmente planeado para o sítio do castelo da cidade (atual Praça D. Dinis), ainda se chegou a construir até ao rés-do-chão. As obras parariam quase por volta de 1775, por dificuldades orçamentais.

Só em finais da década de 1780 a inexistência de um verdadeiro observatório astronómico na universidade se tornou um problema premente (entretanto tinha-se construído um pequeno, provisório). Será através da estreita colaboração entre Monteiro da Rocha e o arquiteto Manuel Alves Macomboa (?-1815) que surgirá o projeto definitivo para este estabelecimento a construir no Pátio das Escolas que, aprovado pela universidade a 5 de fevereiro de 1791, se vê inaugurado em 1799.

Após a inauguração, a sua atividade científica, da inteira responsabilidade de Monteiro da Rocha, centra-se no cálculo e na publicação das emblemáticas "Ephemerides Astronomicas" (1803).

O Observatório Astronómico acabaria por ser demolido nos anos 1940, aquando das obras do Estado Novo para a Universidade de Coimbra.



Araújo, Ana Cristina e Fonseca, Fernando Taveira da (Coords.), *A Universidade Pombalina.* Ciência, Território e Coleções Científicas (Coimbra, 2017).

Braga, Teófilo. *História da Universidade de Coimbra* [v.3 de 1700-1800 (1898) e v.4 de 1801 a 1872 (1902)] (Lisboa, 1898-1902).

Carvalho, Rómulo, *História do Ensino em Portugal*, 3.ª edição, Lisboa, 2001.

Figueiredo, Fernando B., "Monteiro da Rocha, José"; em *The Biographical Encyclopedia of Astronomers*, Thomas Hockey (Editor-in-chief), 2nd ed., New York: Springer, 2014, pp.513-515.

Figueiredo, Fernando B., "José Monteiro da Rocha e a actividade científica da 'Faculdade de Mathematica' e do 'Real Observatório da Universidade de Coimbra': 1772-1820", Tese de Doutoramento, FCTUC, Coimbra, 2011

O'Connor, J. J. and Robertson, E. F., José Monteiro da Rocha, in MacTutor History of Mathematics Archive (2017, *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rocha/*).

Pedroso, Mafalda Sofia das Neves. "José Monteiro da Rocha (1734-1819): um cientista ex-jesuíta colaborador de Pombal", *Revista Brotéria*, v.162 (2006), pp.371-392.

Roque, Hugo Morais das Neves. "Inventário dos trabalhos científicos de José Monteiro da Rocha e das referências à sua vida e obra", Tese de Mestrado, FCTUC, Coimbra, 2003.

Teixeira, António José, "Sciencias moraes e sociaes. Apontamentos para a biographia de José Monteiro da Rocha", *O Instituto: jornal scientifico e litterario*, v.37 (1889-1890), pp. 65-98.

Teixeira, Francisco Gomes, "Elogio Histórico do Doutor José Monteiro da Rocha", in "Panegíricos e Conferências" pp. 85-119, Imprensa da Universidade, Coimbra, 1925.

SOBRE OS AUTORES

Fernando B. Figueiredo é Investigador na Universidade de Coimbra, sendo actualmente o Director do Centro de Investigação da Terra e do Espaço (CITEUC).

António Leal Duarte é Professor Associado no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e membro do Centro de Matemática (CMUC).

COMEMORAÇÕES DO BICENTENÁRIO DA MORTE DE JOSÉ MONTEIRO DA ROCHA (1819-2019)

O 32º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM), que decorreu no Marco de Canaveses, terra natal de José Monteiro da Rocha, nos dias 31 de maio e 1 de junho de 2019, foi dedicado à sua memória com um conjunto de comunicações sobre a sua vida e obra.

A Universidade de Coimbra, de que Monteiro da Rocha foi aluno, professor e vice-reitor, também o homenageou organizando um Ciclo de Conferências no Departamento de Matemática da FCTUC, no dia 9 de outubro de 2019, «José Monteiro da Rocha (1734-1819): a época e a obra»; e uma exposição bio-bibliográfica: 'José Monteiro da Rocha (1734-1819). Matemático e Astrónomo | Mathematician and Astronomer', que esteve patente de 9 de outubro a 11 de dezembro na Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra.

Estão em preparação três livros a publicar em 2021: um reunindo as comunicações das Conferências; outro com o catálogo da Exposição e o terceiro com uma antologia de textos científicos, administrativos, políticos e de correspondência de José Monteiro da Rocha. A publicação destas obras, a cargo da imprensa da UC, tem como editores os professores da Universidade de Coimbra, João Filipe Queiró, António Leal Duarte e Fernando B. Figueiredo.

José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

DEMONSTRADO... OU TALVEZ NÃO

As demonstrações estão no centro da matemática. Mas os matemáticos são falíveis e abundam exemplos de demonstrações erradas que foram aceites durante muito tempo.

Em matemática, os resultados não se aceitam, demonstram-se. Isto é um aspeto central da matemática desde a Grécia Antiga. As melhores demonstrações de teoremas sempre foram alvo de admiração e há mesmo um livro inteiramente dedicado às demonstrações mais perfeitas conhecidas (veja-se [1]).

Mas a matemática é feita por matemáticos, os matemáticos são humanos e os humanos são falíveis. Em resultado disto, já houve um considerável número de casos em que não só um matemático fez uma suposta demonstração que, afinal, estava errada, mas também, em vários desses casos, a demonstração foi considerada correta pela comunidade matemática.

Para deixar claro o assunto que vai ser aqui abordado, convém dizer que *não* vão ser aqui vistos exemplos de demonstrações que foram controversas porque os métodos aí empregues foram considerados ilegítimos por alguns matemáticos de renome. Por exemplo, não se irá examinar a famosa expressão "Isto não é Matemática. Isto é Teologia", proferida por Paul Gordan relativamente a um dos primeiros teoremas de Hilbert[1] nem às críticas à Teoria dos Conjuntos de Cantor.[2]

O PROBLEMA DAS QUATRO CORES

O primeiro exemplo é talvez o mais famoso de todos e tem a ver com o teorema das quatro cores (é possível colorir qualquer mapa usando somente quatro cores de modo a que duas regiões com uma fronteira comum tenham cores distintas), que já foi abordado nesta rubrica (veja-se [7]). Em 1879, Alfred Bray Kempe (um advogado que também era um matemático amador) afirmou ter conseguido provar que, de facto, é possível colorir qualquer mapa usando somente quatro cores. A demonstração foi publicada nesse mesmo ano (por sugestão de Arthur Cayley, talvez o mais proeminente matemático do Reino Unido daquela época). No ano seguinte, estimulado pela demonstração de Kempe, o físico escocês Peter Tait publicou outra demonstração. Durante 11 anos foi geralmente aceite que o teorema estava demonstrado. Mas, em 1890, Percy John Heawood publicou um artigo no qual explicava que a demonstração de Kempe estava errada e o próprio Kempe admitiu que assim era. No entanto, não se deve pensar que o trabalho de Kempe foi uma perda de tempo, pois as ideias introduzidas por ele continuaram a ser usadas nesta área. Quanto à demonstração de Tait, esta foi refutada por Julius Peterson em 1891 (ou seja, tal como no caso da demonstração de Kempe, 11 anos após a sua publicação).[3]

[1] Colin McLarty, *Theology and its discontents: The origin myth of Modern Mathematics, https://webusers.imj-prg.fr/michael.harris/theology.pdf*

[2] *https://en.wikipedia.org/wiki/Controversy_over_Cantor's_theory*

[3] A história deste problema pode ser vista em *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/The_four_colour_theorem.html*

PAVIMENTAÇÕES COM PENTÁGONOS

Uma pavimentação do plano é alguma maneira de preencher o plano com algum tipo de figura, de modo a que não haja sobreposições nem fiquem espaços por cobrir.[4] Se a figura em questão for um polígono regular, só há pavimentações se o dito polígono for um triângulo, um quadrado (pense-se em papel quedriculado) ou um hexágono (como no caso dos favos de mel).

Em 1918, Karl Reinhardt, um matemático alemão, deu, na sua tese de doutoramento, cinco exemplos de pentágonos convexos (ou seja, tais que se dois pontos pertencem ao pentágono, todos os pontos do segmento de reta que os une também pertencem) com os quais é posível pavimentar o plano (todos irregulares, naturalmente). Um exemplo de pavimentação do plano com pentágonos irregulares (que não é nenhuma das cinco descobertas por Reinhardt) pode ser vista na figura 1. As coisas ficaram neste ponto durante meio século. Ninguém conseguia encontrar outros pentágonos convexos com os quais fosse possível pavimentar o plano, mas também não se conseguia provar que só havia estes. A situação mudou em 1968, quando Richard Kershner encontrou três novos pentágonos que serviam para este fim e publicou um artigo [4], onde escreveu que tinha demonstrado que estes três novos pentágonos, juntamente com os cinco de Reinhardt, eram os únicos com os quais era possível pavimentar o plano. De facto, o artigo não continha a demonstração, pois, segundo o seu autor, esta "é extremamente complexa e será publicada noutro sítio".

Não houve novidades até 1975. Nesse ano, Martin Gardner divulgou estes factos sobre pavimentações na sua coluna de divulgação de matemática da *Scientific American* (que seria republicado em [2]; veja-se também [8]). Este artigo estimulou alguns leitores e o resultado foi extraordinário: dois deles encontraram cinco novos tipos de pentágonos que podem ser usados para pavimentar o plano: uma dona de casa (Marjorie Rice, que descobriu quatro, um dos quais é o da figura 1)[5] e um programador de computadores (Richard James). Isto elevou o número de pavimentações pentagonais para 13. Uma décima quarta foi descoberta em 1985 e uma décima quinta foi descoberta em 2015.

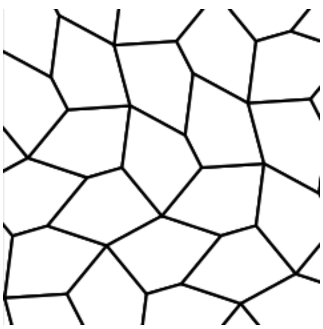


Figura 1. Pavimentação pentagonal do plano.

Em 2017, Michaël Rao, um matemático francês, afirmou ter demonstrado que, agora sim, temos todas as pavimentações pentagonais do plano. A sua demonstração ainda está a ser estudada em detalhe. Até agora, não foi detetado qualquer erro.[6]

O PROBLEMA DE RIEMANN-HILBERT

Em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos, David Hilbert proferiu uma palestra na qual expôs uma lista de 23 problemas matemáticos (veja–se [3] ou [9, Apêndice]). Muita da pesquisa matemática do século seguinte esteve ligada a estes problemas. Alguns destes problemas são programas de pesquisa, enquanto outros são problemas no sentido mais tradicional do termo.

O vigésimo primeiro problema também é conhecido por "problema de Riemann-Hilbert". É um problema sobre equações diferencias lineares e foi formulado como uma pergunta, que pode ser respondida com um "sim" ou com um "não". O próprio Hilbert publicou uma solução parcial (afirmativa) do problema em 1905, mas esse seu trabalho foi superado três anos mais tarde por outra resolução (igualmente afirmativa), do matemático esloveno Josip Plemelj. Este teve uma vida longa e produtiva e, em 1964, publicou um livro sobre o assunto [5]. Morreu três anos mais tarde, convencido de que resolvera o problema.

Mas não tinha razão quanto a isto. Em 1989, o matemático russo Andrei Bolibruch mostrou que não só havia um erro na demonstração de Plemelj como, de facto, a resposta é negativa. Quanto às consequências de se considerar o problema resolvido e com resposta afirmativa, Bolibruch escreveu:

> Não consigo fazer uma estimativa de quantos artigos errados foram feitos baseados no resultado errado relativo ao vigésimo primeiro problema de Hilbert; só sei que foram muitos. Talvez uma pergunta mais correta seja: Há resultados importantes que se revelaram errados por terem empregado o resultado errado de Plemelj? Sei de, pelo menos, um tal trabalho: foi publicado em 1970 por um famoso matemático japonês, onde usou a "resolução positiva do vigésimo primeiro problema de Hilbert" para provar um resultado muito importante mas errado.

Para mais detalhes, veja-se [9, pp. 365–382].

O PROBLEMA DE BUSEMANN-PETTY

Seja n um número natural maior do que 1 e considerem-se duas regiões A e B de $\mathbb{R}^n$que sejam convexas e simétricas em relação à origem (se v pertence à região, $-v$ também pertence). No caso em que $n = 3$, as regiões em questão podem ser, por exemplo, um elipsóide ou um cubo (centrados na origem). Suponha-se agora que, sempre que H for um hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que passa pela origem, então o volume de $A \cap H$ é menor ou igual ao volume de $B \cap H$. Resulta daqui que o volume de A é menor ou igual ao de B? Este problema foi formulado por Herbert Busemann e Clinton Myers Petty em 1956.

O problema é trivial se $n = 2$ (pois resulta das condições do enunciado que se tem $A \subset B$ nesse caso), mas durante muito tempo não se soube qual é a resposta se $n > 2$, embora fosse de esperar que esta fosse afirmativa. No entanto, provou-se em 1975 que a resposta é, de facto, negativa se $n \geqslant 12$. Nos anos que se seguiram, o valor de n a partir do qual se sabia que a resposta é negativa foi baixando e em 1992 só não se sabia qual era a resposta se $n = 3$ ou $n = 4$; a partir de $n = 5$ já se sabia que a resposta é negativa.

Em 1994, Gaoyong Zhang, um matemático norte-americano de origem chinesa, publicou (veja-se [10]), numa das mais prestigiadas revistas de matemática do mundo, o *Annals of Mathematics*, uma demonstração de que a resposta também é negativa quando $n = 4$. Mas, três anos mais tarde, foi descoberto que um dos resultados supostamente demonstrados por Zhang estava errado. Consequentemente, Zhang voltou a pensar no assunto e demonstrou que, afinal, a resposta é afirmativa quando $n = 4$, tendo publicado a sua demonstração novamente no *Annals of Mathematics* (veja-se [11]), naquele que deve ser o único caso em toda a História em que o mesmo matemático publicou na mesma revista a demonstração de um enunciado e a da sua negação.

Hoje em dia, já se sabe que a resposta ao problema também é afirmativa quando $n = 3$... a menos que venha a ser descoberto um erro na demonstração.

REFERÊNCIAS

[1] Martin Aigner; Günter, M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, 6th ed., Springer, 2018.

[2] Martin Gardner, *Tiling with convex polygons* em *Time travel and other mathematical bewilderments*, W. H. Freeman, 1988, pp. 163–176.

[3] David Hilbert, "Mathematical Problems", *Bulletin of the American Mathematical Society* 8, pp.437–479, 1902.

[4] R. B. Kershner, "On paving the plane", *American Mathematical Monthly* 75.8, pp.839–844, 1968.

[5] Josip Plemelj, *Problems in the sense of Riemann and Klein*, John Wiley & Sons, 1965.

[6] Karl Reinhardt, *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone*, Tese de Doutoramento, Universidade de Frankfurt, 1918.

[7] José Carlos Santos, "Demonstrações com uso de computadores", *Gazeta de Matemática* 181, pp. 30–31, 2017.

[8] Doris Schattschneider, "In praise of amateurs" em *The Mathematical Gardner*, D. A. Klaner (ed.), Prindle, Weber & Schmidt, 1981, pp.140–166.

[9] Benjamin H. Yandell, *The honors class: Hilbert's problems and their solvers*, A. K. Peters, 2002.

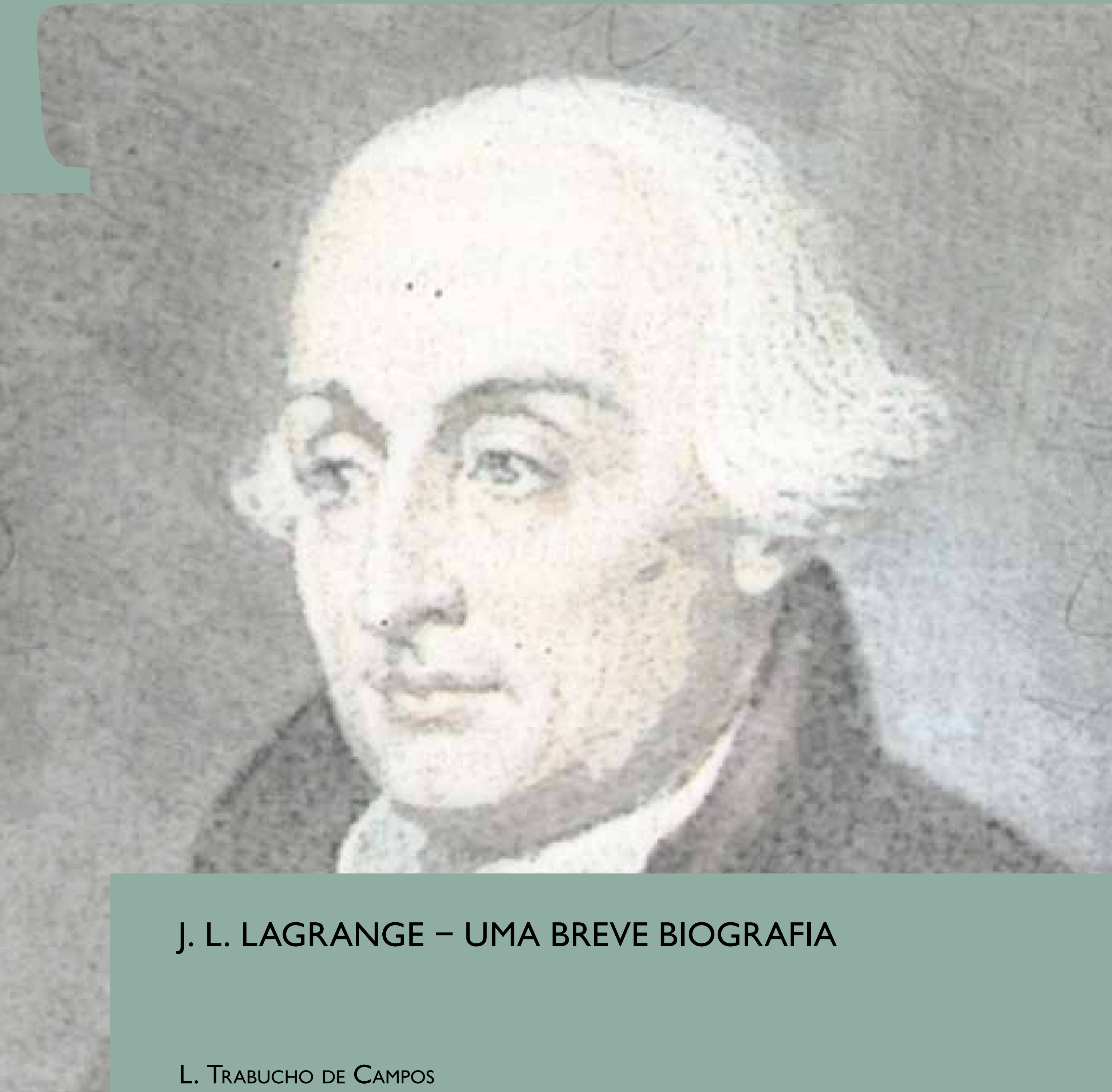
[10] Gaoyong Zhang, "Intersection bodies and the Busemann-Petty inequalities in $\mathbb{R}^4$", *Annals of Mathematics*, Second Series, 140(2), pp. 331–346, 1994.

[11] Gaoyong Zhang, "A positive solution to the Busemann-Petty problem in $\mathbb{R}^4$", *Annals of Mathematics*, Second Series, 149(2), pp. 535–543, 1999.

[4] Mais geralmente, podem considerar-se pavimentações feitas com vários tipos de figuras, mas só iremos lidar aqui com pavimentações onde há apenas figuras de um único tipo.

[5] Veja-se *Marjorie Rice's Secret Pentagons*, de Natalie Wolchover; *https://www.quantamagazine.org/marjorie-rices-secret-pentagons-20170711*

[6] Veja-se *Pentagon Tiling Proof Solves Century-Old Math Problem*, de Natalie Wolchover; *https://www.quantamagazine.org/pentagon-tiling-proof-solves-century-old-math-problem-20170711*



J. L. LAGRANGE – UMA BREVE BIOGRAFIA

L. Trabucho de Campos
Universidade Nova de Lisboa (FCT/UNL)
trabucho@fct.unl.pt

1. INTRODUÇÃO

O cidadão comum e, sobretudo, quem quer que estude Matemática, Física, Química, Finanças, Economia, Engenharia ou qualquer outro ramo científico, desde o mais elementar nível até ao mais elevado, encontrará, muito provavelmente, o nome de Lagrange. Além de ter sido Fellow da Royal Society de Edimburgo e da Royal Society de Londres, membro da Academia das Ciências de Paris, da Academia das Ciências de Berlim, da Academia das Ciências de Turim e de muitas outras instituições, o que já de si demonstra que estamos perante alguém muitíssimo notável, o seu nome surge em inúmeras situações.

