N.0190

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA | Ano LXXXI | Mar. 2020 | 4,20€

O *Tratado da Prática Darismética* de Gaspar Nicolás

HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA

Pedro J. Freitas

A História de Uma Parceria - Entrevista com Claude Brezinki e Michela Redivo-Zaglia

Kenier Castillo e Zélia da Rocha

Lagrange, as Multas e os Recordes de Atletismo

CANTO DÉLFICO

João Filipe Queiró

ÍNDICE

06 **A MATEMÁTICA DA ORDEM DA MOVIMENTAÇÃO DAS PEÇAS DA TORRE DE HANÓI**

16 **A GEOMETRIA DA REGRESSÃO LINEAR**

32 **A HISTÓRIA DE UMA PARCERIA** **ENTREVISTA COM CLAUDE BREZINSKI E MICHELA REDIVO-ZAGLIA**

42 CONVERSA COM... **João Paulo Carvalho Dias**

EDITORIAL

SÍLVIA BARBEIRO
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

ARITMÉTICAS QUINHENTISTAS, TEOREMAS CLÁSSICOS NA VIDA MODERNA, PERCURSOS DE SUCESSO E OUTRAS ESTÓRIAS

Tenho muito gosto em apresentar o número 190 da *Gazeta de Matemática* bem recheado de artigos que informam, esclarecem, estimulam, desafiam e até divertem.

Quem abrir estas páginas vai encontrar fortes motivos para se deter nelas. Pode ler sobre o *Tratado de Prática Darismética* de Gaspar Nicolás, o primeiro livro de matemática impresso em Portugal, editado em 1519. Fica a conhecer a relação entre o Teorema de Lagrange e o artigo do Código da Estrada que fixa os limites gerais de velocidade nas vias públicas. É provável que se surpreenda com a conclusão, suportada por esse mesmo teorema, sobre uma discussão acerca de quem realmente detém o recorde mundial de uma prova de atletismo. Vai inteirar-se sobre o percurso profissional de dois especialistas notáveis em Análise Numérica, Claude Brezinski e Michela Redivo--Zaglia, que mantêm uma colaboração que dura há mais de três décadas.

Foram destacadas boas razões para saborear o miolo desta revista, mas há mais oportunidades que se recomendam: uma visita à extraordinária carreira de João Paulo Carvalho Dias, que inclui narrativas dos seus encontros com alguns dos maiores nomes da matemática da segunda metade do século XX; a estória de uma fórmula que ganhou nova vida após a sua redescoberta por Terence Tao e seus coautores, depois de ter sido deduzida várias vezes no passado e de ter sido esquecida outras tantas; uma incursão às viagens de ficção científica e considerações sobre as trajetórias eficientes para as conquistas espaciais no futuro; uma abordagem geométrica do tema da regressão linear, a pensar no seu ensino; a configuração da torre de Hanói na *i*-ésima jogada para a solução do jogo que utiliza a menor quantidade de movimentos possível; um modelo matemático para otimização de tarifas dinâmicas no mercado retalhista de eletricidade. E há problemas, notícias e outros entreténs.

A *Gazeta de Matemática* publica artigos sobre matemática, sobre matemáticos, sobre a história e a cultura da matemática, e sobre a sua interdisciplinaridade. Escritas num estilo informal e envolvente, as nossas páginas pretendem informar e entreter um amplo público composto por quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa por estes temas. Tem sido uma preocupação dos editores publicar artigos que retratem a diversidade de comunidades matemáticas e pensamento matemático, novas ideias, tendências e áreas emergentes. E temos exemplos deste esforço bem-sucedido nos trabalhos que publicamos, como nos excelentes artigos deste número que oferecem uma grande variedade de assuntos e pontos de vista. Numa perspetiva de fomentar a inovação e o enriquecimento, queremos que a nossa comunidade alargada se sinta convidada a contribuir, partilhando os seus interesses em forma de artigo.

Este número da *Gazeta de Matemática* conta com a equipa editorial renovada. Gostaria de agradecer a todos os participantes, aos membros cessantes e aos que iniciaram o novo mandato o excelente trabalho, a forte dedicação e o enorme entusiasmo.

Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

ADIVINHAÇÃO MATEMÁTICA

A Matemática Recreativa tem muita magia, no sentido em que muitas atividades de entretenimento são simultaneamente mágicas e matemáticas. Os autores mais consagrados da literatura, como Fibonacci (século XIII) e Pacioli (séculos XV-XVI), propuseram vários truques notáveis, alguns com cartas, outros com dados, outros ainda puramente aritméticos. Hoje vamos propor aos nossos leitores um truque de Luca Pacioli que surge no seu *De Viribus Quantitatis*, do começo do século XVI.

De Viribus Quantitatis[1] é uma obra incontornável, ainda hoje objeto de estudo, em parte por se tratar de um livro exclusivamente de Matemática Recreativa escrito por um matemático muito relevante.

A situação é a seguinte. Um voluntário pensa num número e soma-lhe a sua metade. Se a determinação da metade originar um número não inteiro, deve arredondar-se por excesso. Ao número assim obtido aplica-se o mesmo procedimento. Agora, comunica-se ao Mágico a parte inteira da divisão do número obtido por 9, assim como as ocorrências em que foi necessário proceder a arredondamento para permanecer nos inteiros. O Mágico ouve e adivinha o número original.

Vejamos um exemplo. Eu penso no 10. 10 mais metade de 10 é 15. 15 mais metade de 15 é 22.5, pelo que se passa a 23. Como $23 \div 9 = 2.5\ldots$, eu digo ao Mágico "deu 2 e tive problemas na segunda operação". Este ouve e responde "10 era o teu número original". Em notação óbvia, onde uma seta simples significa ausência de arredondamento e a dupla indica que tal arredondamento foi necessário (a última seta representa a divisão por 9):

$$10 \rightarrow 15 \Rightarrow 23 \rightarrow 2$$

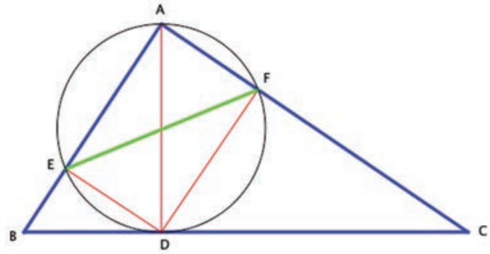
Mais dois exemplos:

$$5 \Rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 1 \qquad\qquad 31 \Rightarrow 47 \Rightarrow 71 \rightarrow 7$$

Em qualquer caso, o Mágico ouve o resultado final, bem como o registo dos arredondamentos, e adivinha o número inicial. Como?

Sobre as questões do número anterior:

Invariância: Dado um triângulo acutângulo ABC, baixando uma altura, encontramos um ponto D na base do triângulo. Por D tracemos perpendiculares sobre os outros dois lados, obtendo assim os pontos E e F. Mostre que o comprimento do segmento EF independe do vértice a partir do qual se traçou a altura.



Façamos a construção a partir do vértice A. Como $\angle DFA$ e $\angle DEA$ são retos, a circunferência de diâmetro AE contém E e F (Tales). Aplicando a Lei dos Senos a $\triangle AFE$, obtemos

$$\frac{EF}{\hat{A}} = \frac{AE}{\angle AFE}$$

Como $AE = AD\angle ADE$ e $\angle AFE = \angle ADE$ (subentendem o mesmo arco), vem $EF = AD\hat{A}$.

Como $AD = AB\hat{B}$, tem-se $EF = AB\hat{A}\hat{B}$. É bem conhecido que $AB = 2R\hat{C}$, onde R é o raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Portanto,

$$EF = 2R\hat{A}\hat{B}\hat{C}$$

donde se conclui que chegaríamos ao mesmo valor se tivéssemos iniciado este processo noutro vértice, B ou C.

Dança das cadeiras: Há n cadeiras à volta de uma mesa redonda. Há n pessoas que vão chegar consecutivamente e sentar-se. A primeira escolhe o seu lugar como quiser. A partir daqui, para $1 \leqslant k \leqslant n-1$, a $(k+1)$-ésima pessoa senta-se k lugares à direita da k-ésima pessoa. Para que valores de n é que este procedimento funciona sem constrangimentos?

Ignorando, para já, a circularidade, temos que a k-ésima pessoa senta-se no lugar

$$1 + \cdots + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$$

Como a mesa é circular, temos choque de vontades entre a pessoa p e a pessoa q ($1 \leqslant p < q \leqslant n$) quando

$$\frac{q(q-1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2}$$

for múltiplo de n. Ou, o que é equivalente, quando $(q-p)(q+p-1)$ for múltiplo de $2n$.

Suponhamos que n não é uma potência de 2. Então $2n = r2^s$ para algum r ímpar. Seja $u = \max\{r, 2^s\}$, $v = \min\{r, 2^s\}$. Então

$$p = \frac{1}{2}(u - v + 1) \qquad \text{e} \qquad q = \frac{1}{2}(u + v + 1)$$

satisfazem $p \leqslant n$, $q \leqslant n$, $u = p + q - 1$, $v = q - p$, portanto $2n = (q-p)(q+p-1)$, o que equivale a conflito.

Se n for uma potência de 2, então, para que $(q-p)(q+p-1)$ seja um múltiplo de $2n$, atendendo a que se trata de um produto de dois fatores de paridades distintas, um dos fatores deve ser múltiplo de $2n$, o que é impossível, já que $q - p < q \leqslant n$ e $q + p - 1 < 2q \leqslant 2n$.

Conclusão: as pessoas sentam-se sossegadamente se o seu número é uma potência de 2. (Agradecemos a Omar, o nosso leitor Luís Madureira, a contribuição de uma resolução deste problema).

Muitos restos: A Laura divide 365 sucessivamente por 1, 2, 3,..., 365 e soma todos os restos. O Manuel, por sua vez, divide 366 por 1, 2, 3,..., 366 e soma todos os restos obtidos. Quem conseguiu soma maior?

Quando a Laura divide 365 por n ($1 \leqslant n \leqslant 365$) obtém um quociente q e um resto r:

$$365 = qn + r \qquad (0 \leqslant r \leqslant n-1)$$

donde se obtém a divisão de 366 por n,

$$366 = qn + r + 1 \qquad (0 \leqslant r \leqslant n-1)$$

exceto quando $r + 1 = n$, caso em que o resto do Manuel evanesce. Assim, para cada $n \leqslant 365$, se n divide 366, o resto da Laura excede o do Manuel em $n-1$; se n não divide 366, o resto do Manuel excede o da Laura numa unidade. Os divisores de 366 são 1, 2, 3, , 6, 61, 122, 183 e 366. Portanto a Laura ganha 0+1+2+5+60+121+182, isto é, 371, enquanto o Manuel acumula $366 - 8 = 358$. A Laura ganha por 13. (Luís Madureira enviou uma resolução para este problema, que agrademos).

Descobrir a combinação: Um aloquete de código usa uma combinação de três dígitos de 0 a 9. Sempre que, quando se faz uma tentativa que tem, pelo menos, um dígito certo (no lugar certo), o aloquete, que fala, diz "Quente!". Se a tentativa não contiver nenhum dígito correto (na posição certa), o cadeado grita "Frio!". Por exemplo, se a combinação correta for 014, as tentativas 099 e 014 originam ambas a resposta "Quente!", enquanto a tentativa 140 obtém um grito de "Frio!".

De quantas tentativas se precisa para ter a certeza de descobrir a combinação correta, qualquer que ela seja?

Vejamos uma estratégia que usa, no máximo, 13 tentativas. Tentamos as dez combinações $000, 111, \ldots, 999$. Neste processo, vamos ouvir "Quente!" uma, duas ou três vezes. Se for uma, então será em resposta a uma tentativa que acertou na combinação. Se ouvirmos duas vezes, por exemplo em resposta a *aaa* e *bbb*, então a combinação certa usa somente os dígitos a e b. Tentando *acc*, *cac* e *cca* ($c \neq a$, $c \neq b$) esclarecemos as posições do a e deduzimos a combinação correta em, no máximo, 13 tentativas. Se for três, digamos em resposta a *aaa*, *bbb* e *ccc*, as tentativas

[1] Ver Tiago Hirth, *Luca Pacioli and his 1500 book De Viribus Quantitatis*, FCUL 2015

add e *dad* ($d \neq a$, $d \neq b$, $d \neq c$) esclarecem a posição do a. Suponhamos que é a primeira posição. Tentando agora *dbc* ($d \neq a$, $d \neq b$, $d \neq c$) esclarecemos se a combinação certa é *abc* ou *acb*.

Seja n o número de combinações possíveis. Cada tentativa divide estas n combinações possíveis em dois conjuntos: o das combinações compatíveis com "Quente!" e o das compatíveis com "Frio!". Logo, no pior cenário, ficamos com, pelo menos, $n/2$ combinações viáveis. Assim, após k tentativas, temos ainda de enfrentar $n/2^k$ possibilidades. Em particular, se $n > 2^k$ então k tentativas não chegam sempre para deduzir a combinação certa. Suponhamos agora que, após seis tentativas, só ouvimos "Frio!". Eliminámos, no máximo, seis dígitos para cada posição. Restam então, pelo menos, $4 \times 4 \times 4 = 64$ possibilidades. Se $n > 64 = 2^6$, a nossa observação anterior mostra que mais seis tentativas podem não bastar para determinar a combinação certa. Se $n = 64$, pensemos na próxima (sétima) tentativa. Sem perda de generalidade, suponhamos que as seis primeiras eliminaram os dígitos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 de todas as posições e a nova tentativa é 666. Se agora ouvirmos "Frio!", ficamos com $3 \times 3 \times 3 = 27$ possibilidades, o que mostra que se ouvirmos "Quente!" esse número é 37. Como $37 > 2^5$, pela nossa observação acima, 12 tentativas podem não bastar.

Concluímos assim que, para ter a certeza de deduzir a combinação certa, necessitamos de 13 tentativas.

A MATEMÁTICA DA ORDEM DE MOVIMENTAÇÃO DAS PEÇAS DA TORRE DE HANÓI

Débora Borges Ferreira[a] e Edvan Pontes de Oliveira[b]

Universidade Federal do Rio Grande do Norte[a], Escola Estadual Francisco de Assis Bittencourt [b]

debora@ccet.ufrn.br[a]; edvan.pontes@hotmail.com[b]

Neste trabalho descrevemos a configuração da Torre de Hanói após a *i*-ésima jogada.

1. INTRODUÇÃO

A Torre de Hanói foi popularizada pelo matemático francês Édouard Lucas no ano de 1892, [1]. O famoso quebra-cabeças é composto por uma base e três pinos A, B e C; no pino A estão dispostos n discos de tamanhos distintos, do maior para o menor. O objetivo do jogo é transferir os discos de A para C de modo a que em cada movimento apenas um disco seja movido e os discos maiores nunca fiquem sobre os menores. Outras variações deste desafio surgiram no início do século XX, sendo a mais famosa a Torre de Hanói com quatro pinos, citada em [2]. Mais curiosidades sobre o jogo estão em [3].

Há uma solução para o jogo utilizando a menor quantidade de movimentos possível; para n discos são necessários $2^n - 1$ movimentos para concluir o jogo. Suponha que esta solução é interrompida na jogada i. Neste trabalho descrevemos a configuração da torre nesse instante, isto é, em que pino cada um dos discos estará.

Proposição 1. *Considere uma torre com n discos e seja a_n a quantidade mínima de jogadas para vencer o jogo, então* $a_n = 2^n - 1$.

Demonstração. Para transferir o maior disco para o pino final C, devemos primeiramente mover todos os $n-1$ discos para o pino intermediário B com a_{n-1} movimentos; uma vez que todos os $n-1$ discos estão no pino B, o maior disco ficará livre para ser transferido para o pino C com um movimento, totalizando $a_{n-1}+1$ movimentos. Em seguida, transferimos todos os $n-1$ discos para o pino C com mais a_{n-1} movimentos, totalizando $a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1} + 1 = a_n$. Em suma, acabámos de obter uma forma recursiva: $a_n = 2a_{n-1} + 1$.

Usando a recursividade, queremos provar que $a_n = 2^n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $n > 0$. Para $n = 1$ temos apenas um movimento, e $a_1 = 2^1 - 1 = 1$. Suponha por indução que para algum $n > 1$, $a_n = 2^n - 1$. Como $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$, então

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 \cdot a_n + 1 \\ &= 2 \cdot (2^n - 1) + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Logo, $a_n = 2^n - 1$ é verdadeiro para todo o n natural positivo. □

2. DESCOBRINDO O DISCO MOVIDO NO *I*-ÉSIMO MOVIMENTO

Imagine que estamos solucionando o quebra-cabeças, e queremos saber que peça será movida na jogada i. Para responder a essa pergunta, estudaremos com que frequência cada disco é movido, ou ainda a ordem de movimentação dos discos.

Proposição 2. *Sejam uma torre com n discos e um certo disco k, $k \leq n$. Então, o seu primeiro movimento durante a solução do quebra-cabeça será na jogada 2^{k-1}.*

Demonstração. Seja uma torre com n discos. Para mover o disco k pela primeira vez, é necessário mover os $k-1$ discos menores que estão em cima dele. Pela proposição 1, para mover $k-1$ discos de um pino para outro, são necessários $2^{k-1} - 1$ movimentos. Assim, o primeiro movimento de k será na jogada $2^{k-1} - 1 + 1 = 2^{k-1}$. □

Uma observação importante é sobre a ordem dos movimentos do disco k nos pinos. Se o primeiro movimento foi para o pino B, então os $k-1$ discos menores mover-

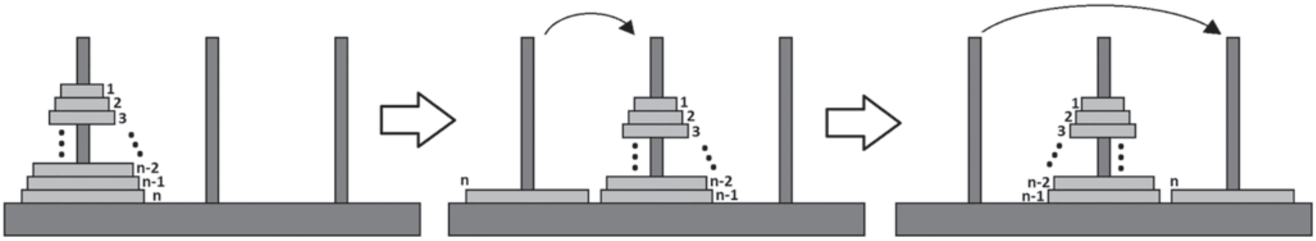


Figura 1. Solucionando o jogo com n discos.

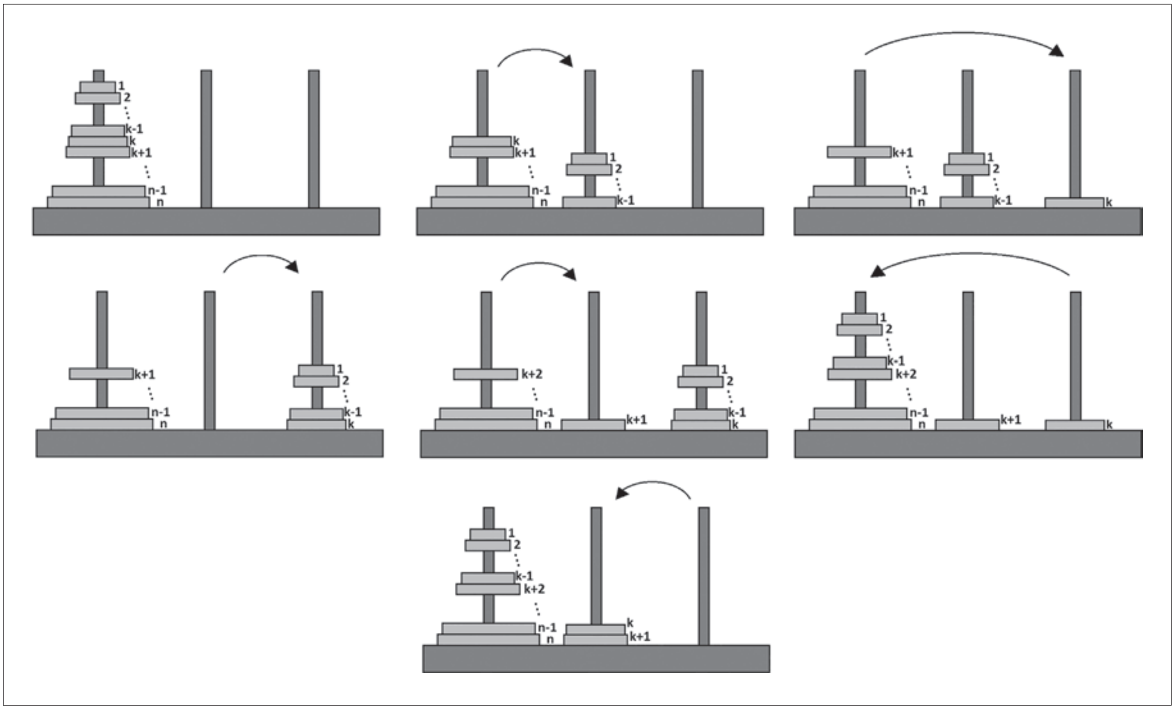


Figura 2. Ordem dos movimentos do disco k.

-se-ão para B, o disco $k+1$ se mover-se-á para C, os $k-1$ menores para A, para que o disco k se mova para C. Seguindo esse raciocínio, o próximo movimento de k será para o pino A. Os seus movimentos são cíclicos na ordem (B, C, A) ou (C, B, A), caso o seu primeiro movimento tenha sido para C. Note que se a ordem de k for (B, C, A), então a ordem de $k+1$ e de $k-1$ será (C, B, A). Como o único movimento do disco n deve ser para o pino C, então se n e k tiverem a mesma paridade, colocamos a ordem (C, B, A) para k. Caso tenham paridades distintas, então (B, C, A) será a ordem de movimentos de k.

Proposição 3. *Considere uma Torre de Hanói com n discos. Seja $o_{k,p}$ o número da jogada em que o disco k será movido pela p-ésima vez. Fixado $k \leq n$, a sequência numérica $(o_{k,p})$ é uma progressão aritmética de razão 2^k e $o_{k,1} = 2^{k-1}$.*

Demonstração. $o_{k,1} = 2^{k-1}$ pela proposição 2. Sem perda de generalidade, suponha que k e n têm a mesma paridade. A configuração do jogo após o primeiro movimento do disco k está na terceira torre da figura 2. Continuando a solução do quebra-cabeças, transferimos os $k-1$ discos menores que estão em B para o pino C, colocando-os em cima do disco k, usando $2^{k-1} + 2^{k-1} - 1 = 2^k - 1$ movimentos. Agora, o único movimento possível do jogo será mover o disco $k+1$ para o pino intermediário com um movimento, resultando em $2^k - 1 + 1 = 2^k$ movimentos. Por fim, os $k-1$ discos devem ir para o pino inicial, pois o disco k precisará de ir ao pino intermediário, com $2^k + 2^{k-1} - 1$ movimentos. Sendo assim, o disco k ficará livre para ir para o pino intermediário com um movimento, gerando um total de $2^k + 2^{k-1} - 1 + 1 = 2^k + 2^{k-1}$ movimentos (o segundo movimento do disco k será na jogada $2^k + 2^{k-1}$ e a última torre da figura 2 representa o segundo movimento do disco k). Logo, $o_{k,1} = 2^{k-1}$ e $o_{k,2} = 2^k + 2^{k-1}$.

O terceiro movimento do disco k ocorrerá após transferirmos os $k-1$ discos menores para cima do disco k, ou seja, para o pino B, o disco $k+2$ para o C (único movimento possível); para transferir os discos que estão em B para C, primeiro os $k-1$ discos menores vão para C e então o

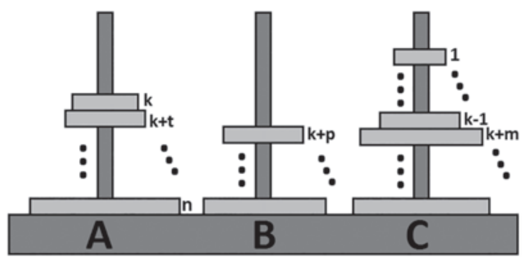


Figura 3. Configuração da Torre após mover o disco k.

disco k será movido para A, totalizando

$$2^{k-1}-1+\underbrace{1}_{disco\ k+2}+2^{k-1}-1+\underbrace{1}_{disco\ k}=2^k \text{ movimentos;}$$

logo, $o_{k,3}=o_{k,2}+2^k$, e $o_{k,3}-o_{k,2}=2^k$.

Sem perda de generalidade, suponha que, após certo movimento do disco k, este se encontra no pino A sobre discos maiores que ele, como a sua ordem é (C,B,A) ele veio do pino B e os $k-1$ discos menores estão em C sobre um certo disco $k+m$, caso contrário seria impossível mover o disco k de acordo com as regras do jogo. Vamos contar quantos movimentos serão necessários até ao próximo movimento do disco k. Os próximos e únicos possíveis passos são transferir os $k-1$ menores discos do pino C para cima do disco k, usando $2^{k-1}-1$ movimentos. Após esses movimentos, só haverá um único movimento possível no jogo usando os discos dos pinos B ou C; suponha que é o disco $k+p$ a ser movido para o pino C, onde $0<p,t,m\leq n-k$ e $p\leq m$. O disco k veio do pino B e está em A, logo o seu próximo movimento deve ser para o pino C, pois os discos movem-se em ciclos, alternando entre os pinos; para isso movemos novamente os $k-1$ menores discos para B, e o disco k para o pino C (únicos movimentos possíveis também), totalizando

$$2^{k-1}-1+\underbrace{1}_{disco\ k+p}+2^{k-1}-1+\underbrace{1}_{disco\ k}=2^k \text{ movimentos.}$$

□

Teorema 1. *Considere uma torre com n discos. O disco movido na i-ésima jogada será o disco k obtido unicamente ao reescrever i na forma $(2p-1)\cdot 2^{k-1}$, onde p será o número de vezes que o disco k foi movido.*

Demonstração. Segundo as proposições 2 e 3, para k fixado, com $k\leq n$, $(o_{k,p})$ é uma progressão aritmética de razão 2^k e termo geral $o_{k,p}=o_{k,1}+(p-1)\cdot 2^k$. Logo,

$$\begin{aligned} o_{k,p} &= 2^{k-1}+(p-1)\cdot 2^k \\ \Rightarrow o_{k,p} &= (2p-2+1)\cdot 2^{k-1} \\ \Rightarrow o_{k,p} &= (2p-1)\cdot 2^{k-1} \qquad (1) \end{aligned}$$

□

Agora, estamos interessados em saber que peça é movida no i-ésimo movimento. Para isso, temos de resolver a equação

$$(2p-1)\cdot 2^{k-1}=i,$$

isto é, encontrar k e p que a satisfazem. Observamos que $2p-1$ é um número ímpar, então basta fatorar i de modo a que tenhamos um ímpar vezes uma potência de 2. Como i é um número natural, então o Teorema Fundamental da Aritmética garante a unicidade de p e k.

Exemplo 1. *Resolvendo as Torres de Hanói com oito discos, que disco é movido na 100ª jogada considerando a quantidade mínima de movimentos?*

Solução: Pelo teorema 1, temos:

$$(2p-1)\cdot 2^{k-1}=100.$$

Como p e k são números naturais, então podemos fatorizar 100 e retirar as potências de 2. Sendo assim, resolvendo uma equação exponencial, obtemos

$$(2p-1)\cdot 2^{k-1} \quad = \quad 25\cdot 2^2.$$

Assim, $2p-1=25$ e $2^{k-1}=2^2$, e então $p=13$ e $k=3$.

Logo, o disco movido na centésima jogada é o disco 3 e o mesmo foi movido 13 vezes.

3. CONFIGURAÇÃO GERAL DA TORRE APÓS PARAR NA *I*-ÉSIMA JOGADA

Suponha que o quebra-cabeças com n discos está a ser resolvido e para numa certa jogada i. Qual a configuração da torre no exato momento de paragem? Para isso, temos de descobrir quantos movimentos foram realizados com cada disco até à jogada i.

Pelo teorema 1 encontramos o disco que foi movido na jogada i e quantas vezes, resolvendo a expressão $i=(2p-1)\cdot 2^{k-1}$. Descobertos os valores de k e p e sabendo que o seu movimento é cíclico, do tipo (C,B,A)ou (B,C,A), descobrimos em que pino o disco k se encontra ao efetuarmos a divisão por 3 e verificando o resto. Para a sequência (C,B,A), resto 0 significa pino A, resto 1 significa pino C e resto 2 significa pino B.

Agora, queremos saber onde estão os outros $n-1$ discos, por exemplo, o disco k_0, quantas vezes ele se moveu até à jogada i e em que pino se encontra.

Note que ao isolar p em $i=(2p-1)\cdot 2^{k-1}$, encontramos

$$p=\frac{i+2^{k-1}}{2^k},$$

que é a quantidade de movimentos do disco k até à jogada i. Para k_0 no lugar de k, esse quociente não será inteiro. Desejamos encontrar o maior j possível, $j\leq i$, tal que $j=(2p_0-1)\cdot 2^{k_0-1}$, ou seja, p_0 é a quantidade de vezes que o disco k_0 se moveu até à jogada i:

$$p_0=\frac{j+2^{k_0-1}}{2^{k_0}}.$$

Observe que

$$\frac{j+2^{k_0-1}}{2^{k_0}}\leq\frac{i+2^{k_0-1}}{2^{k_0}},$$

ou seja, para $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$ podemos tomar

$$p_0 = \left\lfloor \frac{i + 2^{k_0 - 1}}{2^{k_0}} \right\rfloor.$$

Exemplo 2. *Certa pessoa a brincar com o jogo Torre de Hanói com cinco discos, realizou alguns movimentos e parou na 10ª jogada. Qual a configuração da Torre de Hanói considerando a quantidade mínima de jogadas?*

Solução. $i = 10$ e $1 \leq k \leq 5$.
Para o disco 1, temos a sequência (C, B, A), (n, k ímpares):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10 + 2^{1-1}}{2^1} \right\rfloor = 5 \\ 5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\ &\rightarrow \textit{pino } B. \end{aligned}$$

Para o disco 2, temos a sequência (B, C, A), (n ímpar, k par):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10 + 2^{2-1}}{2^2} \right\rfloor = 3 \\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0 \\ &\rightarrow \textit{pino } A. \end{aligned}$$

Para o disco 3, temos a sequência (C, B, A), (n ímpar, k ímpar):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10 + 2^{3-1}}{2^3} \right\rfloor = 1 \\ 1 &= 3 \cdot 0 + 1 \\ &\rightarrow \textit{pino } C. \end{aligned}$$

Para o disco 4, temos a sequência (B, C, A), (n ímpar, k par):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10 + 2^{4-1}}{2^4} \right\rfloor = 1 \\ 1 &= 3 \cdot 0 + 1 \\ &\rightarrow \textit{pino } B. \end{aligned}$$

Para o disco 5, temos a sequência (C, B, A), (n ímpar, k ímpar):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10 + 2^{5-1}}{2^5} \right\rfloor = 0 \\ 0 &= 3 \cdot 0 + 0 \\ &\rightarrow \textit{pino } A. \end{aligned}$$

Assim, o pino A contém os discos 2 e 5, o pino B os discos 1 e 4, e o pino C o disco 3.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1] Lucas, E., *Récréations Mathématiques*, Albert Blanchard, Paris (1892).

[2] Dudeney, H. E., *The Canterbury Puzzles*, New York: E. P. Dutton and Co, New York (1908).

[3] Pereira, A., Rodrigues, R.,"O Problema das Torres de Hanói: a lenda, algoritmos e generalizações", *Gazeta de Matemática 144*, Portugal (2003).

SOBRE OS AUTORES

Débora Borges Ferreira é professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, na cidade de Natal, RN, Brasil, desde 2006. Concluiu o mestrado e o doutoramento em Matemática na Universidade de Brasília, Distrito Federal. É professora do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) desde 2011.

Edvan Pontes de Oliveira é professor na Escola Estadual em Tempo Integral Francisco de Assis Bittencourt, na cidade de João Câmara, RN, Brasil, desde 2016. Concluiu a graduação e o mestrado em Matemática (PROFMAT) na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN).

LAGRANGE, AS MULTAS E OS RECORDES DE ATLETISMO

João Filipe Queiró
Universidade de Coimbra
jfqueiro@mat.uc.pt

A velocidade média diz-nos alguma coisa sobre a velocidade instantânea? E sobre outras velocidades médias?

1. INTRODUÇÃO

O Artigo 27.º do Código da Estrada [5] fixa os limites gerais de velocidade nas vias públicas. Salvo casos especiais, os condutores não podem exceder certas velocidades instantâneas, dependendo do tipo de vias.

Este Artigo 27.º remete implicitamente para duas questões matemáticas importantes.

A primeira é o próprio conceito de velocidade instantânea, não definido no Código, e sobre o qual se diz apenas que é medido "em quilómetros/hora". Na ausência de definição, é de presumir que o legislador está a pensar no número indicado por um velocímetro, seja este de que tipo for. Descontemos a circularidade desta forma de pensar e observemos que a velocidade instantânea é um conceito estritamente matemático: é a derivada em cada instante do "espaço percorrido" em função do tempo. Este é um dos primeiros exemplos vistos quando estudamos derivadas e é uma das principais motivações iniciais para esse estudo.

A segunda questão matemática importante do Código da Estrada é suscitada pela interrogação óbvia: indo além da definição, como é que as autoridades controlam na prática a velocidade instantânea dos automóveis nas estradas, para depois sancionarem quem exceda os limites legais?

O processo mais conhecido consiste em usar um aparelho que se aponta ao veículo e que imediatamente fornece a velocidade instantânea, tipicamente emitindo um sinal de radar ou laser e analisando a frequência do sinal reflectido pelo objecto em movimento.

O presente artigo é motivado por um segundo processo, que é referido no mesmo artigo do Código da Estrada, no seu número 4:

> *Para os efeitos do disposto nos números anteriores, considera-se que viola os limites máximos de velocidade instantânea o condutor que percorrer uma determinada distância a uma velocidade média incompatível com a observância daqueles limites (...).*

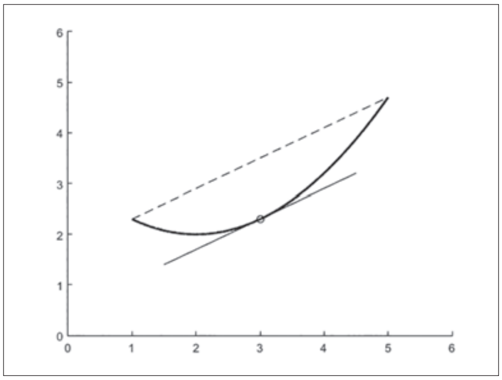
Isto é operacionalizado identificando o veículo num ponto da estrada e voltando a identificá-lo depois de ele percorrer determinada distância. O tempo decorrido entre as duas identificações permite calcular a velocidade média do veículo no troço em causa.

O código nada diz sobre o que é uma "velocidade média incompatível" com a observância dos limites legais. O senso comum, que qualquer um entende, aponta para algo muito simples: se a velocidade média exceder o limite para a velocidade instantânea no troço, o condutor terá de certeza excedido, em algum momento, esse mesmo limite.

2. O TEOREMA DE LAGRANGE

O facto matemático que aqui está presente, e que subjaz ao tal "senso comum", é um dos teoremas mais fundamentais do cálculo diferencial elementar, o Teorema de Lagrange ou do valor médio. Diz o teorema que, se uma função real for contínua num intervalo fechado e diferenciável no seu interior, então existe um ponto no interior onde a derivada da função coincide com o valor médio dela no intervalo. Em símbolos: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ for contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, existe $\theta\in]a,b[$ tal que

$$f'(\theta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$



Sobre este teorema podemos fazer várias observações:

1. A demonstração é simples e pode ver-se em qualquer livro introdutório de Análise. Reduzimo-nos primeiro ao caso particular em que $f(a)=f(b)$ (situação em que ao resultado se chama por vezes Teorema de Rolle) e usamos de forma decisiva a completude do conjunto dos números reais. Esta propriedade básica de $\mathbb{R}$ pode ser apresentada de várias maneiras quando se ensina Análise, sendo uma das mais habituais a seguinte: qualquer que seja a forma de escrever $\mathbb{R}$ como uma reunião de dois subconjuntos A e B tais que qualquer elemento de A é menor do que qualquer elemento de B, existe de certeza $c\in\mathbb{R}$ tal que $\forall_{a\in A,\,b\in B}\quad a\le c\le b\,.$

   Isto é parecido com a definição de $\mathbb{R}$ pelos chamados "cortes de Dedekind" mas não é a mesma coisa.

2. Curiosamente, não só o Teorema de Lagrange é consequência da completude de $\mathbb{R}$ como lhe é mesmo equivalente [4].

3. O Teorema de Lagrange é, como muitos teoremas em Matemática, uma afirmação apenas da existência de algo. Nada no enunciado ou na demonstração diz seja o que for sobre o valor de θ. Os teoremas de existência "não construtivos", como este, são causa de alguma confusão para os não-matemáticos: pois como se pode afirmar e provar a existência de algo sem o exibir ou construir explicitamente? Não só se pode como a situação é muito frequente.[1]

O Teorema de Lagrange é exactamente o facto matemático de que precisamos para justificar a prescrição legal do n.º 4 do artigo 27.º do Código da Estrada. E este tipo de questão é normalmente uma das primeiras aplicações do teorema vistas no estudo do cálculo diferencial.

3. PROBLEMAS POSSÍVEIS

Mas há problemas potenciais. Por exemplo: como a demonstração não é construtiva, as autoridades não podem dizer quando é que o veículo, no troço em causa, excedeu o limite legal para a velocidade instantânea. O legislador provavelmente pensou nisto e resolveu o problema escrevendo que se entende que "a contraordenação é praticada no local em que terminar o percurso controlado". Esta redacção resolve um problema formal mas tem vulnerabilidades. O condutor pode dizer – e se calhar até provar – que no final do percurso controlado a sua velocidade era inferior ao limite legal: "Eu nesse momento até ia a 10 km/h..."

Um problema de outro tipo pode surgir se o condutor afirmar que a forma como percorreu a distância em causa não satisfaz as hipóteses do Teorema de Lagrange, mais precisamente a da diferenciabilidade da função espaço percorrido (a da continuidade seria mais difícil de contestar). Isto é, o automobilista pode dizer que a sua técnica de condução é tal que, por vezes, não há diferenciabilidade da função. Aqui o condutor não terá sorte, porque há versões do Teorema de Lagrange para o caso em que f pode não ser diferenciável em todos os pontos de $]a,b[$. Por exemplo [2], se o conjunto D dos pontos em que f não é diferenciável for finito (ou mesmo numerável) então

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\;\le\;\sup_{\theta\in]a,b[\setminus D} f'(\theta)$$

e portanto a velocidade média continua a dar a informação desejada.

Mesmo assim, seria interessante assistir a uma contestação judicial de um condutor a uma multa aplicada ao abrigo do n.º 4 do Artigo 27.º do Código da Estrada. Poderia haver uma discussão matemática em tribunal de consequências imprevisíveis, com análise das condições de aplicação do Teorema de Lagrange e da sua conclusão, divergências sobre a natureza dos números reais, intervenção de advogados da escola intuicionista, etc. Quem sabe se não se acabaria num recurso para o Tribunal Constitucional, com este a consultar pareceres da Sociedade Portuguesa de Matemática?

4. UM PARADOXO NO ATLETISMO

Uma pergunta natural, relacionada com o tema anterior, é se a velocidade média numa certa distância nos diz alguma coisa sobre a velocidade média em partes dessa distância. O problema colocou-se com alguma publicidade a propósito de uma prova de atletismo [1].

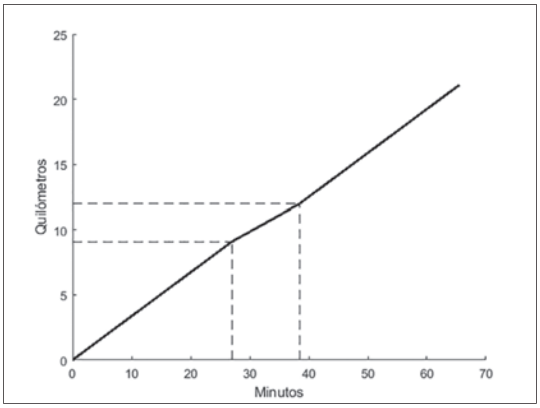
Em 2013, a atleta americana Molly Huddle estabeleceu uma nova melhor marca mundial para a distância de 12 km. Alguém observou então que o recorde mundial da meia-maratona (cerca de 21,1 km), da atleta queniana Mary Jepkosgei Keitany, tinha uma média por km inferior à de Huddle nos 12 km. Portanto, em algum troço de 12 km da sua meia-maratona, Keitany teria feito um tempo mais baixo do que o de Huddle, não sendo justo atribuir a melhor marca sobre essa distância a esta atleta.

Esta conclusão, curiosamente, não está correcta, isto é, não é obrigatório que exista um tal troço de 12 km. Por outras palavras, a corrida de Keitany podia ter sido conduzida de tal forma que, em qualquer troço de 12 km da meia-maratona, o seu tempo fosse pior do que o tempo total de Huddle.

Por exemplo [1]: suponhamos que Keitany correu os primeiros 9,1 km em 27 minutos, os 2,9 km seguintes em 11 minutos e 50 segundos e os 9,1 km finais de novo em 27 minutos, perfazendo os 65 minutos e 50 segundos do seu recorde. Supõe-se a velocidade constante em cada um dos três subintervalos.

Então o seu tempo em qualquer subtroço de 12 km seria 38 minutos e 50 segundos, acima dos 37 minutos e 49 segundos de Huddle.

Há uma situação em que se pode garantir que existe uma parte da distância percorrida à mesma velocidade média que a velocidade média da corrida completa: isso acontece se a distância total for um múltiplo inteiro do subtroço em causa.



Para o mostrar, suponhamos, sem perda de generalidade, que a distância total é de n km, com n um número natural. Vamos provar que existe 1 km na corrida percorrido exactamente à velocidade média da corrida total.

Seja t o tempo total da corrida. Existe de certeza um subintervalo de tempo de duração t/n em que o corredor percorreu pelo menos 1 km: se não, a distância total percorrida seria menos de n km. Analogamente, existe um subintervalo de tempo de duração t/n em que o corredor percorreu no máximo 1 km. Como o espaço percorrido num intervalo é uma função contínua dos extremos do intervalo, tem de existir, pelo Teorema de Bolzano, ou dos valores intermédios (que é equivalente ao Teorema de Lagrange [4]), um subintervalo de duração t/n em que o corredor percorreu exactamente 1 km e em que, portanto, a sua velocidade média foi n/t, igual à velocidade média na distância total.

Em [1] mostra-se que, extraordinariamente, este é o único caso em que se pode dar uma tal garantia: se a distância parcial não for um submúltiplo inteiro da distância total, existe sempre uma forma de conduzir a corrida tal que em qualquer troço de comprimento igual à distância parcial a velocidade média é inferior à velocidade média na corrida completa.

5. REFERÊNCIAS

[1] K. Burns, O. Davidovich, D. Davis, "Average pace and horizontal chords", *The Mathematical Intelligencer* 39 (2017), 41-45.

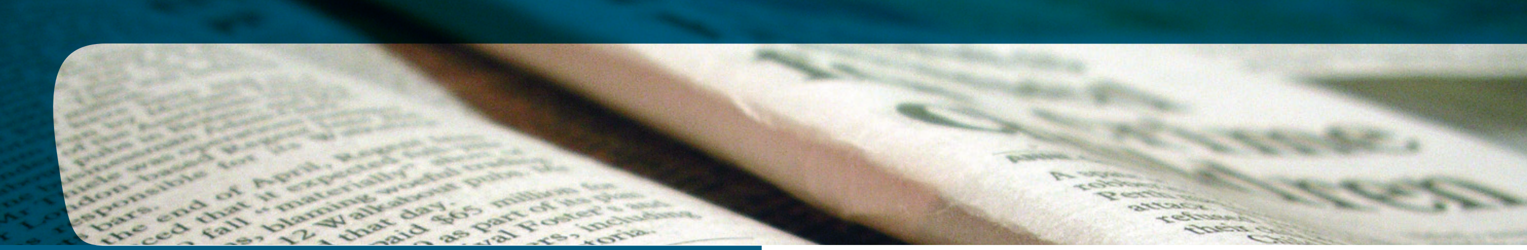
[2] Jean Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, New York, Academic Press, 1960.

[3] Miguel de Guzmán, *Aventuras Matemáticas* (trad. J. F. Queiró), Lisboa, Gradiva, 1990.

[4] H. Teismann, "Toward a more complete list of completeness axioms", *The American Mathematical Monthly* 120 (2013), 99-114.

[5] *Código da Estrada* - Lei n.º 72/2013, Diário da República n.º 169/2013, Série I, 3 de Setembro de 2013.

[1] Para um exemplo muito simples e curioso veja-se [3, p. 94], onde se prova em poucas linhas que em Madrid existem de certeza mais de 20 pessoas com o mesmo número de cabelos.



Fabio Chalub
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

AOS ASTROS

A licença poética é uma ferramenta fundamental para a sétima arte. Sem alguma criatividade, ir ao cinema seria tão motivante quanto ver vídeos de férias. Mas erros persistentes podem mostrar a falta de compreensão de alguns aspetos relevantes da ciência.

Ficção científica sempre me interessou. Gosto de ver a visão de futuro, seja a dos dias de hoje ou aquela do nosso passado recente. É claro que dificilmente qualquer guião seria aprovado se fosse uma tese de mestrado em ciências. Mas a literatura tem outros objetivos que não ensinar as leis de Newton ou as teorias de Einstein.

No entanto, no último filme desta categoria a que assisti, *Ad Astra*, algo me chamou a atenção. Num certo sentido, há a mesma visão ingénua de como são as viagens espaciais que já estava presente no primeiro exemplar do género, a obra prima *A Viagem à Lua*, de 1902; veja a figura 1.

É difícil adaptar a nossa intuição a circunstâncias muito distintas do nosso dia a dia. Muitas das dúvidas levantadas sobre se as viagens à Lua foram ou não reais são baseadas nestes erros de compreensão. Por exemplo, a foto do céu escuro e sem estrelas a ladear os astronatas sobre a superfície lunar tem sido fonte de muitas teorias conspiratórias. No entanto, apesar do fundo preto, a foto foi tirada durante o dia. O azul do nosso céu é decorrência da atmosfera.

Quando pensamos que Vasco da Gama demorou quase um ano para ir de Lisboa à Índia, e que hoje essa viagem pode ser feita em menos de um dia, não é difícil concluir que a tecnologia tem "encurtado distância" (apesar de isto ser claramente uma figura de linguagem).

Devemos então imaginar que as viagens espaciais serão cada vez mais rápidas: será que um dia poderemos passar o Natal em casa de um filho que mora em Marte e

Figura 1. De *A Viagem à Lua*, de Georges Méliès (1902), a *Ad Astra*, de James Gray (2019), muito mudou: a narrativa, os efeitos especiais... Algo em comum permanece: a ambição humana universal de sair de nosso planeta em direção ao espaço e o medo do incerto. **Fonte: Wikimedia Commons.**

voltar para celebrar o Ano Novo com o resto da família, cá na Terra?

De facto, no *Ad Astra*, apenas três semanas são necessárias para se ir da Terra a Marte, enquanto menos de três meses são suficientes para ir até Neptuno. Por comparação, a sonda *InSight*, lançada em 2018, demorou seis meses para atingir a órbita de Marte, enquanto a *Neptune Orbiter*, que ainda não foi lançada, deve demorar uma década para atingir o seu destino. E notem que o lançamento destas sondas não é feito num dia qualquer, mas em datas cuidadosamente escolhidas de forma a otimizar a viagem: as "janelas de lançamento".

Sistematicamente, as distâncias na Terra estão a ser "encurtadas", mas não podemos esperar que o mesmo ocorra para o Sistema Solar, pois a dinâmica das viagens espaciais é muito distinta. O que faz o foguete mover é a inércia, e não os seus motores poderosos. Estes servem apenas para descolar, (por vezes) corrigir a órbita e na aproximação ao destino. A verdadeira viagem ocorre apenas por inércia, sem gasto algum de energia. A mesma força que mantém os planetas ao redor do Sol é o que leva uma espaçonave aos planetas mais distantes: a gravidade.