Aquando da construção da Torre Eiffel, foram gravados 72 nomes de matemáticos, físicos, engenheiros, militares e políticos franceses, em reconhecimento pelas suas contribuições para a República Francesa, cujo centenário se comemorava (1789-1889). Lagrange foi um dos nomes escolhidos. Na Lua existe uma cratera com o seu nome. Em Paris 5, existe a Rue Lagrange e em Turim a Via Giuseppe Luigi Lagrange. Em Matemática, Física, Engenharia, em particular, e na ciência, em geral, fala-se de: Análise Lagrangiana, Coordenadas de Lagrange, Derivada de Lagrange, Mecânica Lagrangiana, Teoria do Campo de Lagrange, Pontos de Lagrange, Relaxação Lagrangiana, Subvariedade Lagrangiana, Equações de Euler-Lagrange, Tensor de Green-Lagrange, Parêntesis de Lagrange, Princípio de D'Alembert-Lagrange; Interpolação de Lagrange, Teorema da inversão de Lagrange, Multiplicador de Lagrange, Invariante de Lagrange, Teorema(s) de Lagrange, Polinómios de Lagrange, Resolvente de Lagrange, Espectro de Lagrange, Função de Corrente de Lagrange, Identidades trigonométricas de Lagrange, Fórmula(s) de Lagrange, entre muitas outras designações. Apenas estes factos seriam suficientes para ficarmos com a ideia de estarmos perante um dos maiores vultos científicos de todos os tempos.

2. FRANCÊS OU ITALIANO

Joseph-Louis Lagrange nasceu a 25 de Janeiro de 1736 em Turim e faleceu a 10 de Abril de 1813, em Paris. É usualmente considerado um matemático francês, mas em Itália é, frequentemente, considerado como sendo italiano. Há uma razão para tal, pois Lagrange nasceu em Turim e foi batizado com o nome de Giuseppe Lodovico Lagrangia.

O seu pai era Giuseppe Francesco Lodovico Lagrangia, tesoureiro do Gabinete de Obras Públicas e Fortificações de Turim (cargo este que ficou na família até à sua supressão em 1800) e a sua mãe, Teresa Gros ou Grosso, era a única filha de um médico de Cambiano, nos arredores de Turim. Lagrange era o mais velho dos seus 11 filhos, tendo apenas dois chegado à idade adulta.

Naquela época, Turim era a capital do Ducado de Sabóia, tendo-se tornado a capital do reino da Sardenha em 1720, 16 anos antes do nascimento de Lagrange.

A família de Lagrange tinha ascendência francesa do lado paterno. O seu bisavô tinha sido capitão de cavalaria e deixara França para servir o duque de Sabóia. Lagrange sempre apreciou este seu lado francês, uma vez que na sua juventude assinava como Lodovico La Grange ou Luigi De La Grange Tournier ou ainda Luigi Lagrange, usando a forma francesa do seu nome de família.

Joseph-Louis Lagrange nasceu em Turim, em 1736, e faleceu em Paris, no ano de 1813. Entre essas duas datas, contribuiu como poucos para o desenvolvimento de inúmeras áreas da matemática. Esta é a sua história.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

3. TURIM

Apesar de o pai ocupar uma posição de relevo ao serviço do rei da Sardenha, a família não era abastada, uma vez que o seu pai tinha perdido elevadas quantias de dinheiro em especulações financeiras ruinosas. Este destinou-lhe uma carreira na advocacia, o que Lagrange parecia aceitar. Estudou no Colégio de Turim e o seu assunto favorito era Latim. O interesse pela Matemática surgiu quando leu um texto de Halley (1656-1742), de 1693, sobre o uso da Álgebra na óptica. Interessou-se por Física, em parte devido ao professor Giovanni Battista Beccaria (1716-1781) no Colégio de Turim e, nesta época, decidiu começar a estudar Matemática. Provavelmente, a Matemática tem de agradecer ao pai de Lagrange as suas especulações financeiras pois, mais tarde, Lagrange afirmou: "Se tivesse sido rico, muito provavelmente não me teria dedicado à Matemática."

Lagrange estudou Matemática, essencialmente, como autodidacta. A 23 de Julho de 1754 publicou o seu primeiro trabalho matemático na forma de uma carta escrita em italiano e endereçada ao matemático Giulio Fagnano (1682-1766) e assinando como Luigi De La Grange Tournier (*Lettera di Luigi De La Grange Tournier, Torinese, all' illustrissimo Signor Conte Giulio Carlo Da Fagnano*). Este trabalho mostra, até certo ponto, o facto de Lagrange ter estudado sozinho sem o conhecimento dos trabalhos de outros matemáticos. O artigo estabelece uma analogia entre a expansão binomial e as sucessivas derivadas do produto de duas funções. A partir deste resultado, Lagrange deduz, de forma elegante e não trivial, expressões para as sucessivas primitivas de uma dada função. Antes de escrever o artigo em italiano, Lagrange enviara a Euler (1707-1783), naquela altura em Berlim, uma carta, em latim, contendo os resultados. No mês seguinte ao da publicação, descobriu que estes resultados eram conhecidos e que faziam parte da correspondência entre Johann Bernoulli (1667-1748) e Leibniz (1646-1716). Ficou profundamente abalado por este facto, uma vez que receava ser acusado de ter copiado resultados de outrém. Foi nesse momento que decidiu dedicar-se a problemas ainda em aberto. Escolheu trabalhar sobre a curva tautócrona (trata-se de um problema associado ao da curva braquistócrona), isto é, na descoberta da forma de uma curva plana sobre a qual um corpo deixado cair, sujeito apenas à acção da gravidade e sem atrito, chega sempre a um dado ponto ao fim do mesmo tempo, independentemente da sua posição inicial (Lagrange demonstrou ser um arco de ciclóide).

A 30 de Outubro de 1754 escreveu a Fagnano comunicando a sua decisão e, no final de 1754, tinha feito descobertas importantes sobre a tautócrona que iriam contribuir para o novo assunto do Cálculo das Variações (designação dada por Euler em 1766) e que era alvo do interesse de vários matemáticos.

Enviou os seus resultados a Euler, a 12 de Agosto de 1755, e este respondeu-lhe a 6 de Setembro do mesmo ano, dizendo-lhe quão impressionado estava com as suas novas ideias.

Reconhecido o seu talento e embora tivesse apenas 19 anos, Lagrange foi nomeado professor de Matemática na Real Escola de Artilharia de Turim a 28 de Setembro de 1755.

Em 1756, enviou a Euler alguns dos resultados obtidos pela aplicação do Cálculo das Variações à Mecânica, generalizando alguns dos resultados do próprio Euler. Perante a qualidade do seu trabalho, Euler decidiu contactar Maupertuis (1698-1759), seu supervisor e presidente da Academia de Berlim, não só devido ao facto de Lagrange ser um excelente matemático mas por ser também um defensor do "Princípio da Acção Mínima", área de estudo de Maupertuis e um dos pioneiros da sua formulação. Maupertuis não hesitou em tentar obter para Lagrange um lugar de professor na Prússia e tratou de pedir a Euler que explicasse a Lagrange que o lugar que lhe era proposto seria de maior prestígio do que aquele que ocupava em Turim. Porém, Lagrange não procurava honrarias, apenas desejava dedicar o seu tempo à Matemática e, de maneira tímida e educada, recusou o lugar proposto.

Ainda assim, Euler propôs que Lagrange fosse eleito para a Academia de Berlim, o que viria a contecer a 2 de Setembro de 1756.

No ano seguinte, juntamente com o conde Giuseppe Angelo Saluzzo di Menusiglio (1734-1810) e o Físico Giovanni Francesco Cigna (1734-1790), Lagrange foi um dos fundadores de uma sociedade científica em Turim, que viria a originar a Real Academia das Ciências de Turim. Uma das principais tarefas desta nova sociedade era a de publicar um jornal científico, com artigos em latim ou em francês, designado por *Miscellanea Taurinensia* ou *Mélanges de Turin*. O primeiro volume saiu em 1759, o segundo em 1762 e o terceiro em 1766. Os artigos de Lagrange abrangem uma grande variedade de tópicos. Publicou os resultados importantes do Cálculo das Variações e um curto trabalho sobre o Cálculo de Probabilidades. Num trabalho sobre os fundamentos da Dinâmica, Lagrange explicou o seu desenvolvimento baseado no Princípio da Acção Mínima e na noção de Energia Cinética.

Lagrange obteve ainda resultados importantes sobre a propagação do som, e sobre a teoria das cordas vibrantes. Tendo estudado profundamente os trabalhos de Newton (1643-1727), Daniel Bernoulli (1700-1782), Taylor (1685--1731), Euler e d'Alembert (1717-1783), optou por usar um modelo composto por n massas unidas, em série, por molas sem massa. Resolveu o sistema de $n+1$ equações diferenciais associado a este sistema e demonstrou que fazendo n tender para infinito obtinha a mesma solução que Euler obtivera. O seu objectivo era o de tentar chegar à solução de Euler através de outros métodos que pudessem ser passíveis de generalizações.

Nos artigos que publicou no terceiro volume, estudou a resolução de equações diferenciais aplicando os resultados a vários tópicos, nomeadamente à Mecânica de Fluidos, onde introduziu a noção do que hoje se designa por Função de Lagrange. De igual modo, estudou a resolução de sistemas de equações diferenciais lineares, tendo aplicado os seus métodos inovadores ao estudo das órbitas de Júpiter e de Saturno.

Em 1762, a Academia das Ciências de Paris anunciou o prémio para o ano de 1764. O tópico seria sobre a Libração da Lua, isto é, o movimento da Lua que faz com que a face que é visível da Terra apresente pequenas oscilações. Lagrange candidatou-se ao prémio em 1763. Em Novembro desse mesmo ano, deixa Turim, na sua primeira grande viagem, para acompanhar o marquês de Caraccioli (1719-1803), embaixador de Nápoles que estava a mudar o seu posto de Turim para Londres. Lagrange adoeceu pouco tempo depois de chegar a Paris e já não seguiu para Londres com o embaixador.

O matemático d'Alembert ficou chocado com o facto de que uma figura tão relevante como Lagrange não tivesse recebido quaisquer honrarias, enquanto em Paris, uma vez que considerava que aquele jovem constituía um tesouro para Turim cujo valor nem a sua cidade parecia perceber.

Após regressar a Turim, no início de 1765, Lagrange decidiu concorrer ao prémio da Academia das Ciências de 1766, que ganhou, cujo tema era o estudo das órbitas dos satélites de Júpiter. Mais uma vez, a excelência do seu trabalho fez com que d'Alembert, que visitara a Academia de Berlim e era amigo de Frederico II (1712-1786), da Prússia, conseguisse que lhe fosse oferecido um lugar na Academia de Berlim. Lagrange volta a recusar a oferta afirmando:

"Penso que Berlim não será adequado para mim, enquanto o senhor Euler lá estiver." De facto, desde jovem que Lagrange tinha uma enorme reverência para com Euler, considerando-o um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

4. BERLIM

Em Março de 1766, d'Alembert soube que Euler regressara a São Petersburgo e escreveu novamente a Lagrange encorajando-o a aceitar o lugar em Berlim. Frederico II também lhe endereçou uma carta de convite com inúmeros detalhes e vantagens da oferta. Finalmente, Lagrange aceitou. Deixou Turim a 21 de Agosto, visitou d'Alembert em Paris, Caraccioli em Londres, onde chegou a 20 de Setembro, e chegou a Berlim a 27 de Outubro. Deste modo, a 6 de Novembro de 1766, Lagrange sucedeu a Euler como director da área da Matemática da Academia de Berlim.

Lagrange foi calorosamente recebido pela maioria dos membros da Academia e, rapidamente, travou amizade com Lambert (1728-1777) e Johann (III) Bernoulli (1744--1807). Contudo, alguns membros mais idosos não estavam muito agradados por ver alguém tão jovem com um cargo tão importante. Em particular, Castillon (1708-1791), 28 anos mais velho, considerava que era ele quem deveria ter sido eleito director para a área da Matemática.

Um ano antes de chegar a Berlim, Lagrange casou-se com a sua prima Vittoria Conti. Sobre este facto escreveu a d'Alembert o seguinte:

"A minha esposa que é uma das minhas primas e que até viveu durante bastante tempo com a minha família, é uma excelente dona de casa e não tem qualquer tipo de pretensões." Acrescentou ainda que não desejava ter filhos, o que veio acontecer.

Turim sempre se arrependeu de ter perdido Lagrange e, de tempos a tempos, era encarada a hipótese do seu regresso. Porém, durante 20 anos Lagrange trabalhou em Berlim, produzindo uma linhagem de artigos da máxima qualidade e recebendo, regularmente, o prémio da Academia das Ciências de Paris. Partilhou o prémio de 1772 com Euler. O tema era o problema dos três corpos. Ganhou o prémio de 1774, outro sobre o movimento da Lua, e ganhou, também, o de 1780 sobre as perturbações das órbitas dos cometas devido aos planetas.

Em Berlim, o seu trabalho versou sobre diversos tópicos: Astronomia, estabilidade do Sistema Solar, Mecânica, Dinâmica, Mecânica dos Fluidos, Probabilidade e os fundamentos do Cálculo. Além disso, trabalhou ainda em Teoria de Números tendo demonstrado, em 1770, que todo e qualquer inteiro positivo é igual à soma de quatro quadrados. Em 1771 demonstrou o Teorema de Wilson (1741-1793) que afirma que n é primo se e só se $(n-1)!+1$ é divisível por n.

Em 1770 publicou um dos seus trabalhos mais importantes: *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, onde explica de modo claro porque é que as equações algébricas até ao quarto grau podem ser resolvidas por radicais. Pela primeira vez, as raízes das equações algébricas são consideradas entidades abstractas e estuda as suas permutações naquilo que é considerado o primeiro passo para o desenvolvimento da Teoria de Grupos feito, posteriormente, por Ruffini (1765-1822), Galois (1811-1832) e Cauchy (1789-1857).

Caraccioli, agora na Sicília, desejava que Lagrange regressasse a Itália e, em 1781, fez com que a corte de Nápoles lhe fizesse uma oferta de um lugar de professor de Filosofia na Academia de Nápoles. Lagrange declinou o convite, pois pretendia uma vida calma para estudar Matemática e o lugar em Berlim oferecia-lhe as condições ideais.

Durante a estada em Berlim tanto Lagrange como a sua esposa tiveram problemas de saúde. A sua esposa faleceu em 1783 e Lagrange passou por um período de enorme tristeza. Três anos mais tarde, Frederico II morreu e o seu lugar em Berlim deixou de ser seguro. Muitos estados italianos viram aqui uma nova oportunidade para o trazer de volta a Itália. Porém, de todas as ofertas de emprego, a que mais agradou a Lagrange foi a de Paris, que incluía uma cláusula estabelecendo que não teria de leccionar.

5. PARIS

A 18 de Maio de 1787 deixou Berlim para se tornar membro da Academia das Ciências de Paris, onde ficou até ao fim da sua carreira.

Lagrange sobreviveu à Revolução Francesa e, até certo ponto, isto deveu-se à sua atitude, expressa muitos anos antes: "Acredito que, em geral, um dos primeiros princípios de qualquer homem ajuizado é o de proceder em conformidade estrita com as leis do país em que vive, mesmo quando estas não lhe parecerem razoáveis."

A 8 de Maio de 1790, a Assembleia Constituinte decretou a normalização dos pesos e medidas, tendo atribuído à Academia das Ciências a tarefa de estabelecer um sistema fundado em padrões fixos e susceptível de uma adopção universal. Naturalmente, Lagrange foi escolhido para integrar esta comissão que trabalhou no sistema métrico e defendeu o uso de base decimal.

Em 1792, Lagrange casou-se pela segunda vez com Renée-Françoise-Adélaide Le Monnier, filha de um dos seus colegas astrónomos na Academia das Ciências.

Em 1793 iniciou-se o Reino de Terror e a Academia das Ciências, juntamente com as outras sociedades científicas e culturais é extinta a 8 de Agosto. A Comissão dos Pesos e Medidas foi a única autorizada a funcionar, tendo Lagrange ficado como seu presidente enquanto outros membros, como Lavoisier (1743-1794), Borda (1733-1799), Laplace (1749-1827), Coulomb (1736-1806) e Delambre (1749-1822), foram demitidos da comissão.

Em Setembro desse mesmo ano foi publicada uma lei determinando a prisão de todos os estrangeiros nascidos em países inimigos, bem como o confisco de todos os seus bens. Lavoisier interveio a favor de Lagrange, abrangido pela lei, e conseguiu uma excepção não só para Lagrange mas também para 27 outras individualidades.

A 8 de Maio de 1794, depois de um julgamento sumário que durou menos de um dia, um tribunal revolucionário condenou Lavoisier a ser guilhotinado nesse mesmo dia. Lagrange referiu-se à morte de Lavoisier nos termos seguintes: "Foi necessário apenas um momento para fazer com que a sua cabeça caísse, mas 100 anos não chegarão para que surja outra assim."

A École Polytechnique foi fundada a 11 de Março de 1794 e abriu em Dezembro do mesmo ano (durante o primeiro ano da sua existência teve a designação de École Centrale des Travaux Publics). A revolução tinha alterado a cláusula de não ensinar e Lagrange foi o primeiro professor de Análise na abertura, em 1794, tendo leccionado até 1799.

Em 1795 foi fundada a École Normale, com o objectivo de formar professores liceais, onde Lagrange também ensinou matemática elementar, tendo Laplace como seu assistente. Fourier (1768-1830) assistiu às suas aulas na École Normale em 1795 e descreveu o seu ensino do modo seguinte: "A sua voz é muito fraca (...) tem um sotaque italiano muito forte e pronuncia os «s» como se fossem «z» (...)A maioria dos estudantes é incapaz de o apreciar (...) mas os professores são indulgentes para com ele."

Lagrange publicou dois volumes sobre as suas aulas de cálculo. Em 1797 publicou a primeira teoria de funções reais de variável real com o título *Théorie des fonctions analytiques*. Embora não se tenha preocupado com questões de convergência, escreveu que o objectivo do trabalho era o de dar "... os princípios do Cálculo Diferencial, livres de toda e qualquer consideração sobre infinitamente pequenos ou de quantidades tendentes para zero, de limites ou de fluxões, e reduzida à análise algébrica de grandezas finitas". Escreveu ainda: "As usuais operações algébricas bastam para resolver problemas na teoria de curvas."

Nem todos os matemáticos consideraram a abordagem de Lagrange para o Cálculo a melhor, por exemplo, Prony (1755-1839) escreveu: "Os fundamentos do Cálculo de Lagrange são seguramente o que se poderia designar como um estudo puramente filosófico mas, quando se trata de fazer da análise transcendente um instrumento de exploração para questões sugeridas pela Astronomia, a Engenharia Naval, a Geodesia, e os diferentes ramos das ciências da Engenharia, a consideração do infinitamente pequeno conduz ao objectivo de uma maneira que é mais feliz, mais rápida, e mais adaptada à natureza das questões, sendo esta a razão pela qual o método de Leibniz tem, em geral, prevalecido nas escolas francesas."

O segundo livro de Lagrange sobre este tópico, *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, surgiu em 1800.

Após o golpe de Estado do 18/19 Brumário do ano VIII (9/10 de Novembro de 1799), Napoleone di Buonaparte (1769-1821) substituiu o Directório. Criou-se um Senado que incluía, entre os seus membros, cientistas como Lagrange, Monge, Bertholet, Carnot e outros. Buonaparte concedeu a Lagrange, tal como a Monge, as insígnias de grande oficial da "Ordre National de la Légion d'Honneur", por ele criada a 20 de Maio de 1802.

Em 1808, nomeou-o Conde do Império, devido a uma lei que abrangia todos os senadores, ministros, conselheiros de Estado, arcebispos e o presidente da legislatura.

A 3 de Abril de 1813, juntamente com Monge, foi-lhe concedida a Grande Cruz da Ordem Imperial da Reunião.

Lagrange faleceu pouco depois, a 3 de Abril de 1813, e, três dias depois, o seu corpo foi levado para o Panteão Nacional.

As orações fúnebres foram proferidas por Laplace, em nome do Senado, e por Bernard de Lacépéde (1756-1825), em nome do Instituto de França. Foram efetuadas cerimónias semelhantes em diversas universidades do Reino de Itália mas nada foi feito em Berlim, uma vez que a Prússia se juntara a uma coligação política contra a França.

Napoleone di Buonaparte ordenou a aquisição do espólio de Lagrange, bem como a sua entrega ao Instituto de França.