Assim, a trajetória da sonda será uma elipse com o Sol num dos focos – tal como qualquer órbita planetária, e nunca uma linha reta (como aparece no início de *A Viagem à Lua*).

Mas qual órbita, exatamente?

Esta foi a questão estudada pelo engenheiro alemão Walter Hohmann, que em 1925 encontrou a trajetória entre dois planetas que requer o mínimo de energia. Infelizmente, os estudos de Hohmann foram interrompidos, já que preferiu abandonar a ciência espacial, com medo de que os seus trabalhos fossem utilizados pelo Partido Nazi no desenho de armas.

Vamos então considerar que tanto a Terra quanto Marte têm órbitas circulares (de facto, são elipses com baixa excentricidade). Um foguetão lançado da Terra, já a uma distância da Terra de apenas dois milésimos da distância Terra-Sol, experimenta uma maior gravidade solar do que terrestre. Desta forma, a energia necessária para o fazer descolar é apenas para chegar a esta distância, correspondente aproximadamente a 50 vezes o raio da Terra. A partir daí, mover-se-á em órbita elíptica. Cada possível órbita tem um nível de energia associado. A pergunta que tem de ser respondida é: qual a elipse que interseta tanto a órbita da Terra quanto a órbita de Marte que tem a menor energia?

As contas não são particularmente difíceis e a resposta é muito elegante: é a única elipse interior às órbitas que tem o Sol num dos focos e que é tangente a ambas as órbitas. Desta forma, supondo que o lançamento se dá no ângulo $\theta = 0$, o contacto será em $\theta = \pi$ e o eixo maior desta elipse terá comprimento igual ao da soma dos raios orbitais dos dois planetas. O tempo necessário para percorrer esta distância é dado por

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{GM}} \left(\frac{r_T + r_M}{2} \right)^{3/2},$$

onde r_T e r_M são os raios orbitais da Terra e de Marte, M é a massa do Sol e G a constante de gravitação universal. Note que esta conta é feita na hipótese de que as órbitas estão no mesmo plano, o que é uma aproximação aceitável.

Temos então que o tempo necessário para completar a

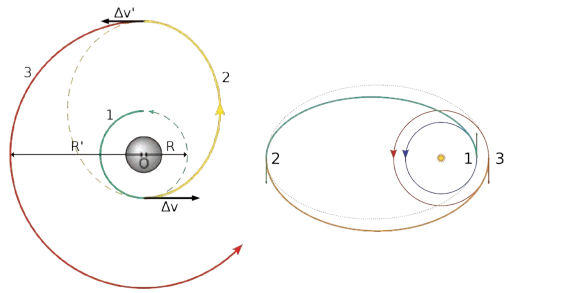


Figura 2. À esquerda, órbita de Hohmann (número 2, a amarelo) para transferir com a mínima energia uma sonda da órbita 1, de raio *R*, para a órbita 3, de raio *R*', ambas supostas circulares. A órbita 2 é uma elipse tangente às duas circunferências. À direita, uma junção de duas órbitas de Hohmann, indo inicialmente ao ponto 2, mais distante do que o destino 3, pode ser mais eficiente do que uma viagem direta. **Fonte: Wikimedia commons.**

jornada é de $T \approx 250$ dias. Neste momento, as máquinas são novamente ligadas para que seja feita a aproximação ao destino final.

É claro que, no dia do contacto, Marte deve estar no ponto oposto ao do lançamento da sonda. Portanto, no momento do lançamento, Marte não pode estar em qualquer lugar. É a isto que se refere o conceito de "janela de lançamento".

No caso de planetas mais distantes, mais precisamente após Saturno, há uma trajetória ainda mais eficiente do que a órbita de Hohmann: a união de duas elipses. Inicialmente, a sonda viaja através de uma órbita de Hohmann até a uma certa órbita ainda mais distante do que o seu destino; neste ponto, os motores são novamente ligados e toma uma nova trajetória elíptica, iniciando um percurso de retorno (ou seja, diminuindo a distância ao Sol) até chegar ao seu destino final. Apesar de ser necessário ligar os motores três vezes (na saída, na reorientação e na chegada), em algumas circunstâncias esta órbita necessita de menos combustível do que a de Hohmann. O tempo necessário, no entanto, é substancialmente maior.

No caso da Lua, além do descrito acima, também é comum optar por órbitas em forma de "8", por serem desta forma as linhas da mesma energia que orbitam tanto a Terra quanto a Lua. Assim, é possível voltar em segurança.

É difícil dizer que um dia poderemos ir à Marte em menos de um mês, mas, prognósticos só depois do jogo. O consumo energético seria tão grande que dificilmente esta forma de viajar seria viável – mas em muitas circunstâncias, sobretudo com fins militares, o ser humano demonstra poucas preocupações com o custo. Quem sabe esta tecnologia venha um dia a estar disponível?

A GEOMETRIA DA REGRESSÃO LINEAR

Carlos Gomes
Escola Secundária de Amarante
carlosgomes@esamarante.edu.pt

A regressão linear é um tema normalmente explorado (nas escolas) com recurso a uma calculadora científica gráfica ou a um *software* da moda (GeoGebra, por exemplo), ficando os estudantes com a tarefa aborrecida de introduzir números em listas e obter como recompensa uma equação que utilizam para fazer previsões num dado contexto. O que aqui se trata é de mostrar o grande valor didático deste problema, mobilizando conhecimentos que os alunos detêm para aclarar, do ponto de vista geométrico, o que está em causa em todo este processo que decorre nos "bastidores" da tecnologia.

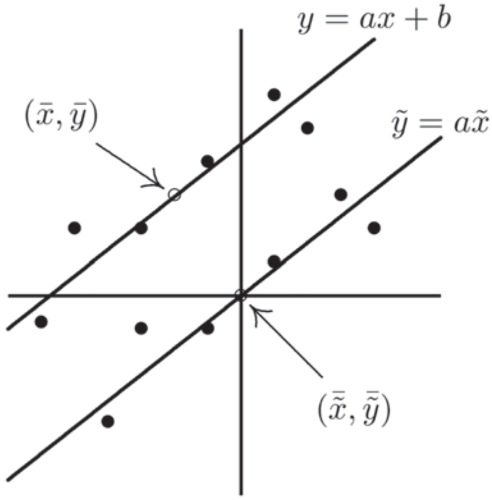


Figura 1. Translação da nuvem de pontos.

1. A GEOMETRIA DO PROBLEMA

O problema que consiste na determinação da reta que melhor se ajusta a uma dada nuvem de n pontos (x_i, y_i) é tradicionalmente tratado como o problema de encontrar os parâmetros a e b da equação $y = ax + b$ que minimizam a soma

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2,$$

em que os d_i são as diferenças entre os valores observados e os valores teóricos, isto é, $d_i = y_i - ax_i - b$ (veja-se [3]).

Sejam (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) os dados observados (nuvem de pontos na figura 1). Para a determinação do parâmetro a (declive da reta), seria "simpático" que a nuvem tivesse o seu centro de massa na origem do referencial, isto é, no ponto de coordenadas $(0,0)$. Isto porque libertar-nos-íamos do parâmetro b da equação da reta, o que parece reduzir a dificuldade do problema, pois, nesta condições, o modelo associado à reta de regressão seria $y = ax$. Para fazer com que o centro de massa da nuvem se desloque para a origem, é suficiente efetuarmos uma translação de toda a nuvem de pontos segundo o vetor $(-\overline{x}, -\overline{y})$, ou seja, basta subtrairmos o centro de gravidade $(\overline{x}, \overline{y})$ a todos os pontos da nuvem. Obtém-se assim uma nova nuvem de pontos da forma $(x_i - \overline{x}, y_i - \overline{y})$ cujo centro de gravidade é $(0,0)$.

Fazendo $x_i - \overline{x} = \tilde{x}_i$ e $y_i - \overline{y} = \tilde{y}_i$, a nuvem sobre a qual o trabalho prossegue será $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$, com $i = 1, 2, \ldots, n$, cuja reta de regressão tem o mesmo declive que a reta de regressão da nuvem original, em consequência da translação efetuada.

A nova nuvem é constituída por pontos da forma $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ e os pontos da forma $(\tilde{x}_i, a\tilde{x}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, são os pontos sobre a reta $\tilde{y} = a\tilde{x}$, que coincidiriam com os primeiros caso a correlação fosse perfeita. Os n vectores $\vec{u}_i = (\tilde{x}_i, a\tilde{x}_i)$ determinados por estes pontos são colineares. Mas aqui, uma mudança de dimensão vai tornar o trabalho mais simples: em vez de considerarmos estes n vetores de dimensão 2, utilizamos os dados organizados em **vetores de dimensão *n***:

$$\vec{i} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ \ldots \ , \tilde{x}_n)\,,$$

$$\vec{j} = (a\tilde{x}_1, a\tilde{x}_2, \ \ldots \ , a\tilde{x}_n)\,,$$

e

$$\vec{u} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ \ldots \ , \tilde{y}_n)\,.$$

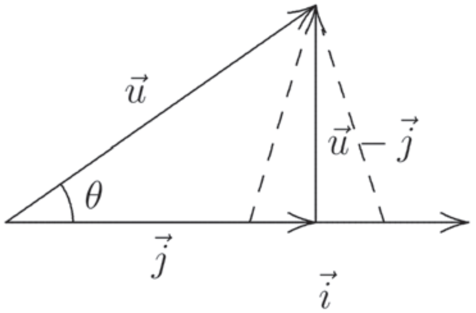


Figura 2. Vetores num espaço de dimensão *n*.

Os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ são colineares:

$$\begin{aligned}\vec{j} &= (a\tilde{x}_1, a\tilde{x}_2, \ldots, a\tilde{x}_n)\\ &= a(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)\\ &= a\,\vec{i}. \end{aligned} \tag{1}$$

Além do mais, o escalar a em (1) é precisamente o declive da reta procurada! Assim, determinar a será equivalente a determinar (algo sobre) $\vec{j}$, agora num **espaço de dimensão n**.

Repare-se que $\vec{u}-\vec{j} = (\tilde{y}_1 - a\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{y}_n - a\tilde{x}_n)$ não é mais do que o vetor dos resíduos, isto é, o vetor cujas componentes são as diferenças entre os dados observados e os dados teóricos da nova nuvem. Ora, o que se pretende é que a norma (ou distância) $\|\vec{u}-\vec{j}\|$ seja mínima. Isto só acontecerá se $\vec{u}-\vec{j}$ for normal a $\vec{i}$ (como sugere a figura 2). Para que tal aconteça, $\vec{j}$ tem de ser a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{i}$. Logo, o produto escalar de $\vec{u}-\vec{j}$ com $\vec{i}$ tem de ser nulo, retirando-se desta condição o valor do multiplicador a, declive da reta de regressão:

$$\begin{aligned} &\left(\vec{u}-\vec{j}\right)\cdot\vec{i} = 0\\ \Leftrightarrow &\left(\vec{u}-a\,\vec{i}\right)\cdot\vec{i} = 0 \quad \left(\vec{j} = a\,\vec{i},\ de\ (1)\right)\\ \Leftrightarrow &\ \vec{u}\cdot\vec{i} - a\,\vec{i}\cdot\vec{i} = 0\\ \Leftrightarrow &\ a = \frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{\|\vec{i}\|^2} \quad \left(\vec{i}\cdot\vec{i} = \|\vec{i}\|^2\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Depois de se calcular a através de (2), a determinação do parâmetro b é um simples exercício: dado que $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta procurada, ele terá de satisfazer a condição $y = ax + b$. Daqui se retira que $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Apesar de querermos focar-nos nos aspetos marcadamente geométricos do problema, vale a pena notar aqui que o resultado (2) pode ainda ser obtido pela combinação da geometria analítica com a aplicação das derivadas a problemas de otimização (assuntos tratados no 11.º ano, antes da regressão linear): depois da translação dos dados, o objetivo é o de minimizar a soma

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2,\ (e_i = \tilde{y}_i - a\tilde{x}_i),$$

como aparece no problema original. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{dS}{da} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{dS}{de_i}\frac{de_i}{da} = \sum_{i=1}^{n} 2e_i\frac{de_i}{da}\\ &= \sum_{i=1}^{n} 2e_i(-\tilde{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} 2(\tilde{y}_i - a\tilde{x}_i)(-\tilde{x}_i)\\ &= -2\left(\vec{u}-\vec{j}\right)\cdot\vec{i}.\end{aligned}$$

Segue-se (como sugerido geometricamente), $\left(\vec{u}-\vec{j}\right)\cdot\vec{i} = 0$, o que leva a (2).

2. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Vejamos a aplicação destes resultados a um exercício típico de um manual escolar.

> *Existirá alguma relação entre a temperatura e a quantidade de chuva que cai em Amarante? Para responder a esta pergunta vamos comparar num gráfico de correlação as temperaturas médias (ºC) dos vários meses do ano com a pluviosidade média (mm).*

Neste exemplo, a tabela da esquerda é dada e a da direita foi calculada por nós. O centroide da nuvem de pontos é

Tabela 1.

Temperatura	Pluviosidade
11.3	122
12.0	108
13.5	101
15.2	54
17.6	44
20.0	22
22.2	4
22.5	6
21.3	29
18.3	80
14.2	102
11.6	107

Tabela 2.

Temperatura $\vec{i}$	Pluviosidade $\vec{u}$
-5.3417	57.0833
-4.6417	43.0833
-3.1417	36.0833
-1.4417	-10.917
0.9583	-20.9167
3.3583	-42.9167
5.5583	-60.9167
5.8583	-58.9167
4.6583	-35.9167
1.6583	15.08333
-2.4417	37.08333
-5.0417	42.08333

$(\bar{x}, \bar{y}) = (16.6417, 64.9167)$. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{i}$ são as colunas da tabela da direita, depois de efetuada a translação da nuvem original: **são vetores num espaço de dimensão 12**.

De acordo com as conclusões da secção anterior, os parâmetros da equação da reta de regressão $y = ax + b$ podem ser calculados do seguinte modo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{i}}{\|\vec{i}\|^2} \\ &\approx \frac{-1895.4583}{195.2692} \\ &\approx -9.7069\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \bar{y} - a\bar{x} \\ &\approx 64.9167 + 9.7069 \times 16.6417 \\ &\approx 226.4557\,. \end{aligned}$$

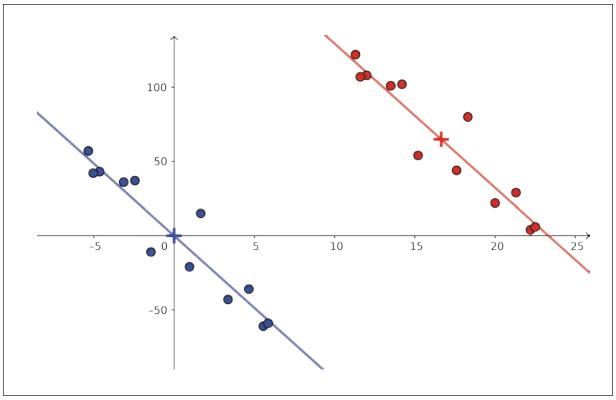


Figura 3. Translação da nuvem de pontos e centros de massa.

Assim, $y \approx -9.7069x + 226.4557$ será a equação da reta de regressão e, com ela, podemos fazer estimativas no contexto do problema.

3. COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR

O *coeficiente de correlação* é uma medida que pretende determinar o grau de alinhamento dos dados. Sobre ele costumam ser colocadas duas questões:

- Por que razão varia no intervalo $[-1, 1]$?

- Por que razão a correlação entre as variáveis é tanto mais forte quanto mais próximo de -1 ou de 1 se encontra o coeficiente? Não seria razoável pensarmos que quanto mais próximo de zero, mais forte será a correlação, uma vez que ele mede o grau de proximidade dos dados em relação à reta?!

Repare-se que o coeficiente de correlação, sendo uma medida do alinhamento dos dados, deve estar relacionado com o "grau de colinearidade" entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{i}$, referentes aos dados transladados[1] . E uma forma natural de medir este "grau de colinearidade" é estudando o ângulo θ que $\vec{u}$ e $\vec{i}$ formam entre si (ver figura 2).[2] Assim, θ poderia ser usado com legitimidade como medida do grau de alinhamento dos dados, ou seja, como coeficiente de correlação. O diagrama da figura 4 resume a variação deste coeficiente de correlação.

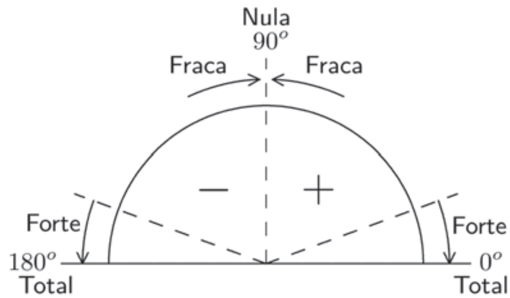


Figura 4. Coeficiente de correlação θ.

Visto que $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{i}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{i}\|}$, θ pode ser obtido através de

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{i}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{i}\|}\right). \tag{3}$$

No exemplo da secção anterior, o coeficiente de correlação θ é

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{i}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{i}\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-1895.4583}{143.7391 \times 13.9739}\right) \\ &= 160.68^o \ (forte?). \end{aligned}$$

No entanto, na literatura sobre o assunto, θ é convenientemente substituído pelo seu cosseno (porquê?), e assim se compreende a sua variação tal como encontramos nos manuais:

---

[1]A correlação não depende da nuvem que se considera, uma vez que a operação de translação efetuada à nuvem inicial garante a manutenção das relações entre os dados observados e os teóricos.

[2]Em tudo o que se segue pode-se substituir a unidade *grau* por *rad*.

$$0^o \leq \theta \leq 180^o \Rightarrow -1 \leq \cos\theta \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{i}\|} \leq 1.$$

Uma fórmula que normalmente acompanha os manuais para determinar o valor do coeficiente de correlação, r, é

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}\right)}}. \quad (4)$$

Sendo (4) equivalente a

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}},$$

fica estabelecida a igualdade

$$r = \frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{i}\|} = \cos\theta\,.$$

4. CONCLUSÃO

Ao longo dos anos, o tema da regressão linear tem sido tratado nas nossas escolas, quase exclusivamente, como uma manipulação de fórmulas, à qual a tecnologia veio retirar algum desse desprazer salvando, por um lado, os alunos dos cálculos fastidiosos, mas atirando-os, por outro, para uma cegueira determinada pela calculadora gráfica. O que aqui se quis mostrar foi que essas abordagens tradicionais ao tema podem, com enormes vantagens, ser substituídas por uma abordagem geométrica sólida, coerente e palpável, em que a única novidade (mas não surpresa) reside na generalização de conceitos de geometria analítica a espaços de dimensão superior a três. Além disso, abre também espaço à compreensão dos "bastidores" da calculadora gráfica, permitindo que os alunos olhem para ela como uma biblioteca de algoritmos que podem compreender e até criar.

REFERÊNCIAS

[1] Steve Simon *http://www.pmean.com/10/LeastSquares.html*, visualizado em 15.08.2019.

[2] José Martínez Salas. *Elementos de Matematicas*, 6.ª edição, págs 177-190.

[3] Helena Ribeiro, Maria Alice Martins, Rui Santos. "A regressão linear simples no ensino secundário". *Gazeta de Matemática da SPM*, n.º 168, pág. n.º 42, novembro 2012.

SOBRE O AUTOR

Carlos Alberto da Silva Gomes. Licenciado em Ensino de Matemática pela Universidade do Minho. Professor de matemática na Escola Secundária de Amarante desde 2000.

UMA NOVA FÓRMULA DE ÁLGEBRA LINEAR?

JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

Em meados de 2019, pareceu ter sido descoberto um novo enunciado de Álgebra Linear. Mas a história acabou por se revelar mais complicada do que poderia parecer à primeira vista.

UMA NOVA DESCOBERTA?

Terence Tao é talvez o mais famoso matemático vivo. A sua fama atrai o mais diverso tipo de solicitações, o que o obriga a limitar seriamente as propostas de trabalho ou colaboração que recebe regularmente. Aliás, ele escreve, na sua página sobre maneiras de ser contactado,[1] que não aceita pedidos de resolução de problemas matemáticos.

No entanto, em agosto de 2019 Tao abriu uma exceção a esta regra. Ele recebeu via correio eletrónico uma mensagem de três físicos (Stephen Parke, Xining Zhang e Peter Denton) com uma fórmula de Álgebra Linear que eles tinham descoberto mas cuja validade não conseguiam demonstrar. Acontece que Tao publicara, juntamente com Van Vu, um artigo (veja-se [3]) onde surgia uma fórmula semelhante e foi também por esse motivo que os físicos em questão escreveram a Tao. Para surpresa deles, Tao respondeu-lhes ao fim de somente duas horas, confirmando que a fórmula estava, de facto, correta e fornecendo-lhes três demonstrações dela. Rapidamente, os quatro (isto é, os três físicos e Tao) publicaram no arXiv uma curta pré-publicação (com somente três páginas) sobre este assunto, no qual era mencionado um outro artigo (veja-se [1]), além do de Vu e Tao, com uma fórmula semelhante.[2]

Durante algum tempo, as coisas ficaram neste ponto. Tudo mudou quando, em novembro de 2019, a *Quanta Magazine*, uma publicação *online* de divulgação científica, publicou um artigo[3] sobre este assunto. Como Tao explicou no seu blogue,[4] este artigo levou a uma vasta busca por outros textos com a fórmula em questão ou outras relacionadas. E o resultado foi ter-se chegado à conclusão de que a fórmula já tinha sido descoberta diversas vezes no passado. O artigo mais antigo detetado (até ver) com a fórmula data de 1966 ([4]) e, de facto, a fórmula é um caso-limite de um enunciado que data de 1934 ([2]).

A FÓRMULA

Vejamos então qual é a fórmula à qual nos referimos. É relativa a matrizes hermitianas, ou seja, matrizes quadradas com entradas complexas

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

para as quais se tem $\overline{a_{ji}} = a_{ij}$ sempre que $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Embora as entradas destas matrizes sejam, em geral, números complexos não necessariamente reais (exceto as entradas da diagonal principal que, essas sim, têm de ser reais), pode-se provar que têm sempre n valores próprios reais (se os contarmos com as respetivas multiplicidades).

[1] *https://www.math.ucla.edu/~tao/tags.html*

[2] *https://arxiv.org/abs/1908.03795v1*

[3] Veja-se *Neutrinos Lead to Unexpected Discovery in Basic Math*, por Natalie Wolchover; *https://www.quantamagazine.org/neutrinos-lead-to-unexpected--discovery-in-basic-math-20191113/*

[4] Veja-se *Eigenvectors from Eigenvalues: a survey of a basic identity in linear algebra*: *https://terrytao.wordpress.com/2019/12/03/eigenvectors-from-eigen-values-a-survey-of-a-basic-identity-in-linear-algebra/*

Vamos representá-los por $\lambda_1(H), \lambda_2(H), \ldots, \lambda_n(H)$. Seja v_j um vetor próprio de norma 1 correspondente ao valor próprio $\lambda_j(H)$. Então v é da forma $(v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jn})$.

Agora consideremos, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a matriz H_j obtida removendo de H a linha j e a coluna j. Naturalmente, cada matriz H_j é também uma matriz hermitiana com $n-1$ linhas e $n-1$ colunas. Sejam $\lambda_1(H_j), \lambda_2(H_j), \ldots, \lambda_{n-1}(H_j)$ os seus valores próprios; tal como se fez com a matriz H, vai-se supor que

$$\lambda_1(H_j) \leqslant \lambda_2(H_j) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1}(H_j).$$

Só por curiosidade, note-se que se

$$\lambda_1(H) \leqslant \lambda_2(H) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(H)$$

e se, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, os valores próprios de H_j forem ordenados de modo a ter-se $\lambda_1(H_j) \leqslant \lambda_2(H_j) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1}(H_j)$, então têm lugar as *desigualdades de entrelaçamento de Cauchy*:

$$\lambda_1(H) \leqslant \lambda_1(H_j) \leqslant \lambda_2(H) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1}(H_j) \leqslant \lambda_n(H).$$

Com estas notações, a fórmula em questão é: se $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então

$$|v_{ij}|^2 \prod_{k \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \big(\lambda_i(H) - \lambda_k(H)\big) = \prod_{k=1}^{n-1} \big(\lambda_i(H) - \lambda_k(H_j)\big).$$

Em particular, se H tiver n valores próprios distintos, então

$$|v_{ij}|^2 = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \big(\lambda_i(H) - \lambda_k(H_j)\big)}{\displaystyle\prod_{k \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \big(\lambda_i(H) - \lambda_k(H)\big)}. \tag{1}$$

Esta fórmula dá-nos assim (no caso em que os valores próprios de H são distintos) os valores absolutos das coordenadas dos vetores próprios de H, recorrendo somente ao conhecimento dos valores próprios de H bem como dos das matrizes H_j. Será possível obter não só os valores absolutos das coordenadas mas as próprias coordenadas? Não, pois se $(v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jn})$ for um vetor próprio unitário de H e se $\omega \in \mathbb{C}$ tiver valor absoluto 1, então $(\omega v_{j1}, \omega v_{j2}, \ldots, \omega v_{jn})$ também é um vetor próprio unitário de H.

É um tanto espantoso que os valores absolutos das coordenadas dos vetores próprios da matriz H possam ser obtidos somente a partir do conhecimento dos valores próprios de H, bem como dos das matrizes H_j, mas a igualdade (1) faz sentido. Por exemplo:

- Se se multiplicar H por um número real $c \neq 0$, a nova matriz ainda é hermitiana, mas os valores próprios de cH são os de H multiplicados por c. O mesmo acontece com os valores próprios das matrizes H_j. Mas então o membro da direita de (1) não sofre qualquer alteração, o que faz sentido, visto que os vetores próprios de cH são vetores próprios de H e vice-versa.
- Se se adicionar a H um múltiplo $c\,\mathrm{Id}_n$ da matriz identidade, então os valores próprios de $H + c\,\mathrm{Id}_n$ são os de H mais c, o mesmo acontecendo aos valores próprios das matrizes H_j. Logo, mais uma vez, o membro da direita de (1) não muda. Mais uma vez, isto faz sentido, pois os vetores próprios de $H + c\,\mathrm{Id}_n$ são vetores próprios de H e vice-versa.

PORQUE É QUE TEVE DE SER REDESCOBERTA?

Uma questão interessante aqui é a de saber porque é que esta fórmula teve de ser redescoberta e isto mais do que uma vez. Há precedentes históricos. Por exemplo, Pierre Wantzel publicou, em 1843, uma demonstração da impossibilidade de resolver algebricamente e usando somente números reais todas as equações de terceiro grau com coeficientes reais. Este resultado ficou esquecido e foi redemonstrado por volta de 1880 por outros dois matemáticos, Vincenzo Mollame e Otto Hölder, independentemente.

Tao e os seus coautores especularam quanto aos motivos pelos quais esta fórmula em particular ficou esquecida. Entre outras hipóteses, conjeturaram que isto se pode dever ao facto de ninguém ter dado um nome à fórmula (resolveram chamar-lhe *identidade dos vetores próprios e dos valores próprios*) e de ter sempre surgido no passado, não como um fim em si, mas como uma ferramenta para obter outros resultados.

Isto é um exemplo de como o facto de uma descoberta científica ser publicada a salva do desaparecimento, mas não do esquecimento. E também é um exemplo de como um texto de divulgação científica pode afetar a área científica que está a tentar divulgar.

REFERÊNCIAS

[1] László Erdös; Benjamin Schlein; Horng-Tzer Yau, "Universality of random matrices and local relaxation flow". *Invent. Math.* 185 (1):75–119, 2011

[2] Karl Löwner, "Über monotone Matrixfunktionen". *Math. Z.* 38 (1):177–216, 1934

[3] Terence Tao; Van Vu, "Random matrices: Universality of local eigenvalue statistics". *Acta Math.*, 206 (1):127–204, 2011

[4] R. C. Thompson, "Principal submatrices of normal and Hermitian matrices". *Illinois J. Math.* 10:296–308, 1966

Pedro J. Freitas
Universidade
de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

TRATADO DE PRÁTICA DARISMÉTICA DE GASPAR NICOLÁS

Em resposta a um gentil convite dos editores da *Gazeta,* damos início aqui à coluna *Histórias da Matemática.* Nela, pretendemos trazer notícias de desenvolvimentos recentes desta disciplina, escritos por autores que tenham com eles um contacto mais próximo.

O assunto que apresentamos hoje tem a ver com uma efeméride: em 2019, passaram 500 anos sobre a edição do primeiro livro de matemática impresso em Portugal, o *Tratado de Prática Darismética,* de Gaspar Nicolás. Sobre o autor, pouco se sabe, embora se pense que seja oriundo do norte de Portugal e tenha, talvez, origem judaica. O seu livro surge num momento de grande crescimento da atividade comercial na Europa, acompanhando tanto os movimentos de expansão como a passagem de um sistema económico feudal para outro, baseado nas trocas comerciais. Esta preeminência do comércio e das viagens suscitou a necessidade de um uso pragmático e fiável da matemática que até então não se tinha sentido com essa acuidade.

Figura 1. Capa da edição de 1917.

No que diz respeito à aritmética, depois de cerca de 40 manuais terem sido publicados na Europa entre 1472 e 1519, surgiram, no início do século XVI, três tratados impressos em português. O primeiro, *Tratado de Prática Darismética,* de Gaspar Nicolás, foi pela primeira vez editado em 1519[1] e teve mais 11 reedições até ao século XVIII, sendo a última de 1716. Os dois outros foram a *Prática Darismética,* de Rui Mendes, em 1540, e o *Tratado da Arte de Arismética,* de Bento Fernandes, em 1555, também bastante reeditados.

Todos os livros seguem uma estrutura similar de apresentação organizada de procedimentos aritméticos, quer apresentados abstratamente quer imediatamente aplicados a casos práticos. É de notar que todos usam, desde o início, os numerais indo-árabes (que correntemente usamos hoje em dia), abandonando por completo

[1] Esta edição está digitalizada e disponível no Fundo Antigo da Universidade do Porto, em *www.fc.up.pt/fa/index.php?p=nav\&f=books.0223.0*

os numerais romanos e as operações que com eles se faziam, como a chamada conta castelhana, ainda presente em alguns manuais espanhóis desta época, e que curiosamente viria a reaparecer num manual português muito posterior, a *Flor da Arismética Necessária,* de Afonso Guiral e Pacheco, de 1624.

Depois da descrição desta escrita numérica, o livro apresenta as quatro operações e os algoritmos para as efetuar, que são semelhantes aos que hoje utilizamos (o único algoritmo que é consideravelmente diferente é o da divisão: nestes livros, é usada a chamada divisão em galera).

Passa-se então a regras de cálculo, como a regra de três, que ocupa várias secções, e que é apresentada com várias variantes (que se podem considerar implementações da regra de três composta, hoje em dia abandonada por se poder reduzir a duas regras de três simples). O uso tão alargado desta regra levou António Pereira (aritmético do século XVII) a compará-la com o alecrim: tal como este tinha virtudes para muitas doenças, também a regra de três resolvia uma grande quantidade de problemas. Outra regra usada sistematicamente é a da dupla falsa posição, um método que se usava para resolver equações lineares antes da divulgação dos métodos algébricos que hoje se usam (mais abaixo mostraremos um exemplo do seu uso). Há também várias secções dedicadas às frações, aqui chamadas quebrados, e à extensão destas regras de cálculo aos casos em que os dados são fracionários e não inteiros. A seguir, encontramos algumas secções dedicadas a problemas práticos de impostos ou baratos (trocas comerciais). Há uma longa secção sobre geometria, e métodos para extrair raízes quadradas e cúbicas. No final do livro, há vários problemas com ligas metálicas.

Ao contrário do que se propõe com a pedagogia atual, a solução destes problemas é apresentada, na maior parte das vezes, sem explicação − o autor começa a resolução com a expressão "Faz assim" e descreve o método para resolver o problema (em vários casos, aliás, não é imediato compreender porque é que a resolução dada resolve de facto o problema). Claramente, a intenção era mecanizar estes métodos de resolução para que se pudessem pôr em prática de forma expedita nos problemas diários do comércio.

Paralelamente a estas considerações mais pragmáticas, encontramos uma longa coleção de problemas, de cariz recreativo, seguindo aliás uma tradição medieval. Gaspar Nicolás refere explicitamente Luca Pacioli como fonte para estes problemas, sendo que alguns provêm de tradições mais antigas. Alguns destes problemas podem resolver-se usando os métodos apresentados no livro anteriormente, mas outros, como diz o autor, só se resolvem "por fantasia", isto é, pensando numa resolução específica para o problema dado.

Dos três livros de aritmética que referimos, é Gaspar Nicolás que dedica mais tempo a estes tópicos de matemática recreativa, cerca de um terço do livro. O tratado de Rui Mendes não tem referências significativas a problemas deste tipo, e o de Bento Fernandes dedica cerca de um sexto do seu livro a estes problemas, retomando muitos dos de Gaspar Nicolás.

Como exemplo de um destes problemas, e do uso da regra da dupla falsa posição, apresentamos aqui um enunciado.

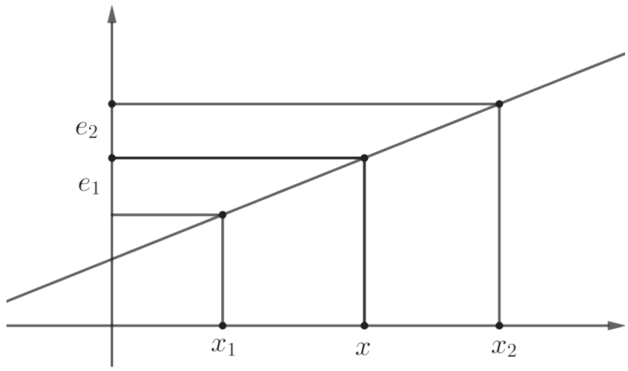
> Digo que um homem entrou em uma igreja e não sabemos quanto dinheiro levava. E disse ao primeiro santo que lhe dobrasse o dinheiro que ele levava e que lhe daria 12 reais, e o santo lho dobrou, e deu-lhe 12 reais e ficou-lhe ainda dinheiro. E foi-se ao outro santo, que lhe dobrasse o dinheiro que ficou, e que lhe daria 12, e o santo lhe dobrou e o homem lhe deu 12 e ficou-lhe ainda dinheiro. E foi-se a outro santo, que lhe dobrasse o que lhe ficou e que lhe daria 12, e o santo lho dobrou e o homem lhe deu 12, e não lhe ficou nada. Ora, eu demando quanto dinheiro levava este bom homem.

Talvez a primeira coisa a notar é que, tal como hoje acontece com alguns problemas, o enunciado não é razoável: o homem entra na igreja com dinheiro, são-lhe concedidos três milagres e sai da igreja de bolsos vazios. O intuito aqui é exclusivamente recreativo e pedagógico.

O problema pode resolver-se usando uma equação de primeiro grau ou, mais eficazmente, fazendo a análise retrógrada, isto é, tentando reconstituir o processo do fim para o princípio. O autor apresenta uma resolução por falsa posição, um dos processos mais comuns, à época, para resolver problemas de cariz linear: a partir de dois palpites sobre o dinheiro que o homem levava (aqui, 11 e 10 reais), obtêm-se dois resultados finais diferentes de zero, e a partir destes encontra-se a solução.

> Diz que levaste 11 reais, e se os dobras são 22 reais, quem gasta 12 ficam 10, dobra-os, são 20, quem gasta 12 ficam 8, dobra-os, são 16, quem gasta 12

> ficam 4. Ora faz outra volta e diz que levaste 10, e dobra-os, ficam 20, quem tira 12, ficam 8, dobra-os, são 16, quem gasta 12 ficam 4, dobra-os, são 8, e tu bem vês que para chegar a 12 lhe faltavam 4. E porás por 10 menos 4. Ora faz o partidor,[2] que é 8, i.e., 4 que sobejaram e 4 que minguaram. Ora, para saberes qual é a partição,[3] multiplica em cruz, i.e., 4 vezes 10 são 40, e 4 vezes 11 são 44, ajunta-os com 40, e são 84, porque como já te disse: menos e sobejo sempre se ajuntam. Ora parte 84 por 8 e vem 10 e 1/2 e tanto dinheiro levava o homem quando entrou na igreja a falar com os três santos, como podes provar.



Em primeiro lugar, gostaríamos de deixar claro que este método *não é por tentativa e erro*. Aqui, resolve-se uma equação do tipo $f(x) = c$, em que f é uma função linear, dando valores à variável x e registando os valores que se obtêm (só por sorte se obteria c). Suponhamos que, dando o valor inicial x_1, obtemos o valor c_1, com erro $e_1 = c_1 - c$, e para x_2 obtemos um valor c_2, com erro $e_2 = c_2 - c$. Como sabemos que o gráfico da função é uma reta (ver figura), o declive tem de se manter:

$$\frac{e_1}{x_1 - x} = \frac{e_2}{x_2 - x}.$$

Manipulando um pouco a expressão, obtemos

$$x = \frac{x_1 e_2 - x_2 e_1}{e_2 - e_1}.$$

Esta é a fórmula usada aqui, com alguns ajustes para que não apareçam números negativos.[4]

O estilo misto destas aritméticas quinhentistas, contendo tanto temas estritamente aritméticos como recreativos, veio a manter-se em outros tratados mais tardios, de temática similar, como o *Thesouro de Prudentes*, de Gaspar Cardoso de Sequeira, publicado pela primeira vez em 1612 e igualmente reeditado várias vezes. Sendo este formado por quatro livros, o terceiro é dedicado à aritmética e tem uma secção inteiramente sobre ilusionismo (com números e com cartas).

Estamos a preparar, em colaboração com Jorge Nuno Silva, uma nova edição do livro de Gaspar Nicolás, pela Fundação Calouste Gulbenkian. Esperamos que ela possa ser útil aos leitores contemporâneos, permitindo uma leitura em português atual, com algum enquadramento temático, possibilitando um contacto mais direto com a aritmética e os problemas recreativos deste valioso tratado do início do século XVI, que, além do seu conteúdo pedagógico, nos deixa um retrato vivo da vida comercial e mercantil da época e do seu espírito de rigor aritmético.

[2] Divisor

[3] Dividendo

[4] Para mais informação, ver, por exemplo, Eugene C. Boman, "False Position, Double False Position and Cramer's Rule", *College Mathematics Journal*, 2009 doi:10.4169/193113409X458732.

AUTORES

Carlos Henggeler Antunes
INESC Coimbra; Departmento de Engenharia Eletrotécnica e de Computadores, Universidade de Coimbra
ch@deec.uc.pt

Maria João Alves
INESC Coimbra; CeBER e Faculdade de Economia, Universidade de Coimbra
mjalves@fe.uc.pt

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO EM DOIS NÍVEIS PARA A OTIMIZAÇÃO DE TARIFAS DINÂMICAS NO MERCADO RETALHISTA DE ELETRICIDADE

Os modelos de otimização em dois níveis: − permitem representar decisões sequenciais do tipo líder-seguidor, colocando importantes desafios teóricos, metodológicos e computacionais; − são adequados para tratar problemas de grande relevância e complexidade em vários domínios de aplicação, em particular no sector energético.

1. INTRODUÇÃO

A definição de preços diferenciados no tempo é uma estratégia adotada em várias indústrias para induzir padrões da procura que permitam uma melhor utilização dos sistemas de abastecimento e da infraestrutura de distribuição disponível. Esta estratégia possibilita aos fornecedores dos bens ou serviços adiar ou evitar investimentos significativos para atender a situações de picos de procura, em geral de curta duração. A frequência e a magnitude das variações de preços podem ser elevadas e anunciadas com uma antecedência reduzida, o que impõe desafios, quer aos fornecedores na definição dos esquemas tarifários mais convenientes (em geral, que maximizem os seus lucros), quer aos consumidores que, em resposta aos preços variáveis, podem tomar decisões que minimizem os seus custos e/ou o impacto associado à alteração de padrões de consumo.

Na evolução das redes de energia para as redes inteligentes (*smart grids*), os contadores inteligentes (*smart meters*) instalados nos pontos de consumo serão uma componente importante para a melhoria da eficiência global do sistema, permitindo a comunicação bidirecional entre os fornecedores e os consumidores e facilitando a adoção de esquemas tarifários mais flexíveis com benefícios para os múltiplos atores. Este tipo de tarifas dinâmicas pode trazer benefícios para os operadores de rede (contribuindo para aliviar situações de congestão nas redes de distribuição e melhorar a utilização das fontes renováveis de natureza intermitente), comercializadores (permitindo gerir os preços de compra de energia elétrica no mercado grossista com a venda no mercado retalhista) e consumidores (adotando ações de resposta dinâmica da procura para reduzir a fatura sem prejudicar a qualidade dos serviços de energia, e.g. conforto térmico).

Assim, do ponto de vista do comercializador, o problema consiste em (dentro de um dado quadro regulatório) definir preços variáveis no tempo num dado horizonte de planeamento (por exemplo, um dia) que maximizem o seu lucro. Face aos preços anunciados pelo comercializador (por exemplo, para o dia seguinte), o consumidor estabelece os períodos de funcionamento dos seus aparelhos e a parametrização dos termóstatos dos aparelhos de aquecimento/arrefecimento de modo a minimizar o custo total (que pode incluir a monetarização do desconforto associado à modificação de rotinas ou à violação de limiares de temperaturas de conforto). Este problema, em que há uma relação hierárquica entre dois decisores (o comercializador como líder e o consumidor como seguidor) com interesses distintos, que controlam diferentes conjuntos de variáveis e agem sequencialmente, pode ser representado por um modelo de otimização em dois níveis (*bilevel*). Este tipo de modelos tem sido usado neste contexto da interação entre comercializadores e consumidores de energia elétrica, bem como noutras áreas de aplicação para lidar com problemas de definição de preços, problemas do tipo defensor-atacante, problemas com um nível de decisão estratégico e um nível de decisão operacional, etc.

2. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO EM DOIS NÍVEIS

O problema de otimização em dois níveis (*bilevel optimization*, BLO) pode ser formulado da seguinte forma, onde x representa o vetor das variáveis controladas pelo líder e y o vetor das variáveis controladas pelo seguidor:

$$\begin{aligned} &\max_{x\in X} \quad F(x, y) \\ &s.a \quad G(x,y) \le 0 \\ &y \in \arg\max_{y\in Y}\{f(x, Y) : g(x, y) \le 0\}. \end{aligned}$$

$X \subset \mathbb{R}^{n_1}$ e $Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$ são conjuntos fechados estabelecendo restrições nas variáveis, incluindo limites inferiores e superiores; n_1 é o número de variáveis de nível superior (*upper level*, UL) e n_2 é o número de variáveis de nível inferior (*lower level*, LL). $F(x, y)$ e $f(x, y)$ são as funções objetivo do líder e do seguidor, respetivamente.

O seguidor otimiza a sua função objetivo $f(x, y)$ depois de o líder estabelecer o valor das suas variáveis de decisão $x \in X$. A região admissível do seguidor para uma dada decisão x do líder é $Y(x) = \{y \in Y : g(x, y) \le 0\}$ e o correspondente conjunto de reação racional do seguidor é:

$$\Psi(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n_2} : y \in \arg\max_{y\in Y(x)} f(x,y) \right\}.$$

O conjunto admissível do problema BLO, geralmente designado por região induzida, é $IR = \{(x, y) : x \in X, G(x, y) \le 0, y \in \Psi(x)\}$. A resolução de um problema BLO é difícil nas perspetivas teórica, metodológica e computacional, dado que o problema é intrinsecamente não convexo; mesmo quando ambas as funções objetivo e todas as restrições são lineares, o problema é NP-difícil (Dempe, 2002).

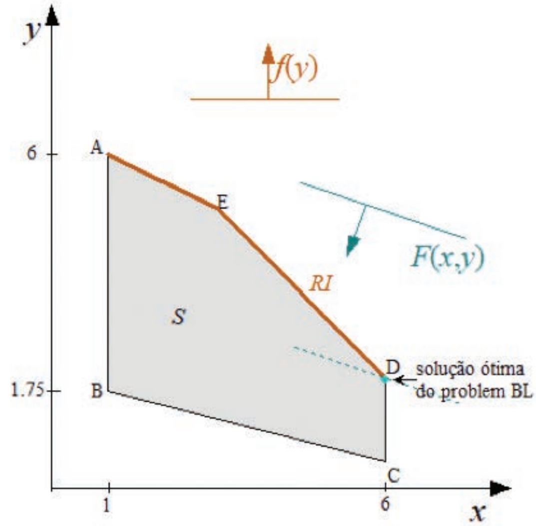


Figura 1. Região induzida e solução ótima para um problema BLO linear.

A figura 1 ilustra estes conceitos para um problema BLO linear com duas variáveis de decisão: x é controlada pelo líder, y é controlada pelo seguidor e S é o conjunto de todas as restrições (neste exemplo não existem restrições UL $G(x,y) \le 0$ envolvendo as variáveis LL y). Num problema BLO linear, quando o líder escolhe valores para x, o termo correspondente em $f(x,y)$ torna-se constante e pode ser eliminado do problema; assim, a função objetivo do seguidor pode ser expressa apenas como $f(y)$. Para cada valor de x, o seguidor escolhe o valor de y que otimiza a sua função objetivo $f(y)$. Logo, a região induzida, constituída pelas soluções admissíveis para este problema BLO, é $RI = [AE] \cup [ED]$. A solução ótima para o problema BLO é o ponto D que maximiza $F(x,y)$ em RI.

A solução ótima de um problema BLO não é, em geral, uma solução eficiente (ótima de Pareto) do problema bi-objetivo resultante da consideração das funções objetivo do líder e do seguidor no mesmo nível (i.e., situação em que existiria cooperação entre os dois decisores). Neste exemplo, as soluções eficientes para o problema bi-objetivo com $F(x,y)$ e $f(y)$ a maximizar em S localizam-se na aresta $[AB]$. Note-se que nesta região é possível ter melhores valores para as funções objetivo de UL e de LL em relação aos obtidos em D, i.e., a cooperação entre o líder e o seguidor seria vantajosa para ambos os decisores. No entanto, o modelo BLO tem subjacente a não cooperação, uma vez que há muitas situações práticas em que esta cooperação não existe.

Dado que o problema LL é uma restrição do problema BLO, apenas as soluções ótimas do problema LL para cada instanciação de x são soluções admissíveis do problema BLO. Contudo, se o problema LL for difícil de resolver, devido à sua natureza combinatória e/ou não linear, bem como à possível existência de um tempo computacional limitado, pode não ser possível obter a respetiva solução ótima e, consequentemente, uma solução admissível para o problema BLO.

Têm sido desenvolvidas abordagens clássicas de programação matemática e abordagens meta-heurísticas para o problema BLO. Quando o problema LL é convexo, uma das abordagens mais usadas consiste na respetiva substituição pelas suas condições de Karush-Kuhn-Tucker, transformando o problema global num problema com um único nível. No caso em que todas as funções (objetivo e das restrições) do problema BLO são lineares, obtém-se um problema de programação linear com restrições de complementaridade, que pode ser linearizado através de técnicas envolvendo variáveis binárias auxiliares e restrições adicionais, e depois resolvido por um *solver* de programação linear inteira-mista. Face às dificuldades de resolução dos problemas BLO, que podem ainda ser agravadas pela existência de funções objetivo/restrições não lineares e/ou variáveis inteiras, têm sido desenvolvidas meta-heurísticas, em particular baseadas em populações (algoritmos evolucionários, evolução diferencial, otimização por enxame de partículas). Existem ainda abordagens híbridas, em que a pesquisa no problema de UL é, em geral, controlada por uma meta-heurística, enquanto o problema de LL após a instanciação das variáveis UL é, se possível, resolvido por um *solver*. Sinha et al. (2018) apresentam uma revisão de métodos clássicos e evolucionários para problemas BLO.