6. MÉCANIQUE ANALI(Y)TIQUE

Embora Lagrange tivesse feito inúmeras contribuições para a Mecânica, não produzira um trabalho exaustivo com todas as suas descobertas. Deciciu fazê-lo e, a 15 de Setembro de 1782, escreveu a Laplace dizendo: "Tenho praticamente concluído um Tratado de Mecânica Analítica, baseado unicamente no Princípio das Velocidades Virtuais, mas ainda não tenho a certeza de quando e onde será possível publicá-lo, não tenho pressa de ultimá-lo."

A *Mécanique Analitique*, escrita em Berlim, foi publicada em 1788. Fora aprovada para publicação por um comité

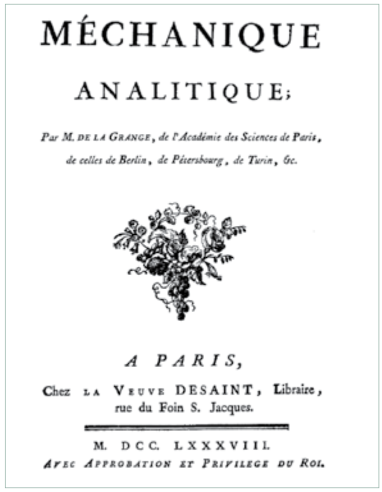

MÉCHANIQUE
ANALITIQUE;
Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris, de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.
A PARIS,
Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.
M. DCC. LXXXVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Figura 1. Mécanique Analitique, 1.ª Edição, 1788

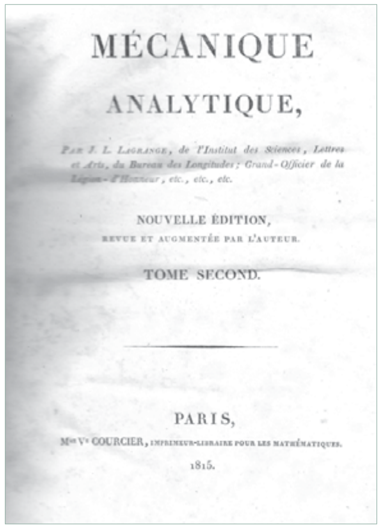

MÉCANIQUE
ANALYTIQUE,
Par J. L. Lagrange, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, du Bureau des Longitudes; Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, etc., etc., etc.
NOUVELLE ÉDITION,
REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.
TOME SECOND.
PARIS,
Mme Ve COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES.
1815.

Figura 2. Mécanique Analytique, 2.ª Edição,Tomo 2, 1815

da Academia de Ciências, incluindo, entre outros, Laplace, Legendre (1752-1833) e Condorcet (1743-1794). Legendre serviu de editor e de revisor.

A capa da primeira edição é reveladora do prestígio do seu autor quando se listam as academias a que pertence e se termina por "etc.". O mesmo se passa com a segunda edição, intitulada *Mécanique Analytique*, onde, devido ao ainda maior prestígio entretanto adquirido, se termina por "etc., etc., etc.".

Esta segunda edição publicada em dois volumes inclui várias generalizações de resultados da primeira edição, bem como diversas aplicações à Mecânica Celeste.

O primeiro volume data de 1811. Lagrange faleceu antes de terminar o segundo volume, que só foi publicado em 1816.

A *Mécanique Analitique* resume tudo o que era conhecido no campo da Mecânica Newtoniana, recorrendo apenas ao uso de equações diferenciais e do cálculo das variações. Com este trabalho, Lagrange transformou a Mecânica num ramo da Análise Matemática. O início que designou por "Advertência" é, simultaneamente, surpreendente e grandioso. Resume, de forma magistral, o conteúdo e os objectivos do tratado, bem como a sua total confiança no rumo que a Mecânica deveria seguir (e que seguiu no século XX). Escreve:

"Já existem vários Tratados de Mecânica, mas o plano deste é completamente inovador. Propus-me reduzir a Teoria desta Ciência, e a arte de resolver os problemas que lhe estão associados, a fórmulas gerais, cujo desenvolvimento conduz a todas as equações necessárias para a resolução de cada problema. Espero que o modo como tentei atingir este objectivo não tenha deixado algo a desejar.

Esta obra terá ainda outra utilidade; reunirá e apresentará sob o mesmo ponto de vista, os diferentes Princípios considerados até hoje para resolver os diferentes problemas de Mecânica, mostrará a sua ligação e dependência mútua, permitindo julgar quer a sua veracidade quer a sua extensão.

Divido-a em duas partes; A Estática ou a Teoria do Equilíbrio, e a Dinâmica ou a Teoria do Movimento; e cada uma destas partes tratará separadamente os Corpos Sólidos e os Fluidos.

Nesta obra, o leitor não encontrará qualquer figura. Os métodos que exponho não necessitam nem de construções nem de raciocínios geométricos ou mecânicos, mas apenas de operações algébricas, submetidas a um andamento regular e uniforme. Os que apreciam a Análiseverão com prazer a Mecânica tornar-se um seu ramo, e reconhecer-me-ão por ter estendido o seu domínio, deste modo."

Trata-se de uma característica de Lagrange. Quando estuda um assunto, resume tudo o que é conhecido sobre ele e quando o expõe já não é a mesma coisa. O assunto transforma-se em algo de novo, muitíssimo mais claro, rico e de uma abrangência e de uma aplicabilidade imprevistas.

7. AGRADECIMENTOS

Este artigo teve, inicialmente, origem num convite para apresentar uma palestra sobre a vida e a obra de J. L. Lagrange realizada a 6 de Junho de 2018, no ciclo Legado Matemático, organizado pela professora Cristina Casimiro, do Departamento de Matemática da FCT/UNL. Incentivado pelo professor Filipe Oliveira, do ISEG, e, à data, Presidente da SPM, e a convite dos editores da *Gazeta de Matemática*, esta palestra foi transformada neste artigo que aqui se publica. Aos professores Cristina Casimiro, Filipe Oliveira, e aos editores da *Gazeta de Matemática*, endereço o meu agradecimento.

Nota final: Os leitores mais interessados na vida e obra de Lagrange podem encontrar informação relevante na página *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk*, do MacTutor History of Mathematics Archive, que serviu também de ponto de partida para este artigo.

O autor escreve segundo a ortografia antiga.

SOBRE O AUTOR

L. Trabucho de Campos é professor do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (FCT/UNL).

Manuel Cruz
LEMA, Instituto Superior de Engenharia do Porto.
mbc@isep.ipp.pt

Sandra Ramos
LEMA, Instituto Superior de Engenharia do Porto e CEA-UL, Universidade Lisboa
sfr@isep.ipp.pt

MATEMÁTICA INDUSTRIAL E TRANSFERÊNCIA DE TECNOLOGIA | O CASO NORS

A transferência de tecnologia entre grupos de investigação e empresas no contexto da Matemática Industrial ainda é pouco divulgada e frequentemente desconhecida do público em geral. Neste artigo apresentamos uma visão geral e alguns dos resultados provenientes de uma colaboração iniciada em 2013 entre o centro de investigação LEMA e o grupo empresarial português Nors, partilhando alguns dos fatores mais relevantes para o sucesso desta parceria.

INTRODUÇÃO

A gestão de uma empresa, *startup* ou grupo empresarial é hoje em dia uma tarefa de enorme complexidade. O ritmo alucinante a que são gerados novos dados, as alterações disruptivas nos diferentes processos ou as constantes transformações e exigências do mercado implicam uma constante monitorização e adaptação das estratégias de gestão. Uma correta avaliação dos riscos e oportunidades que cada decisão pode trazer para o negócio, bem como a sua adaptação a diferentes momentos, é a base de uma estrutura sólida e duradoura que permita navegar com alguma estabilidade na presente conjuntura mundial. A Matemática Industrial pode proporcionar às empresas uma panóplia de ferramentas – modelos matemáticos – que, se bem aplicadas, permitem suportar uma decisão informada, diminuindo o risco, potenciando oportunidades de sucesso, conduzindo assim a novos patamares de eficiência. A metodologia MSO (Modelação Matemática, Simulação e Otimização) aplicada integral ou parcialmente aos desafios das organizações modernas, independentemente da sua dimensão, pode trazer enormes benefícios[1]. Este artigo procura ilustrar esta ideia, tendo como base uma parceria entre um grupo de investigação (LEMA) e um grande grupo empresarial sediado em Portugal (Nors).

O grupo Nors é um grupo português cuja visão é ser um dos líderes mundiais em soluções de transporte, equipamentos de construção e agrícolas, tendo na sua génese mais de 87 anos de história e atividade em Portugal. Atualmente, a Nors está presente em 17 países distribuídos por quatro continentes, com mais de 3700 colaboradores e um volume de negócios superior a 1,6 mil milhões de euros. Historicamente associada à sua liderança no setor automóvel, a Nors é hoje uma multinacional com um âmbito de atuação alargado, que desenvolve as suas atividades em quatro grandes áreas de negócio: Original Equipment Solutions, Integrated Aftermarket Solutions, Recycling Solutions e Safekeeping Solutions[2]. A área de Integrated Aftermarket Solutions compreende diversas empresas que têm como atividade principal a comercialização de peças de substituição para veículos automóveis. Foi precisamente nesta área que, em 2013, o grupo Nors e o Laboratório de Engenharia Matemática (LEMA) iniciaram a sua parceria. O LEMA é um grupo de investigação

[1] Ver, por exemplo, *http://www.eu-maths-in.eu/success-stories*

[2] Informação baseada em "Nors Company Profile": Documento interno do grupo Nors.

residente no Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP), com atividade nas áreas de Matemática Industrial e de Engenharia Matemática. Atualmente, este grupo multidisciplinar é constituído por cerca de 20 investigadores, que centram a sua investigação em diferentes áreas de matemática e engenharia com um historial de colaborações bem-sucedidas com diversas empresas.

As competências matemáticas do LEMA ajudaram o grupo Nors a utilizar e a direcionar o seu potencial de forma informada e inteligente, com vista à prossecução dos objetivos delineados pela sua equipa de gestão. Após sete anos consecutivos de uma parceria profícua e gratificante, são já muitos os desafios a que foi possível responder com sucesso, utilizando diversas metodologias e ferramentas de base matemática. Nas secções seguintes apresentamos, enquanto investigadores, a nossa visão sobre este trabalho conjunto, partilhando algumas experiências e resultados.

UMA VISÃO GERAL

Em 2013, o grupo Nors não incluía nos seus quadros qualquer matemático exercendo esse tipo de funções, não tendo nunca sentido essa necessidade. Nesse ano, e como resultado de uma auditoria ao grupo, foram identificados diversos pontos a corrigir, entre os quais se encontrava a recomendação de melhorias do sistema de informação, principalmente no que dizia respeito à gestão de stocks dos serviços de peças *aftermarket* numa das suas empresas. O objetivo principal desta empresa consiste em fornecer pontos de venda e oficinas com peças de substituição para automóveis ligeiros. Sendo um dos principais atores no mercado ibérico, esta estrutura incluía na sua base de dados mais de 200.000 referências. Todo o processo de gestão de encomendas a fornecedores, desde quando até quanto encomendar, estava baseado num procedimento que, sendo elementar do ponto de vista matemático, era demorado, complexo na sua implementação e requeria um número significativo de recursos humanos. Dada a inexistência de uma equipa de I&D dentro do grupo, a Nors apresentou as conclusões da auditoria ao LEMA, com o intuito de perceber se as suas competências matemáticas poderiam ser úteis para responder às limitações encontradas pela equipa de auditores externos. O LEMA propôs então a realização de um estágio curricular para um aluno do mestrado de Matemática Aplicada à Engenharia e às Finanças do Instituto Superior de Engenharia do Porto, que decorreu entre outubro de 2013 e junho de 2014. O modelo matemático criado neste contexto, depois de testado e parametrizado para responder às expectativas da empresa, originou uma aplicação informática que se tornou a principal ferramenta de gestão de stocks da empresa. Logo no final do estágio, o grupo optou por criar uma vaga para o matemático estagiário, independentemente da submissão de novos projetos para estágios de alunos finalistas em matemática. Dado o sucesso obtido com este projeto inicial – vencedor do Prémio de Inovação Nors em 2014 –, o grupo assinou também um acordo com o LEMA, de financiamento exclusivamente privado, para assessoria e acompanhamento em futuras ações de I&D relacionadas com a Matemática Industrial.

Além do diverso trabalho realizado quer na empresa quer no grupo de investigação, o modelo de colaboração – ainda presentemente em vigor – espelha o que foi testado no primeiro ano com sucesso: reuniões periódicas com uma agenda focada no objetivo operacional da empresa. Nestes encontros estão presentes investigadores com *know-how* científico apropriado aos desafios práticos propostos (à semelhança do que é realizado nos European Study Groups with Industry), colaboradores da empresa que possuem o conhecimento operacional do negócio e, frequentemente, um gestor alinhado com as principais diretrizes de gestão do grupo. Desta forma, todos os intervenientes ajudam a encontrar um equilíbrio entre a adequação do modelo à realidade e aos objetivos da empresa, a otimização de resultados e o rigor científico tendo em conta os recursos físicos e humanos disponíveis. A isto acresce a preocupação constante de todos os intervenientes em cumprir a dimensão temporal do projeto, permitindo uma transferência de tecnologia efetiva que cumpra a escala de tempo empresarial que, muito frequentemente, é diferente da escala de tempo científica. Por diversas vezes, a versão final de um modelo é implementada em fases sucessivas, garantindo à empresa que os resultados intermédios obtidos são já aplicados a seu favor.

Com a progressão destas reuniões mensais de I&D entre o LEMA e a equipa Nors, identificaram-se outros desafios que eram passíveis de serem abordados do ponto de vista matemático. De forma natural, foram-se juntando a este projeto diversos estagiários (muitos deles provenientes do mestrado de Engenharia Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto) que, em quase 80% dos casos, foram incluídos nos quadros da Nors findo o projeto de estágio. A visão dos gestores do grupo de que um trabalho continuado, profissional e otimizado não se compagina com a substituição de um estagiário por outro numa ótica puramente economicista permitiu uma consistência e uma rapidez nos resultados obtidos que não

Figura 1. Alguns intervenientes na parceria LEMA-Nors (Dez 2019).

seriam passíveis de ser alcançadas de outra forma.

Como resultado, em 2017 a Nors criou o LabMI – Laboratório de Matemática Industrial, com o objetivo de organizar a resposta às solicitações das diversas empresas e departamentos que constituem aquele grupo empresarial. Com esta estrutura formal, e correspondente massa crítica, o ritmo de desenvolvimento dos diferentes projetos atingiu um patamar muito significativo, conforme apresentaremos nas secções seguintes.

ALGUNS RESULTADOS

Nesta secção realçamos alguns dos projetos desenvolvidos ao longo deste período, com o intuito de partilhar alguns aspetos relevantes de um projeto de transferência de tecnologia entre matemática e indústria. Dado o caráter de divulgação inerente a esta coluna, ao que se juntam as naturais questões de confidencialidade, omitimos os pormenores técnicos. No entanto, parece-nos importante referir que estes modelos foram idealizados, testados, implementados e materializados em aplicações informáticas utilizando apenas os recursos humanos do LabMI e do LEMA, isto é, quadros com sólida formação em matemática. O *software* resultante deste processo tem sido desenvolvido maioritariamente em Matlab, R e/ou Python, e está sempre focado numa implementação articulada entre os modelos desenvolvidos e o ERP (Enterprise Resource Planning) utilizado pelo grupo, de forma a permitir uma fácil utilização do mesmo pelos diferentes colaboradores da empresa a que se destinam.

Comprar com Inteligência

O projeto inicial da parceria LEMA-Nors, mais tarde denominado "Comprar com Inteligência", ainda hoje está em constante atualização. Começou pela construção de um modelo de previsão da procura para as centenas de milhares de referências de peças para automóveis ligeiros que o grupo comercializa através de uma das suas empresas. Pela conjunção de diversos métodos de previsão, o modelo procura encontrar, para cada referência, o método mais eficiente, de acordo com uma métrica decidida em conjunto com os objetivos do grupo. O software daí resultante, sendo facilmente parametrizável, permite que os gestores de produto usufruam de uma ferramenta fiável para a colocação de encomendas a fornecedores com diferentes tipos de condicionantes. Logo no final do primeiro ano de utilização, tinha permitido diminuir o stock da empresa em 18% e aumentar o nível de serviço de 92% para 93%. Tudo isto num ano em que as vendas da empresa cresceram 9%. Adicionalmente, diminuiu o tempo necessário à conclusão de uma encomenda em mais de 50%, quando comparado com o sistema utilizado anteriormente. Como a empresa em questão possui mais de uma centena de fornecedores com diferentes particularidades, foi dada especial atenção à parametrização e à escalabilidade do modelo, com respeito aos recursos informáticos disponíveis no grupo.

Numa segunda fase, este modelo foi atualizado com diversas funções adicionais a nível da análise de performance, alertas e indicadores futuros. Posteriormente, foi-

-lhe também acrescentado um módulo de otimização global das encomendas, que além da previsão dos consumos, calcula o período ótimo de encomenda de forma a maximizar determinados objetivos delineados pela gestão. A adaptabilidade do modelo a novas condições foi comprovada muito recentemente, com o início do período de confinamento associado à pandemia da Covid-19, em que muito rapidamente o stock foi ajustado à nova conjuntura. Áreas como a otimização, a estatística ou a análise numérica foram essenciais para o nível de robustez e de precisão atingido. Desenvolvido em MatLab, este software está totalmente integrado com os sistemas informáticos utilizados no grupo, funcionando como um modelo autónomo, permitindo que sejam testadas e efetuadas novas atualizações e melhoramentos pelo LabMI, sem ser necessário alterar nenhum módulo do ERP. Adicionalmente, a recente implementação de um sistema SAP na empresa não exigiu praticamente nenhuma alteração ao modelo construído, com os pequenos ajustes necessários a serem assegurados pelos recursos do LabMI.

De olho no mercado

O acompanhamento constante do desempenho do negócio é essencial para se conseguir criar estratégias efetivas e orientá-las para os principais objetivos operacionais. O segundo projeto da parceria LEMA-Nors surgiu, justamente, da necessidade de desenvolvimento de aplicações informáticas que facilitassem o acompanhamento deste desempenho. As aplicações foram desenvolvidas em MatLab, Python e Power BI e estão baseadas em resultados das áreas de estatística e análise de dados. Permitem obter, de forma dinâmica e para diferentes níveis de detalhe (cliente, segmento de cliente, loja, vendedor, importador, tipo de veículo ou tipo de peça, entre outros) valores de indicadores de vendas essenciais para o negócio, emitindo alertas automáticos sempre que os valores desses indicadores se desviam muito dos valores de referência, fornecendo ainda previsões para alguns indicadores.

Eficiência nas rotas

O terceiro projeto da parceria que aqui apresentamos, pretendeu contribuir para uma otimização de rotas de entrega de encomendas e visitas a clientes, por forma a reduzir custos logísticos, garantindo o nível de serviço prestado ao cliente. O modelo criado baseou-se num VRP (Vehicle Routing Problem), obedecendo a múltiplas restrições (recursos, clientes, rede de estradas, etc.), tendo sido integrado com uma API de geolocalização, que permite calcular e visualizar rotas otimizadas em tempo real, num ambiente *user-friendly* e compreendendo dados cartográficos de alta qualidade.

Esta solução de roteamento, desenvolvida em MatLab, utiliza conhecimento proveniente das áreas Matemática Discreta, Otimização e *Data/Web Mining*, permitindo a otimização da carteira dos vendedores, um aumento do nível de serviço aos clientes e uma redução significativa dos custos associados.

Figura 2: Simulação de processo de otimização de rotas (imagem gentilmente cedida pelo grupo Nors)

Figura 3: Imagem de aplicação desenvolvida (imagem gentilmente cedida pelo grupo Nors)

Figura 4: Imagem de aplicação desenvolvida (gentilmente cedida pelo grupo Nors)

Satisfação dos clientes

Atualmente, a satisfação dos clientes é uma das principais preocupações tidas em conta pelas organizações. Outro dos projetos desenvolvidos no contexto desta parceria debruçou-se precisamente sobre a avaliação da satisfação dos clientes de diferentes empresas do grupo Nors. A informação usada no projeto é resultante de inquéritos de avaliação da satisfação de clientes, efetuados segundo uma amostragem probabilística. O projeto iniciou-se com a estimação de diferentes modelos estatísticos da classe dos modelos lineares generalizados, na tentativa de identificar, entre as várias dimensões avaliadas por inquérito (e.g., satisfação com os preços, execução do trabalho realizado ou diversidade de oferta), aquelas que, de forma significativa, melhor explicam a satisfação do cliente Nors. Paralelamente, foi investigada a existência de potenciais relações entre os níveis de satisfação e as vendas das empresas do grupo. Nesta avaliação consideraram-se duas abordagens. A primeira baseada em métodos de regressão linear múltipla e a segunda com recurso a modelos longitudinais (modelos lineares gerais e modelos lineares mistos). Este projeto foi desenvolvido e automatizado em R, tendo por base as áreas de Estatística e Análise de Dados. Como resultado, cada empresa do grupo Nors pode agora identificar os fatores que mais influenciam a satisfação do cliente e consequente definição de estratégias para melhorar essa satisfação.