3. MODELAÇÃO BLO PARA A INTERAÇÃO COMERCIALIZADOR-CONSUMIDOR DE ENERGIA ELÉTRICA

A maioria dos estudos reportados na literatura modela o problema do consumidor apenas considerando que deve ser fornecida uma certa quantidade de energia para o funcionamento das cargas (aparelhos) que prestam um determinado serviço, sem ter em conta os respetivos ciclos de operação. Os modelos propostos em (Alves et al. 2016, Carrasqueira et al. 2017, Soares et al., 2020) incluem a caracterização física da operação e controlo das cargas mais comuns no setor residencial, permitindo uma representação detalhada do problema de gestão energética do consumidor, traduzindo de forma fisicamente mais realista a reação do consumidor face aos preços variáveis (problema LL no modelo BLO). Nestes modelos, as cargas são classificadas de acordo com o tipo de controlo que pode ser exercido: ▸ deslocáveis, cujo ciclo de operação pode ser deslocado no tempo mas não pode ser interrompido (máquinas de lavar louça, de lavar roupa e de secar roupa); ▸ interrompíveis, cujo abastecimento poder ser do tipo *on/off* desde que seja fornecida uma certa quantidade de energia durante um dado período de tempo (aquecedor elétrico de água, bateria do veículo elétrico); ▸ termostáticas, cujo funcionamento é regulado por um termóstato, dependente da temperatura interior, e que é parametrizado pelo consumidor (ar condicionado).

O comercializador (líder) pretende determinar os preços de venda de eletricidade aos consumidores em cada período temporal (períodos, em geral, predefinidos) de modo a maximizar o lucro. O consumidor (seguidor) responde a estes preços através das variáveis de controlo (tempo de operação e temperatura) das cargas para minimizar o custo. A função objetivo do consumidor inclui os custos de energia associados ao funcionamento de cada tipo de cargas, o custo associado à potência máxima tomada e um termo que resulta da monetarização do desconforto associado à temperatura interior (desvio em relação a uma temperatura de referência). A inclusão da carga termostática no problema LL impõe um esforço computacional significativo, resultante da modelação da histerese do termóstato. O modelo BLO, incluindo a modelação física detalhada das cargas no problema LL, está descrito em Soares et al. (2020), onde são também analisados resultados ilustrativos.

A abordagem de resolução proposta é uma meta-heurística híbrida em que, para cada instanciação dos preços definidos pelo comercializador no problema UL (solução de uma população da meta-heurística), é resolvido o problema LL de programação inteira-mista (problema do consumidor). As variáveis UL são inferior e superiormente limitadas, existindo ainda uma restrição de preço médio no período de planeamento, configurando uma opção tarifária oferecida pelo comercializador que o consumidor adota, tentando tirar o melhor partido da flexibilidade de utilização das cargas para minimizar o seu custo. O consumidor otimiza o funcionamento dos seus aparelhos, incluindo os três tipos de cargas acima mencionadas, além de uma carga base não adequada para controlo (que inclui, por exemplo, iluminação, frigorífico,

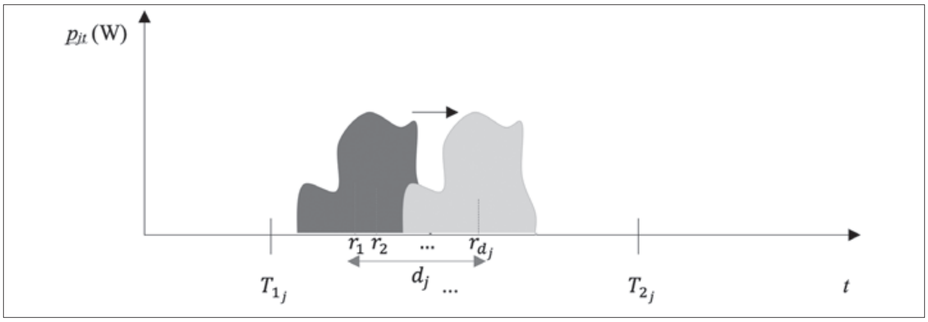


Figura 2. Controlo de cargas deslocáveis, não interrompíveis: [T_{1_j}, T_{2_j}] define o intervalo de conforto para o funcionamento da carga j, d_j é a duração do ciclo de operação, e r_1, r_2,..., r_{d_j} são os estádios em que este ciclo é dividido, em cada um dos quais é requerida uma dada potência p.

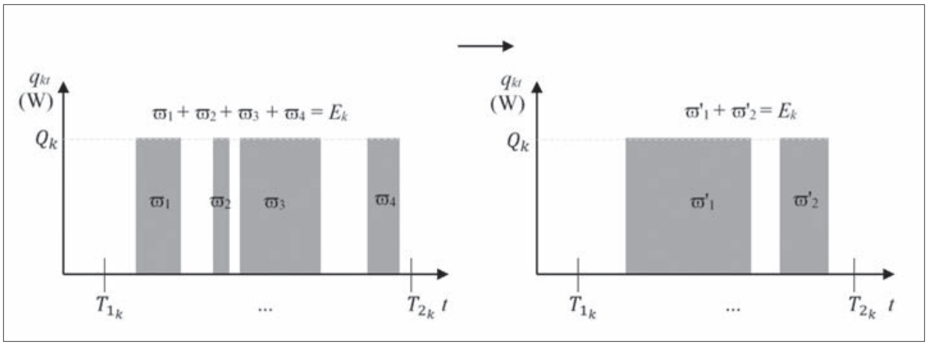


Figura 3. Controlo de cargas interrompíveis: [T_{1_k}, T_{2_k}] define o intervalo de conforto para o funcionamento da carga k, E_k é a quantidade de energia que deve ser fornecida e Q_k é a potência nominal de operação.

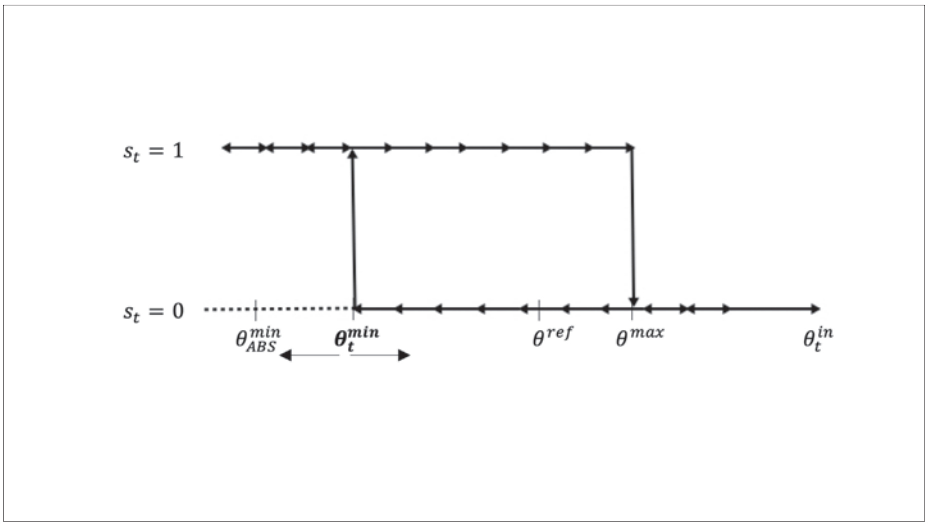


Figura 4. Comportamento do termóstato (modo aquecimento) no instante t do período de planeamento: a variável binária $s_t = 1$ indica o estado *on/off*, θ_t^{in} é a temperatura interior do espaço, $\theta^{\max}$ é a temperatura à qual o aparelho desliga, θ^{ref} é a temperatura de referência, $\theta_{ABS}^{\min}$ é a temperatura mínima admissível e $\theta_t^{\min}$ é a temperatura mínima a que o aparelho liga, a qual é uma variável de decisão cujo valor ótimo terá em conta os preços da energia em cada instante.

televisão, etc.) mas que influencia os custos de potência e de energia. As figuras 2-4 ilustram as decisões do problema LL em relação ao controlo das cargas deslocáveis, interrompíveis e termostática, respetivamente. Nas cargas deslocáveis (não interrompíveis) deve ser determinado o instante inicial de operação, nas cargas interrompíveis os períodos em que há abastecimento de energia elétrica, e nas cargas termostáticas a temperatura mínima interior (em modo de aquecimento) para o sistema ligar. O problema LL inclui restrições sobre os períodos que o consumidor considera desejáveis para o funcionamento das cargas e equações do modelo térmico (ar condicionado) que define a temperatura interior no instante t como função da temperatura interior no instante $t-1$, da temperatura exterior e da operação do sistema de ar condicionado. A complexidade computacional associada à modelação do comportamento do termóstato resulta de se permitir o estabelecimento da temperatura mínima $\theta_t^{\min}$ em cada

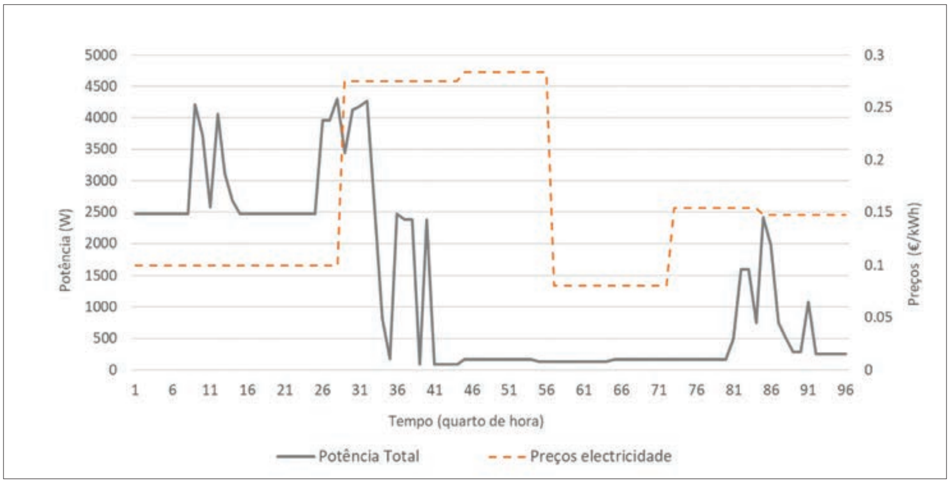


Figura 5. Solução final de um problema BLO: preços estabelecidos pelo comercializador e potência requerida à rede para a operação das cargas do consumidor durante o período de planeamento.

instante *t* do período de planeamento de modo a tirar o melhor partido dos preços variáveis e da inércia térmica do espaço sob controlo (i.e., aquecer o espaço em períodos de preços baixos para ter o conforto desejado quando os preços são mais elevados).

A figura 5 ilustra uma solução final de um modelo BLO com estas características: preços estabelecidos pelo comercializador e potência requerida à rede para a operação das cargas do consumidor durante o período de planeamento.

4. CONCLUSÃO

Os modelos BLO são adequados para representar problemas caracterizados por decisões sequenciais, em que o líder e o seguidor controlam diferentes conjuntos de variáveis, mas as respetivas decisões influenciam a otimalidade e a admissibilidade das escolhas do outro decisor. A literatura científica tem revelado um crescente interesse pela aplicação destes modelos, com especial relevância no setor energético. Contudo, a obtenção de soluções ótimas é, na maioria dos casos, muito difícil dada a intrínseca não convexidade destes problemas. Os problemas tornam-se ainda mais complicados se o problema LL for multiobjetivo, pela necessidade de identificar fronteiras eficientes para cada instanciação das variáveis UL (Alves et al., 2019). Neste contexto, a otimização em dois níveis é uma área de investigação que comporta importantes desafios de natureza teórica, metodológica e computacional, bem como de aplicação a uma vasta gama de problemas reais.

REFERÊNCIAS

[1] Alves, M. J., C. H. Antunes, P. Carrasqueira (2016) "A hybrid genetic algorithm for the interaction of electricity retailers with demand response". *Applications of Evolutionary Computation*, 459-474, Springer.

[2] Alves, M. J., C. H. Antunes, J. P. Costa (2019) "Multiobjective Bilevel Programming: Concepts and Perspectives of Development, In Doumpos". M. et al. (eds.), *New Perspectives in Multiple Criteria Decision Making: Innovative Applications and Case Studies*, 267–293, Springer.

[3] Carrasqueira, P., M. J. Alves, C. H. Antunes (2017) "Bi-level particle swarm optimization and evolutionary algorithm approaches for residential demand response with different user profiles". *Information Sciences*, 418-419: 405-420.

[4] Dempe, S. (2002) *Foundations of Bilevel Programming*, Kluwer Academic Publishers.

[5] Sinha, A., P. Malo, K. Deb (2018) "A review on bilevel optimization: from classical to evolutionary approaches and applications". *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 22(2): 276-295.

[6] Soares, I., M. J. Alves, C. H. Antunes (2020) "Designing time-of-use tariffs in electricity retail markets using a bi-level model – Estimating bounds when the lower level problem cannot be exactly solved". *Omega*, 93, 102027.

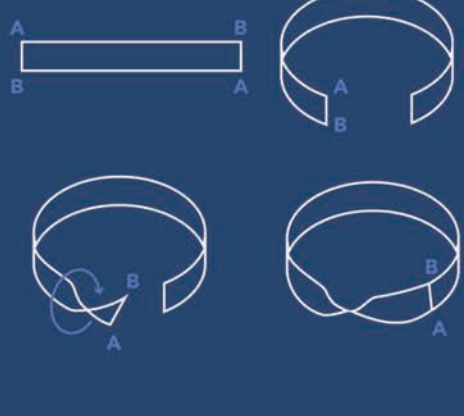
Coordenação do espaço PT-MATHS-IN:
Paula Amaral, Universidade Nova de Lisboa, *pt-maths-in@ spm.pt.*

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

QUER SER SÓCIO DA SPM?

Veja as vantagens e condições no verso.

CONSTRUA UMA
BANDA DE MÖBIUS
COM ESTA PÁGINA



COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos.
Contacte-nos!

VALOR DE QUOTAS 2017:

Sócio Efetivo: **40 euros**

Sócio Estudante: **20 euros**
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante
comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais
- Escolar: **80 euros**
- Académico: **400 euros**
- Corporativo: **600 euros**

CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

INFORMAÇÕES

Av. da República, 45 3.º esq
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785
E-mail: spm@spm.pt

www.spm.pt

Nuno Camarneiro
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

ESCRITA DE FICÇÃO

Os desafios de aceitar um novo desafio obrigam a um trabalho de pesquisa e análise. Afinal, o que é ficção?

Após alguns anos a rejeitar convites similares, acabei por aceitar a responsabilidade de lecionar um curso de escrita criativa na Escola das Artes da Universidade Católica Portuguesa. O título do curso é Escrita de Ficção e os alunos vêm de áreas muito diferentes: Ciência, gestão, economia, filosofia, artes e conservação e restauro. A primeira pergunta que me coloquei ao preparar o curso foi: Que interesse tem um curso de escrita de ficção para quem não quer ser escritor? E logo outra, ainda mais difícil: O que é, exatamente, a ficção?

Decidi começar pela segunda, esperando que iluminasse a primeira. Fui procurar no dicionário e registei as várias definições:

> **Ficção** *(s.f)* **1** Ato ou efeito de fingir. **2** Invenção fabulosa ou engenhosa. **3** Criação de carácter artístico baseada na imaginação. **4** Fábula. **5** Interpretação ou relato subjetivo de um facto ou de uma ideia. **6** Suposição do orador para abrilhantar ou reforçar o discurso.

Da primeira podemos questionar o valor ético, mas não a utilidade. Não é só o poeta que é um fingidor, todos o somos em alguns (muitos) momentos.

Quanto ao poder inventivo e à criação baseada na imaginação, são ferramentas fundamentais em todas as áreas, particularmente na ciência, que exige que estejamos preparados para imaginar o que ninguém ainda imaginou. Sem esse poder e sem essa invenção, não teríamos a relatividade ou a teoria da evolução.

Da fábula somos todos íntimos, em crianças através das histórias que nos contam, mais tarde das que contamos a outros e a nós mesmos. A forma como nos vemos, os modelos sociais e económicos, a importância que atribuímos ao que nos vai sucedendo são tudo fábulas que se aguentam enquanto acreditarmos nelas.

A interpretação é outra forma de ficcionar, de dar valor e sentido ao que vemos e ouvimos. Deduzir o todo a partir das partes, descobrir o passado e intuir o futuro, também isso são ficções.

Finalmente a retórica, alguém lhe está imune? Nos relatórios que produzimos, nos projetos a que concorremos, mesmo nos artigos, por mais científicos que sejam, não haverá sempre um esforço para abrilhantar ou reforçar o discurso? Quem nunca abrilhantou que atire o primeiro superlativo.

Afinal a ficção não é apenas coisa de romancistas, e mais me tranquiliza a minha decisão. A ficção é do que somos feitos e damos-lhe uso a todas as horas do dia. É talvez um efeito secundário de sermos humanos, ou será exatamente ao contrário?

A HISTÓRIA DE UMA PARCERIA

Entrevista com Claude Brezinski e Michela Redivo-Zaglia

Kenier Castillo[a], Zélia da Rocha[b]

Universidade de Coimbra[a], Universidade do Porto[b]

kenier@mat.uc.pt[a], mrdioh@fc.up.pt[b]

(Com fotografias de ELENA DEL MORAL, elenadelm@gmail.com)

Claude Brezinski é professor emérito da Universidade de Lille, França, na qual dirigiu o Laboratório de Análise Numérica e de Optimização por quase trinta anos. É membro da Real Academia de Ciências de Saragoça, Espanha. A sua investigação incide sobre Aceleração da Convergência por Métodos de Extrapolação, Aproximação de Padé, Frações Contínuas, Polinómios Ortogonais, Álgebra Linear Numérica e História das Ciências. É autor de uma vasta bibliografia nestes tópicos. Pertenceu ao comité editorial de várias prestigiadas revistas internacionais e, em 1991, fundou a *Numerical Algorithms,* que atingiu o topo do ranking da área de Análise Numérica, continuando a ser o seu editor-chefe.

Michela Redivo-Zaglia é professora associada, com agregação, do Departamento de Matemática da Universidade de Pádua, Itália, do qual foi vice-diretora. Durante 14 anos dirigiu o Centro de Cálculo do Departamento de Electrónica e Ciência dos Computadores daquela universidade. A sua investigação incide principalmente sobre Álgebra Linear Numérica, Extrapolação e Métodos de Aceleração da Convergência e suas aplicações. É autora de uma vasta bibliografia e de vários *softwares* de domínio público. Pertence ao comité editorial de três revistas de Análise Numérica e é a editora de *software* da *Numerical Algorithms* desde a sua fundação.

"Quando nos conhecemos, as nossas competências eram complementares e, com o tempo, cada um de nós aprendeu com o outro."

Claude Brezinski and Michela Redivo-Zaglia são colaboradores há mais de 30 anos. O trabalho conjunto que desenvolveram constitui uma contribuição muito significativa na área da Análise Numérica.

Esta entrevista foi realizada durante a visita de Claude e Michela a Portugal, em julho de 2019. As fotografias foram tiradas durante a visita á Sala dos Capelos da Universidade de Coimbra.

CLAUDE BREZINSKI

Quando e como começou a interessar-se pela Análise Numérica?

CB No final dos meus estudos de mestrado na Universidade de Paris, em junho de 1964, dei entrada no Centro de Estudos Nucleares, em Saclay, para um estágio de três meses no Departamento de Física. O chefe do meu grupo, Luís Marquez, imediatamente me entregou um grosso volume, e não muito pedagógico: o manual de FORTRAN da IBM. E eu tive de aprender a linguagem sozinho. Devido aos muitos erros que cometia, aprendi depressa e levei uma semana para escrever um programa decente, do meu ponto de vista. Foi o meu primeiro contacto com computadores (um IBM 1620). Após esses meses, mudei-me para outro grupo, sob a liderança de Jean Julien, e foi nessa ocasião que começei a interessar-me pela Análise Numérica. Aí permaneci mais nove meses durante os quais desenvolvi um método de Monte Carlo para determinar o número de graus de liberdade de uma certa reação nuclear. Fiz cursos de Física Nuclear e de Mecânica Quântica na universidade durante os meus estudos. Este trabalho conduziu-me à defesa, em novembro de 1965, de um Diploma de Estudos Aprofundados de Física sob a supervisão da professora Pierrette Benoist-Gueutal (uma ex-aluna de doutoramento do Prémio Nobel Iréne Joliot-Curie) e à publicação do meu primeiro artigo conjunto nos *proceedings* de uma conferência de Física Nuclear.

Como decorreu a sua carreira antes de iniciar a tese?

CB Por dever arranjar um emprego, fui recrutado, em 1965, como engenheiro pela Sociedade de Estudos e de Realização de Engenhos Balísticos, a sociedade que lançou o *Diamant*, o primeiro satélite francês, em 1965. Fui admitido no Departamento de Mecânica das Estruturas sob a direção de Henri Cassagne. Era livre de fazer o que eu queria. Aprendi sozinho Análise Numérica e escrevi uma pequena biblioteca de sub-rotinas de métodos numéricos. Certa vez, precisei de escrever um programa para resolver as equações com derivadas parciais relacionadas com o lançamento de um foguete. Usei diferenças finitas e um método de relaxamento. Outro trabalho que me foi dado consistiu no desenvolvimento de um programa em FORTRAN para calcular o produto formal de duas séries de Fourier!

Depois de passar três anos nesse departamento, em 1968, tive de fazer o serviço militar. Após cinco semanas num campo militar, entrei para um laboratório científico do Exército, o Laboratório Central do Armamento, onde estive nos 14 meses restantes, num grupo liderado por Pierre Hillion. Mais uma vez, eu fazia o que queria e passei o tempo a estudar Análise Numérica (no livro de Varga, entre outros). Também trabalhei num método para a inversão numérica da transformada de Laplace com François Perrin, um ex-aluno de doutoramento francês de Richard Varga (Philippe Ciarlet era o seu outro aluno de doutoramento francês). Durante esse período, lecionei aulas práticas de Análise Numérica para adultos no Conservatório Nacional de Artes e Ofícios, em Paris, seguindo as palestras de Raymond Théodor, um excelente professor com quem muito aprendi.

Quando é que decidiu que gostaria de fazer uma tese em matemática e como encontrou o seu orientador?

CB Num prédio vizinho, o Exército tinha outro centro, o *Centro de Cálculo Científico do Armamento* (CCSA), onde um grupo dirigido pelo doutor Francis Ceschino desenvolvia investigação em Análise Numérica e tinha de escrever sub-rotinas FORTRAN de métodos numéricos de forma a poderem ser usadas por todos os engenheiros que trabalhavam para o Exército. Ceschino escreveu um famoso livro sobre integração numérica de equações diferenciais ordinárias com o professor Jean Kuntzmann. Dirigi-me a Ceschino e perguntei-lhe se ele podia admitir-me no seu grupo para que eu realizasse um doutoramento *d'État ès Sciences Mathématiques* (o equivalente a uma tese de agregação) sobre um tópico que lhe interessasse a ele e a um professor universitário que seria o meu orientador de tese. Ele concordou e propôs que eu trabalhasse sobre métodos de aceleração da convergência. Naquela época, em França, havia dois laboratórios universitários principais de investigação em Análise Numérica: Paris, com o grupo do professor Jacques-Louis Lions, dedicado principalmente a equações com derivadas parciais, e Grenoble, onde o professor Noël Gastinel trabalhava em vários tópicos. Gastinel concordou em orientar-me. Defendi a minha tese na Universidade de Grenoble, a 26 de abril de 1971 (o dia de uma greve na universidade), com Jean Kuntzmann como presidente do júri e Francis Ceschino, Noël Gastinel e Pierre-Jean Laurent como seus membros.

Que lembranças guarda de Noël Gastinel?

CB Gastinel foi um pioneiro em Álgebra Linear Numérica. Ele tinha uma mente muito aberta e interessava-se por todos os tópicos. De cada vez que nos encontrávamos, discutíamos durante algumas horas (na realidade, tratava-se essencialmente de um monólogo), e era só quando eu me preparava para sair que ele me perguntava sobre o andamento da minha tese.

Ele encorajou-me sempre a publicar os meus resultados regularmente e a não inibir-me de escrever claramente num artigo qual era a minha própria contribuição e a usar a primeira pessoa do singular na redação da minha tese. Os meus anos com ele foram muito formativos e ele realmente foi o meu mestre.

Qual foi a influência de Peter Wynn no seu trabalho científico? Que recordações tem dele?

CB Como o tema da minha tese versava sobre métodos de aceleração da convergência, depressa encontrei um artigo de Peter Wynn. Logo depois descobri outro artigo dele, e depois mais outro, e assim sucessivamente. Parecia ser interminável! Então eu decidi escrever-lhe e pedir-lhe a lista completa das suas publicações. Após algum tempo (não havia e-mail naquela época), não só recebi a lista pedida, mas também *preprints* e sugestões para o meu trabalho. A nossa correspondência estendeu-se por muitos anos, e eu estou realmente muito grato a Peter pelo seu inestimável incentivo e a sua ajuda.

Em 1981, ele decidiu ir viver para o México. Queria afastar-se durante mais ou menos um ano, como ele me escreveu, das muitas futilidades da vida académica moderna. Mas como conseguiu uma vida melhor nesse país, decidiu lá ficar. Peter planeava escrever um ou dois livros, e vir à Europa apresentar performances de circo.

Que outros matemáticos desempenharam um papel importante no seu percurso?

CB Deixem-me citar apenas dois deles: John (Jack) Todd, um pioneiro em Análise Numérica, que me pediu para escrever um livro sobre Aproximação de Padé, e Richard Varga, que me convidou para as muitas conferências que ele organizou. Consegui obter para Varga um doutoramento *Honoris Causa* pela Universidade de Lille.

Gostaria ainda de mencionar alguns bons amigos que desempenharam um papel importante, como Philippe Ciarlet. Também desejo citar Pascal Maroni, que conheço desde 1970. Ambos nos interessámos por Polinómios Ortogonais e escrevemos um artigo juntos. Ele vive perto de mim em Paris e costumamos encontrar-nos para ir a restaurantes. Com Gérard Meurant, temos um interesse comum em Álgebra Linear Numérica e recentemente começámos a escrever um livro sobre a história desse tópico. Ele tem um apartamento muito perto da minha casa na Normandia e costumamos ir juntos a um bom restaurante que se situa nas proximidades, compartilhamos muitos Spritz (com Campari, não com Aperol, um aperitivo típico de Pádua).

MICHELA REDIVO-ZAGLIA

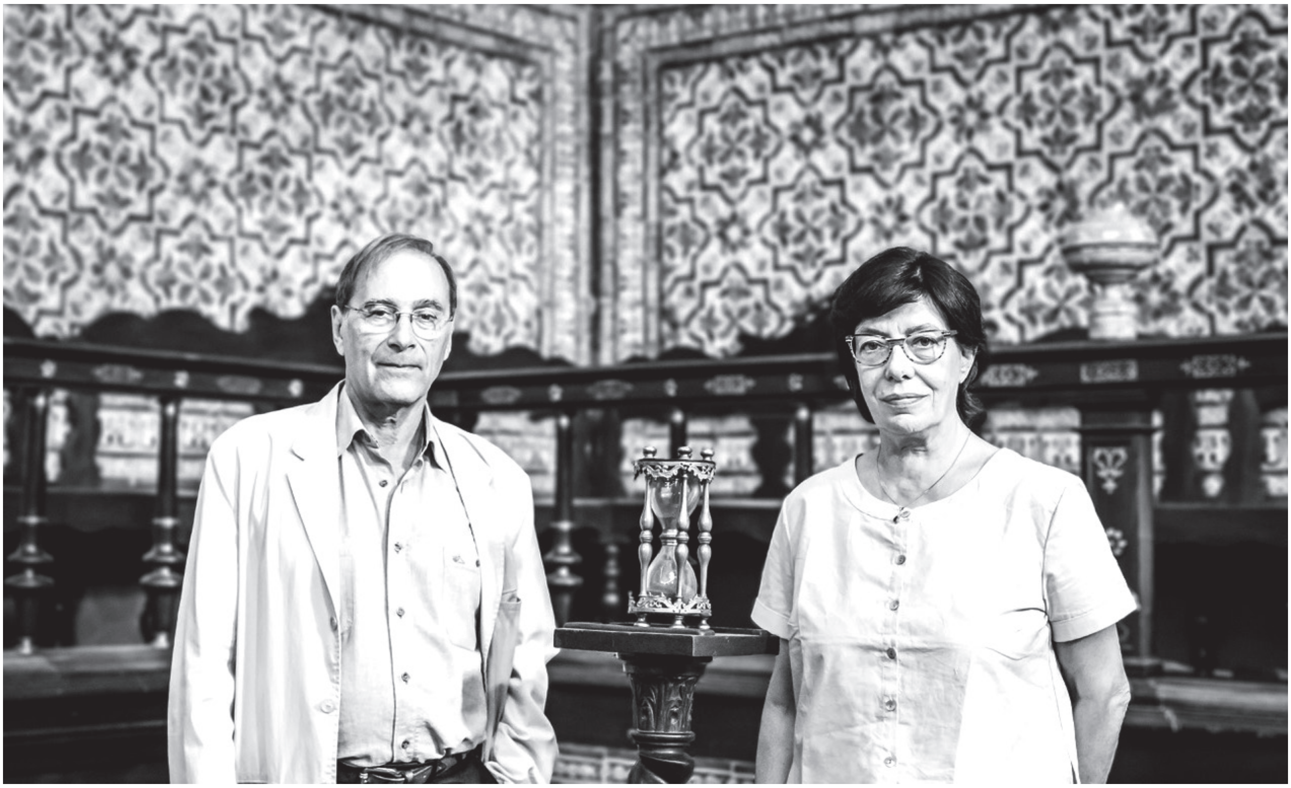
Quando e como começou a interessar-se pela Análise Numérica?

MRZ Obtive o mestrado em matemática na Universidade de Pádua, em 1975. No último ano de estudos, tive várias disciplinas que tratavam do uso de computadores em matemática, especialmente Programação em FORTRAN e em outras linguagens. Apaixonei-me por esses tópicos e foi por isso que, dois meses após o termo do meu mestrado, regressei ao Centro de Cálculo da universidade, para beneficiar de uma bolsa de dois anos. Nessa altura, tive oportunidade de emprego na Banca, mas preferi permanecer num ambiente científico. O Centro de Cálculo era o único lugar na universidade onde havia um *main frame IBM*. Nesse período, aprofundei o meu conhecimento das linguagens computacionais, lecionei cursos de FORTRAN e procedi à instalação de *software*.

Como decorreu a sua carreira antes de iniciar a tese?

MRZ Durante essa bolsa, fui selecionada num concurso para trabalhar como Engenheira Informática, fui admitida e permaneci no mesmo centro de cálculo. Após o que, em 1984, passei para o Departamento de Eletrónica e Informática, sempre na Universidade de Pádua, onde fui responsável por todos os serviços informáticos, bem como pela implementação das primeiras salas de computadores para os alunos. Era então o início da informática distribuída, com as primeiras estações de trabalho pessoais. Nessa época, pouquíssimas pessoas tinham as competências necessárias para realizar esse trabalho. Durante esses anos, adquiri muita experiência com sistemas operativos e escrevi um livro sobre UNIX.

Embora eu goste do trabalho de informática, ele tornou-se demasiado rotineiro para mim, pelo que comecei a desejar envolver-me numa área de investigação em Matemática Aplicada e ensinar. Por esse motivo, em 1987, entrei em contacto com a professora Maria Morandi Cecchi, do Departamento de Matemática. Ela concordou que eu trabalhasse com ela e colaborámos em diferentes projetos, em particular, num problema relacionado com as operações de união, interseção e complementaridade entre superfícies, conhecendo apenas os seus contornos. Em 1989, fomos



juntas a um NATO Advanced Study Institute on Computation of Curves and Surfaces, organizado em Tenerife pelo Professor Mariano Gasca, da Universidade de Saragoça. Foi nessa ocasião que conheci Claude Brezinski. Conheci também Hassane Sadok, colega e colaborador dele, actualmente Presidente da Universidade do Litoral *Côte d'Opale*, em França. Discutimos sobre os nossos temas de trabalho. A sua área de investigação interessou-me e, da parte dele, Claude apercebeu-se que as minhas competências informáticas e numéricas podiam ser de grande utilidade para ele. Para que eu pudesse investir no domínio de trabalho dele, ele convidou-me a participar num congresso que estava a organizar e que teria lugar no CIRM, em Luminy, perto de Marselha, em Setembro de 1989, sobre o tema *Extrapolação e Aproximação Racional*. Foi assim que teve início a nossa colaboração científica.

Quando é que decidiu que gostaria de fazer uma tese em matemática e como encontrou o seu orientador?

MRZ Na época do meu mestrado, em Itália, não existiam teses de doutoramento. Em 1980, elas foram instauradas pelo ministério, mas não me era possível defender uma tese ao mesmo tempo que trabalhava, porque não conseguia cumprir certas obrigações que eram exigidas. Por outro lado, podia defender uma tese em França sem condições adicionais. Foi assim que, depois de ter trabalhado e publicado com Claude, ele me propôs defender uma tese sob a sua direção. A 29 de maio de 1992, na Universidade de Lille, obtive assim um doutoramento em Matemática (*European Label*) com a menção *Trés Honorable avec les Félicitations du Juri*, júri esse presidido por Jean Della-Dora, professor na Universidade de Grenoble.

Que outros matemáticos desempenharam um papel importante no seu percurso?

MRZ Várias são as pessoas que me orientaram e me acompanharam na minha formação científica e a quem eu desejo agradecer. A primeira delas é Arturo N. Natali, responsável pelo Grupo Científico do *Centro de Cálculo da Universidade de Pádua*, que, com uma enorme competência e também muita paciência, me treinou no começo da minha carreira. A segunda é, naturalmente, Maria Morandi Cecchi, que me iniciou na via da investigação e me motivou a novos tópicos de pesquisa. Uma menção particular aos meus colegas e amigos Claude Brezinski e Hassane Sadok. A propósito, desejo contar uma anedota sobre a nossa colaboração. Juntos resolvemos, com o auxílio dos polinómios ortogonais formais, o importante problema do *breakdown* (divisão por zero) nos algoritmos do tipo Lanczos para a resolução de sistemas de equações lineares. O nosso principal algoritmo apresenta saltos recursivos para a frente e é por essa razão que os meus coautores o apelidaram de *Method of Recursive Zoom*, abreviado para MRZ (as iniciais do meu nome), e essa explicação foi mesmo dada no artigo publicado numa célebre revista científica internacional! Publicámos juntos muitos outros artigos de Álgebra Linear Numérica. O desenvolvimento de boa investigação em matemática, como em qualquer outro domínio, não nos impede nem de nos divertirmos nem, sobretudo, de sermos amigos. O mais importante é gostarmos do trabalho que realizamos.

Gostaria ainda de referir Sebastiano Seatzu, da Universidade de Cagliari, que infelizmente morreu em 2018. Foi graças a ele que fui integrada no grupo de investigação italiano de Álgebra Linear. Tive o privilégio de colaborar com ele. Gostei muito do seu lado humano, além das suas qualidades científicas. Desejo também agradecer a Francesco Costabile, da Universidade da Calábria, que, pelo seu caloroso acolhimento, muito facilitou a minha integração naquela universidade, quando obtive o título de professora associada. São muitos os colegas de várias outras universidades por todo o mundo com os quais tive o prazer de colaborar e que aqui deveria mencionar. Recebi muito de cada um eles e todos contribuíram para aumentar o meu entusiasmo pela investigação. Um grande obrigada a todos eles.

CLAUDE BREZINSKI

O que são métodos de extrapolação?

CB Em Análise Numérica e em Matemática Aplicada são usados muitos métodos iterativos. Esses métodos são inúteis se a convergência da sucessão for demasiado lenta. Em alguns casos, o procedimento iterativo pode ser modificado, mas noutros casos não temos acesso a ele: é uma caixa negra (*a black box*). Uma forma possível de ultrapassar essa desvantagem é transformar a sequência definida pelo método iterativo noutra que, sob certas hipóteses, convirja mais rapidamente para o mesmo limite (ou antilimite se a sequência não convergir). Entre essas transformações de sequências, que constituem os métodos de extrapolação, uma das mais conhecidas e útil é devida a Daniel Shanks. É definida por uma razão de dois determinantes e pode ser implementada recursivamente pelo epsilon-algoritmo escalar de Peter Wynn.

No seu trabalho, colocou em evidência as relações existentes entre vários tópicos. Poderia explicar essas conexões em algumas palavras?

CB Um aproximante de Padé é uma função racional cujos numerador e denominador são escolhidos de tal maneira que a sua expansão em potências crescentes da variável coincide com uma dada série de potências formal tão longe quanto possível, isto é, até ao termo de grau igual à soma dos graus do numerador e do denominador do aproximante inclusive. Quando aplicada às somas parciais daquela série de potências, a transformação de Shanks, isto é, o epsilon-algoritmo, é idêntica ao aproximante de Padé da série.

De facto, existem estreitas relações entre os tópicos sobre os quais eu trabalhei. Os aproximantes de Padé, e por consequência a transformação de Shanks e o epsilon-algoritmo, estão relacionados com os polinómios ortogonais formais, ou seja, polinómios ortogonais com respeito a uma forma linear. Estes polinómios ortogonais formais constituem a base para o estudo de alguns métodos de subespaços de Krylov para resolver sistemas de equações lineares. Em particular, a transformação de Shanks está relacionada com o método de Lanczos. Trata-se de métodos de projeção sobre os quais eu também trabalhei. Existem muitas relações entre os Aproximadores de Padé e as Fracções Contínuas, e é por essa razão que me interessei por este último tópico.

Publicou sobre a vida e obra de vários matemáticos, nomeadamente Henri Padé, André Louis Cholesky e Peter Wynn, entre outros. Em geral, que procedimentos emprega para fazer este tipo de investigações biográficas?

CB Depende muito de quando essas biografias foram escritas. Quando a internet não existia, só tinha acesso às fontes existentes em bibliotecas ou arquivos. Assim, as pesquisas sobre História da Matemática implicavam um enorme investimento de tempo. Agora é muito mais fácil. É possível encontrar muitos documentos na internet. Artigos antigos foram digitalizados por vários editores ou por universidades e estão acessíveis na internet. É possível trabalhar no gabinete com o computador.

Henri Padé foi um matemático francês (1863-1953). A sua tese foi orientada por Charles Hermite e versou sobre Fracções Contínuas e Aproximantes Racionais, que viriam mais tarde a ser apelidados com o seu nome, embora ele não os tenha inventado. Quando decidi publicar as obras completas de Padé, em 1984, quis escrever a sua biografia. Padé nasceu em Abbeville, no norte de Paris. Consultei

as Páginas Amarelas e escrevi a todas as pessoas com o mesmo apelido em Abbeville, mas nenhuma delas era da família dele. No certificado de óbito de Padé, havia o nome e o endereço da pessoa que declarou a morte às autoridades. Escrevi a essa pessoa, que ainda morava no mesmo endereço 30 anos depois. Tratava-se de um primo de Padé. Foi assim que estabeleci contacto com a família e conheci vários dos seus membros na casa desse primo, na Normandia. Mostrei-lhes sete ou oito livros com o nome Padé nos respetivos títulos. Eles não tinham ideia de que o avô era tão famoso. Ofereceram-me fotografias de Padé e de toda a família. Depois viajei para Arles, no sul da França, para conhecer a última filha viva de Padé. As obras completas do seu pai foram publicadas alguns meses antes da sua morte.

Quando escrevi a biografia de Charles Hermite, em 1990, conheci o neto de Émile Picard, genro de Hermite, e ele confiou-me uma série de fotografias de Hermite e da família.

Eu e a Michela publicámos este ano um artigo extenso, de umas 100 páginas, sobre a história do processo de Aitken e da transformação de Shanks, que são dois métodos para acelerar a convergência de sequências. Nesse artigo, reproduzimos os testemunhos que nos enviaram vários investigadores que trabalharam nesses tópicos, mostrando o lado humano da pesquisa.

Neste momento, eu e a Michela estamos a terminar um livro sobre Extrapolação e Aproximação Racional, onde são analisados todos os trabalhos de Peter Wynn, que morreu há dois anos, e que teve muita influência nesses domínios. Para este livro, também solicitamos os testemunhos de outros matemáticos cujos trabalhos estão relacionados com os de Wynn, ou extensões deles.

A vida de Cholesky era praticamente desconhecida antes dos seus artigos e do seu livro sobre ele? Como é que desenvolveu essa investigação?

CB A génese do meu livro sobre Cholesky é bastante interessante. É verdade que, há alguns anos, quase nada era conhecido sobre a sua vida e várias perguntas eram feitas regularmente sobre ele no NA-Digest. Sabia-se que tinha sido oficial do Exército francês. Em França, os arquivos pessoais são abertos 120 anos após o nascimento. Dirigi-me a esses arquivos no dia seguinte a esse aniversário, e pude consultar os ficheiros sobre Cholesky. Após a publicação do meu primeiro artigo biográfico sobre ele, um colega da Universidade de Reunião, Yves Dumont, construiu um *website* sobre Cholesky e foi contactado por Michel Gross, neto de Cholesky, a quem facultou o meu endereço.

Michel Gross escreveu-me, informando-me que a família de Cholesky ia entregar todos os documentos que possuía sobre ele à École Polytechnique, onde o avô tinha estudado, e perguntou-me se eu poderia ajudá-los a classificar a documentação. Aceitei e descobrimos rapidamente, com alguma emoção, o manuscrito original de Cholesky, onde ele descrevia o seu método para a resolução de sistemas de equações lineares, sendo a matriz positiva definida e simétrica. Esse método era conhecido apenas através de um artigo que um militar, Ernest Benoît, publicou seis anos após a morte de Cholesky.

Escreveu um livro intitulado *History of Continued Fractions and Padé Approximants* e também vários outros trabalhos sobre a história de temas matemáticos. Onde e como aprendeu o ofício de historiador? Em geral, que procedimentos emprega para fazer investigações de índole histórica?

CB Em primeiro lugar, eu não sou um historiador profissional. Esses historiadores analisam a literatura antiga em profundidade. Também não tive formação académica sobre a História das Ciências. Como estudante universitário, nunca me disseram quem era, por exemplo, Euler: se era um matemático grego antigo ou contemporâneo! É por essa razão que, nas minhas palestras, eu forneço sempre alguma informação histórica sobre cada matemático que cito.

Levei dez anos para escrever o meu livro sobre a história das frações contínuas. Naquela época, não havia internet. Visitei muitas bibliotecas, consultando livros e revistas antigas. De cada vez que viajava para uma nova universidade, passava horas a fio na biblioteca.

De assinalar que eu sempre gostei de História, com um interesse particular por biografias.

Em 1984, editou as obras completas de Henri Padé e, em 2013, os *Selected Works of Walter Gautschi*. Poderia comparar os procedimentos empregues nesses dois casos?

CB Para os trabalhos de Padé, bastou fotocopiar todos os seus artigos. No caso de Gautschi, tivemos de pedir a todos os editores que nos enviassem o pdf das publicações e nos cedessem os respetivos *copyrights*, o que representou um trabalho enorme.

Foi o fundador e editor-chefe da *Annals of Numerical Mathematics*, editor-chefe do *Journal of Applied Mathematics*. Foi, e ainda é, membro do conselho editorial de muitas revistas internacionais de prestígio, como a *Numerische Mathematik*. Que razões o levaram a fundar, em 1990, a *Numerical Algorithms*?

CB O meu desejo era criar uma revista genérica de Análise Numérica, que não fosse orientada para um tópico específico, porque muitos periódicos eram e são orientados. Além disso, eu queria uma revista em que o *software* correspondente a um dado artigo pudesse ser publicado após o processo de revisão. Certos algoritmos não são fáceis de programar. Se um autor pretende que o seu método possa ser largamente utilizado por outros, é necessário publicar o *software*, que deve estar bem redigido e, sobretudo, bem documentado.

Publicou 245 artigos e 20 livros. Poderia citar as publicações que melhor representam a sua carreira científica?

CB É impossível responder a essa pergunta. Permitam-me mencionar os aproximadores do tipo Padé, os polinómios ortogonais formais, o *E*-algoritmo, os epsilon-algoritmos topológicos e as suas versões simplificadas, a solução dos *breakdown* e *near-breakdown* nos algoritmos do tipo Lanczos, a regularização, estimativas do erro para sistemas lineares, tratamento do fenómeno de Gibbs, *PageRank*, polinómios quasi-ortogonais, ...

Na sua opinião, quais são os ingredientes de um bom artigo?

CB Novidade, novas ideias, sólida fundamentação teórica do método apresentado, bons resultados numéricos em comparação com os fornecidos por outros métodos, explicações claras e boa apresentação.

Teve mais de 60 alunos de doutoramento e de agregação. Para si, em que consiste o trabalho de um orientador?

CB Quando um aluno pede um tema para a sua tese, o orientador propõe uma ideia, que geralmente decorre dos seus últimos resultados de investigação. Então, o aluno começa a trabalhar e, de tempos em tempos, vem apresentar os resultados obtidos e perguntar como prosseguir. É importante que o aluno aprenda a trabalhar sozinho. Considero que dar ideias é o trabalho normal de um orientador de tese, e que essa não é uma razão suficiente para assinar os trabalhos escritos pelo aluno. Eu só aceitei colocar o meu nome como coautor de um aluno, quando efetivamente colaborei matematicamente com ele. É por essa razão que possuo poucos artigos com os meus alunos de doutoramento. Depois de eles terem obtido uma posição académica, frequentemente colaborei com eles e assinei os trabalhos que desenvolvemos juntos.

MICHELA REDIVO-ZAGLIA

Poderia citar as publicações que melhor representam a sua carreira científica?

MRZ Gosto de todos os meus artigos, caso contrário não os teria publicado! Brincadeiras à parte, eu prefiro artigos que contenham teoria, algoritmos, *software* e aplicações numéricas. Gosto, em particular, dos trabalhos sobre o tratamento do *breakdown* nos algoritmos de tipo Lanczos e aqueles sobre a simplificação extremamente significativa do epsilon-algoritmo topológico, um algoritmo que permite acelerar, sob certas condições, sequências de vetores, de matrizes, ou mesmo de tensores.

Na sua opinião, quais são os ingredientes de um bom artigo? E de um bom *software*?

CB Um artigo bem redigido deve poder ser entendido mesmo por investigadores que não trabalham nesse assunto. Esta é uma característica importante quando se orienta um jovem estudante a fazer investigação.

Se se deseja que um novo método numérico possa ser útil a outros investigadores e usado, é absolutamente necessário disponibilizar o *software* correspondente. Um *software* de domínio público deve estar bem documentado e otimizado, ser fácil de usar e com exemplos que o utilizador possa reproduzir facilmente.

Como costuma orientar os seus alunos de doutoramento?

MRZ Começamos por sugerir ao estudante um tema de investigação e deixamo-lo livre para seguir o seu caminho, mesmo se durante o percurso ele se reorientar por outra via. O mais importante para que o aluno realize uma boa tese é que ele aprecie o que está a fazer.

Em que consiste o projeto T4L (Teaching4Learning) do qual é membro fundador na Universidade de Pádua?

MRZ Este projeto começou em 2016 por iniciativa do reitor da Escola de Engenharia e neste momento envolve toda a Universidade de Pádua. É um plano de desenvolvimento de ensino e de *e-learning* para professores universitários. No final dos cursos propostos, os professores devem ser capazes de se apoiar mutuamente nas suas práticas em sala de aula, de experimentar novos métodos de estímulo para os estudantes participarem ativamente no processo de aprendizagem e de encorajar outros colegas a juntarem-se ao grupo. Os professores envolvidos neste projeto são voluntários, pelo que estão altamente motivados e predispostos a partilhar as suas experiências com os outros colegas. Trata-se de um projeto internacional na área do Ensino Superior. Nalgumas universidades estrangeiras, os novos professores recrutados devem frequentar os cursos do T4L antes de começarem a ensinar. Tem sido uma experiência frutuosa e estimulante, que muito tem influenciado a minha forma de ensinar, após mais de 30 anos de prática de ensino.

No SC2011 – International Conference on Scientific Computing, que decorreu em Itália, organizou uma sessão especial sobre a História da Matemática Computacional. Poderia comentar sobre o papel do Cálculo Científico na Matemática Aplicada?

MRZ Não pode existir Matemática Aplicada sem Cálculo Científico, sobretudo no trabalho dos investigadores que melhoram ou produzem novos algoritmos.