Gestão de atendimento

Hoje em dia, o relacionamento da maioria das empresas com os seus clientes é efetuado numa lógica multicanal. A reorganização dos diferentes canais de atendimento de algumas lojas do grupo Nors constituiu mais um dos projetos desta parceria. Na empresa em questão, o modelo de negócio assentava em três formas de interação com o cliente: atendimento presencial (em loja), atendimento telefónico e plataforma online. Para conseguir um bom nível de satisfação dos clientes com o serviço prestado, as duas primeiras formas de contacto exigem uma afetação dos recursos humanos, que deve ter em conta o número efetivo de solicitações através de cada um dos canais. Visto a procura dos diversos canais ter uma componente aleatória significativa, o modelo contruído foi baseado na teoria das filas de espera de forma a conseguir uma aderência significativa aos dados históricos da empresa. Depois de validado, pôde ser utlizado para a simular e otimizar diferentes cenários, permitindo que os gestores analisassem o seu comportamento perante parametrizações distintas. Desta forma, foi possível dimensionar o sistema de atendimento da cadeia de lojas, de forma a garantir o nível de serviço desejado em todos horários, tendo em conta os recursos humanos existentes e otimizando a experiência do cliente. Esta solução teve por base conhecimentos provenientes da área de Probabilidade e Estatística e foi integralmente programada em MatLab.

Contratos de assistência

Este projeto teve como objetivo principal dimensionar o preço dos contratos de assistência de veículos pesados que, resumidamente, poderão ser descritos como pacotes integrados de manutenção e reparação, permitindo ao cliente o controlo de custos com uma dada viatura através de uma mensalidade fixa. Neste caso foi desenvolvida uma metodologia que, utilizando diversos fatores decorrentes da análise dos dados existentes, permite estimar e balizar os custos dos contratos de assistência negociados por duas das empresas do grupo. O processo baseou-se na modelação probabilística de custos acumulados de reparação e de custos acumulados de manutenção, vistos como variáveis aleatórias independentes, em diferentes momentos da vida do contrato. O custo total do contrato pôde assim ser calculado em função do período de execução (tempo ou quilómetros) de quantis de interesse das distribuições ajustadas. Com base nos resultados do modelo, o gestor do produto pode assim determinar o valor final do contrato com um determinado nível de confiança.

A metodologia proposta, baseada em conceitos teóricos da área da Probabilidade e da Estatística, foi implementada em Phyton e R, resultando numa interface gráfica que permite ao gestor do negócio simular valores associados aos contratos de assistência, tendo em conta diferentes cenários.

Rolling Forecast

O projeto de Rolling Forecast foi desenvolvido juntamente com a equipa de gestão estratégica do grupo. Além de outros procedimentos, a equipa recorria mensalmente a uma ferramenta baseada em bandas de controle para identificar desvios significativos nos valores anunciados pelo gestor do negócio, relativamente a uma tendência prevista pelo grupo para os 15 meses seguintes. Apesar de altamente atrativa, a ferramenta exigia muito tempo de execução e era altamente dependente do utilizador. O objetivo deste projeto foi automatizar a ferramenta existente, torná-la independente do utilizador e proceder à eliminação de parâmetros de entrada não essenciais. Recorrendo a metodologias de previsão como redes neuronais, modelos ARMAX ou modelos de alisamento exponencial, bem como a outras ferramentas estatísticas, foi possível automatizar a obtenção das bandas de segurança. Desta forma, garantimos que diversos parâmetros utilizados no ajuste dos modelos de previsão e na definição da amplitude daquelas bandas passaram a ser baseados na informação extraída das bases de dados existentes, e não no livre-arbítrio dos utilizadores.

A solução foi desenvolvida na linguagem R, com exportação para o formato utilizado pela equipa de gestão estratégica, com suporte teórico oriundo das áreas da Estatística e da Análise de Dados.

CONCLUSÕES E FATORES RELEVANTES PARA O SUCESSO

Este trabalho pretende contribuir com uma visão matemática desta colaboração, focando o ponto de vista dos investigadores. O ponto de vista industrial foi apresentado por Margarida Pina, representante do Grupo Nors no *Industry Day* do *International Congress on Industrial and Applied Mathematics* (ICIAM2019)[3], realizado em Valência no ano transato. O artigo "Industrial Mathematics: driving a new management approach", que aguarda publicação na SEMA-SIMAI Springer Series, descreve os pontos mais importantes daquela contribuição. Fica a referência, para que os leitores que considerem interessante comparar estas duas visões sobre o mesmo assunto a possam consultar.

Nos diversos fóruns onde tivemos a oportunidade de apresentar este trabalho, fomos muitas vezes questionados sobre quais os fatores que consideramos mais importantes para o sucesso de uma parceria com esta longevidade. A título de resumo, parece-nos importante referir aqui os seguintes pontos:

1. Investigação dedicada à implementação prática do modelo. Apesar de o LEMA ser um grupo de investigação, em parcerias empresariais é sempre dada muita importância à construção de modelos matemáticos implementáveis com base nos recursos existentes nos parceiros industriais, e que permitam obter em tempo útil respostas às expectativas da empresa. Esta investigação direcionada, por oposição à chamada "investigação aberta", significa que à construção do modelo matemático (abstrato) deve estar associado o comprometimento com a implementação do modelo dentro da empresa, com os recursos aí existentes (concreto). Isto implica uma preocupação com a escalabilidade, a eficiência e os tempos de execução que têm de ser pesados para cada empresa em particular. Este facto poderá não permitir construir a melhor solução logo de raiz, sendo importante que todos os intervenientes o assumam desde o início. Para alguns matemáticos, esta restrição traz muitas vezes um sentimento menos positivo. Na realidade, os investigadores metódicos e perfecionistas têm dificuldade, nos trabalhos a que se propõem, em deixar de tentar otimizar a solução proposta. No entanto, a compreensão da heterogeneidade entre o tempo de investigação e o tempo dos negócios é uma condição fundamental para um salutar funcionamento de uma efetiva transferência de tecnologia entre matemática e indústria. Muitas vezes, isto foi ultrapassado com a construção de modelos intermédios (implementados em tempo útil), que posteriormente foram sendo substituídos por soluções cada vez melhores, sempre adaptadas ao tempo e aos recursos existentes.

2. Definição, *a priori*, de uma métrica de sucesso. Sempre que possível, tentamos encontrar a melhor forma de quantificar o estado atual da empresa com respeito a um dado problema ou desafio, com dois objetivos: perceber quais os *drivers* dos gestores e a política da empresa com respeito a um dado assunto e, posteriormente, ser possível quantificar qual o efetivo ganho para a empresa com a utilização das ferramentas matemáticas propostas. Frequentemente, isto permite parametrizar o modelo da forma mais eficiente possível, tendo em conta os objetivos daquela empresa em particular, ou seja, a construção de um "fato à medida", e não de um modelo genérico que automatize a resolução de um problema sem ter em conta as especificidades do parceiro industrial.

3. Recursos humanos. A existência de recursos humanos com forte formação matemática dentro da empresa tem duas consequências de extrema importância: a resposta em tempo útil aos problemas que surgem no dia a dia e, ao estarem embebidos no funcionamento diário da organização, a perceção de procedimentos e de atividades que possam beneficiar com a implementação de uma modelação matemática. No entanto, além das suas competências científicas, o perfil do matemático é fundamental para o sucesso. Algumas vezes constatámos que, apesar de possuírem uma capacidade científica de excelência, alguns alunos não conseguiam encontrar uma plataforma de comunicação e de convergência com os objetivos dos seus pares industriais, fundamental para uma efetiva transferência de tecnologia. A consciência de que o trabalho em meio industrial poderá não ter exatamente os mesmos objetivos que norteiam as suas atividades académicas é, no nosso ponto de vista, um ponto importante a referir numa entrevista prévia. Isto é particularmente relevante nas primeiras fases de uma par-

ceria deste tipo, em que é importante demonstrar a mais-valia da matemática para as empresas.

4. Definição clara dos objetivos e prioridades de cada uma das partes. Se do lado industrial este ponto costuma ser de fácil definição, do lado académico pode ser tentador avaliar o sucesso utilizando a métrica de publicação de artigos científicos. Se assim for, questões relacionadas com a propriedade industrial ou a confidencialidade podem surgir com facilidade. No presente caso, e muitas vezes com a abnegação dos investigadores associados, optamos por dedicar quase todo o esforço na demonstração de que a modelação matemática era útil para a empresa. Dessa forma, durante três anos, não publicámos praticamente nada sobre o assunto. Em contrapartida, a empresa apoiou o LEMA e a Matemática Industrial em geral, através de diversas atividades. Desde 2016, com o acordo e o apoio do grupo, passámos a apresentar os resultados em diversos eventos científicos, culminando com a publicação de artigos em revista. A compreensão, por parte dos diversos intervenientes no processo, dos prazos e objetivos relevantes para cada uma das partes foi também um fator fundamental para os resultados alcançados, porquanto permitiu às duas partes sentirem-se confortáveis e recompensadas por estes.

5. Comprometimento da empresa com o projeto. Na nossa opinião, este é um dos fatores mais importantes no contexto das atividades de transferência de tecnologia entre matemática e indústria. Na verdade, além das competências científicas necessárias, o resultado do nosso trabalho em muito depende dos *inputs* que recebemos dos operacionais e verdadeiros conhecedores da realidade empresarial. Este processo de transferência de informação e conhecimento do negócio custa tempo e recursos à empresa, mas é fundamental para o sucesso futuro. Naturalmente, com a apresentação de bons resultados provenientes dos modelos iniciais, este comprometimento torna-se natural por parte do parceiro industrial, que passa a entendê-lo como um investimento que traz bons dividendos a curto prazo.

Os resultados obtidos com esta colaboração permitiram atingir patamares que dificilmente algum dos intervenientes poderia antever no início de um simples projeto de estágio. No grupo Nors e em muitos seus colaboradores, existe já a consciência de que a Matemática Industrial é um parceiro de alto valor acrescentado que traz resultados práticos a curto prazo com respeito à eficiência das suas atividades comerciais. Adicionalmente, para muitos dos alunos finalistas que realizaram a sua tese no âmbito desta parceria, a Nors foi a porta de entrada no mercado de trabalho.

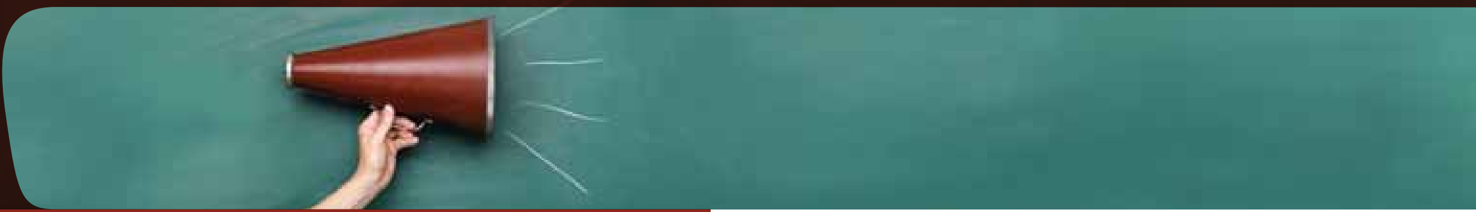
Para os investigadores envolvidos, este projeto mostrou que, além da sua mais-valia no avanço da ciência, as competências matemáticas, quando materializadas em ferramentas colocadas ao serviço de outras comunidades, facilitam tarefas diárias, aumentam a eficiência e apoiam gestores e colaboradores na tomada de decisões informadas e com suporte científico. Ao mesmo tempo, potenciou o contacto com outras realidades e a utilização do seu conhecimento científico em problemas que, tradicionalmente, estão fora do seu raio de ação. A consequente constituição de equipas multidisciplinares, baseadas em espírito e trabalho de equipa, conduziu também à aquisição de novos conhecimentos. Por todos estes motivos, o processo de transferência de tecnologia associado a este projeto foi, e continua a ser, deveras gratificante.

Manuel Cruz é professor adjunto no Instituto Superior de Engenharia do Porto e coordenador do Laboratório de Engenharia Matemática na mesma instituição. Foi eleito presidente da Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação em 2016 e é membro da direção executiva da Rede Europeia EU-MATHS-IN (European Service Network of Mathematics for Industry and Innovation) desde 2019. É doutorado em Matemática Aplicada pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Com um interesse especial pela área da Matemática Industrial, ao longo da sua carreira participou em diversos projetos de transferência de tecnologia de matemática para a indústria.

Sandra Ramos é professora adjunta do Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto. Doutorada em Estatística e Investigação Operacional (especialidade em Probabilidades e Estatística) pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, desenvolve atividade científica no Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa e no Laboratório de Engenharia Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto nas áreas da Estatística Fundamental e das aplicações da Probabilidade e Estatística na Indústria.

Coordenação do espaço PT-MATHS-IN:
Paula Amaral, Universidade Nova de Lisboa, *pt-maths-in@ spm.pt.*

[3] *https://iciam2019.org/index.php/scientific-program/industry-day*



Gonçalo Morais
Instituto Superior de Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM

ADÉRITO ARAÚJO

Adérito Araújo é formado e doutorado em Matemática pela Universidade de Coimbra, onde é atualmente professor associado. Ocupou durante a sua carreira diversos cargos de gestão, entre os quais podemos destacar o de vice-presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) e Editor da *Gazeta de Matemática* na altura em que comecei a colaborar com a mesma. É neste momento presidente do European Consortium for Mathematics in Industry. Pessoa de muitos interesses e com uma cultura geral e cívica de uma abragência ímpar, nesta transcrição focar-nos-emos essencialmente na sua visão sobre os diversos aspetos da Matemática.

GONÇALO Estamos numa universidade que tem 600 anos...

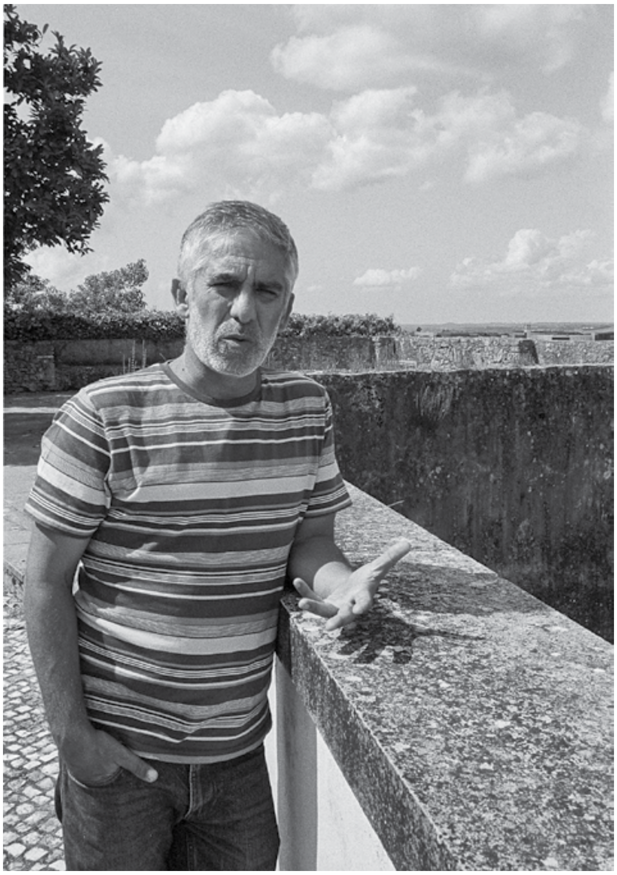
ADÉRITO 730!

GONÇALO Como é viver numa universidade com 730 anos?

ADÉRITO Podes perguntar como é viver numa cidade onde existe uma universidade que é quase maior do que a cidade em si. A presença da universidade em Coimbra é avassaladora porque a dimensão da cidade em relação à escala da sua universidade é pequena. Isso confere à cidade, e provavelmente também à universidade, um certo provincianismo. Os aspetos provincianos da universidade conferem alguns constrangimentos, mas, por outro lado, também sofre de uma má publicidade, ou seja, tem sempre de estar a mostrar que não é provinciana, que não é velha, etc. Tem sempre esse estigma. Acaba por ter esse peso da História, mas ainda assim consegue criar bolsas de dinamismo e uma vivência interna que não corresponde muitas vezes a essa imagem que passa.

Eu trabalho muito confortavelmente na Universidade de Coimbra e gosto muito de aqui estar. Se calhar, quando era estudante poderia ter conflitos mais fortes com a praxe e com essas tradições, mas não neste momento. Se calhar, devido à investigação que faço e às coloborações que estabeleci, a minha presença na Universidade de Coimbra é estimulante. O tipo de projetos que estabelecemos aqui é muito interessante e acabamos por não sentir essa limitação efetiva no dia a dia.

GONÇALO Há um outro aspeto curioso que é o facto de Lisboa ser um centro aglutinador muito forte em Portu-



gal, do qual o Porto está sempre a queixar-se, e com razão, mas Coimbra ainda está noutro plano...

ADÉRITO Nós estamos muito longe do poder. Antes do 25 de Abril, provavelmente não. Por causa desta polémica com o Benfica, o Medina vem dizer que não é do tempo daqueles políticos que eram todos da Académica. Coimbra antes do 25 de Abril era onde eram formadas as elites que governaram o País durante muitos anos e possivelmente Coimbra lucrou com isso. Neste momento Coimbra está afastadíssima do poder, também por sua própria culpa, porque não tem sabido criar protagonistas com relevância nacional.

GONÇALO Mas não só os governantes mas também muitos opositores saíam de Coimbra... Estou a lembrar-me, por exemplo, do Alberto Martins, protagonista da crise académica...

ADÉRITO À luz do presente podemos fazer uma ideia das coisas que não seriam exatamente assim. De facto, Coimbra tinha esse protagonismo... O Salazar era de Coimbra!

GONÇALO Mas o Marcelo Caetano era professor em Lisboa...

ADÉRITO Sim, mas houve uma geração política muito forte e possivelmente Coimbra sentiu-se órfã dessa relação. Mas a verdade é que é difícil encontrar algum protagonista nos meios de comunicação social que seja da Universidade de Coimbra. Por exemplo, com a decisão em relação à carne de vaca[1], em que eu não acompanhei o reitor na sua decisão, mas foi um festim na comunicação social a dizer mal da Universidade de Coimbra, não tendo surgido ninguém da própria instituição que defendesse a resolução.

Este exemplo é um *fait divers*, mas quando pensamos por exemplo na área económica, poderia haver uma opinião um pouco divergente face à de Lisboa porque as escolas são um pouco diferentes, sendo Coimbra mais de esquerda, e isso poderia ser interessante. Ou seja, se em alguns domínios Coimbra pode ter uma posição mais conservadora, noutros tem uma posição mais arrojada.

GONÇALO Eu recordo-me de ter ido a um jantar de curso de Direito aqui em Coimbra, realizado nas instalações da universidade, e os professores estavam lá a falar com os alunos. Nas várias universidades onde andei, eu nunca vi isto acontecer...

ADÉRITO Quando vim para Coimbra, havia *O Tropical*, que era um café, que tinha um conjunto de professores da Faculdade de Direito e outros, como o Joaquim Namorado, que era de esquerda e que era aqui da Matemática, e o Orlando de Carvalho. Eles ficavam a discutir e havia uma primeira roda formada por pessoas que lhes eram mais próximas e eu estava na terceira ou quarta roda. Havia essa dinâmica por parte dos professores de Direito. Existe uma célebre imagem do Orlando de Carvalho em abril de 69, quando a Associação Académica tinha sido ocupada, em que ele sai com um conjunto de professores de Direito para simbolicamente apoiarem os estudantes. A mesma Faculdade de Direito que era vista como próxima do regime era, e ainda é, progressista. Ou seja, um certo conservadorismo coexiste sempre com o progressismo.

[1] Em setembro de 2019, o reitor da Universidade de Coimbra decidiu banir a carne de vaca das cantinas da universidade, medida inserida numa estratégia para que a instituição atinja a neutralidade carbónica em 2030.

GONÇALO Focando-nos agora mais na matemática propriamente dita, como é que tu vês hoje a matemática em Portugal?

ADÉRITO Depende da forma como eu a comparo. Se eu a comparar com o que existia anos atrás, quando eu comecei, sinto que houve uma evolução enorme e que em certos aspetos estamos em bons *standards* internacionais. Se eu fizer essa comparação em relação aos nossos vizinhos espanhóis, julgo que ainda temos um longo caminho a fazer. Espanha parece-me que foi exemplar na forma como cresceu na matemática e neste momento é uma potência nessa área. Nós, por outro lado, temos uma escala pequena e por vezes privilegiamos mais a competição face a alguma colaboração. Julgo que se nós quisermos crescer mais, temos de colaborar mais do que competir, sobretudo na minha área. Isto com a certeza de que neste momento temos protagonistas com impacto internacional, alguns dos quais não estão cá, infelizmente, o que faz com que não tenha a certeza de os podermos classificar como matemáticos portugueses. Estou a lembrar-me por exemplo, do André Neves, que não pode ser considerado um matemático português porque está há tantos anos lá fora, ou da Irene Fonseca, ou do Afonso Bandeira, que já esteve no Courant e que agora está na Suíça.

O problema é que muitas vezes não temos nas nossas universidades condições para os ter cá e, de facto, é o que falta...

GONÇALO E perdemos uns quantos nos últimos tempos...

ADÉRITO Julgo que ao nível do doutoramento poderíamos ter um bom doutoramento no País, colaborando em várias áreas entre escolas, para podermos ser competitivos a outra escala.

No centro da Europa, por exemplo, existe um circuito dos matemáticos, porque eles estão perto uns dos outros. Pelo facto de estarmos nesta cauda da Europa é mais difícil que esse circuito aconteça. Parece-me que esse dinamismo de pessoas e ideias é crucial e nós estamos de alguma forma arredados desse circuito.

GONÇALO Falando um pouco da tua ligação com a SPM, e se calhar muitas pessoas desconhecem um pouco da história e das dificuldades que ela teve durante o Estado Novo, em que o seu estatuto nunca foi reconhecido oficialmente – estava em causa precisamente a liberdade de associação e de reunião – não achas que ela poderia ser mais um fator de criar uma estrutura mais global da matemática no nosso país?

ADÉRITO Eu acho que sim e sou um grande fã da SPM. Acho que há uma tendência para criarmos quintas e quintinhas. Em muitos países, as respetivas Sociedades de Matemática são muitas vezes vistas como uma associação de matemáticos puros, enquanto que as pessoas mais ligadas às aplicações e ao ensino estão um bocado arredadas das mesmas. Em Portugal aconteceu um processo semelhante, sobretudo com as pessoas ligadas ao ensino. Houve uma altura em que se procurou dentro da SPM criar uma discussão em torno dos temas ligados ao ensino e criou-se uma certa fricção, dando origem à Associação dos Professores de Matemática, algo que em si não tem problema porque as duas estruturas poderiam funcionar em paralelo. Atualmente na SPM a maior parte dos sócios são professores do Ensino Superior, estando os professores do Ensino Secundário mais afastados, o que para mim é uma pena. Os colegas mais novos, que por todas as razões não abundam, têm o tempo cada vez mais ocupado e não conseguem manter um compromisso com a SPM.

No tempo do Nuno Crato, a SPM conseguia ter um certo protagonismo nos meios de comunicação social, estando muito ligada às questões do ensino e da crítica ao *eduquês*...

GONÇALO Que sempre me pareceu que eram mais as opiniões do próprio Nuno Crato do que da SPM em si mesma...

ADÉRITO Com o Jorge Buescu, também conseguiu manter alguma da presença na comunicação social, pelo facto de ele ser uma pessoa muito mediática e que também tinha uma opinião muito vincada sobre as questões do ensino. Isto ajudou a criar uma perspetiva de que a SPM era chamada a opinar quando havia alguma questão relacionada com o ensino. Ou seja, para os nossos colegas do Ensino Secundário a SPM não tinha um grande enfoque nas questões do ensino, ao mesmo tempo que a imagem pública estava muito ligada a esses assuntos. A SPM nunca conseguiu esclarecer muito bem este dilema.

A matemática é muito mais rica do que isto e precisava de um certo esclarecimento. Não sei se com esta nova direção o vai ter. Por exemplo, quando fizemos esta rede portuguesa de matemática e indústria, fizemo-la enquanto uma secção da SPM. Existe uma outra secção autónoma dentro da SPM que é a das pessoas ligadas à História da Matemática. O CIM poderia igualmente ser uma secção dentro da SPM. Julgo que desta forma seriam claras as várias pontes da SPM para cada uma das áreas da matemática para quem nos olha. Se perguntares a uma pessoa fora da nossa área para que serve a matemática, ela dir-te-á que serve para o ensino. Uma melhor organização da SPM poderia criar uma instituição mais forte e que conseguisse mudar esta perspetiva.

GONÇALO O que não deixa de ser paradoxal quando sabemos que as profissões mais procuradas atualmente, ligadas sobretudo ao *data science*, têm uma forte componente de matemática...

ADÉRITO Pois...

GONÇALO Por outro lado, nunca se conseguiu criar uma relação afetiva por parte dos sócios com a SPM, um certo orgulho na instituição...

ADÉRITO Julgo que essa relação já existiu. Quando era estudante, a direção estava aqui e havia essa ligação. A SPM Centro ainda tem algum protagonismo e algum dinamismo nesse aspeto, mas perdeu-se essa ligação e aquilo que tu dizes, esse orgulho na sociedade da qual são sócios.

Também o facto de nas nossas carreiras termos de nos focar muito nas avaliações individuais faz com que hoje os mais novos tenham menos tempo livre do que nós tínhamos. Hoje tudo tem de ser transformado em projeto para concorrer a algum financiamento, o que faz com que tenhamos pouca disponibilidade para pensar para lá disto, sobretudo para as pessoas mais novas. A perspetiva que impera de pensarmos sobretudo no *Eu* é incompatível com esta perspetiva mais colaborativa.

GONÇALO Parece-me também que em Portugal existe uma ausência de referências. Por exemplo, quando entrevistei o Strang ou o Fefferman, uma das coisas que percebes rapidamente é que é ridículo ser mesquinho na presença de pessoas destas. Parece-me que esses exemplos escasseiam em Portugal...

ADÉRITO Esses exemplos existem, pessoas que não precisam de se afirmar por questões mesquinhas. Há pessoas que se se afastarem 100 metros do seu local de trabalho já ninguém as conhece, mas no seu local de trabalho são uns despotazinhos. O que me parece é que se esta lógica competitiva fosse estabelecida dentro de uma empresa, ela já tinha estourado. Como é que é possível estabelecermos uma lógica de avaliação individual, em que cada pessoa está a tentar fazer o seu percurso, sem tentarmos perceber qual é a estratégia geral para a escola... É a história da mão invisível do Adam Smith, em que se cada um procurar o sucesso individual, o bem comum está garantido. Ora isto foi já desmentido através da tragédia dos comuns. É precisamente isto que estamos a fazer com este processo de avaliação.

Eu, sendo a favor da existência de uma avaliação individual, julgo que este processo mesquinho minou a relação entre as pessoas. As pessoas fazem aquilo que faz servir para preencher mais uma coluna da folha de excel que lhes dará a avaliação final. Perdeu-se a lógica de fazer as coisas por uma relação afetiva que eu sentia existir há uns anos.

GONÇALO Hoje estás muito ligado às relações entre a matemática e a indútria. Como é que isso apareceu na tua vida?

ADÉRITO A primeira vez que tive uma ligação mais próxima na relação entre matemática e indústria deu-se através do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra e de uma colega, que ainda está no ativo, que é a professora Paula Oliveira. Ela tinha uma ligação com o Departamento de Engenharia Química que, por sua vez, tinha uma ligação com a Soporcel, uma fábrica de papel. Nesse processo havia a necessidade de encontrar um modelo para um reator químico, designado por digestor.

A Paula Oliveira é uma pessoa muito ativa e tinha sempre um interesse enorme em estabelecer uma ligação com outras áreas do saber. As primeiras reuniões que tivemos foram um bocado frustrantes porque as linguagens eram muito diferentes. A verdade é que depois desta fase inicial, essa ligação com os outros domínios começou a criar um interesse cada vez maior dentro do nosso grupo, e em mim em particular, que nos fez avançar.

Fizemos depois aqui em Coimbra aquilo que chamámos Laboratório de Matemática Computacional, à direção do qual eu estive mais tarde ligado, e que servia para dar visibilidade a uma matemática que se fazia aqui no departamento mas que pudesse ter interesse fora do mundo académico. Depois deste arranque, houve dois momentos que foram decisivos. O primeiro foi um projeto criado pela European Science Foundation chamado

Forward Look on Mathematics and Industry, que era uma espécie de *state of the art* e de qual o caminho a prosseguir nesta área. O segundo foi a minha ligação com os Grupos de Estudo com a Indústria, que começou em Oxford nos anos 1960 e que foi trazida para Portugal pelo Pedro Freitas que tinha estado no Reino Unido e que veio para Coimbra em 2007. Através do projeto europeu, acabei por me aproximar do European Consortium for Mathematics in Industry (ECMI), criando uma ligação desafiante com este tipo de problemas.

GONÇALO E, como presidente do ECMI, quais são os teus desafios?

ADÉRITO O ECMI é um consórcio de mais de 100 universidades e empresas, e pretendemos trabalhar à escala europeia em três vertentes. Uma primeira vertente prende-se com a transferência de tecnologia, promover o uso da matemática, como algo mais ligado ao Horizonte 2020 e à economia do que à investigação que se faz tipicamente. Muitas vezes evitamos o termo matemática e usamos os termos modelação, simulação e otimização que, ao fim e ao cabo é matemática, em contexto industrial. Já está demonstrado que existe uma relação positiva entre esta transferência e a inovação.

Um segundo aspeto é a ligação com a investigação através dos chamados grupos de interesse em várias áreas, como é o caso da medicina, do *Big Data*, das finanças, da educação à distância.

O terceiro aspeto é o da educação. A nossa área tem um problema que se prende com o facto de a maior parte dos cursos ser pouco focada na resolução de problemas. Isto significa ter um curso em que não damos matéria mas que em existe um conjunto de problemas que pretendemos resolver. Esta abordagem não é comum e o nosso comité educacional tenta estimular este género de abordagem.

Em paralelo, fazemos aquilo a que chamamos semanas de modelação, em que os alunos são confrontados com problemas não formulados em termos matemáticos que eles terão de resolver. Os alunos deparam-se com dificuldades muito frequentes neste tipo de problemas, que nunca aparecem nas escolas, que é a insuficiência de dados, o que impossibilita a resolução efetiva do problema, e uma limitação de tempo, que os obriga a procurar uma solução melhor do que aquela que já existe e não a solução ótima. Esta abordagem não é muito comum na matemática.

GONÇALO Na matemática e indústria existem dois pontos que são relativamente recentes para a matemática. O primeiro é uma questão ética, visto que os desenvolvimentos para os quais contribuímos podem acabar em indústrias, como as de armamento. O segundo ponto é que grande parte da investigação feita pelas universidades é financiada pelo Estado. Quando existe a transferência tecnológica que referiste para o setor privado, com o efeito multiplicativo que advém da inovação, não existe um retorno para o Estado desse investimento...

ADÉRITO Tocaste em alguns dos pontos a que eu sou muito sensível. Julgo que é urgente que as faculdades de ciências venham a ter uma comissão de ética e que os nossos alunos tenham uma preocupação nesta área, porque a matemática tornou-se uma coisa que pode ser perigosa, sobretudo para que não venhamos a ter o baque que os físicos tiveram na Segunda Guerra Mundial...

GONÇALO Ou o que os americanos tiveram nas últimas eleições presidenciais...

ADÉRITO Isso mesmo... Os matemáticos ainda se colocam um bocado à margem desses problemas. Julgo que vamos ter um desgosto grande. Os nossos alunos quando vão trabalhar para as empresas, deviam estar alertados para estes aspetos éticos do seu trabalho.

No ECMI fizemos um código de conduta para que se defenda a competitividade, por causa da origem pública do financiamento, de modo a que se proteja práticas saudáveis de competição no mercado. Neste momento já existe uma preocupação para que a indústria perceba que tem de pagar pelos serviços que as universidades lhe prestam. Temos de olhar esta relação de uma forma mais saudável, visto que muitas empresas usam esta ligação para usufruírem de fundos públicos sem a devida retribuição. Não é uma relação saudável. Esta passará por um compromisso com a sociedade e com os contribuintes. Por outro lado, é muito difícil medir o verdadeiro impacto da matemática...

GONÇALO Ainda por cima, porque ela perdura ao longo do tempo...

ADÉRITO Pois... Mas esse caminho tem de ser trilhado. Acho que todos temos muito a ganhar com esta relação entre matemática e indústria. Para a própria comunidade, o impacto que este tipo de questões pode ter na sociedade é muito importante, mesmo para quem não a faz. Por exemplo, na questão desta pandemia, se houver um matemático que disser três ou quatro barbaridades na televisão, a imagem que a sociedade terá dos matemáticos é que eles só dizem asneiras. Se disserem coisas acertadas, esta perceção é invertida. Ou seja, todos ganhamos ou todos perdemos se aquilo que for mais visível na matemática for bom ou mau.

GONÇALO É impossível não falar da pandemia. De facto, ficou-se com a ideia de que os matemáticos tiveram pouco a dizer... apesar de alguns terem dito muita coisa.

ADÉRITO A comunicação social queria previsões, tipo Zandinga, e houve matemáticos que entraram no jogo e isso foi péssimo. Os matemáticos devem construir cenários que ajudam à decisão, mas nunca podes ter a veleidade de fazer previsões, de construíres um gráfico que te diga que para a semana vai ser assim. Ainda para mais quando a recolha de dados é, na melhor das hipóteses, deficiente.

GONÇALO Adérito, obrigado!

ADÉRITO De nada, foi um prazer.

UM PRELÚDIO À MAGNÍFICA TEORIA DOS NÚMEROS PRIMOS

Thiago Augusto Silva Dourado

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo – IME/USP

thiago.dourado@ime.usp.br

> “O problema de distinguir os números primos dos números compostos e de exprimir estes últimos à custa dos seus fatores primos deve ser considerado um dos mais importantes e dos mais úteis em aritmética... A própria dignidade da ciência requer que todos os meios possíveis sejam explorados para a resolução de um problema tão elegante e tão famoso.”
>
> **C.F. Gauss,** ***Disquisitiones Arithmeticae*****,** Art. 329

INTRODUÇÃO

No clássico livro de Edmund Landau, ele escreve: “Gordon dizia algo como: `A Teoria dos Números é útil porque afinal podemos doutorar-nos com ela’.” [4, p. 40]. Isso dá uma ideia da visão que se tinha da teoria dos números, algo belo e majestoso, mas pouco útil. No entanto, tudo isso mudou após os anos de 1940, com o advento da criptografia moderna, cuja base é essencialmente a teoria dos números e em especial a teoria dos números primos. Neste artigo apresentamos resultados e problemas em aberto da teoria dos números primos. Partimos do mais básico, como a infinitude e o deserto de primos e vamos de forma paulatina evoluindo até chegarmos aos problemas estudados nos nossos dias. São nossos objetos os números de Fermat e Mersenne e sobre estes a Conjetura de Bateman-Selfridge-Wagstaff; a famigerada Conjetura de Goldbach e os avanços feitos nela até aos nossos dias, passando por Ivan Vinogradov e chegando até Harald Helfgott; o Teorema de Dirichlet e a “recíproca” de Green-Tao; Primos Gémeos e o importante teorema de Zhang; o Teorema do Número Primo e a Hipótese de Riemann, onde apresentamos a Conjetura de Hardy-Littlewood e a forma equivalente usando a função de Möbius para a hipótese de Riemann; e, por fim, apresentamos algumas fórmulas para a obtenção de números primos. Buscamos apresentar o que há de mais recente em cada assunto.

1. INFINITUDE E DESERTO DE PRIMOS

Os números primos recebem este nome devido ao que diz o Teorema Fundamental da Aritmética: *Todo o inteiro $n \geqslant 1$ pode ser escrito de forma única (a menos da ordem dos fatores) como o produto de primos.* Já nos *Elementos* (Livro IX – Proposição 20), Euclides provou a infinidade dos números primos. Reproduzamos essa prova:

[Em todo o texto p_n indicará o n-ésimo número primo.]

Suponhamos que $p_1, \ldots, p_n$ sejam todos os números primos, e seja $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Assim, devido ao Teorema Fundamental da Aritmética, existe ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant n$, tal que $p_\ell \mid N$, e como $p_\ell \mid p_1 p_2 \cdots p_n$, temos que $p_\ell \mid (N - p_1 p_2 \cdots p_n)$, isto é, $p_\ell \mid 1$, absurdo. □

Embora existam infinitos primos, pode ter-se um espaço tão grande quanto se queira entre dois primos subsequentes. Este *deserto primo* é dado pela sequência de um número n qualquer de números compostos:

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \ldots, (n+1)! + n + 1.$$

(Note que $\ell \mid (n+1)! + \ell$ para $2 \leqslant \ell \leqslant n+1$).

2. NÚMEROS DE FERMAT E DE MERSENNE

Pierre de Fermat conjeturou que os números da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ $(n \geq 0)$, hoje conhecidos como *números de Fermat*, eram todos primos. Os cinco primeiros números de Fermat, todos primos, são:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3, \quad F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5, \quad F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17,$$
$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257, \quad F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537.$$

Entretanto, em 1732, Euler mostrou que todo o fator primo de F_n é da forma $k2^{n+2} + 1$ e, testando tais números, mostrou que 641 divide F_5:

$$F_5 = 641 \cdot 6700417.$$

Com efeito, sabendo que $641 = 2^4 + 5^4 = 2^7 \cdot 5 + 1$, tem-se que $2^7 \cdot 5 \equiv -1 \pmod{641}$, elevando a quarta potência obtemos que $2^{28} \cdot 5^4 \equiv 1 \pmod{641}$ assim, usando que $641 = 2^4 + 5^4$, isto é, que $5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}$, obtemos que $2^{28} \cdot 5^4 \equiv -2^{28} \cdot 2^4 \equiv 1 \pmod{641}$, isto é, $-2^{32} \equiv 1 \pmod{641}$, ou, equivalentemente,

$$2^{32} \equiv -1 \pmod{641}.$$

Portanto $2^{32} + 1 = 2^{2^5} + 1$ é divisível por 641. □

Em 1877, Pépin [7, p. 71] deu o seguinte teste envolvendo números de Fermat:

$$F_n \textit{ é primo se, e somente se, } 3^{\frac{F_n - 1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}.$$

Lucas (1877) [7, p. 72] utilizou este teste para mostrar que F_6 é composto e Landry (1880) [7, p. 72] fatorizou-o:

$$\begin{aligned} F_6 &= 2^{64}+1 = 18446744073709551617 \\ &= 274177 \cdot 67280421310721. \end{aligned}$$

Em 1970, Morrison e Brillhart [7, p. 72] deram a decomposição de F_7:

$$\begin{aligned} F_7 &= 2^{128}+1 = 340282366920938463463374607431768211457 \\ &= 59649589127497217 \cdot 5704689200685129054721. \end{aligned}$$

A maior fatorização completa de um número de Fermat que se conhece é a de F_{11} [7, p. 73]:

$$\begin{aligned} F_{11} &= 319489 \cdot 974849 \cdot 167988556341760475137 \\ &\cdot 3560841906445833920513 \cdot \text{[número primo de 564 algarismos]}. \end{aligned}$$

Os fatores 319489 e 974849 de F_{11} foram obtidos por Cunningham (1899) [7, p. 73], outros fatores foram obtidos por Brent (1988) [7, p. 73] e a primalidade do último fator por Morain (1988) [7, p. 73].

Além dos primeiros cinco, listados acima, não se conhece nenhum outro número de Fermat que seja primo.

Em 1730, Goldbach deu uma prova da infinitude dos números primos usando números de Fermat. Ele provou que $\operatorname{mdc}(F_n, F_m) = 1$ para $n \neq m$. Isto de facto prova a infinitude dos primos, pois sendo infinita a sequência dos números de Fermat e não possuindo fatores primos em comum, isto não poderia ocorrer se o conjunto dos primos fosse finito.