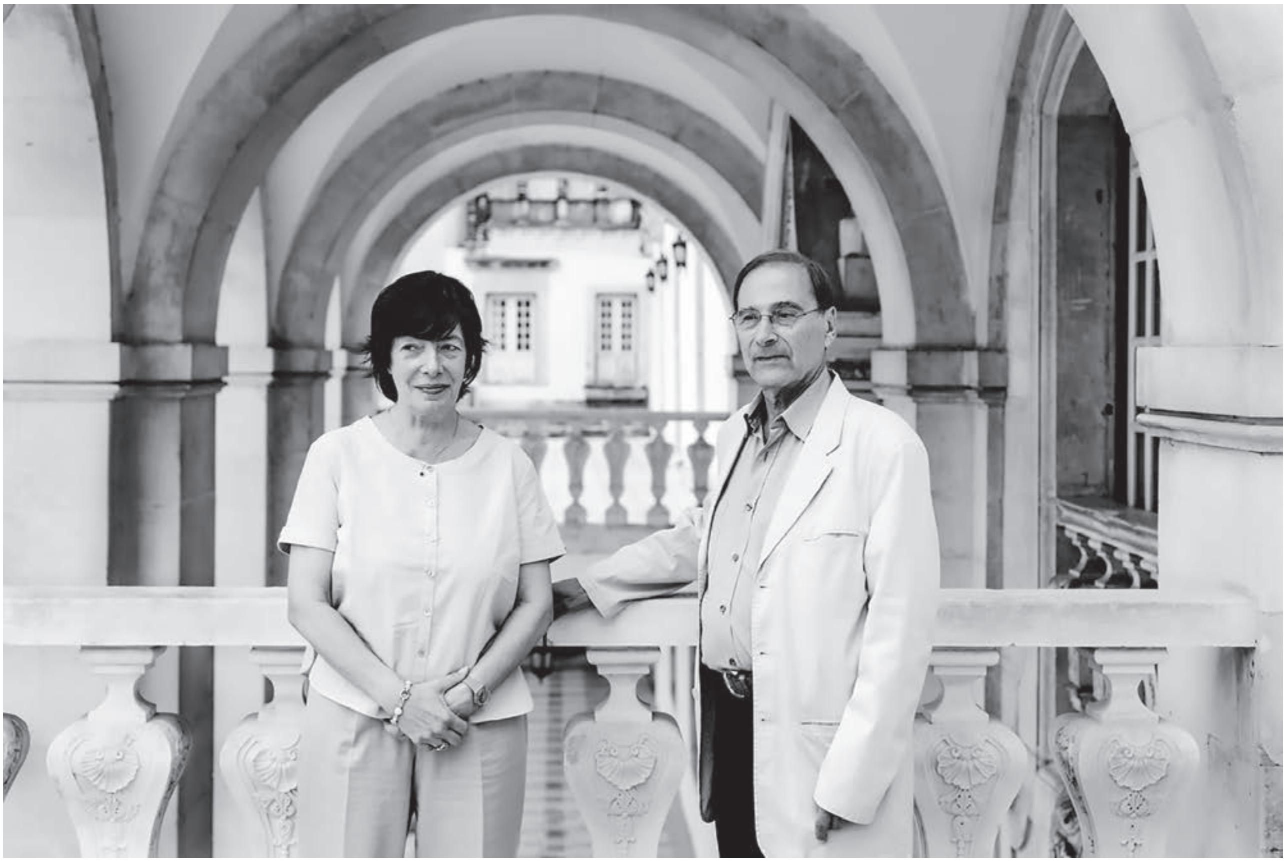
CLAUDE BREZINSKI & MICHELA REDIVO ZAGLIA

É justo afirmar-se que constituem uma dupla de sucesso, tendo em conta o enorme trabalho conjunto que desenvolveram. De que forma as vossas competências se complementam?

CB A Michela reúne os conhecimentos de um analista numérico e de um qualificado cientista computacional. Embora eu tivesse programado muito em FORTRAN no passado, não estava atualizado com os novos desenvolvimentos da programação estruturada. Em 1989, tive a ideia de escrever um livro sobre métodos de extrapolação contendo sub-rotinas correspondentes aos algoritmos apresentados. Perguntei à Michela se ela estaria disposta a colaborar comigo nesse projeto, que terminou com a publicação em coautoria, em 1991, do volume *Extrapolation Methods. Theory and Practice, North-Holland*. A listagem do FORTRAN que esse livro contém é de umas 300 páginas. Também lhe propus ser a editora de *software* da revista *Numerical Algorithms*, que eu fundei nessa época. Depois, continuámos a colaborar e a escrever sucessivamente artigos e livros, a organizar congressos, a editar *proceedings*, etc.

Devo esclarecer que a nossa colaboração sempre ocorreu numa base de igualdade. Cada um de nós contribuiu com uma parte significativa e indistinguível em todos os nossos trabalhos. Desejo declarar, com a máxima ênfase, que a nossa colaboração foi e é baseada num envolvimento equitativo na descoberta e no desenvolvimento dos resultados apresentados, e que esses trabalhos não teriam sido escritos sem a sua completa e decisiva participação.

MRZ Quando nos conhecemos, as nossas competências eram complementares e, com o tempo, cada um de nós aprendeu com o outro, o que nos permitiu avançar mais rapidamente no nosso trabalho. Nalguns órgãos universitários, fui criticada por ter publicado praticamente apenas com o Claude. Não percebo como isso possa ser negativo. A nossa colaboração foi sempre perfeitamente equilibrada e cada um de nós não teria publicado esses trabalhos sem a contribuição do outro. Ainda mais inacreditável: ousaram dizer que todas as ideias dos nossos livros e artigos comuns eram da autoria do Claude, porque o nome dele aparece sempre antes do meu! Seria necessário acreditar que a ordem alfabética dos autores, que é usual nos artigos de matemática, é desconhecida de algumas pessoas! Enfim, este episódio faz-me lembrar a peça de teatro de Molière intitulada *Les femmes savantes*, na qual se declama a seguinte citação: *quand on veut noyer son chien, on dit qu'il a la rage*.



CLAUDE BREZINSKI

Quando e como teve início a sua colaboração científica com Portugal?

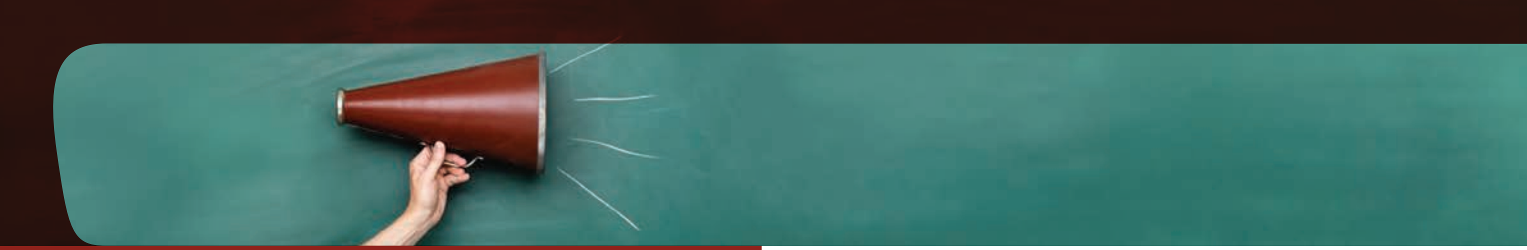
CB Em 1982, em Braunlage, na Alemanha, durante o *NATO Advanced Study Institute on Computational Aspects of Complex Analysis*, travei conhecimento com Manuel Rogério de Jesus da Silva, professor catedrático do então Departamento de Matemática Aplicada da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, que morreu em 2018. Em abril de 1983, ele convidou-me para proferir quatro palestras sobre Aproximação de Padé, seguidas de quatro outras sobre Métodos de Aceleração da Convergência. Passados dois anos, enviou-me uma sua assistente, Ana Cristina Matos, para que eu a orientasse no mestrado e no doutoramento. E, em 1989, enviou-me outra, Zélia da Rocha, para o mesmo efeito. Mário Graça, do Instituto Superior Técnico, foi o meu terceiro aluno de doutoramento português. Em suma, foi com muito gosto que, nos últimos 37 anos, me desloquei regularmente a Portugal a convite de Manuel Rogério e dos meus ex-alunos, para realizar trabalho científico conjunto, proferir palestras no Porto, em Coimbra, Bragança, Lisboa e Vila Real, e ser arguente em júris de doutoramento de alunos deles.

E nós agradecemos o seu contributo para o desenvolvimento da matemática em Portugal.

SOBRE OS AUTORES

Kenier Castillo. Especialista em Funções Especiais e Polinómios Ortogonais. Desde dezembro de 2018 é investigador do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra (CMUC) e membro do corpo docente do Programa Inter-Universitário de Doutoramento em matemática organizado pelas Universidades de Coimbra e Porto.

Zélia da Rocha é professora auxiliar no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto desde 1994, e é membro integrado do Centro de Matemática da Universidade do Porto. Em 1990 e 1994, obteve o Mestrado e o Doutoramento em Matemática na Universidade de Lille, em França, sob orientação de Claude Brezinski.



GONÇALO MORAIS
Instituto Superior de Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM

JOÃO PAULO CARVALHO DIAS

O professor João Paulo Carvalho Dias (JPCD) é o decano da Secção Matemática da Classe de Ciências da Academia das Ciências de Lisboa. Professor catedrático jubilado da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, fez o doutoramento sob orientação do professor Jacques-Louis Lions, pela Universidade Paris VI, tendo convivido com alguns dos maiores nomes da Matemática da segunda metade do século XX. Aqui fica o resumo da agradabilíssima conversa que tivemos.

GONÇALO Começando pelo início, quando surgiu o seu interesse pela matemática?

JPCD O meu interesse pela matemática foi despertado muito cedo, com grande influência de um professor do Liceu Camões, que era físico. Tendo eu interesse pela investigação no geral e não tendo ainda uma ideia precisa do que queria fazer, estando muito em voga a Física e a Física Nuclear, ele aconselhou-me a fazer primeiro o curso de matemática para ter uma base e depois logo se via.

Por outro lado, o meu avô materno, que era militar, que tinha sido formado aqui na Escola Politécnica e que esteve na guerra de 14-18 como capitão, de quem guardo a pulseira que ele usou no conflito e que servia para o identificar, era uma pessoa muito inteligente e com uma grande preparação em matemática. Durante as férias de verão costumava passar um mês na Guarda e via com ele, informalmente, a matéria do ano seguinte. Assim, de uma maneira muito leve e de uma forma muito inteligente, ele deu-me uma série de ideias que aproveitei sempre.

De resto, eu tive sempre excelentes professores. Do antigo terceiro ao sétimo ano, eu tive o professor Alberto Beirão, que, não sendo muito simpático, era um excelente professor, que tinha técnicas de ensino muito interessantes. De uma maneira interativa, uma pessoa era chamada a dar a matéria com ele. Além disso, pedia aleatoriamente a um de nós para discutir a matéria dos dias anteriores. Não sendo muito simpático, era muito competente, as aulas eram impecáveis e aprendi muito com ele.

Depois na faculdade tive também excelentes professores, como o professor Vicente Gonçalves, que era uma pessoa um bocado especial, muito exigente. No ano em que eu fiz a cadeira dele, no fim do ano estavam meia dúzia de gatos pingados, pois apesar de ele preparar bem as aulas, eram muito difíceis de seguir. Havia uma outra versão da mesma cadeira, Matemáticas Gerais, dadas pelo professor Dionísio, muito competente também, mas que eram muito mais acessíveis.

O professor Vicente Gonçalves tinha uma ideia, muito avançada para a altura, de dar hipótese, aos alunos mais interessados, de fazerem um trabalho e fazerem a apresentação oral do mesmo.

GONÇALO Fala-se muito também do professor Sebastião e Silva...

JPCD O professor Sebastião e Silva estava na altura a fazer a reforma dos programas curriculares e por isso não foi ele que me deu a Análise Superior mas o professor Guerreiro, também excelente professor. Tive também o professor Dias Agudo em Cálculo Infinitesimal... Enfim, tive uma série de excelentes professores.

GONÇALO O curso na altura era bastante diferente do que é hoje, pois estudava-se uma série de outras disciplinas...

JPCD Sim, tive Física, Química, Astronomia, Mecânica Racional, com o professor Veiga de Oliveira que era muito interessante, Mecânica Celeste, uma cadeira de Física-Matemática, enfim, era um curso muito abrangente. No final do curso, pedi uma bolsa à Fundação Gulbenkian, uma das primeiras bolsas atribuídas cá, sob direção do professor Sebastião e Silva, que apesar de não dar aulas continuava a fazer investigação, aliás, dos melhores, senão o melhor investigador de matemática em Portugal no século XX. Ele deu-me umas indicações para ler coisas ligadas aos trabalhos dele...

GONÇALO Sobre Distribuições...

JPCD Sim, Teoria das Distribuições, Ultradistribuições. Havia um rapaz que tinha morrido no Ultramar, o António Menezes, que tinha feito um trabalho sob orientação dele e que era um tipo muito forte. Ele deixou uma série de pistas que eu fui discutindo com o professor Sebastião e Silva. Nesse mesmo ano, complementei os meus conhecimentos em assuntos que não tinham sido discutidos no curso, nas áreas de Análise e de Análise Funcional. Na Análise Funcional, no curso, acabávamos nos espaços de Hilbert e nos espaços de Banach, não se falava de coisas mais recentes, coisas que eu depois usei quando fui estudar para fora, coisas como espaços de Sobolev ou distribuições. Ou seja, nesse ano arranjei uma certa bagagem que não adquiri nos quatro anos da licenciatura.

GONÇALO Nós hoje queremos estudar um determinado assunto, vamos à net e conseguimos descobrir o que se está a fazer e por quem. Nessa altura, estando em Portugal e querendo saber o que o resto do mundo estava a fazer...

JPCD Tinha de se falar com os professores que estavam ao corrente do que se passava lá fora, com o professor Sebastião e Silva, com o professor Dias Agudo ou com o professor Guerreiro, que conhecia profundamente Análise Funcional. Eram eles que poderiam aconselhar-nos acerca dos livros que deveríamos ler e consultar.

GONÇALO Esses professores tinham muito contacto internacional?

JPCD A pessoa que tinha mais contado internacional seria o professor Sebastião e Silva, que tinha sido formado em Itália. O professor Dias Agudo também esteve nos Estados Unidos da América e fez lá um trabalho muito interessante com um especialista em Equações Diferenciais Ordinárias. Seriam eles as pessoas com mais contacto internacional.

GONÇALO Estamos a falar num período alguns anos depois dos saneamentos nas universidades portuguesas por razões políticas.

JPCD Sim, sim. Em particular, o professor Pereira Gomes foi uma das vítimas disso.

GONÇALO Como era o ambiente que se vivia numa universidade nessa altura?

JPCD Havia a ditadura... Uma pessoa sentia a opressão, mas se não tivesse uma atitude política agressiva...

GONÇALO Militante...

JPCD Sim, militante, digamos assim, relativamente à política, em princípio não era fortemente incomodado, ou melhor, era incomodado porque via o que se passava mas não era preso, não passava por essa experiência horrível. Eu nunca fui preso.

GONÇALO Entretanto, foi para França...

JPCD Nesse ano, depois de terminar o meu curso, falava muitas vezes com o professor Sebastião e Silva e ele aconselhou-me a ir para França. Tinha estado cá o professor Jacques-Louis Lions, um discípulo do professor Laurent Schwartz, num congresso realizado em Portugal com o próprio Laurent Schwartz, sobre Teoria das Distribuições e Aplicações, que eu, lamentavelmente, não assisti porque estava no terceiro ano do meu curso. O professor Sebastião e Silva disse-me para ir trabalhar com ele porque era de facto um excelente investigador, e uma excelente pessoa, aliás. Pedi então uma bolsa à Gulbenkian para ir para França preparar o meu doutoramento com o professor Lions.

GONÇALO Ir para o estrangeiro fazer o doutoramento não era muito habitual nessa altura...

JPCD Habitual não direi, mas já começava a ser relativamente frequente. Por exemplo, o professor Armando Machado, que foi meu companheiro de luta durante os quatro anos da licenciatura, foi logo a seguir a terminar o curso estudar Geometria Diferencial para Paris com o professor Ehresmann. Em Itália estava o professor Beirão da Veiga a trabalhar com o professor Stampacchia. Estabeleceram-se assim uma série de contactos, visto que havia uma certa abertura para enviar pessoas para fora para fazer doutoramento.

GONÇALO Esteve em Paris num período bastante interessante...

JPCD Estive em Paris desde setembro de 1967 a setembro de 1971. Passei o Maio de 68... Nessa altura estava na residência dos portugueses, a residência André Gouveia. Um período interessante.

GONÇALO E a chegada a Paris imagino que tenha tido um grande impacto...

JPCD Quando cheguei a Paris, fui falar com o professor Lions, que tinha um gabinete no Instituto Henri Poincaré. Nessa altura ainda não havia a Universidade Paris VI. Disse-lhe o que é que eu tinha estado a fazer, que tinha estado a estudar Análise Funcional e distribuições. Ele disse-me claramente que *les distributions c'est finni! Maintenam sont les Équatons aux Dérivées Partielles!*

GONÇALO [Risos]

JPCD Foi a frase lapidar dele. Nesse momento já estava em desenvolvimento a teoria das Equações com Derivadas Parcias (EDPs) não lineares em que ele tabalhava. Aliás, há um livro importante dele, de 69 se não me engano, sobre este assunto.

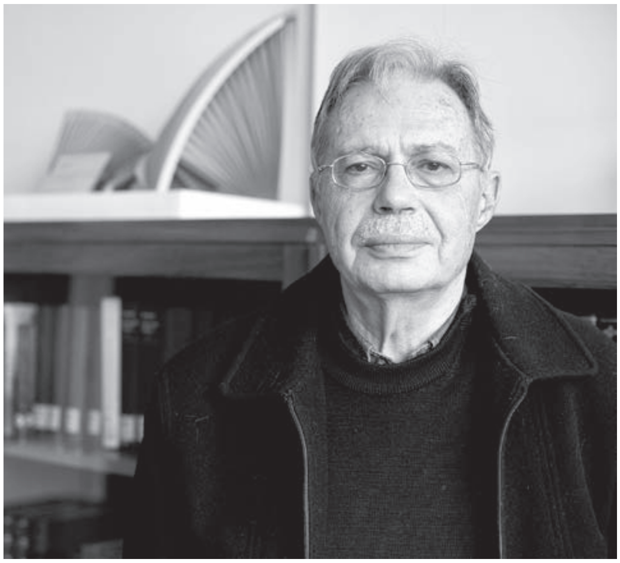
Ele era uma pessoa muito ocupada e hiperorganizada. No início, o que ele me disse foi para eu frequentar os cursos de DEA (*Diplôme d'Études Approfondies*), que são os cursos de mestrado, em que eu aproveitei para estudar certo tipo de aplicações da Análise Funcional como os espaços de Sobolev. A partir do segundo ano, comecei a pegar nos assuntos por mim e a certa altura dei ao professor Lions uns apontamentos de uns resultados que tinha obtido, que eram muito incipientes ainda, mas ele gostou. Como ele tinha muita gente, ele devia estar à espera de que se fizesse alguma coisa para então se interessar mais pela pessoa.

Depois do Maio de 68, foi feita a reorganização das faculdades e foi criado o laboratório, que hoje tem o nome dele, *d'Analyse Numérique,* na Universidade Paris VI. Na sequência das notas que eu lhe enviei, ele respondeu-me também por escrito, dizendo-me que aquilo estava bem e que *on peut se tutoyer*, podíamos tratar-nos por tu. Continuei naquela direção e acabei por escrever umas notas que foram publicadas nos *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris.

Redigi a tese e falei com ele para a formação do júri, que para lá dos professores Priouret e Raviart, eu achei que seria interessante convidar o professor Schwartz, que era, aliás, muito amigo do professor Sebastião e Silva. Eu fui falar com o professor Schwartz, uma pessoa agradabilíssima. Ele aceitou e presidiu naturalmente ao júri. Em França habitualmente, além da tese, havia uma tese complementar, uma tese oral cujo tema era dado por um dos elementos do júri e que não tinha ligações com o tema da tese principal, que no meu caso foi escolhido pelo professor Priouret e que era sobre Cadeias de Markov. Esta parte já não era obrigatória, mas o professor Lions disse-me "*Tu dois faire comme tous les français*". Preparei-me então durante dois meses para fazer uma exposição de 20 minutos.

GONÇALO E a vida em Paris?

JPCD Naturalmente era uma liberdade completamente diferente, onde se tinha acesso a uma quantidade de coisas que não existiam aqui, contacto com pessoas das mais variadas origens. Na Cidade Universitária havia uma série de gente que estava exilada, que tinha tido problemas em Portugal. A Gulbenkian trabalhava muito seriamente, pois não cortava os apoios mesmo a quem não podia voltar. Lembro-me, por exemplo, de estar na tese de doutoramento do professor Brotas, de Física, que tinha tido problemas políticos, cujo orientador era



o Louis de Broglie, que foi Prémio Nobel. Na assistência estavam uma série de exilados, entre eles o António José Saraiva, que era amigo dele. Estabeleci muitas amizades, não só com portugueses mas também com franceses. Depois de 69 e da reorganização das universidades em França, foi criada a Unversidade Paris VI, onde passei a ter um gabinete. Mas muitas vezes ia estudar para a Casa de Portugal, para a sala de conjunto, porque gosto de trabalhar em ambiente de café, aliás, como fazia já aqui nos tempos da licenciatura, com o professor Machado.

GONÇALO Entretanto voltou a Portugal...

JPCD Acabei a tese em março de 71 e voltei a Portugal em outubro desse ano. Nesse entretanto, escrevi ao professor Sebastião e Silva, que já estava gravemente doente...

GONÇALO Ele morreu em 1972...

JPCD Exatamente. Quando lhe escrevi, ele estava a fazer um tratamento em Itália. Estava na altura em formação o Instituto de Física-Matemática (IFM), da iniciativa do professor Silveira, do Instituto Superior Técnico, que tinha sido o presidente do Instituto de Alta Cultura, com o apoio do professor Sebastião e Silva. Era uma instituição independente da universidade, algo que gerou uma polémica entre o professor Sebastião e Silva e o professor Tiago de Oliveira.

O professor Tiago de Oliveira era contra a criação de um instituto como o IFM porque, segundo ele, isso afastaria as melhores pessoas das unversidades. A posição do professor Sebastião e Silva era a de que uma pessoa que fosse para a universidade ia dar uma série de horas de aulas, o Gonçalo sabe bem isso porque está no ISEL. Ora isso impossibilitaria desenvolver uma actividade de investigador. O professor Schwartz costumava dizer que se não tivesse umas três ou quatro tardes completamente livres, não conseguia fazer investigação.

GONÇALO O professor Schwartz era uma pessoa de um enorme nível, mesmo para lá da matemática...

JPCD Ele tinha coisas surpreendentes que mostram o nível dele, quer do ponto de vista matemático quer do ponto de vista pessoal. Interessava-se por muitas coisas, pela política, em que estava ligado aos trotskistas, o que lhe criou muitos problemas durante a guerra na Argélia, chegando a ser afastado da École Polytechnique na altura.

GONÇALO No momento em que a direção pensou expulsar os elementos que estavam por detrás do Maio de 68 da unversidade, ele encabeçou um movimento entre os professores no sentido contrário...

JPCD Eu não tinha uma interação muito forte com ele a esse nível, mas sim, ele tinha uma posição política muito forte. Ao mesmo tempo, era elitista, sendo contra coisas como aquelas que se passaram aqui depois do 25 de Abril, com avaliações em conjunto e coisas assim. Ele era muito exigente, não sendo nada contraditório, a meu ver, com a sua formação política. Por exemplo, as pessoas acham que a École Normale Supérieure é muito elitista, e de facto é, mas durante um certo período eram atribuídas bolsas a alunos de origens bastante humildes. Eu conheço vários casos. Com este modelo, a verdade é que eles têm bastante sucesso, com várias Medalhas Fields, por exemplo. Ou seja, o elitismo não é incompatível com a democracia. Não é possível exigir às pessoas para fazerem investigação onde, como no ISEL, têm nove horas por semana de aulas...

GONÇALO Doze!

JPCD Doze... O critério de seis a nove já é demasiado laxista nesse aspeto porque, na minha opinião, deveriam ser no máximo seis, permitindo às pessoas que durante um período da sua vida se dedicassem inteiramente à investigação. Em França existe o Institut Universitaire, que paga à unversidade para libertar um professor. Eu nunca tive mais de sete horas, senão não teria conseguido fazer investigação.

GONÇALO Retomando a sua vinda para Portugal...

JPCD Vim para o IFM, que na altura era presidido, se não me engano, pela professora Maria de Lourdes Belchior, uma pessoa muito evoluída. Era possível para as pessoas arranjarem bolsas e fazerem investigação. Este foi o conselho do professor Sebastião e Silva, por causa do número de horas de aulas que de outro modo teria tido se tivesse ido para a universidade. Depois disso, passei a ter uma posição de investigador, com um ordenado equivalente ao de um professor extraordinário.

GONÇALO O que era um professor extraordinário?

JPCD Era quase o equivalente ao professor associado hoje. Um bocadinho mais do que isso porque ao se concorrer e se ser aprovado, ficava-se com a agregação. No final de 75 concorri para professor extraordinário. No ano seguinte, já dei umas aulas na Faculdade de Ciências (FCUL), precisamente sobre EDPs. Havia na altura o problema de eu ainda pertencer ao IFM, mas tudo se resolveu graças ao professor Guerreiro, que era uma pessoa muito inteligente e que percebia o que é que tinha de se fazer. Só a partir de junho de 76 é que passei a ser professor extraordinário, passando em 79 a professor catedrático, aproveitando o regulamento do estatuto da carreira docente. No gozo, chamavam-nos os professores decretinhos, porque tínhamos sido nomeados por decreto. [Risos]

GONÇALO Olhando para a FCUL de 79 e para a de hoje, o que une ou distingue a mesma instituição nos dois momentos?

JPCD Houve uma evolução enorme. Vamos colocar as coisas deste modo: olhando para os *curricula* das pessoas que hoje concorrem, com o *curriculum* que eu tinha quando concorri a professor extraordinário, teria hoje dificuldade em encontrar um lugar de professor associado. Estou a falar do caso que eu conheço melhor, que é aqui em Lisboa. Isto também é um problema, porque existem pessoas muito boas que não conseguem encontrar trabalho em Portugal.

Outra coisa que eu acho que foi importante, para a interação entre as várias escolas, foi a reformulação da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM).

GONÇALO Que tinha um papel jurídico muito dúbio antes do 25 de Abril...

JPCD Exatamente. Depois a sua existência foi confirmada e julgo que quem ficou como presidente foi o professor Guerreiro. Depois disso, o professor Aniceto Monteiro veio a Portugal durante dois anos. O professor Tiago de Oliveira teve um papel essencial nisso pois, enquanto secretário de Estado, assinou o despacho nesse sentido. O professor Aniceto Monteiro tinha tido imensos problemas cá, porque não queria assinar aquele papel horrível que nos obrigavam a assinar, e que eu também assinei quando vim para Portugal, porque senão eu nunca teria tido a bolsa cá. Para a bolsa da Gulbenkian não era preciso assinar nada, mas como estava ligado ao Instituto de Alta Cultura tive de assinar o papel que afirmava "claro que estou integrado na ordem estabelecida pela Constituição de 1933, com ativo repúdio do comunismo e de todas as ideias subversivas", que basicamente consistia no repúdio de todas as ideias. O professor Aniceto Monteiro não quis de modo nenhum assinar aquilo. Era uma pessoa extremamente coerente e acabou por ir para o Brasil e depois para a Argentina. Ora a *Portugaliae Mathematica*, o seu depósito legal estava em nome dele. Também por essa altura estava em Portugal o professor Pereira Gomes, que tinha sido corrido durante a ditadura e que de alguma maneira era discípulo do professor Aniceto Monteiro, que foi falar com ele e disse-lhe que agora havia a SPM e se calhar o melhor eu passar a revista para esta instituição, com o qual ele concordou. Foi nomeado um Conselho Editorial, tendo o Professor Pereira Gomes ficado como Diretor. Eu fiquei como editor, juntamente com o Professor Graciano de Oliveira, com a Professora Maria Luísa Galvão, sendo progressivamente aberto a outras pessoas. No início, a revista estava num estado lastimoso. Depois da saída do professor Aniceto Monteiro, o professor Zaluar Nunes que estava no estrangeiro mas vinha regularmente a Portugal, tratava de arranjar *referees* para a revista. Mas as coisas forem piorando e quando nós pegámos naquilo, na Tipografia Matemática, na Rua do Diário de Notícias onde era a gráfica, havia 400 artigos para publicação, na maior parte dos casos sem revisão. Depois da morte do professor Zaluar Nunes aquilo tinha ficado à deriva. Continuava a sair, a ser permutada, mas a qualidade decrescera fortemente. Depois de um processo de revisão, dos 400 artigos iniciais restaram 40. Ao mesmo tempo que tomávamos conta do processo, já estava impresso um fascículo que tinha em particular o artigo de um paquistanês que era sobre o Teorema de Fermat. Como não podíamos impedir que aquilo saísse, escrevemos uma declaração a dizer que a comissão editorial não se responsabilizava pelo conteúdo desse fascículo. Neste momento, apesar de continuar a pertencer à SPM, é distribuída pela Sociedade Europeia de Matemática, sendo hoje uma revista muito respeitável. Além disso, a revista foi essencial para criar uma ligação entre as várias faculdades.

GONÇALO O que é que significa hoje, para si, pertencer à Academia das Ciências de Lisboa (ACL)?

JPCD Essa é uma pergunta complicada. Em termos internacionais, não se pode comparar com a importância da Academia das Ciências de Paris, por exemplo, que tem meios completamente incomparáveis. A ACL poderia ser mais uma entidade a dinamizar a investigação e a interação entre as várias disciplinas, pois as sessões da classe de ciências são interdisciplinares. Mas para ter maior repercussão, precisava de ter muitos mais meios do que os que na realidade tem. Em tempos, havia o prémio António Malheiros, mas hoje não há capacidade financeira para o atribuir. Vou dar-lhe um exemplo: não há dinheiro para pagar a deslocação aos membros da ACL que vivem fora de Lisboa de modo a estes assistirem às sessões.

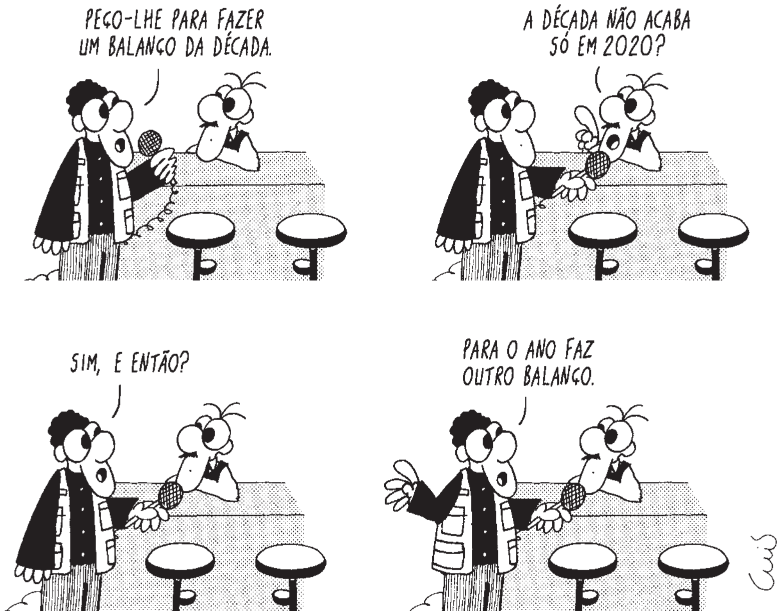
Poder-se-ia, através da ACL, caso houvesse meios, convidar pessoas de grande valor para lecionarem um curso, por exemplo. Acho que poderia ter mais influência do que aquilo que tem.

Apesar de tudo, temos uma equipa diretiva excelente e as coisas têm melhorado. O presidente é o professor Carlos Salema, uma pessoa extremamente dinâmica e a secretária-geral a professora Salomé Pais, uma pessoa que faz milagres com as restrições financeiras que tem. Por outro lado, hoje os tempos são diferentes. Nos meus tempos de faculdade, era natural que os meus professores fossem à quinta-feira para a ACL pois era o local onde se discutia a investigação que se fazia, porque não havia centros nem outros locais onde as pessoas das várias universidades pudessem encontrar-se. Hoje os tempos são diferentes.

GONÇALO Professor, muito obrigado...

BARTOON

Luis Afonso



Publicado originalmente no jornal Público, em 30/12/2019. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:
Daniel Pinto Universidade de Coimbra
Hugo Tavares Instituto Superior Técnico

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Juvenal Espírito Santo** Instituto Nacional de Segurança Social de S. Tomé e Príncipe e Universidade de S. Tomé e Príncipe • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Nisa Figueiredo** Thomas More Hogeschool Roterdão • **Paolo Piccione** Universidade de São Paulo • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
Fid'algo – Print Graphic Design
Rua da Nau Catrineta n 14 2º Dtr 1990-186 Lisboa

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO
Sociedade Portuguesa de Matemática
SEDE: Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt
NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: http://gazeta.spm.pt/politica

TIRAGEM **1250 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

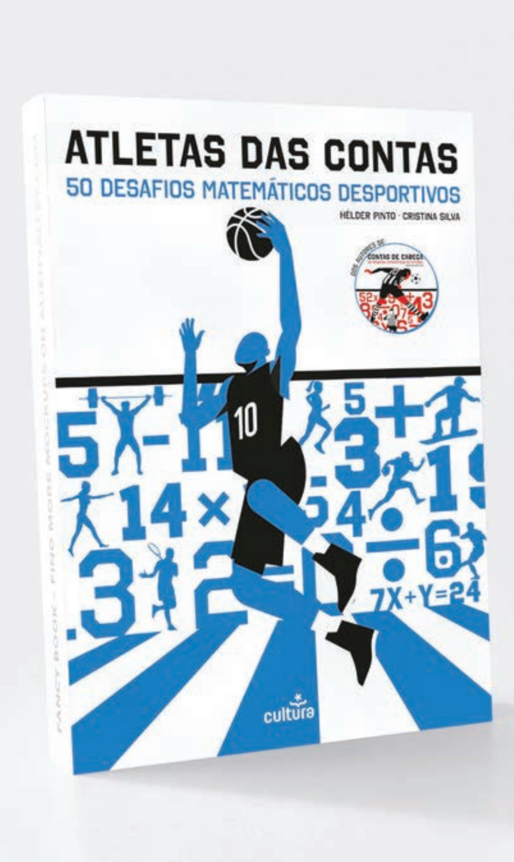
PRÓXIMO **SEMINÁRIO NACIONAL** DE **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA** DECORRE EM **LEIRIA**

O 33º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática decorrerá no Museu de Leiria nos dias 29 e 30 de maio de 2020. Este ano organizado com a colaboração do Politécnico de Leiria, da Câmara Municipal de Leiria e do Centro Internacional de Matemática, o evento contará com os conferencistas convidados Ugo Baldini, da Università degli Studi di Padova, e José Chabas, da Universidade Pompeu Fabra, de Barcelona. Como novidade desta edição, o Encontro será submetido a acreditação pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua de Professores. As inscrições terão um valor reduzido até 14 de maio. Mais informações podem ser consultadas no site do Encontro em *https://sites.ipleiria.pt/snhm33*.

TARDES DE MATEMÁTICA NA REGIÃO **CENTRO**

O ciclo de palestras Tardes de Matemática no Museu, em Coimbra, organizado pela Delegação da SPM Centro, decorre uma vez por mês, ao sábado. O ciclo de 2020 teve o seu início em fevereiro, com a palestra Matemática e Medicina: Receitas para uma Relação Saudável, apresentada por Humberto Rocha, da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra (FEUC). As celebrações do Dia Internacional da Matemática na Universidade de Coimbra, previstas para o dia 14 de março, foram adiadas para uma data a definir posteriormente. Entre esses eventos, está uma sessão das Tardes de Matemática que conta com a presença de António Bento da Universidade da Beira Interior com a palestra "A Vida de Pi". Para celebrar este dia, a SPM Centro organiza ainda dois ateliers dirigidos aos mais jovens e dinamizados por docentes do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra (DMUC), Planeta Matemático, orientado por Gonçalo Pena, Marta Pascoal e Raquel Caseiro, e Histórias com Tangram, da responsabilidade de Gonçalo Gutierres e Sandra Pinto. Integrada nestas comemorações estará também disponível uma exposição do Atractor sobre o número Pi.

A SPM Centro participa ainda nas primeiras celebrações do Dia Internacional da Matemática na Universidade de Coimbra, organizadas em conjunto com o DMUC e o Centro de Matemática da Universidade de Coimbra. O programa é da responsabilidade de docentes do Departamento de Matemática e consta de duas palestras, A Matemática na Busca de Novos Mundos: Os Exoplanetas, por João Manuel Fernandes, e O Papel da Matemática no Desenvolvimento da Sociedade Contemporânea, por Jaime Carvalho e Silva, bem como de uma sessão especial sobre matemática e poesia dinamizada por Carlota Simões e José Paulo Almeida, Tertúlia Matemática. Está previsto que As Tardes voltem em abril, com José Augusto Ferreira (DMUC) que irá falar de "A matemática na procura de respostas no âmbito da cardiologia", no dia 18. Segue-se, a 23 de maio, "O Universo enquanto laboratório matemático", com João Manuel Fernandes. Esta iniciativa termina a 20 de junho com a palestra "A matemática dos empréstimos e dos depósitos a prazo", apresentada por Paulo Saraiva (FEUC). Mais informações em *http://www.museudaciencia.org* e h*ttps://agenda.uc.pt/eventos/dia-internacional-da-matematica*.

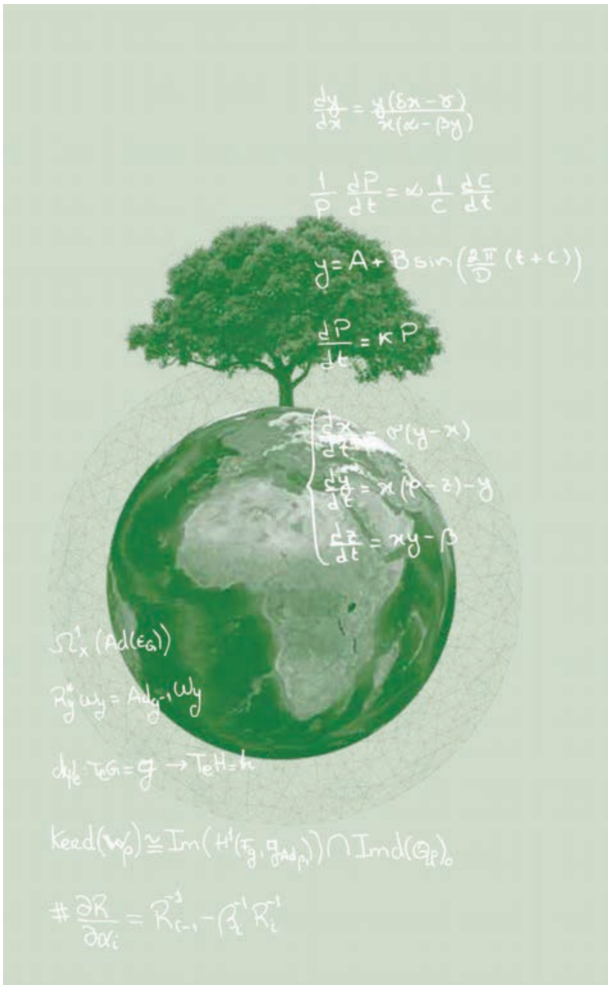


ATLETAS DAS CONTAS – 50 DESAFIOS MATEMÁTICOS DESPORTIVOS

Dos autores de Contas de Cabeça – 50 Desafios Matemáticos de Futebol, Hélder Pinto e Cristina Silva, chega agora às livrarias Atletas das Contas – 50 Desafios Matemáticos Desportivos. Este novo livro oferece 50 enigmas matemáticos relacionados com vários desportos. Com dezenas de imagens e exemplos desportivos, os enunciados dos desafios são divertidos e acessíveis a quase todos os leitores. Pretende-se, assim, através do desporto, um tema tão empolgante como universal, captar o interesse dos estudantes pela matemática usando problemas diferentes dos que se praticam usualmente nas escolas, mas tendo em conta a matéria curricular. O livro já está disponível na Loja SPM.

PRÉMIO **PEDRO DE MATOS 2020**

Nesta 12ª edição do Prémio Pedro Matos, o tema é Matemática e o Meio Ambiente. Pretende-se desafiar estudantes e professores a refletir sobre a tomada de decisões que contribuam para a preservação do meio ambiente, considerando que a matemática tem um papel significativo nesse processo e se encontra aplicada, por exemplo, nas áreas da biodiversidade e dos recursos ambientais, da meteorologia e dos sistemas de informação geográfica, do aquecimento global e dos ecossistemas naturais, do consumo energético e das energias renováveis. O Prémio Pedro Matos é promovido pelo Instituto Politécnico de Leiria e destina-se a estudantes do Ensino Secundário e do 3º ciclo do Ensino Básico. Todos os interessados deverão fazer a pré-inscrição até 8 de maio e efetuar a candidatura e a entrega do trabalho até 5 de junho. Os trabalhos serão expostos no Mat-Oeste 2020.



ENCONTRO NACIONAL DA **SPM 2020** EM **TOMAR**

O Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática 2020 (ENSPM) vai decorrer de 13 a 15 de julho, no Instituto Politécnico de Tomar. O ENSPM 2020 é um evento destinado aos matemáticos e a todos os que se interessam pela matemática. Com a realização do ENSPM 2020, a Sociedade Portuguesa de Matemática e o Instituto Politécnico de Tomar pretendem promover a partilha de conhecimento, de ideias e de experiências entre os participantes, nas sessões plenárias, nas mesas-redondas e nas sessões temáticas que integram o programa do Encontro.Decorre em paralelo à realização do ENSPM20 uma ação de formação acreditada para professores de matemática, com 25 horas de duração (1 crédito). A submissão de sessões temáticas decorre até ao dia 30 de março e as inscrições no Encontro beneficiam de preço reduzido até 19 de junho. Veja todas as informações em *http://www.enspm20.ipt.pt*

IMM 8 ACONTECE EM **SEVILHA**

A 8ª edição do Iberian Mathematical Meeting será realizada de 7 a 9 de outubro de 2020, no Instituto de Matemática da Universidade de Sevilha, em Espanha.

O encontro, que teve a primeira edição em Lisboa, em 2007, é um evento conjunto da Real Sociedad Matemática Española e da Sociedade Portuguesa de Matemática que tem como objetivo reunir matemáticos espanhóis e portugueses para desenvolver pesquisas matemáticas no futuro. Seguindo a tradição de encontros anteriores, o evento está estruturado em três áreas científicas principais. Nesta edição, as áreas científicas são: A Matemática da Informação, Cálculo de Variações e Álgebra Computacional e Aplicações. Além das conferências plenárias, serão realizadas sessões específicas para essas três áreas com oradores convidados e outras possíveis palestras. Todas as informações sobre o congresso estão disponíveis aqui: *http://congreso.us.es/sevilla8imm*

3ª **EDIÇÃO** DO CAMPEONATO NACIONAL **MULTIPLI**

A 3ª Edição do Campeonato Nacional Multipli tem uma novidade: é composta por três tipos de provas: rondas, semifinais e final. As inscrições para as rondas e semifinais já se encontram abertas para a prova final em Leiria, a inscrição é de 1 a 30 de abril de 2020. A competição é dirigida a alunos dos 3º, 4º, 5º e 6º anos do Ensino Básico, sendo que o vencedor de cada ano ganhará uma viagem à Disneyland Paris. O Politécnico de Leiria, em parceria com a Alfiii e com o apoio da Sociedade Portuguesa de Matemática, da Associação de Professores de Matemática e da Associação Ludus, promove anualmente, desde 2018, o Campeonato Multipli, cujos objetivos são potenciar o desenvolvimento do pensamento lógico e dos conhecimentos relativos à tabuada e fomentar o interesse dos alunos pela matemática. Inscrições e regulamento em *https://campeonato.multipli.p*t.

COVID-19 FAZ ADIAR **DIVERSOS EVENTOS**

A Final Nacional das XXXVIII as Olimpíadas de Matemática, que iria decorrer nas Caldas da Rainha, de 26 a 29 de março, e o Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, previsto para o dia 20 de março em Aveiro, foram adiados como medida de prevenção numa altura em que a Organização Mundial de Saúde decretou o surto de Covid-19 como pandemia. Todas as inscrições mantêm-se válidas e as novas datas serão anunciadas oportunamente. Também devido ao surto de coronavírus todas as celebrações do primeiro Dia Internacional da Matemática, no dia 14 de março, foram suspensas. Portugal é o país com o maior número de eventos escolares a nível mundial planeados para este dia (ver *https://www.idm314.org/*).

BOLETIM ESPECIAL EDITADO EM **ABRIL**

Em 2019, a Sociedade Portuguesa de Matemática anunciou que o seu Boletim passaria a ser editado apenas em formato digital, com exceção de números especiais que também teriam uma versão em papel. No próximo mês de abril será editado um número especial do Boletim dedicado às contribuições das conferências "Matemáticos Portugueses pelo Mundo", que decorreram na Universidade de Lisboa em 2017 e a na Universidade do Porto em 2019.

ACADEMIA DAS CIÊNCIAS NOMEIA **CINCO MATEMÁTICOS**

No passado dia 30 de janeiro, a Academia das Ciências nomeou cinco novos correspondentes nacionais na área da Matemática: Ana Bela Cruzeiro (Instituto Superior Técnico), Gonçalo Tabuada (Instituto de Tecnologia de Massachusetts), Mário Figueiredo (Instituto Superior Técnico), José Miguel Urbano (Universidade de Coimbra), e Jorge Milhazes de Freitas (Universidade do Porto).

Fabio Chalub
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

UM DIA PARA A MATEMÁTICA

No dia 26 de novembro de 2019, a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO) declarou que, todos os anos, o dia 14 de março seria o Dia Internacional da Matemática (DIM).

Uma velha e desgastada piada diz que existem dias internacionais para que nos outros 364 dias do ano possamos, sem culpa, ignorar o assunto em causa.

Não é bem assim. Os dias internacionais existem para permitir uma maior reflexão e, através de uma ação concertada, chamar a atenção de todos para a relevância de determinados assuntos. Com o DIM teremos um momento privilegiado de contactos entre a comunidade matemática, os estudantes e o público para discutir a sua relevância no nosso dia a dia. Assim como o oxigénio, é fácil passar o ano sem lhe dedicar o pensamento. Mas ela está lá!

Agora cabe a nós fazer um dia em que até os mais desatentos ouvirão falar da matemática.

O dia 14 de março (3/14, na notação anglo-saxónica) já desfrutava de uma longa tradição na comunidade matemática. É conhecido como o "Dia do Pi", pois é a única data que pode ser obtida a partir dos três primeiros dígitos da expansão decimal desta importante constante universal. Como em muitas efemérides (sendo o Natal o principal exemplo), colocar no calendário oficial uma celebração já existente faz mais sentido do que criar outra de raiz.

Assim, após consulta aos seus membros (em Portugal, a Comissão Nacional de Matemática, mas com forte empenho da SPM), e elaborada uma proposta que justificava a existência do DIM dentro dos propósitos da UNESCO, a União Internacional de Matemática começou contactos para que algum Estado-membro a apresentasse oficialmente.

A Comissão Nacional da UNESCO, órgão do Ministério dos Negócios Estrangeiros, foi das primeiras a aceitar o desafio, tendo sido Portugal um dos proponentes oficiais do DIM. Vale a pena ler o documento [1], com a fundamentação apresentada.

Com o apoio da Imaginary [2] e da Klaus Tschira Stiftung [3], duas organizações alemãs sem fins lucrativos devotadas, pelo menos em parte, à disseminação do conhecimento matemático, foi possível criar materiais em diversas línguas (inclusive português) e promover um belíssimo website, *https://www.idm314.org/*.

A participação da comunidade portuguesa foi fenomenal. Alunos, professores, museus, público em geral, todos mostraram enorme interesse em promover diversas atividades. Portugal é o país, a nível mundial, com o maior número de eventos na agenda.

É importante não perder este *momentum* e continuar a planear mais e melhores eventos. Na sua função de sempre servir à comunidade matemática nacional e também aos amantes do conhecimento, a SPM estará sempre à disposição!

Bom "Dia do Pi" para todos!

[1] *https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000265647_eng*
[2] *https://imaginary.org*
[3] *https://www.klaus-tschira-stiftung.de*

Gazeta de Matemática
FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt***.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2020

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3° esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*