Demonstração. *Mostremos inicialmente que a seguinte relação se verifica:*

$$F_0F_1\cdots F_{n-1} = F_n - 2.$$

Com efeito, para $n=1$ temos que $F_0 = 3 = F_1 - 2$. Supondo então o resultado válido para n, temos que

$$\begin{aligned} F_0F_1\cdots F_n &= (F_0F_1\cdots F_{n-1})F_n = (F_n-2)F_n \\ &= (2^{2^n}+1-2)(2^{2^n}+1) = (2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1) \\ &= 2^{2^{n+1}}-1 = 2^{2^{n+1}}+1-2 = F_{n+1}-2. \end{aligned}$$

Tomando $n < m$ temos, pela relação acima, que $F_0F_1\cdots F_n\cdots F_{m-1} = F_m - 2$, donde segue que $F_m - F_0F_1\cdots F_n\cdots F_{m-1} = 2$. Assim, se um número d divide F_n e F_m então d também divide 2, mas como F_n é ímpar, d não pode ser 2, portanto $\operatorname{mdc}(F_n, F_m) = 1$. □

Os números da forma $b^{2^m}+1$ com $m \geq 1$ e $b \geq 2$ são chamados *números de Fermat generalizados*. Em 1985, Dubner [7, p. 239] conseguiu descobrir números de Fermat generalizados bastante grandes que são primos, como, por exemplo, $150^{2^{11}}+1$. Num artigo publicado em 2002, Dubner e Gallot [7, p. 240] descreveram um método computacional para determinar a primalidade desses números. Com este processo já se conhecem mais de 200 números de Fermat generalizados que são primos. É de setembro de 2018 o maior primo generalizado de Fermat conhecido: $1059094^{2^{20}}+1$ (com 6317602 dígitos) [12].

Se a^n-1 é primo, $n>1$ e $a>1$, então $a=2$ e n é primo. Com efeito, como

$$a^n-1 = (a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1),$$

e o fator da direita é maior do que 1 ($a>1$) concluímos que $a-1$ deve ser igual 1, pois a^n-1 é primo, logo a deve ser igual 2. Assim sendo, suponha que $n = rs$, $1 < r, s < n$, logo $2^{rs}-1 = (2^r-1)(2^{r(s-1)}+2^{r(s-2)}+\cdots+2^r+1)$, o que contradiz o facto de $2^{rs}-1$ ser primo. □

Em 1974, Ligh e Neal [7, p. 76] mostraram que se 2^n-1 é uma potência de um número primo, ele próprio deve ser um primo e então n é primo, isto é, se $2^n-1 = p^m$ (m natural e p primo), então $m=1$. Os números $M_n = 2^n-1$ (com n primo) são chamados *números de Mersenne* e a sua introdução foi motivada pelo estudo dos números perfeitos.

Um número inteiro positivo é dito *perfeito* se é a soma dos seus divisores próprios. Tem este nome porque todos os números perfeitos são triangulares e hexagonais. Os seis primeiros números perfeitos são: 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056. Euclides (*Elementos*, Livro IX – Proposição 36) mostrou que se 2^n-1 é um número primo, então $2^{n-1}(2^n-1)$ é um número perfeito. Em 1747, Euler provou que todo o número perfeito par é da forma $2^{n-1}(2^n-1)$. Portanto, todo o primo de Mersenne gera um número perfeito par, numa correspondência unívoca entre ambos os conjuntos. Até ao presente momento, conhecemos 51 números primos de Mersenne, logo 51 números perfeitos. O maior número primo conhecido, que também é o maior primo de Mersenne conhecido, é devido a Patrick Laroche (dezembro de 2018): $2^{82589933}-1$ (com 24862048 dígitos) [11].

Em relação aos números de Mersenne, o problema que naturalmente se apresenta é o de saber se são primos ou compostos e, neste último caso, determinar os seus fatores primos. Em 1878, Lucas [7, p. 78] deu o seguinte resultado: *M_n é primo se, e somente se, $M_n \mid S_{n-2}$, onde S_ℓ é definida por recorrência:* $S_0 = 4$ e $S_\ell = S_{\ell-1}^2 - 2$. Um resultado clássico sobre os fatores primos de M_n foi enunciado por Euler em 1750 e demonstrado por Lagrange em 1775 e também por Lucas em 1878 [7, p. 76]: *Se p é um número primo e*

$p \equiv 3 \pmod 4$, então $2p+1$ divide M_p se e somente se $2p+1$ é primo; neste caso, se $p > 3$, então M_p é composto.

Conjetura de Bateman–Selfridge–Wagstaff (1989) [7, p. 83]. *Seja n um natural ímpar. Se duas das condições abaixo forem satisfeitas, então a terceira também o será:*

(i) n é igual a $2^k \pm 1$ ou a $4^k \pm 3$ (para alguma $k \geq 1$).

(ii) M_n é primo.

(iii) $\frac{2^n+1}{3}$ é um número primo.

3. CONJETURA DE GOLDBACH

Numa carta, datada de 7 de junho de 1742, Christian Goldbach escreveu a Leonhard Euler a seguinte afirmação:

(I) *Todo o inteiro $n > 5$ é a soma de três números primos.*

Euler respondeu-lhe que era fácil ver que a afirmação era equivalente à seguinte:

(II) *Todo o inteiro par $2n \geq 4$ é a soma de dois números primos.*

Esta é a famosa *Conjetura de Goldbach*. Muitos avanços foram feitos, conforme veremos, mas a conjetura em si segue aberta.

Provemos que de facto (I) e (II) são equivalentes.

Demonstração. *(I) $\Rightarrow$ (II), Se $2n \geqslant 4$, então $2n+2 = p+p'+p''$, onde p, p' e p'' são números primos. Um desses primos é então necessariamente par, por exemplo, $p'' = 2$; então $2n = p+p'$.*

(II) $\Rightarrow$ (I), Para $2n \geq 6$, temos por hipótese que $2n-2 = p+p'$, onde p e p' são números primos; assim $2n = 2+p+p'$ e $2n+1 = 3+p+p'$. $\square$

Em 1930, Lev Schnirelmann [7, p. 213] provou que qualquer número natural maior do que 1 pode ser escrito como a soma de, no máximo, C números primos, onde C é uma constante efetivamente computável. A constante C de Schnirelmann é o menor número com essa propriedade. O próprio Schnirelmann obteve $C < 800\,000$. Esse resultado foi posteriormente aprimorado por muitos autores, como Olivier Ramaré, que em 1995 mostrou que todo o número par $n \geq 4$ é de facto a soma de, no máximo, 6 números primos.

Um resultado menos exigente, conhecido como *Conjetura Fraca de Goldbach* diz o seguinte: Todo o número ímpar $n \geq 5$ é a soma de três números primos. Em 1937, Ivan Matveevich Vinogradov [7, p. 212] provou que todos os números ímpares suficientemente grandes podem ser expressos como a soma de três números primos. A prova original de Vinogradov, que usava o ineficaz teorema de Siegel-Walfisz, não dava um limite para "suficientemente grande"; o seu aluno K. Borozdkin (1956) [7, p. 212] deduziu que $e^{e^{16\,038}} \approx 3^{3^{15}}$ é grande o suficiente. A parte inteira deste número possui 4 008 660 dígitos decimais, portanto, verificar todos os números abaixo desse número seria completamente inviável. Em 2002, Liu Ming-Chit e Wang Tian-Ze [6] reduziram o limitante de Borozdkin para aproximadamente $n > e^{3100} \approx 2 \times 10^{1346}$. O expoente ainda era demasiado grande para admitir verificação computacional de todos os números menores. Em 2012 e 2013, o matemático peruano Harald Helfgott [5, p. 321] divulgou um par de trabalhos melhorando as estimativas de arco maior e menor o suficiente para provar incondicionalmente a Conjetura Fraca de Goldbach. O resultado de Helfgott implica diretamente que todo o número par $n \geqslant 4$ é a soma de, no máximo, 4 primos.

O teorema, devido a Jingrun Chen [2] e publicado em 1966, afirma que todo o número par suficientemente grande pode ser escrito como a soma de dois primos, ou um primo e um semiprimo (o produto de dois primos). Em 2002, Ying Chun Cai [1] provou que: *Existe um número natural N tal que todo o inteiro par N maior do que N é a soma de um primo menor ou igual a $n^{0,95}$ e um número com, no máximo, dois fatores primos.* Em 2015, Tomohiro Yamada provou a seguinte versão explícita do Teorema de Chen: *Todo o número par maior do que $e^{e^{36}} \approx 1{,}7 \times 10^{18723440711119348}$ é a soma de um primo e um produto de, no máximo, dois primos.*

4. TEOREMA DE DIRICHLET

Um teorema clássico e muito importante foi provado por Dirichlet em 1837:

Se $d \geqslant 2$ e $a \neq 0$ são números inteiros que são primos entre si, então a progressão aritmética

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad \ldots$$

contém uma infinidade de números primos.

Muitos casos especiais desse teorema já eram conhecidos, incluindo, é claro, o Teorema de Euclides sobre a infinidade de primos (quando $a = 2$ e $d = 1$). Provemos o caso particular em que $a = 5$ e $d = 6$ (que é bastante similar à prova de Euclides):

Dividindo um número qualquer por 6, os possíveis restos são 0, 1, 2, 3, 4 e 5 o que significa que um inteiro pode ser escrito numa das seguintes formas: $6\ell, 1+6\ell, 2+6\ell, 3+6\ell, 4+6\ell, 5+6\ell$. Logo, se p é um primo ímpar diferente de 3, então p é da forma $1+6\ell$ ou

$5+6\ell$. Para mostrarmos que existem infinitos primos da forma $5+6\ell$ vamos supor o contrário, isto é, que existe apenas um número finito deles. Sejam $p_0=5, p_1, p_2, \ldots, p_r$ estes números. Consideremos então o número

$$N=5+6p_1p_2\cdots p_r.$$

É claro que este número não é divisível por nenhum dos números primos $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_r$. Afirmamos que n possui um fator primo da forma $5+6\ell$, pois, caso contrário, seriam da forma $1+6\ell$, o que não é possível, uma vez que o produto de dois números da $1+6\ell$ é sempre desta mesma forma. Isto mostra que, ou n é primo e portanto da forma $5+6\ell$, ou n possui um fator primo da forma $5+6\ell$ que não está lista acima. Portanto, existem infinitos primos da forma $5+6\ell$. □

Em 2004, Ben Green e Terence Tao [5, p. 323] apresentaram uma "recíproca" do Teorema de Dirichlet. Eles mostraram que a sequência de números primos contém progressões aritméticas arbitrariamente longas, isto é, para cada número natural k, existe uma progressão aritmética formada por k números primos. Este resultado, entre outros, rendeu a Terence Tao a Medalha Fields de 2006.

Por exemplo, se $k=3$, temos: 7, 13, 19. A 12 de abril de 2010, Benoãt Perichon [5, p. 232], encontrou uma sequência contendo 26 primos:

$$43142746595714191+23681770\cdot 223092870\cdot n,$$

para n variando de 0 a 25. Este é o maior exemplo conhecido do Teorema de Green-Tao.

5. PRIMOS GÉMEOS

Números onde p e $p+2$ são ambos primos são ditos *primos gémeos*. Conjetura-se, mas não se sabe demonstrar até agora, que existem infinitos pares de primos gémeos. Os maiores primos gémeos conhecidos, devido a Chris Cal--dwell (setembro de 2018) são: $2996863034895\cdot 2^{1290000}\pm 1$ [12].

Em 1737, Euler provou que

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p}=\infty,$$

demonstrando assim, como consequência, a infinitude dos números primos. Assim, um caminho na tentativa de provar a infinitude dos primos gémeos seria provar a divergência da série destes números. Entretanto, em 1919, Viggo Brun [5, p. 311] provou que

$$\sum_{p,p+2 \text{ primos}} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right)=B\approx 1{,}902160583104.$$

Em 1949, P. A. Clement [5, p. 312] demonstrou que $(p, p+2)$ é um par de números primos gémeos se, e somente se, $4\left((p-1)!+1\right)\equiv -p \pmod{p\,(p+2)}$.

O matemático francês Alphonse de Polignac [7, p. 215] conjeturou, em 1849, de forma mais geral, que para cada natural k há infinitos pares de primos p e q tais que $q-p=2k$. O caso $k=1$ é a conjetura dos primos gémeos. A 17 de Abril de 2013, Yitang Zhang [5, p. 322] anunciou uma prova de que para algum inteiro n menor do que 70 milhões, há infinitos pares de primos cuja diferença é n. O artigo de Zhang foi aceite pela *Annals of Mathematics* no início de maio de 2013, sendo a sua primeira publicação desde o seu último artigo em 2001. Terence Tao, em sequência, propôs o *Polymath8* com a intenção de melhorar colaborativamente a cota de Zhang. Em abril de 2014, um ano após o anúncio inicial, a melhor cota provada é de 246, que melhora substancialmente a estimativa inicial de 70 milhões.

A conjetura de Andrica (1986) [7, p. 191], verificada numericamente para $2^{42}\approx 4{,}39\times 10^{12}$, afirma que

$$\sqrt{p_{n+1}}-\sqrt{p_n}<1.$$

Em 2005, Goldston, Pintz e Yldirin demonstraram que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n}=0.$$

6. TEOREMA DO NÚMERO PRIMO E A HIPÓTESE DE RIEMANN

Seja x um número real positivo, definimos $\pi(x)$ como o número de primos menores ou iguais a x. O Teorema do Número Primo [5, Apêndice A] afirma que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi\,(x)}{x/\log x}=1.$$

Isto é, $\pi(x)$ é assintótica a $x/\log x$. Este resultado é fundamental pois mostra como se distribuem os números primos. Na tabela 1 apresentamos alguns resultados numéricos deste quociente. O Teorema do Número Primo só foi demonstrado em 1896, de forma independente, por Jacques Hadamard e Charles Jean de la Vallée Poussin. Para demonstrar este resultado, ambos utilizaram a função zeta de Riemann, definida por

$$\zeta\,(s)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

em que s é um número complexo e a parte real de s é maior do que 1.

Tabela 1. Valores numéricos de $\frac{\pi(x)}{x/\log x}$.

x	$\frac{\pi(x)}{x/\log x}$
10	0,9210340372
100	1,151292546
1000	1,160502887
10000	1,131950832
100000	1,104319811
1000000	1,084489948

A função ζ de Riemann pode ser estendida a outros limites do plano complexo para além do indicado $\operatorname{Re} s > 1$. De facto, ζ pode ser estendida analiticamente a todo o plano complexo, com exceção de $s = 1$.

Se s é um inteiro negativo par, então $\zeta(s) = 0$, porém se s não está neste caso e $\zeta(s) = 0$, existe uma conjetura que afirma que se isto ocorre tem-se necessariamente que $\operatorname{Re} s = 1/2$. Esta conjetura é conhecida como *Hipótese de Riemann*, um dos Problemas do Milénio e vale um milhão de dólares!

Em 1914, G. H. Hardy [3] provou que existem infinitos zeros na função ζ na reta $\operatorname{Re} s = 1/2$. Levinson [7, p. 174], em 1974, mostrou que pelo menos um terço dos zeros da função ζ encontram-se na reta $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Definimos a função de Möbius da seguinte forma:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ (-1)^r & \text{se } n \text{ é o produto de } r \text{ primos distintos,} \\ 0 & n \text{ tem um fator quadrado.} \end{cases}$$

Em posse desta função, apresentamos uma formulação equivalente da Hipótese de Riemann [5, p. 192]:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \mu(k)}{n} = 0.$$

Na figura 1 apresentamos um gráfico desta razão.

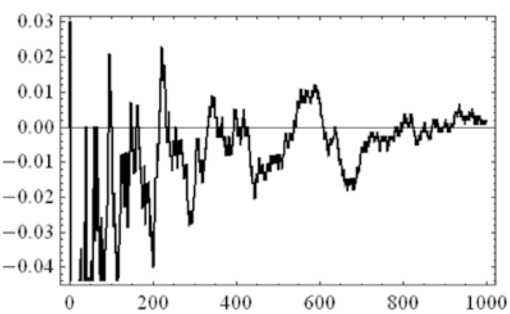


Figura 1. Gráfico de $f(n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mu(k)}{n}$, $0 \leqslant n \leqslant 1000$.

Na secção 1, apresentamos o deserto de primos. Em 1845, Joseph Bertrand, baseado em observações numéricas, afirmou que os primos não são tão "esparsos" assim [5, p. 201]:

Entre os inteiros $n \geq 2$ e $2n$, há sempre um número primo.

De maneira equivalente, a afirmação pode ser expressa pela desigualdade

$$\pi(2n) - \pi(n) \geqslant 1 \text{ (para } n \geqslant 2),$$

ou ainda por

$$p_{n+1} < 2p_n \text{ (para } n \geqslant 1).$$

Em 1923, Hardy e Littlewood [7, p. 182] apresentaram a seguinte conjetura que todavia segue em aberto:

$$\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y) \text{ para todo } x \geqslant 2, y \geqslant 2.$$

Em 1975, Rosser e Schoenfeld [7, p. 182] mostraram que

$$\pi(2x) < 2\pi(x) \text{ para } x \geqslant 5.$$

Também em 1975, Udrescu [7, p. 183] provou que: *Para todo o $\varepsilon > 0$, se $x, y \geqslant 17$ e $x + y \geqslant 1 + e^{4(1+1/\varepsilon)}$, então*

$$\pi(x+y) < (1+\varepsilon)(\pi(x) + \pi(y)).$$

Em 2002, Dusart [7, p. 183] provou que: *Se $2 \leqslant x \leqslant y \leqslant \frac{7}{5} x \log x \log\log x$, então*

$$\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y).$$

7. FÓRMULAS PARA NÚMEROS PRIMOS

Em 1964, C. P. Willians [7, p. 133] apresentou a seguinte fórmula para o n-ésimo número primo:

$$p_n = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \left\lfloor \sqrt[n]{\frac{n}{1+\pi(m)}} \right\rfloor.$$

Demonstração. Para $n \geqslant 1$ temos $2^n > n$, donde

$$0 < \frac{n}{1+\pi(m)} \leqslant n < 2^n,$$

e logo

$$0 < \sqrt[n]{\frac{n}{1+\pi(m)}} < 2.$$

Assim, a parte inteira do radical só pode ser 0 ou 1, e é 1 se e só se $n/(1+\pi(m)) \geqslant 1$, ou seja, se e só se $1 + \pi(m) \leqslant n$, o que equivale a $\pi(m) < n$, e vale se e só se $m < p_n$.

Como $p_n \leqslant 2^n$ para todo o n (isso segue do postulado de Bertrand), a soma

$$\sum_{m=1}^{2^n} \left\lfloor \sqrt[n]{\frac{n}{1+\pi(m)}} \right\rfloor$$

vale exatamente $p_n - 1$, o que prova o resultado. $\square$

O Teorema de Mináč-Ribenboim [7, p. 129] dá-nos uma fórmula explícita para o número de primos:

$$\pi(m) = \sum_{j=2}^{m} \left\lfloor \frac{(j-1)!+1}{j} - \left\lfloor \frac{(j-1)!}{j} \right\rfloor \right\rfloor.$$

Gandhi [7, p. 134], em 1971, também apresentou uma fórmula para o n-ésimo número primo:

$$p_n = \left\lfloor 1 - \frac{1}{\log 2} \log \left(-\frac{1}{2} + \sum_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{n-1}} \frac{\mu(d)}{2^d - 1} \right) \right\rfloor.$$

Em 1947, Mills [7, p. 137] demonstrou que existe um número real $\theta > 1$ tal que para todo o inteiro $n \geqslant 1$ o número

$$\left\lfloor \theta^{3^n} \right\rfloor$$

é primo. Mills determinou que θ é aproximadamente igual a 1,3064. Um estudo mais aprofundado do trabalho de Mills permitiu mostrar que se $c > 2,106$, existe um conjunto não enumerável de números reais $\theta > 0$ tais que para todo o inteiro $n \geq 1$ o número

$$\left\lfloor \theta^{c^n} \right\rfloor$$

é primo. Wright [7, p. 137], em 1951, mostrou que

$$g(n) = \left\lfloor 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{\omega}}}}}}} \right\rfloor,$$

com uma sucessão de n expoentes e $\omega \approx 1,9287800\ldots$, é um número primo.

Como foi visto no texto, o estudo dos números primos pode ser bastante frutífero e empolgante. Resultados novos e surpreendentes continuam a surgir. O que foi apresentado aqui não passa de um prelúdio a esta magnífica teoria.

REFERÊNCIAS

[1] Cai, Y. C., "Chen's Theorem with Small Primes". *Acta Mathematica Sinica*, 18, (2002), 597-604.

[2] Chen, J., "Sobre a representação de um grande número inteiro par como a soma de um primo e um produto de, no máximo, dois primos." [em chinês] *Kexue Tongbao.* 17, (1966), 385-386.

[3] Hardy, G. H., "Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann". *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 158, 1012-1014.

[4] Landau, E., *Teoria Elementar dos Números.* Tradução de Paulo Henrique Viana de Barros, Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2002.

[5] Martinez, F. B.; Moreira, C. G. T. A.; Saldanha, N. C.; Tengan, E., *Teoria dos Números: Um Passeio com Primos e Outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro.* 4ª. edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2018.

[6] Ming-Chit, L.; Tian-Ze, W., "Distribution of zeros of Dirichlet L-functions and an explicit formula for $\psi(t,\chi)$". *Acta Arithmetica* 102 (2002), 261-293.

[7] Ribenboim, P., *The Little Book of Bigger Primes.* Second Edition, Springer-Verlag New York, 2004.

[8] Santos, J. P. O., *Introdução à Teoria dos Números.* 3ª. edição, Coleção Matemática Universitário, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[9] Vieira, V. L., *Um Curso Básico em Teoria dos Números.* 2ª. Edição, Coleção Textuniversitários, 7, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2020.

[10] Yamada, T., *Explicit Chen's theorem.* arXiv:1511.03409, (2015-11-11).

[11] *GIMPS - Great Internet Mersenne Prime Search. https://www.mersenne.org/primes/?press=M82589933*

[12] *Top Twenty's Home Page. https://primes.utm.edu/top20/home.php.*

SOBRE O AUTOR

Thiago Augusto Silva Dourado é formado em Matemática Pura pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, um estado do centro-oeste brasileiro onde se localiza o Pantanal. Atualmente integra o corpo académico da Universidade de São Paulo – USP. As suas principais áreas de interesse são a álgebra e a teoria dos números, isto principalmente devido à influência de seus precetores e amigos Paulo Ribenboim, Carlos Gustavo Moreira - Gugu e César Polcino Milies, mas também nutre um enorme apreço pela filosofia e pela história da matemática.

Inês Bénard
Projecto RUTTER,
FC-UL
inesbenardc@gmail.com

PAR-DE-TŪṢĪ: ENTRE A ASTRONOMIA ÁRABE E A COPERNICIANA

Neste artigo comparamos brevemente o par-de-Tūṣī de Copérnico e o de Naṣīr al-Dīn al-Tūṣī, apresentando ao leitor elementos de uma controvérsia historiográfica que tem ganhado grandes dimensões nas últimas décadas.

Existe uma polémica em torno das teorias astronómicas de Nicolau Copérnico. Publicadas em 1543, propunham uma alternativa à astronomia ptolemaica, que pretendia descrever os movimentos celestes de uma forma não só matematicamente precisa, mas também coerente com os princípios de filosofia natural. Dito de outra forma, estas teorias pretendiam descrições matemáticas que obedecessem às várias restrições aristotélicas, e em especial à de que nos céus só poderiam existir movimentos circulares uniformes. *De revolutionibus orbium coelestium* marcou, principalmente por esse motivo, uma nova forma de fazer astronomia sem precedentes numa Europa renascentista do século XVI. Na tradição árabe medieval, no entanto, foi encontrada uma forma de astronomia cujas teorias se assemelhavam bastante às de Copérnico. Desde essa descoberta – há pouco mais de 60 anos – tem-se desenrolado uma polémica em torno das teorias copernicianas: Terá o astrónomo polaco tido acesso a fontes astronómicas árabes antes de publicar o seu trabalho?

A equivalência com a tradição árabe não está, contudo, igualmente presente em todo o trabalho de Copérnico. Pelo contrário, ela é evidente sobretudo nas teorias e nos modelos que descrevem os movimentos dos planetas e da Lua. Esses modelos, por sua vez, são compostos por um conjunto de círculos, ou pequenos mecanismos, que possuem determinados movimentos e se encaixam de determinada forma. O par-de-Tūṣī é um desses pequenos mecanismos e é em torno dele que se tem desenrolado uma parte da polémica mencionada em cima. Introduzido para garantir um movimento retilíneo a partir de dois circulares uniformes, Copérnico descreveu-o e aplicou-o nos seus próprios modelos de uma forma bastante semelhante à do astrónomo Naṣīr al-Dīn al-Tūṣī. Desde que esse facto foi apontado, o mecanismo tem sido comparado e analisado sistematicamente para argumentar quer a favor quer contra a hipótese de Copérnico ter tido acesso a fontes astronómicas árabes. Nesse sentido, e com o objetivo de apresentar ao leitor uma parte da polémica historiográfica, o que se propõe com este artigo é uma pequena descrição dessa comparação do par-de-Tūṣī em Copérnico e Naṣīr al-Dīn al-Tūṣī, tal como ela tem sido apresentada por alguns historiadores.

O QUE É O PAR-DE-TŪṢĪ?

O par-de-Tūṣī é um mecanismo de dois círculos cujo objetivo é produzir um movimento retilíneo, a partir de dois circulares uniformes. Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī introduziu-o em vários dos seus trabalhos ao longo do século XIII porque, consoante o contexto em que o utilizava, o mecanismo ganhava formas ou configurações que variavam entre si.

A versão mais conhecida do Par-de-Tūṣī – à qual Jamil Ragep chamou de versão retilínea matemática – foi introduzida em 1261 no *al-Tadhkirah fī 'ilm al-hay'ah* (Memorando sobre astronomia) a propósito do movimento longitudinal da Lua. Trata-se de um mecanismo bidimensional (figura 1) que consiste em dois círculos, um pequeno e um grande, em que o raio do círculo grande é igual ao dobro do raio do círculo pequeno. O círculo pequeno, por sua vez, encontra-se dentro do grande e é-lhe sempre tangente no ponto G. Os dois círculos apresentam ainda movimentos circulares uniformes em sentidos opostos e com velocidades distintas: o grande move-se em sentido direto com metade da velocidade do pequeno, o pequeno move-se em sentido retrógrado com o dobro da velocidade do grande. Destes dois movimentos, resulta um ponto (H) no círculo pequeno que se move em linha reta ao longo do diâmetro AB.

A segunda versão que é relevante mencionar neste artigo é a que Jamil Ragep chamou de "versão de dois círculos iguais". Esta forma do par-de-Tūṣī, introduzida em 1247 no *Taḥrīr al-Majisṭī* (Recensão do Almagesto), a propósito dos movimentos latitudinais dos planetas (a norte e a sul da eclíptica), é bastante próxima à descrita em cima. A única diferença entre as duas é o facto de, agora, os dois círculos terem diâmetros iguais. De resto, ambos continuam a descrever movimentos circulares uniformes em sentidos opostos e com velocidades diferentes: HLK (figura 2) move-se em torno do centro E, em sentido direto e com metade da velocidade do círculo ZE; e ZE move-se em torno de H, em sentido retrógrado e com o dobro da velocidade de HLK. Do conjunto destes dois movimentos, resulta um ponto (Z) no círculo ZE que se move continuamente sobre a semirreta GD.

Considere-se agora uma terceira versão do par-de-Tūṣī. Copérnico não introduziu, como al-Ṭūsī, várias formas e configurações do mesmo mecanismo. Em vez disso, apresentou uma única versão com três círculos (figura 3), que depois aplicou e adaptou em teorias e modelos específicos. Veja-se como.

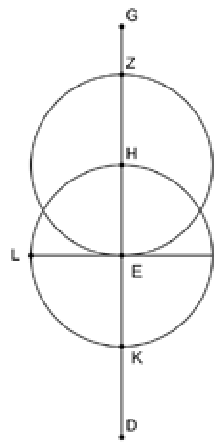


Figura 2. Versão de dois círculos iguais do par-de-Tūṣī.

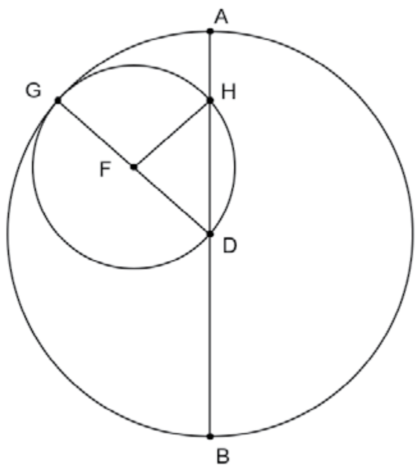


Figura 1. Versão "Retilínea Matemática" do par-de-Tūṣī.

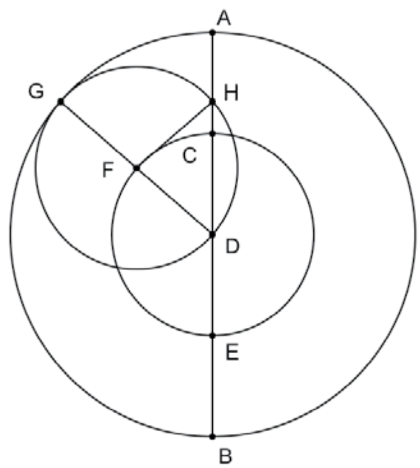


Figura 3. Versão coperniciana do par-de-Tūṣī.

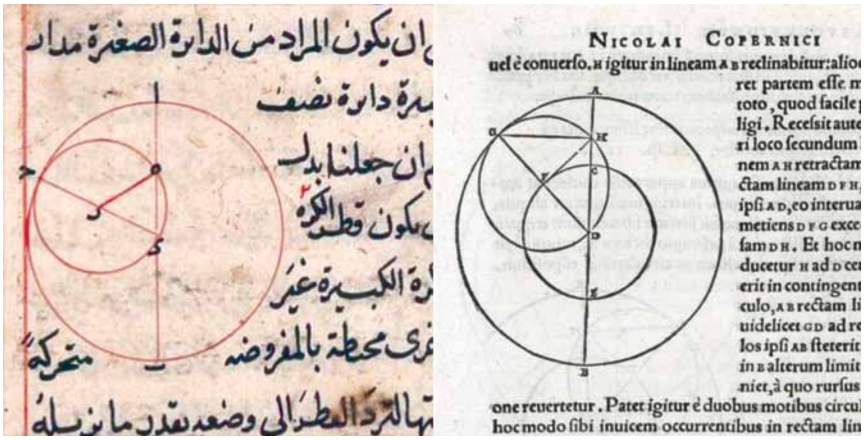


Figura 4. O par-de-Tūṣī no *al-Tadhkirah* de al-Tūṣī (esquerda) e no *De revolutionibus de Copérnico.*

Analisando, por um lado, a demonstração do mecanismo no capítulo IV do livro III – que Copérnico depois aplica nas teorias da trepidação, precessão e dos movimentos em latitude – encontra-se um par-de-Tūṣī equivalente à "versão de dois círculos iguais": EFC move-se em torno do centro D, em sentido direto e com metade da velocidade do círculo GDH, e o círculo GDH, por sua vez, em torno do centro F, em sentido retrógrado e com o dobro da velocidade do círculo EFC. Verifica-se então – como Barker e Heidarzadeh verificaram – que o círculo exterior é completamente supérfluo, limitando-se a segurar o diâmetro pelo qual o ponto H se irá mover.

Por outro lado, analisando o mesmo mecanismo representado no livro III – mas tendo em conta a forma como foi aplicado na teoria para o movimento longitudinal de Mercúrio –, a versão que se encontra é outra. Nesse caso, o círculo interior EFC desaparece e o mecanismo torna-se equivalente à versão retilínea matemática do par-de-Tūṣī. Esta também é formada por dois círculos, um pequeno e um grande, em que o primeiro – com um raio igual à metade do diâmetro do segundo – se encontra dentro do círculo grande de forma a ser-lhe sempre tangente no ponto G. Também aqui, os círculos apresentam movimentos circulares uniformes em sentidos opostos: o círculo pequeno move-se em sentido retrógrado com o dobro da velocidade do círculo grande, o círculo grande move-se em sentido direto com metade da velocidade do círculo pequeno.

Até agora, as três versões do par-de-Tūṣī foram apresentadas consoante as próprias configurações e as direções dos seus movimentos. Apesar de semelhantes – e repare-se que as direções correspondem em todos os casos –, é evidente que o mecanismo de Copérnico não é igual a nenhum dos de al-Tūṣī. Ainda assim, se se aceitar a hipótese de Barker e Heidarzadeh, de que a versão coperniciana é uma intermédia entre as duas de al-Tūṣī – uma versão que os leitores pudessem adaptar consoante os contextos em que ela fosse usada – então, mantém-se a possibilidade de Copérnico ter sido influenciado pelo trabalho do seu antecedente.

Avançando a comparação dos mecanismos um pouco mais e olhando para as próprias fontes, chega-se a mais uma correspondência entre as versões de al-Tūṣī e Copérnico. Ao olhar para os diagramas representados nos textos dos dois autores, Willy Hartner e George Saliba verificaram que a maioria das letras latinas utilizadas por Copérnico correspondia foneticamente às letras árabes usadas por al-Tūṣī no *al-Tadhkirah*. Onde al-Ṭūsī colocou um alif (ا), Copérnico colocou um "A", cujo som é idêntico, e o mesmo acontece com as letras ه, ج , ب , د , cujos sons correspondem aos das letras H, G, B e D respetivamente. A única letra no diagrama de al-Tūṣī sem uma equivalente no diagrama de Copérnico é ز , zaay, no lugar da qual Copérnico colocou um F, cuja equivalente árabe é 'faa', ف. Argumentando que estas duas últimas letras são facilmente confundíveis, a correspondência entre os dois digramas tem levado vários historiadores a considerar que Copérnico pode ter copiado o mecanismo de al-Tūṣī – uma hipótese que está longe de ser consensual. Muitos outros historiadores têm defendido a possibilidade de se tratar de uma coincidência, especialmente porque – como Blåsjö apontou –, se se atender a todo o diagrama de Copérnico, o astrónomo pode ter-se limitado a usar as letras do alfabeto latino A, B, C, D, E, F, G e H.

Em modo de conclusão, vale a pena realçarem-se dois pontos: a ausência de provas concretas e a dimensão de toda a polémica. O primeiro ponto refere-se ao facto de nenhum dos argumentos descritos em cima constituir em si mesmo uma evidência de que Copérnico terá, ou não, tido acesso a fontes árabes. Se é verdade que os mecanismos são semelhantes, é também verdade que não são idênticos; e, assim como alguns têm levantado a hipótese de transmissão de conhecimento, outros têm defendido a possibilidade de estes serem mecanismos equivalentes, mas independentes. O segundo ponto que é importante de se realçar – e com o qual termina este artigo – é o facto de o par-de-Ṭūṣī ser apenas um dos elementos que têm entrado na polémica em torno de Copérnico e da tradição astronómica árabe. Existem vários outros elementos – não só ao nível técnico das próprias teorias, mas também ao nível histórico-filosófico dos cenários em questão –, que devem ser considerados antes de se aceitar ou descartar uma ideia. Ainda assim, o que se pretendeu mostrar com este artigo foi como é que um pequeno teorema matemático pode carregar consigo uma discussão historiográfica tão grande.

BIBLIOGRAFIA

[1] Barker, P. and Heidarzadeh, T. (2016). *Copernicus, the Tusi couple and East-West exchange in the fifteenth century. In: M. Granada, P. Boner and D. Tessicini, ed., Unifying Heaven and Earth.* Essays in the History of Early Modern Cosmology. Barcelona: Universitat de Barcelona Edicions, pp.19-58.

[2] Blåsjö, V. (2014). "A critique of the arguments for Maragha influence on Copernicus", *Journal for the History of Astronomy*, 45(2), pp. 183–195.

[3] Ragep, J. (2017). "From Tūn to Toruń: The twists and turns of the Ṭūsī-Couple". In: J. Ragep ed., *Before Copernicus*. Montreal & Kingston. London.Chicago: McGill--Queen's University Press, pp.161-197.

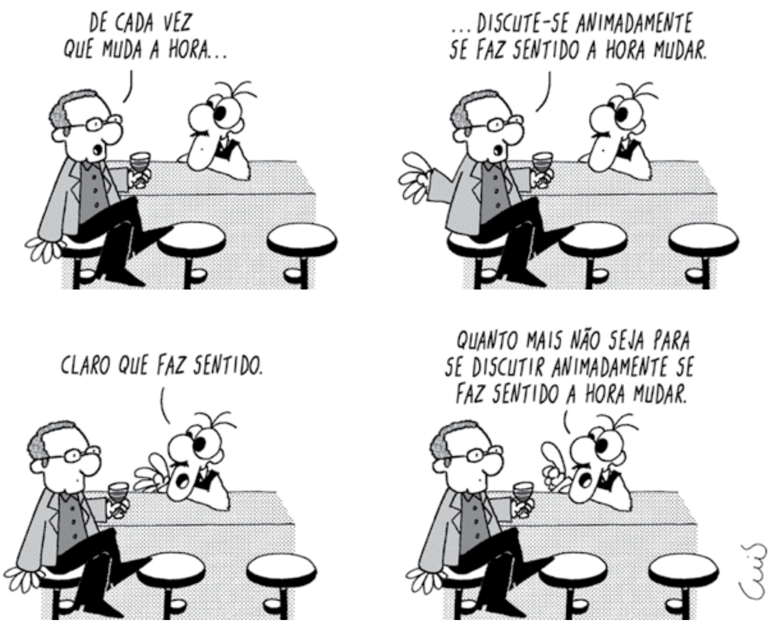
[4] Saliba, G. (2008). "Embedding scientific ideas as a mode of science transmission". In: E. Calvo, M. Comes, R. Puig and M. Rius, ed., *A Shared Legacy: Islamic Science East and West*. Barcelona: Universitat de Barcelona, pp.193-213.

Inês Bénard é mestre em História e Filosofia das Ciências e atualmente membro do projeto ERC "RUTTER: Making the Earth Global: Early Modern Nautical Rutters and the Construction of a Global Concept of the Earth" na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Coordenação do espaço HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:
Pedro Freitas, Universidade de Lisboa, *pjfreitas@fc.ul.pt*

BARTOON

Luis Afonso



Publicado originalmente no jornal Público, em 25/10/2020. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:
Daniel Pinto Universidade de Coimbra
Hugo Tavares Instituto Superior Técnico

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Juvenal Espírito Santo** Instituto Nacional de Segurança Social de S. Tomé e Príncipe e Universidade de S. Tomé e Príncipe • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Nisa Figueiredo** Thomas More Hogeschool Roterdão • **Paolo Piccione** Universidade de São Paulo • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
Fid'algo – Print Graphic Design
Rua da Nau Catrineta n 14 2º Dtr 1990-186 Lisboa

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO
Sociedade Portuguesa de Matemática
SEDE: Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt
NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: http://gazeta.spm.pt/politica

TIRAGEM **1250 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

Nuno Camarneiro
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

MAS, PORQUÊ?

O público exige dos cientistas que sejam oráculos ou milagreiros, coisas que não são nem querem ser. A ciência precisa de errar e de aprender com os erros, estará a sociedade disposta a esperar?

A pergunta costuma surgir por volta dos 3 ou 4 anos, na chamada "idade dos porquês", em algumas crianças acaba por se atenuar com o crescimento, noutras acompanha-as a vida inteira.

Queremos conhecer as causas e os processos de tudo o que nos rodeia: Por que razão algo acontece, como acontece, quando e sob que formas. Afinal é esse conjunto de perguntas (e mais algumas) que está na base da ciência, dos pré-socráticos aos contemporâneos. Porque são as coisas como são?

É natural que em tempos de pandemia a curiosidade se aguce, impelida pelo susto e pelo espanto, como sempre acontece quando a ciência humana se vê diminuída ou impotente. Ora, tão humano como o instinto da pergunta é também o da resposta e temos assistido a esforços variados e imaginativos que tentam explicar o que nos escapa.

Os que primeiro se aventuraram (hoje como sempre) estearam-se em argumentos de natureza religiosa: O vírus é uma forma de castigo ou de prova, uma praga à semelhança de outras mais antigas, uma forma de separar os justos dos bons, um juízo final com febres, insuficiência respiratória e tosse.

Logo vieram as explicações filosóficas com alguns enxertos de ecologia: A Natureza responde às nossas agressões agredindo-nos, a Covid é uma punição pelos nossos excessos, uma palmada na mão de uma espécie que sucumbiu à sua húbris.

Depois as mais profícuas e quase tão contagiosas como o próprio vírus: A estratégia chinesa para dominar o mundo, um modo de as farmacêuticas multiplicarem os lucros, a guerra biológica, o 5G, a QAnon… Teorias da conspiração para todos os gostos e bizarrias.

A ciência, mais preocupada com os processos do que com as pretensas causas morais, avança com hipóteses de mutações e estuda as diferentes estirpes de vírus, explora os mecanismos de transmissão, de animais para humanos e de *homo sapiens* para *homo sapiens*, propõe formas de a mitigar e às vezes acerta e outras falha. A ciência não explica, vai explicando, de forma gradual e cumulativa, a seu tempo (por mais que se tente acelerar), não mistifica nem oferece simplificações excessivas, a ciência é um pouco como a justiça: pode chegar tarde, mas há de chegar.

Temos, finalmente, o contributo das artes e da literatura. Daqui não se esperem explicações sobre processos ou causas, afinal, são outros os "porquês": Que nos vai ensinar esta pandemia? O que aprendemos e o que sentimos durante o confinamento? Em que medida somos ou não os mesmos humanos que enfrentaram a peste negra do *Decameron* de Boccaccio ou a peste bubónica do *Diário do Ano da Pest*e de Daniel Defoe?

Nenhuma outra espécie leva tão a peito os agravos da Natureza, é um efeito secundário da inteligência e da consciência que desenvolvemos, mas não nos fica mal assumirmos o ridículo. Afinal, é possível que a tal Natureza não queira castigar-nos, mas também é provável que não queira saber de nós.

RUI ZHU WANG FEZ HISTÓRIA NAS OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

Rui Zhu Wang foi o primeiro aluno a conseguir conquistar sete medalhas nas Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM), uma por cada ano de participação. Nesta edição arrecadou uma medalha de prata na categoria B. A participar na competição desde 2014, conquistou quatro medalhas de ouro, duas de prata e uma de bronze. Rui Zhu Wang foi aluno da Escola Secundária Tomás Cabreira, em Faro, e ingressou este ano letivo no Ensino Superior.

A família Zhu Wang não contou apenas com a medalha de Rui uma vez que Sophia Zhu Wang, sua irmã, conquistou uma medalha de bronze na Categoria Júnior, dirigida aos alunos dos 6.º e 7.º anos.

A cerimónia de encerramento das XXXVIII OPM decorreu na tarde de 3 de outubro, numa sessão online através da plataforma Zoom. O evento contou com a presença de José Vítor Pedroso, diretor-geral da Direção-Geral da Educação, João Araújo, presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, Ana Noronha, diretora executiva da Ciência Viva, a equipa de correção de provas e várias dezenas de alunos participantes.

A Final das XXXVIII Olimpíadas Portuguesas de Matemática, estava inicialmente prevista para ter lugar no final de março, nas Caldas da Rainha, e foi adiada devido aos constrangimentos provocados pela covid-19. Decorreu no dia 12 de setembro, com apenas uma prova, em vez das duas habituais, e pela primeira vez em cinco locais distintos, de forma a evitar aglomerados. A Universidade do Porto, a Universidade de Coimbra, o Instituto Superior Técnico, em Lisboa, a Universidade do Algarve e a Universidade da Madeira receberam os 90 alunos, selecionados nas primeiras duas eliminatórias.

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE MATEMÁTICA DECORRERAM VIRTUALMENTE PELA PRIMEIRA VEZ EM 60 ANOS

A 61.ª edição das Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) estava prevista realizar-se em julho deste ano em São Petersburgo, na Rússia, mas foi adiada para setembro devido à situação de pandemia de covid-19. Como em setembro também não estavam reunidas as condições necessárias para que a competição pudesse decorrer presencialmente, as IMO avançaram num formato virtual totalmente inovador, concebido ao longo dos últimos meses, com todos os protocolos de segurança em vigor na internet.

As medidas incluíram um centro de exames em cada país ou território participante, supervisionado por um comissário neutro das IMO. Os exames foram observados por webcams, com as imagens de vídeo enviadas para a equipa de vigilância na Rússia. E houve uma janela de quatro horas e 30 minutos no fuso horário UTC em que cada prova começava, de modo a não haver tempo entre a conclusão de uma prova num país e o início de uma prova noutro país.

A Rússia foi uma anfitriã à distância e Portugal participou nesta primeira edição virtual das Olimpíadas Internacionais de Matemática que decorreram de 20 a 28 de setembro. A cerimónia de abertura apresentou vídeos das diversas delegações, dando a conhecer as mais de 100 equipas e os 622 alunos participantes.

Uma medalha de prata, três de bronze e duas menções honrosas são o saldo da equipa portuguesa na competição. Pedro Costa Dias arrecadou a medalha de prata, ficando apenas a dois pontos da medalha de ouro, terminando de forma notável a sua última participação nas IMO. Já as medalhas de bronze foram conquistadas por Rui Zhu Wang, que terminou o 12.º ano, e Leonardo Tavares e Tiago Marques, que terminaram o 10.º ano. Tiago Mourão e Nuno Carneiro alcançaram ambos uma menção honrosa que é a distinção atribuída a quem tem uma resposta totalmente certa.

Da comitiva portuguesa faziam ainda parte Joana Teles, chefe de equipa, João Santos, tutor, e Alfredo Costa e Cristina Caldeira como observadores. Os alunos portugueses realizaram a prova no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

DYNAMIC CONTROL AND OPTIMIZATION 2021

A Conferência Internacional Dynamic Control and Optimization 2021 (DCO 2021) terá lugar na Universidade de Aveiro, Campus de Santiago, de 3 a 5 de fevereiro de 2021. A conferência é dedicada ao 65.º aniversário de Andrey V. Sarychev, professor da Universidade de Aveiro até 2002.

A conferência é organizada pelo Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, pelo Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA, Universidade de Aveiro) e pelo Centro de Matemática Aplicada e Economia (CEMAPRE, Universidade de Lisboa).

A conferência consistirá em palestras plenárias convidadas com a duração de 40 minutos com mais cinco minutos de perguntas e respostas, e apresentações de trabalhos com a duração de 20 minutos com mais cinco minutos de perguntas e respostas.

Devido à situação de pandemia de covid-19, a conferência está planeada para ser realizada de duas formas simultâneas: presencialmente na Universidade de Aveiro e usando virtualmente a plataforma Zoom.

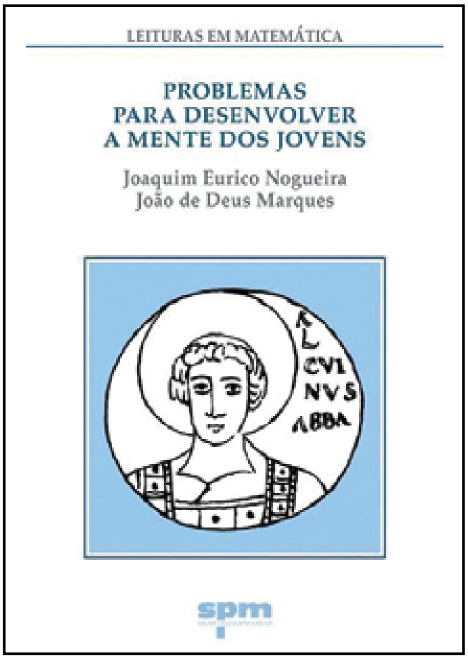
Consulte todas as informações em: *https://sites.google.com/view/dco2021/dco-2021*

PROBLEMAS PARA DESENVOLVER A MENTE DOS JOVENS

A coleção Leituras em Matemática acaba de lançar o livro *Problemas para Desenvolver a Mente dos Jovens*. Joaquim Eurico Nogueira e João de Deus Marques são os autores deste livro que apresenta uma tradução do latim da obra *Propositiones ad acuentos Juvenes,* de Alcuin de York.

Alcuin de York (≈735-804) foi um dos principais educadores e estudiosos do século VIII, no entanto a sua faceta matemática é a menos conhecida. Esta coleção de pouco mais de 40 problemas terá sido proposta ao imperador Carlos Magno, com quem colaborou no movimento designado Renascimento Carolíngio, para que este com eles se deleitasse. O grande interesse que os problemas suscitaram levou vários autores a reformulá-los e a generalizá-los nos séculos seguintes.

De acordo com os autores da versão portuguesa, a leitura desta obra para lá do interesse matemático permite-nos ter a perceção de múltiplos aspetos da vida social e religiosa da época em que foram redigidos.

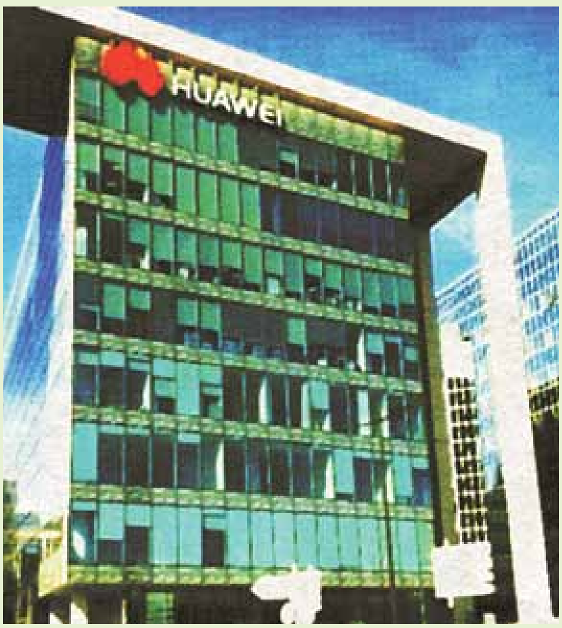


HUAWEI ABRIU CENTRO DE INVESTIGAÇÃO DEDICADO À MATEMÁTICA E À COMPUTAÇÃO EM PARIS

A Huawei inaugurou um novo polo de Investigação e Desenvolvimento (I&D) nas áreas de matemática e computação, em França. O Centro Lagrange reúne na região de Ile-de-France cerca de 30 cientistas provenientes de vários pontos do mundo.

Sob a responsabilidade do professor Mérouane Debbah, diretor de I&D da Huawei França, o trabalho desenvolvido no Centro Lagrange será partilhado com o meio académico e a comunidade científica. Tendo em vista a troca de conhecimentos, serão organizados seminários em colaboração com vários parceiros de investigação, como o Institut des Hautes Études Scientifiques, a École Normale Supérieure e outras instituições internacionais.

William Xu, CEO da Huawei França, assinala que o Centro Lagrange "é uma plataforma aberta aos matemáticos de todo o mundo, cujo objetivo fundamental passa pela execução de trabalhos de investigação que nos permitam ir além dos limites, e cujos resultados vão beneficiar toda a indústria".



PRÉMIO CIÊNCIA VIVA EDUCAÇÃO 2020

O Campeonato de Jogos Matemáticos foi distinguido com o Prémio Ciência Viva Educação 2020. A cerimónia de entrega de prémios terá lugar no dia 27 de novembro, no Pavilhão do Conhecimento, e contará com a presença do ministro da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, Manuel Heitor.

O Campeonato conta com 16 edições e é organizado conjuntamente pela Sociedade Portuguesa de Matemática, pela Associação de Professores de Matemática e pela Ludus.

Os Prémios Ciência Viva são atribuídos anualmente como reconhecimento por intervenção de mérito excecional na divulgação científica e tecnológica em Portugal.

VII FEIRA DA MATEMÁTICA

Os dias 23 e 24 de outubro foram repletos de atividades científicas, culturais e educativas na VII feira da Matemática. Este ano a Feira teve um programa exclusivamente online, o que permitiu chegar a um público ainda mais vasto. Para quem não assistiu em direto, algumas das sessões foram gravadas e estão agora disponíveis em *https://www.youtube.com/playlist?list=PLF_FzNTG1jyrKLIsIwydcG0zoUlutOnQ3.*

Não perca a palestra "Matemática da Pandemia covid-19", pela matemática e especialista mundial Gabriela Gomes. Os modelos matemáticos capazes de descrever séries temporais de infeções, hospitalizações e mortes atribuídas ao novo coronavírus existem em abundância, mas divergem nas trajetórias que preveem para o futuro desenrolar da pandemia.

A Geometria Divertida (mesmo à distância) é um workshop para aprender a construir vários poliedros e polígonos, utilizando materiais pouco usuais como, por exemplo, balões. Marília Pires e Maria da Graça Marques, ambas professoras na Universidade do Algarve, gravaram um divertido vídeo.

A Geometria de Almada Negreiros, por Pedro Freitas; Matemática e Astronomia: uma ligação moderna com muitos séculos, por João Fernandes; ou Anamorfoses: como criar ilusões de ótica com a geometria descritiva, por António Araújo, são outras sessões disponíveis a não perder.

A VII Feira da Matemática foi organizada conjuntamente pelo Museu Nacional de História Natural e da Ciência da Universidade de Lisboa, pela Sociedade Portuguesa de Matemática, pela Associação de Professores de Matemática, pela Associação Ludus, pela Matemática do Planeta Terra, pela Sociedade Portuguesa de Estatística e pela Associação Portuguesa de Investigação Operacional.

Gazeta de Matemática

TABELA DE **PUBLICIDADE 2021**

Características Técnicas da Revista

Periodicidade: Quadrimestral
Tiragem: 1900
Nº de páginas: 64
Formato: 20,2 x 26,6 cm
Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

Condições Gerais:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

Contactos

Tel.: 21 793 97 85
imprensa@spm.pt

Especificações Técnicas:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK
Resolução: 300 dpi (alta resolução)
Margem de corte: 4 mm

Localizações Específicas:

Verso capa: 1240€
Contracapa: 1100€
Verso contracapa: 990€

	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	**590€**	**390€**	**220€**	**120€**	**220€**
PAR	**490€**	**290€**	**170€**	**120€**	**170€**

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.

João Araújo
Presidente da SPM
presidente@spm.pt

MATEMÁTICA EM TEMPO DE PANDEMIA

O caminho é em frente!

No passado dia 11 de setembro teve lugar a tomada de posse da nova direção da SPM com a seguinte composição: presidente: João Araújo (FCT NOVA), vice-presidentes: Patrícia Gonçalves (IST) e Jorge Milhazes de Freitas (FCUP); vogais: Alexandra Moura (ISEG), tesoureira; Isabel Hormigo (E. S. D. Filipa de Lencastre); Mário Bessa (UBI); Ana Jacinta Soares (U Minho); Joana Teles, (FCT UC); Gabriela Gomes (University of Strathclyde); Luís Malheiro (ES da Ramada) e Pedro Antunes (UAb). Uma equipa com investigadores e professores de diferentes níveis de ensino, alguns que se estreiam nestas funções e outros que acumulam longa experiência diretiva.

O maior desafio atual é seguramente a pandemia. Por um lado, temos toda a perturbação das atividades habituais da SPM, mas, dada a relevância que a matemática tem demonstrado para a análise do problema, temos também a necessidade e a oportunidade de marcar presença na praça pública alimentando o estudo, o debate e as políticas com dados sólidos e potencialmente úteis.

A Escola de Verão, o Encontro Nacional da SPM, as sessões de divulgação, as ações de formação, as Olimpíadas, os diversos protocolos, tudo quanto tem ocupado a SPM terá de ser pensado e programado num quadro de grandes incertezas, mas não nos deixaremos abater pelas dificuldades.

A direção da SPM tem certamente de lidar com questões de administração diária, mas quer estabelecer um plano estratégico que permita assegurar a sua sustentabilidade a longo prazo sem sobressaltos nem fragilidades.

Em colaboração com os restantes corpos gerentes da nossa sociedade, com os colaboradores mais ativos e com todos os associados, propomo-nos auxiliar o trabalho das delegações regionais, no respeito da sua autonomia, promovendo as suas ações e iniciativas; organizar campanhas de captação de novos sócios, individuais e institucionais, aumentando os benefícios de ser sócio e imprimindo maior dinamismo na ligação entre o sócio, a sociedade e a comunidade matemática, dedicando particular atenção aos mais jovens; dinamizar os canais de comunicação com os associados, afirmando a presença da sociedade em todo o País, e também dar mais visibilidade mediática à matemática.

No que concerne à investigação e ao Ensino Superior, pretendemos continuar a patrocinar a publicação da revista *Portugaliae Mathematica*; respaldar institucionalmente a Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação (PT.MATHS.IN); apoiar as atividades da secção autónoma do Seminário Nacional de História Matemática (SNHM) e continuar a colaborar com o CIM e com a Comissão Nacional de Matemática.

Continuaremos a publicar a *Gazeta de Matemática* e o *Boletim* da SPM.

No âmbito do ensino, pretendemos manter uma intervenção pública ativa na defesa de um ensino de Matemática de qualidade; dinamizar o Gabinete para o Ensino Básico e Secundário (GEBS), promovendo análises e debates sobre as várias áreas da educação, acompanhando e emitindo pareceres e tomadas de posição rigorosas sobre as alterações que vierem a ser implementadas na área do ensino; promover o Centro de Formação, reforçando o seu funcionamento através de ferramentas tecnológicas que permitem disseminação "online"; apoiar os professores de Matemática de todo o País através de um consultório de matemática, organização de eventos, fóruns de discussão e outras iniciativas, incluindo as emblemáticas Olimpíadas de Matemática.

Na esfera da divulgação, pretendemos continuar a promover a realização das Tardes de Matemática e, eventualmente, introduzir outros formatos, privilegiando a transmissão "online"; procurar estabelecer parcerias com as instituições de referência na área da divulgação científica, como o Pavilhão do Conhecimento-Ciência Viva, assim como com outras entidades científicas e possíveis parceiros institucionais.

Há dificuldades internas e externas para superar, mas com o apoio e a mobilização de todos estamos confiantes de que acabaremos este período mais fortes.

QUER SER SÓCIO DA SPM?

COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos.
Contacte-nos!

VALOR DE QUOTAS 2019:

Sócio Efetivo: 40 euros

Sócio Estudante: 20 euros
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais
- Escolar: 80 euros
- Académico: 400 euros
- Corporativo: 600 euros

CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.

INFORMAÇÕES

Av. da República, 45 3.º esq
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785
E-mail: spm@spm.pt

www.spm.pt

CONSTRUA UMA
BANDA DE MÖBIUS
COM ESTA PÁGINA

A B

B A

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt***.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2021

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

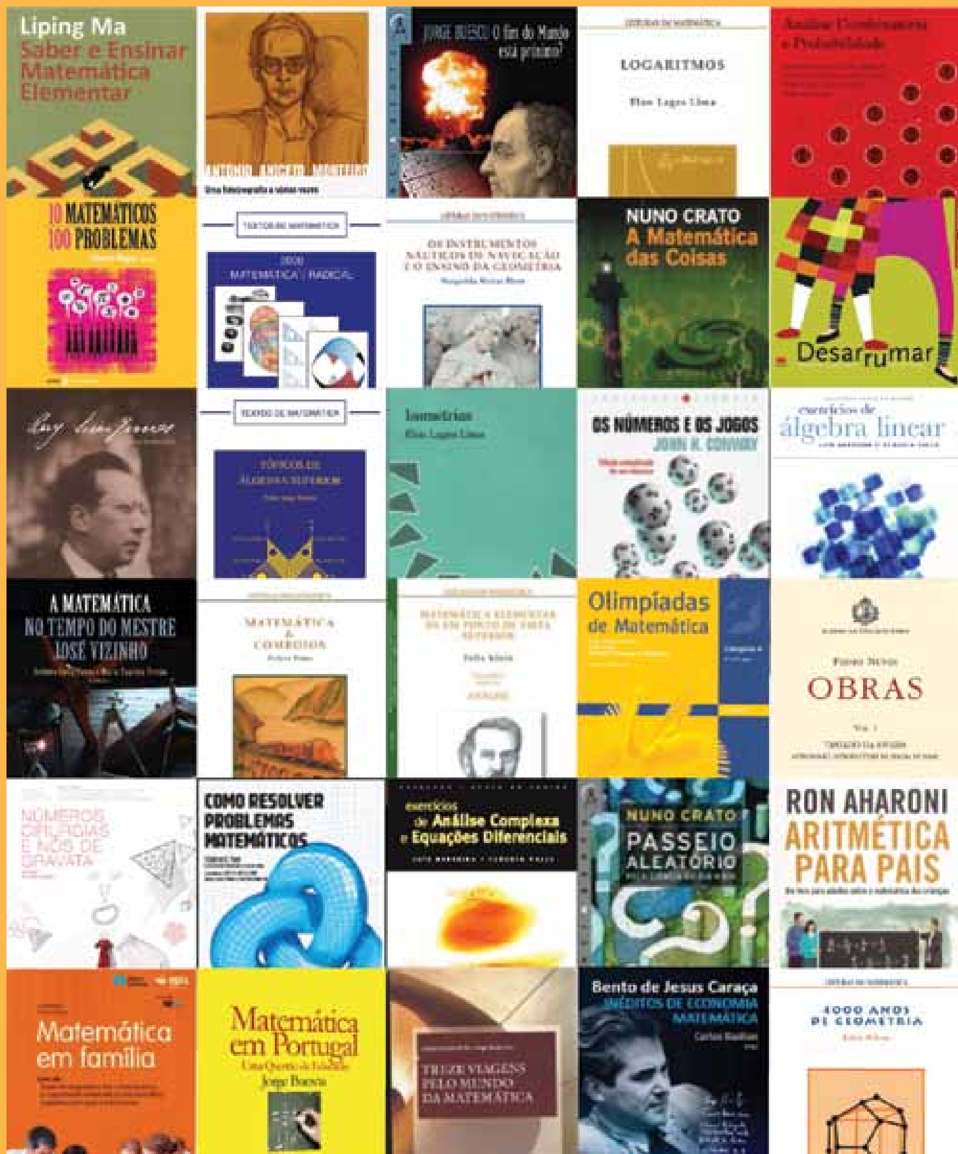
www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3º esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*

VISITE A LOJA SPM EM *WWW.SPM.PT*



spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR