

N.0181

M Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXVIII | Mar. 2017 | 4,20€

Mandorla e Vesica Pisces, sementes dos polígonos

FILIPE ALBERTO DA SILVA

APANHADOS NA REDE

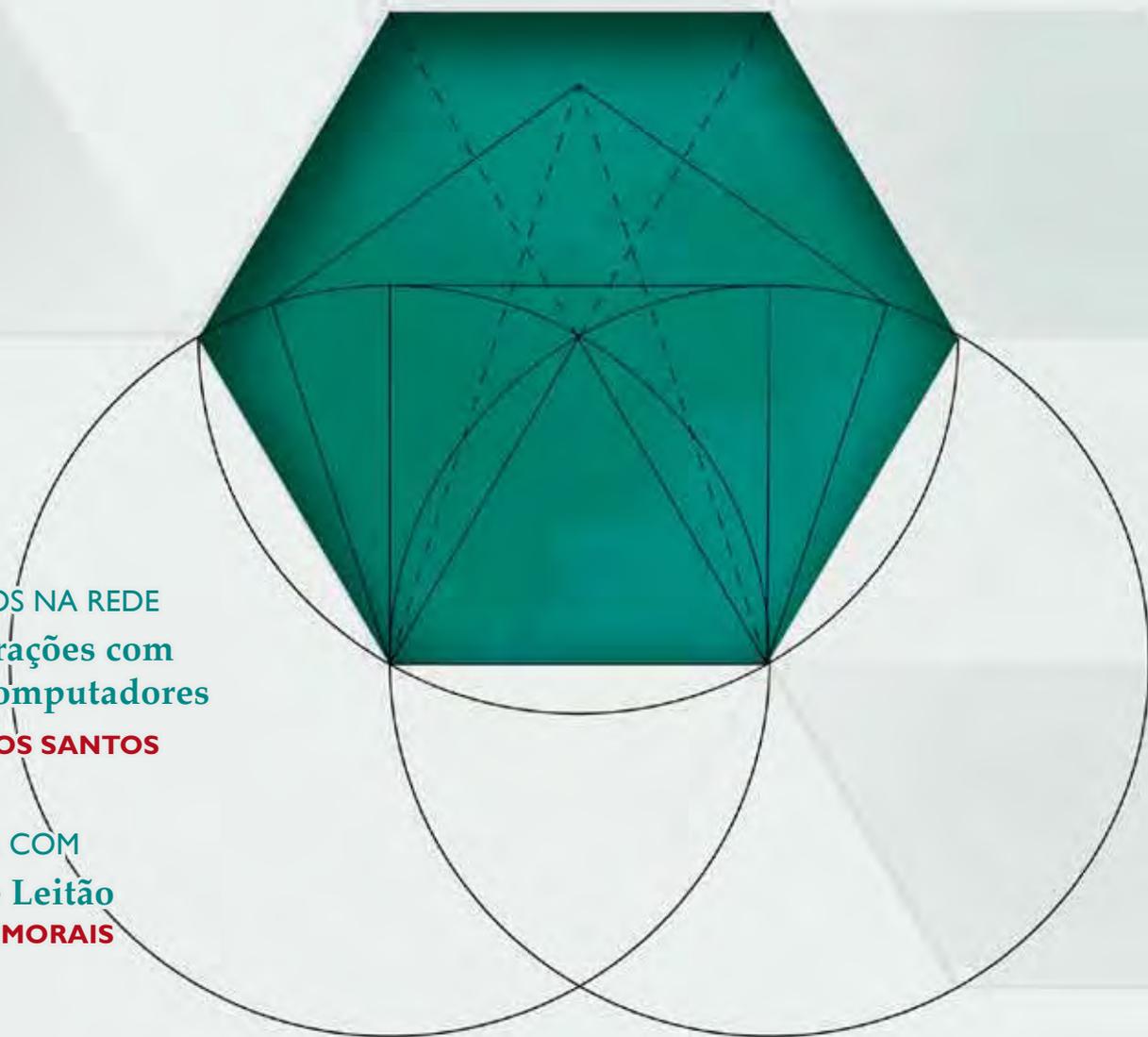
Demonstrações com
Uso de Computadores

JOSÉ CARLOS SANTOS

CONVERSA COM

Henrique Leitão

GONÇALO MORAIS



ESCOLA DE VERÃO DA SPM 2017 & MAT-OESTE

13 a 15 de julho de 2017
ESTG, Instituto Politécnico de Leiria

A 10ª Edição do Mat-Oeste decorrerá no dia 13 de julho

MATEMÁTICA DO MAR

Palestras & Minicursos & Mesas Redondas

Ações de formação acreditadas para
professores do ensino básico e secundário

Entrega dos prémios da 9ª Edição
do Concurso Nacional de Matemática
Prémio Pedro Matos 2017

www.premiopedromatos.ipleiria.pt

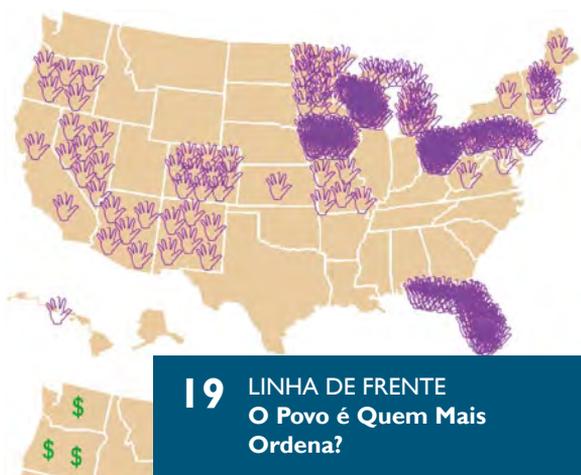
www.evspm2017.ipleiria.pt

Comissão Organizadora:
Conceição Nogueira
Eunice Oliveira
Fernando Sebastião
Leonel Vicente
Paula Faria

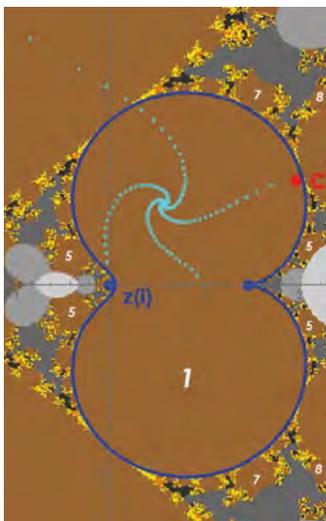




43 NOVIDADES MATEMÁTICAS Como Mercator Fez o seu Mapa



19 LINHA DE FRENTE O Povo é Quem Mais Ordena?



03 ATRACTOR Dinâmica de uma Família de Exponenciais



38 CONVERSA COM... Henrique Leitão

- 02 **EDITORIAL** | *Sílvia Barbeiro*
- 03 **ATRATOR**
Dinâmica de uma Família de Exponenciais
- 08 **RECREIO** | *Jorge Nuno Silva*
Garimpeiro Matemático
artigo de capa
- 10 **MANDORLA E VESICA PISCES, SEMENTES DOS POLÍGONOS**
Filipe Alberto da Silva
- 17 **CANTO DÉLFICO** | *Amílcar Branquinho*
Arquimedes, Uma Mente Brilhante
- 20 **UMA DEMONSTRAÇÃO DO TIPO BOLZANO-WEIERSTRASS DE QUE QUALQUER INTERVALO EM \mathbb{R} É CONEXO**
Sagar Pratapsi
- 23 **NA LINHA DE FRENTE** | *Fabio Chalub*
O Povo é Quem Mais Ordena?
nova secção
- 27 **PT-MATHS-IN** | *Paula Amaral*
Matemática Industrial em Rede
- 30 **APANHADOS NA REDE** | *José Carlos Santos*
Demonstrações com Uso de Computadores
- 33 **BARTOON** | *Luis Afonso*
- 34 **REPRESENTAÇÃO HOLISTA DE NÚMEROS REAIS**
Mário Abrantes
- 41 **MATEMÁTICA E LITERATURA** | *Nuno Camarheiro*
Ciência e Ficção
- 42 **CONVERSA COM...** | *Gonçalo Morais*
Henrique Leitão
- 47 **NOVIDADES MATEMÁTICAS** | *Manuel Silva e Pedro J. Freitas*
Como Mercator Fez o seu Mapa
- 50 **NOTÍCIAS**
- 55 **CARTAS DA DIREÇÃO** | *Adérito Araújo*
Dois Eventos a Não Perder



SÍLVIA BARBEIRO
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

UM CONVITE À DIVULGAÇÃO DA CIÊNCIA

A presente edição da *Gazeta de Matemática*, o número 181, dá continuidade ao projeto com uma nova equipa editorial. Iniciamos a nossa missão lançando um renovado convite a todos os apaixonados pela ciência e, em particular, pela matemática. Habitem a *Gazeta* com crónicas, ideias e reflexões e levem-na a novas paragens.

É com grande prazer que vos escrevo, pela primeira vez, como diretora desta elucidativa e inspiradora revista. A todos os protagonistas do seu sucesso, os que contribuem com a submissão de textos, colaboram na revisão e na redação dos artigos, asseguram as colunas habituais, são editores e participam no Conselho Editorial, agradeço com alegria.

O número que agora vos chega está recheado de motivos de interesse. *Em democracia, ganha que tem mais votos numa eleição, certo?* Há resposta no artigo de Fabio Chalub. *Até que ponto se pode confiar nas demonstrações feitas com auxílio de computadores?* É um tópico foco de polémicas abordado por José Carlos Santos. *Além do mapa, Mercator deixou-nos também um problema: que método usou para o desenhar?* A solução, apresentada por Pedro J. Freitas e Manuel Silva, baseia-se num trabalho de Joaquim Alves Gaspar e Henrique Leitão. E o mesmo Henrique Leitão é o ilustríssimo convidado que Gonçalo Morais entrevista. Encontramos notáveis métodos de construção de

polígonos no artigo *Mandorla e Vesica Pisces, sementes dos polígonos*, num texto de Filipe Alberto da Silva, e figuras muito belas em *Dinâmica de uma família de exponenciais*, trazidas a nós pelo Atractor. O leitor que percorra esta revista vai descobrir muito mais.

A *Gazeta de Matemática* tem contado desde a sua fundação com talentosíssimos autores e o conjunto das suas edições constitui um património muito importante. Numa perspetiva de constante renovação gostaria de lançar um desafio aos jovens estudantes, convidando-os a juntarem o seu talento a este valioso legado.

O próximo número da *Gazeta* será marcado por uma homenagem ao prestigiado académico, professor universitário de Matemática e Engenharia Geográfica e historiador dos descobrimentos portugueses Luís Albuquerque, por ocasião do centenário do seu nascimento. Será com certeza um número ao não perder.

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atrator, este é um espaço da responsabilidade do Atrator; relacionado com conteúdos interativos do seu site www.atrator.pt. Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para atrator@atrator.pt

DINÂMICA DE UMA FAMÍLIA DE EXPONENCIAIS

No artigo *De formulis exponentialibus replicatis*¹, Euler considera um problema proposto por Condorcet sobre a sucessão $c^c, c^{c^c}, c^{c^{c^c}}, \dots$, sendo $c > 0$, convencendo-se, a partir de vários exemplos e alguns cálculos, de que esta sucessão converge se e só se $c \in [e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$. O que é que se passa quando $c > 0$ está fora deste intervalo? E se c for complexo?

Por razões que o leitor entenderá em breve, a questão sobre o comportamento assintótico destas sucessões de exponenciais está relacionada com outra mais simples: Para que valores reais de $a, b > 0$ se tem $a^b = b^a$? A igualdade é óbvia quando $a = b$. Para valores distintos de a e b , podemos listar alguns exemplos simples, como $3^1 > 1^3, 3^2 > 2^3, 3^{2.5} < 2.5^3, 3^4 > 4^3, 3^5 > 5^3, 3^6 > 6^3, 2^{1/3} > (1/3)^2, 2^1 > 1^2, 2^3 < 3^2, 2^4 = 4^2, 2^5 > 5^2, 2^6 > 6^2, (\sqrt{2})^{1/5} > (1/5)^{\sqrt{2}}, (\sqrt{2})^1 > 1^{\sqrt{2}}, (\sqrt{2})^2 < 2^{\sqrt{2}}, (\sqrt{2})^3 < 3^{\sqrt{2}}, (\sqrt{2})^9 > 9^{\sqrt{2}}$, mas não se reconhece aqui um padrão geral. Se, porém, reescrevermos a equação $a^b = b^a$ como $a^{1/a} = b^{1/b}$ e esboçarmos o gráfico da função

$x > 0 \mapsto f(x) = x^{1/x}$, teremos uma ideia aproximada dos valores da imagem de f que são obtidos mais do que uma vez (figura 1).

Esta função tem um máximo global $e^{1/e}$, atingido apenas em $x = e$, e é estritamente crescente em $]0, e[$ e estritamente decrescente em $]e, +\infty[$. Além disso, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1^+$. Logo, cada reta horizontal $y = c$ com $1 < c < e^{1/e}$ (e só para estes valores de c) intersesta o gráfico de f em dois pontos cujas abscissas determinam dois reais positivos distintos a e

¹ Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae I (1778) 38–60

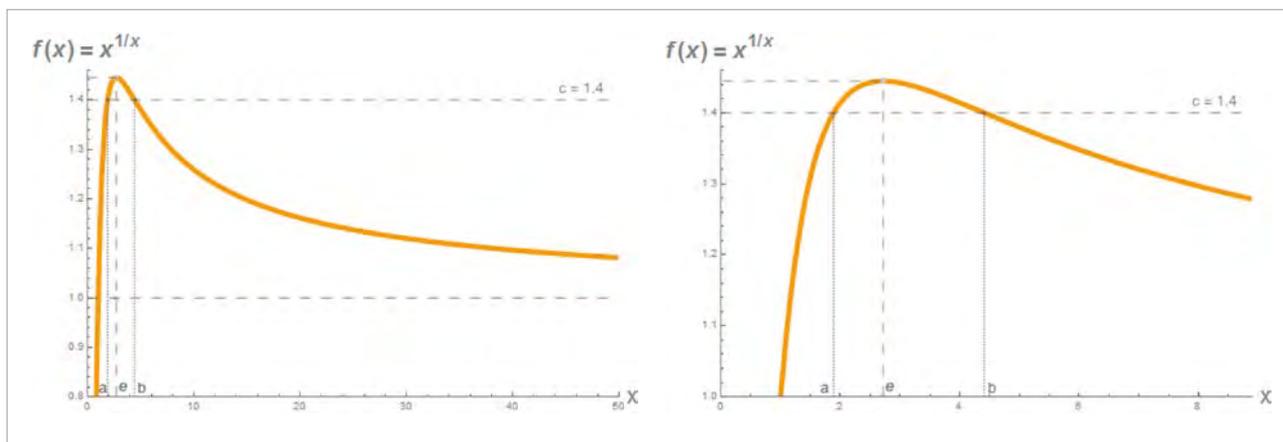


Figura 1. Gráfico da função f .

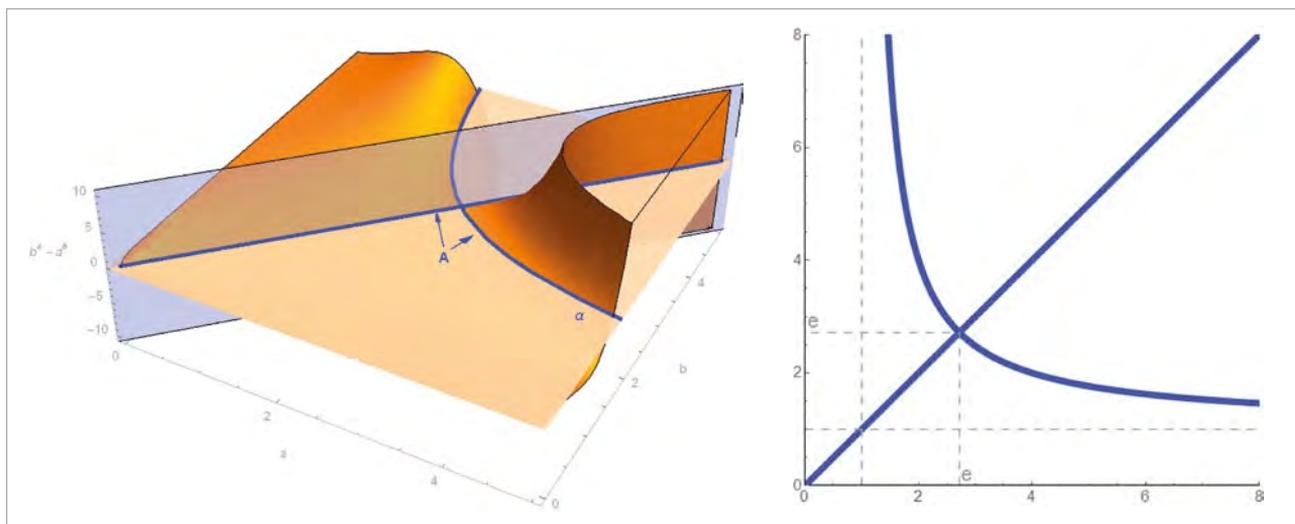


Figura 2. Traço da curva α e o conjunto A .

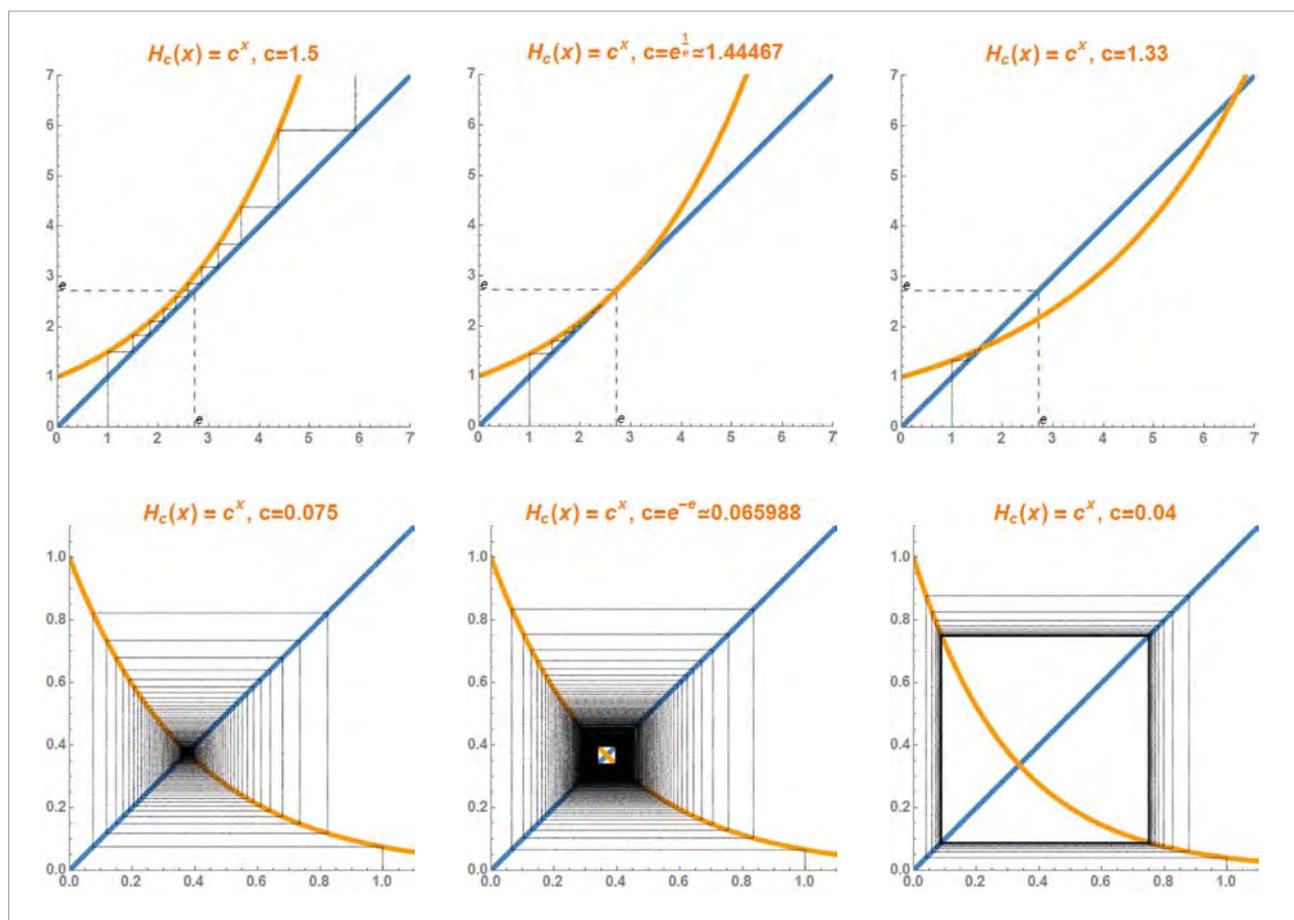


Figura 3. Órbitas de 1 por H_c .

b tais que $a^{1/a} = b^{1/b}$, ou seja, $a^b = b^a$. Para descrever o lugar geométrico de tais pares (a, b) , usemos o feixe de retas $y = tx$ com declive $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ como um radar para os detetar no 1º quadrante de \mathbb{R}^2 . Para cada t , determinamos a interseção das condições $y = tx$ e $x^y = y^x$ resolvendo em conjunto as equações $y/x = t$ e $x^{y/x} = y$; as soluções descrevem a curva α em $(\mathbb{R}^+)^2$ representada na figura 2 e parametrizada por

$$t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \mapsto \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}} \right).$$

O traço de α é simétrico relativamente à bissetriz do 1º quadrante, uma vez que, se fixarmos $t > 0$ e o par correspondente $(a, b) = (t^{1/t-1}, t^{t/t-1})$ de α , então $1/t$ determina o ponto (b, a) da mesma curva. Além disso, $\alpha(t)$ converge para (e, e) quando t tende para 1. Note-se ainda que as coordenadas dos pontos desta curva são ambas estritamente maiores do que 1, propriedade que resulta de só surgirem tais pares com abcissas no subconjunto $]1, +\infty[$ do domínio da função f . Se ao traço de α juntarmos a semireta $\{(a, a) : a \in \mathbb{R}^+\}$, obtemos o conjunto \mathcal{A} de todos os pares $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tais que $a^b = b^a$.

Os dois ramos de \mathcal{A} interseitam-se precisamente em (e, e) e dividem $(\mathbb{R}^+)^2$ em quatro regiões, em cada uma das quais o sinal da diferença $a^b - b^a$ se mantém constante. Em particular, como a reta vertical $x = e$ só intersesta as regiões em que este sinal é positivo, concluímos que, para todo o $0 < x \neq e$, se tem $e^x > x^e$ (de que a desigualdade $e^\pi > \pi^e$ é talvez o caso mais famoso).

A abcissa de cada ponto (a, b) do traço de α satisfazendo $e < b$ é a imagem de $f(b)$ pela inversa da restrição da função f ao intervalo $]0, e[$. Mais precisamente, dado $c \in]1, e^{1/e}[$, existe um e um só $b > e$ tal que $f(b) = b^{1/b} = c$; se agora resolvermos a equação $a^{1/a} = c$ com a incógnita $a \in]1, e[$, determinamos o outro valor do domínio de f , $1 < a < e$, tal que $f(a) = f(b) = c$. É precisamente este valor único a de $]1, e[$ que nos leva de volta à questão inicial de Condorcet. De facto, se a sucessão $c^c, c^{c^c}, c^{c^{c^c}}, \dots$ convergir para um real $a = a(c) \in]1, e[$, então, por continuidade da função exponencial, tem-se $c^a = a$. Isto é, $c = a^{1/a}$. E, portanto, se $g :]1, e^{1/e}[\rightarrow]1, e[$ é a função que a cada c associa o limite da sucessão $c^c, c^{c^c}, c^{c^{c^c}}, \dots$, tem-se $g(f(a)) = a$ para todo o $a \in]1, e[$ e $f(g(c)) = c$ para todo o $c \in]1, e^{1/e}[$. Resta-nos confirmar que, para estes valores de c , a sucessão $c^c, c^{c^c}, c^{c^{c^c}}, \dots$, converge e o limite está em $]1, e[$.

Analisemos na figura 3 o comportamento da sucessão $c^c, c^{c^c}, c^{c^{c^c}}, \dots$, para $c > 0$. Esta sucessão é a órbita de 1 pelo sistema dinâmico gerado pela função

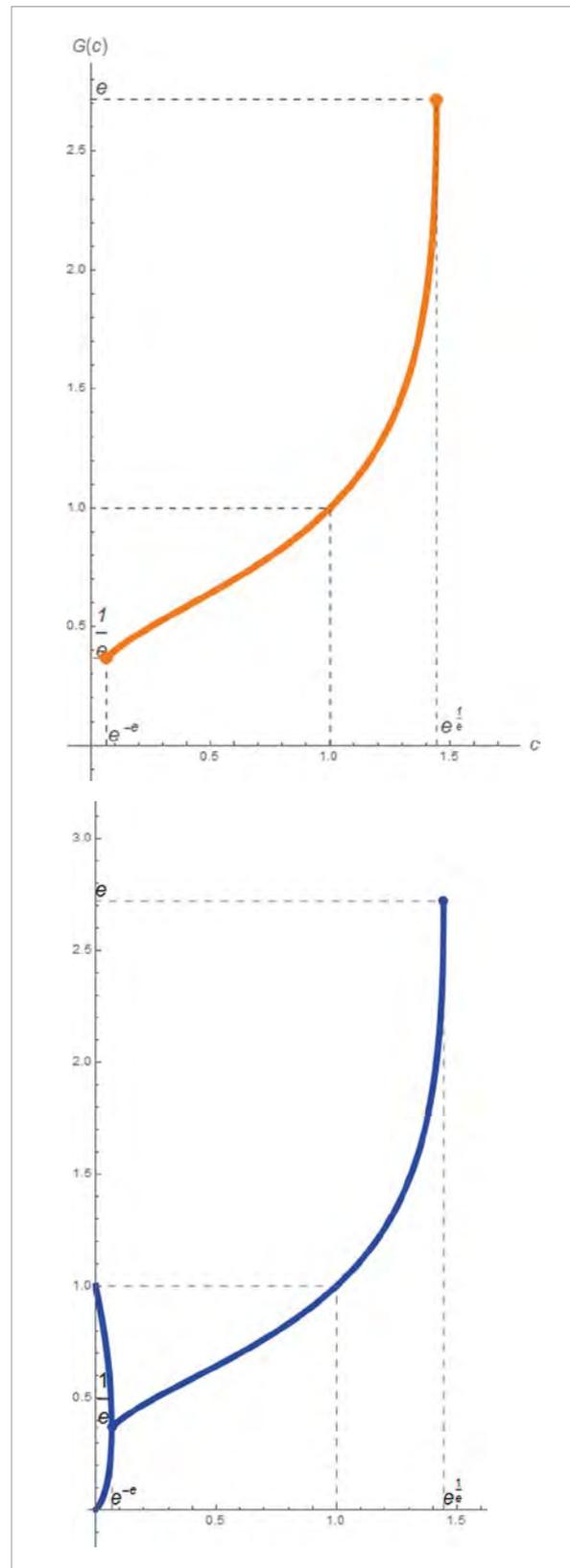


Figura 4. Gráfico de G e atratores de H_c .

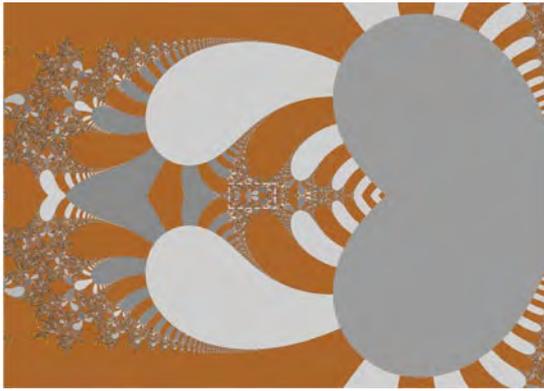


Figura 7. Detalhe da figura 5.

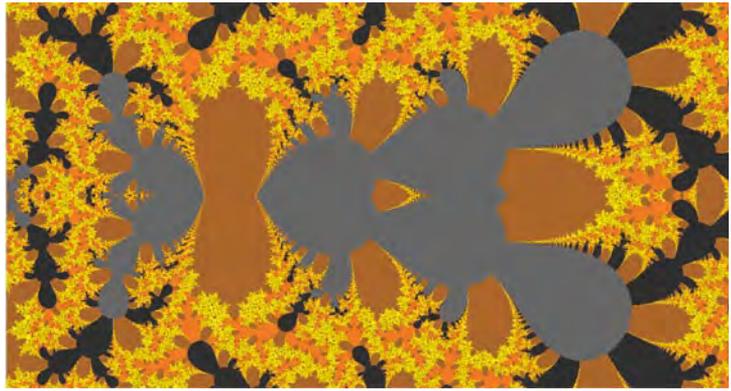


Figura 8. Ampliação do retângulo da figura 7.

tacam-se nele componentes $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tais que D_k agrupa os valores de c para os quais a sucessão $c^c, c^{c^c}, c^{c^{c^c}}, \dots$ tem exatamente k pontos de acumulação, que formam uma órbita periódica de período k por \mathcal{H}_c . Não se sabe se a união $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$ é densa no plano.

REFERÊNCIAS

[1] http://www.atractor.pt/mat/dinamica_exponenciais

Já é sócio da SPM?

Conheça as vantagens e saiba como aderir em www.spm.pt ou através do número 217 939 785



Consulte também as condições para os sócios institucionais (Departamentos, Faculdades, ESES, Politécnicos, etc.)



GARIMPEIRO MATEMÁTICO

DataGenetics é uma empresa dedicada à análise de grande quantidades de dados. Fundada por Nick Berry, o seu site na web reflete o carácter do seu presidente, possuidor de uma curiosidade bastante eclética.

O problema de pesagens que apresentamos hoje vem do *blog* da DataGenetics e pede para identificar não um, mas dois objetos.



JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa

jnsilva@cal.berkeley.edu



Todos sabem que as pepitas de ouro têm aspeto tipicamente disforme e variado.

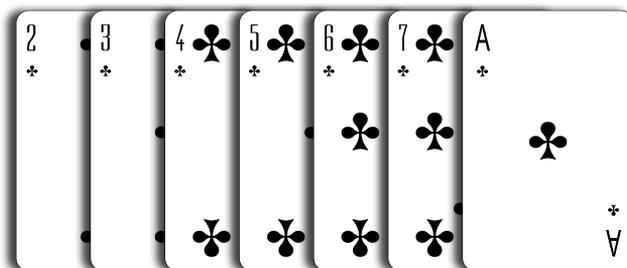
Dadas duas pepitas, não há maneira de decidir sobre qual é a mais pesada a não ser por pesagem.

Suponhamos que temos 16 pepitas, todas com o mesmo peso, exceto uma que é mais pesada do que as outras. Queremos determinar qual é a mais valiosa usando uma balança de pratos. Qual é o menor número de pesagens que devemos efetuar?

Uma solução em três passos começa com a pesagem de cinco pepitas em cada prato da balança. Esta primeira operação permite-nos concluir que a pepita desejada está nas seis que ficaram de fora ou nas cinco do prato que baixou. Mais duas pesagens garantem a identificação da pepita mais rica.

O problema que propomos aos leitores é diferente: suponham que as pepitas têm todas pesos diferentes e que queremos determinar as duas mais pesadas! Em quantas pesagens se pode determinar as duas pepitas mais valiosas?

Relembremos a questão do número anterior.



Há três jogadores, o Andrey, o Boris e o Sergey. As cartas são distribuídas da seguinte forma: três para o Andrey, três para o Boris e uma para o Sergey. Nenhum deles sabe nada sobre a distribuição das cartas, além das que tem na mão. Será possível o Andrey e o Boris terem uma conversa, em voz alta, à frente do Sergey, de forma a que fiquem a conhecer a distribuição das cartas e o Sergey continue a saber somente qual é a sua carta?

No lugar da soma modular poderá usar-se soma-Nim? Relembremos que para efetuar uma destas somas se escreve os números em binário e se usa a tabuada $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$, $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$. No exemplo acima, o Andrey calcularia $1 \oplus 2 \oplus 3 = 0$ e diria: "0". O Boris faria a conta $4 \oplus 5 \oplus 6 = 7$ e, sabendo que $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5 \oplus 6 \oplus 7 = 0$, diria: "A carta do Sergey é o $7 \clubsuit$ " (já que $7 \oplus 7 = 0$).

O que é que há de errado com este processo?

Ilustremos com um exemplo. Suponhamos que Sergey tem o 3♣ e que Andrey diz "1". Sergey sabe que as únicas combinações de três cartas com soma-Nim 1 são {2♣, 4♣, 7♣}, {2♣, 5♣, 6♣}, {3♣, 4♣, 6♣}, e {3♣, 5♣, 7♣}. Portanto, tendo o terno na mão, Sergey conclui que Andrey tem o duque. Por outro lado, Andrey não pode ter o Ás, porque a equação $1 = 1 \oplus x \oplus y$ é impossível se $x \neq y$. Logo, Sergey sabe que Boris tem esta carta na mão. Somente quan-

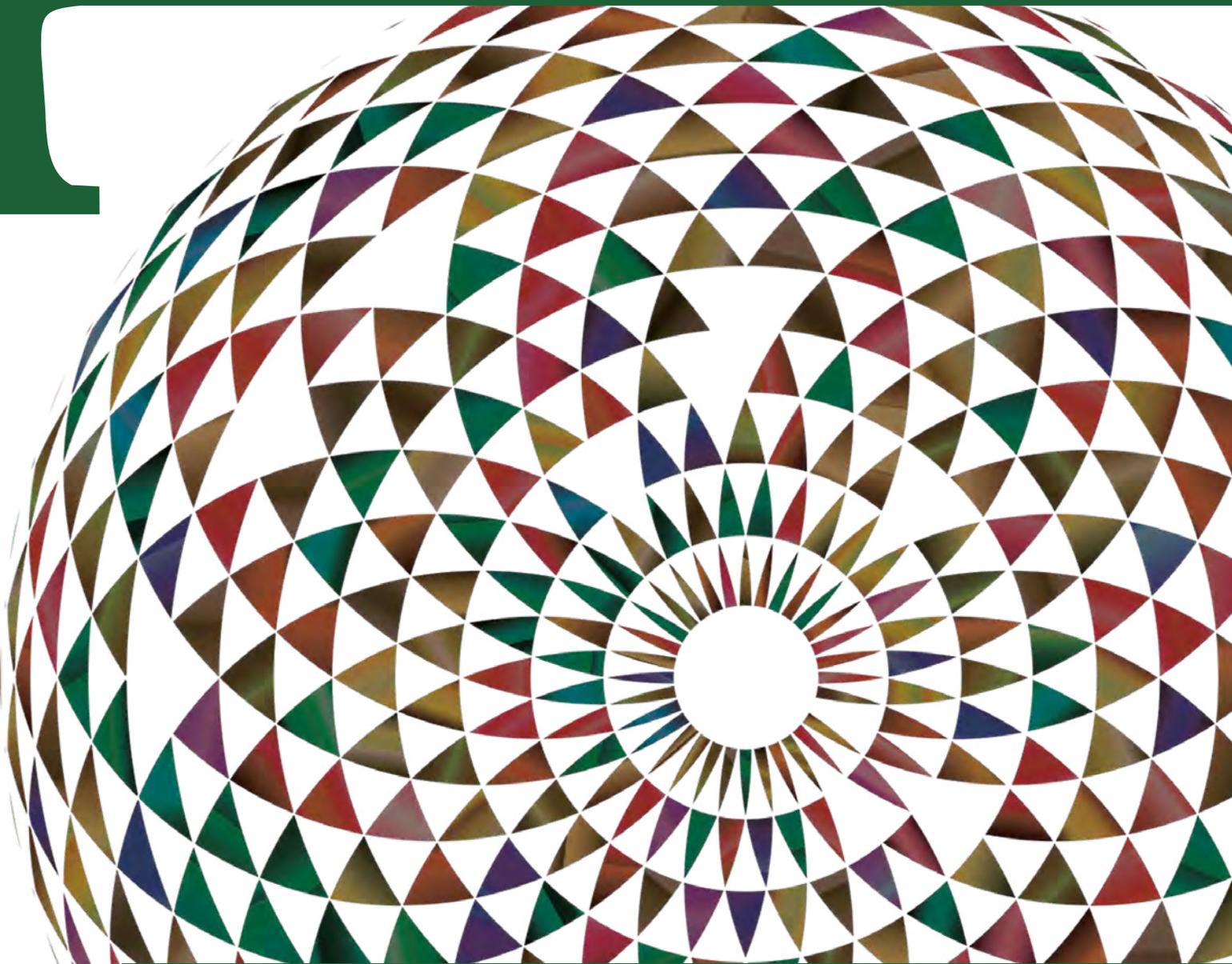
do a soma-Nim é nula (sete casos) a ambiguidade permite manter Sergey sem certezas. Em todos os outros casos (28), se ele tiver uma carta diferente da soma de Andrey, pode deduzir uma carta em cada um dos parceiros.

Pode não servir para responder ao problema, mas dá origem a um belo truque de cartas. A divisão 3-3 não é essencial. Basta dar uma carta ao Sergey e dividir as restantes seis pelo Andrey e pelo Boris em qualquer proporção.



LOJA
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em www.spm.pt



MANDORLA E VESICA PISCES - SEMENTES DOS POLÍGONOS

FILIFE ALBERTO DA SILVA

FACULDADE DE CIÊNCIAS SOCIAIS E HUMANAS - UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

filipealbertodasilva@outlook.com

Este trabalho tem por objetivo apresentar métodos de construção de polígonos, segundo a figura da Mandorla e da Vesica Pisces, evidenciando a sua simplicidade de execução no âmbito do desenho geométrico com régua e compasso. Uma breve introdução ao simbolismo das figuras da Mandorla e da Vesica Pisces será apresentada, evidenciando o princípio gerador feminino que estas traduzem.

Palavras-chave: Mandorla, Vesica Pisces, Geometria Sagrada, pentágono, heptágono.

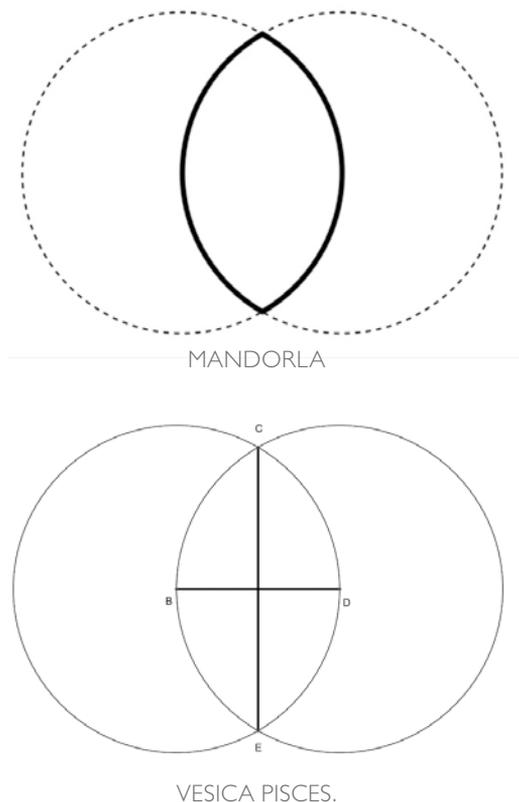


Figura 1. A Mandorla e a Vesica Pisces.

Sejam B e D dois pontos dados. Com centro em B , abrimos o compasso até D e traçamos uma circunferência. Com centro em D , abrimos até B , traçamos uma circunferência. Obtemos duas circunferências idênticas, cada uma atravessando o centro da outra. Chamamos Vesica Pisces à união das duas circunferências. Chamemos C , E aos pontos de interseção das circunferências. Os eixos definidos pelos segmentos BD e CE são perpendiculares e cruzam-se em A , ponto médio de BD . Chama-se Mandorla à união dos arcos de circunferências CBE e EDC . (Fig. 1)

Daqui em diante, referimo-nos a uma Mandorla ou a uma Vesica por especificação dos seus pontos $BCDE$.

1. BREVE INTRODUÇÃO SOBRE O SIGNIFICADO DAS FIGURAS DA MANDORLA E DA VESICA PISCES

A palavra Mandorla provém do italiano e significa “amêndoa”. Na arte ocidental cristã da Idade Média, a forma em amêndoa era utilizada para envolver a figura de Cristo na Ascensão. Na sua origem, a Mandorla representava a nuvem sobre a qual Cristo ascendia, mas com o tempo foi sendo usada como uma espécie de “glória” ou auréola, a luz que emana de um ser divino. Por esse motivo, era usada para representar Cristo na Transfiguração ou em majestade [1].

A palavra Mandorla, ou amêndoa, designa também a semente da amendoeira¹, e é esse carácter seminal que nos interessa aqui. Como afirma o mitógrafo Robert Lawlor, “este desenho de crescimento sugere a árvore. A Vesica representa a semente[2]”. Na figura 2 (página seguinte) expõe-se a Mandorla com a Vesica Pisces para ilustrar o surgimento das figuras de três até 12 lados iguais, como enunciado por Lawlor.

Relativamente à expressão Vesica Pisces, esta vem do latim e significa literalmente “bexiga do peixe”. Jorge Morales de Castro² refere a utilização da palavra grega *Ichthus* ($IX\Theta Y\Sigma$), termo que significa “peixe”, como anagrama de “Jesus Cristo, Filho de Deus, Salvador” (*Iesous*

¹Paulo Pereira refere o carácter gerador da Mandorla, reportando-a ao nascimento do deus frígio Átis que nasceu a partir de uma amêndoa mágica. Pereira, Paulo; *Lugares mágicos de Portugal – Arquitecturas Sagradas*, Círculo de Leitores e Temas e Debates, Rio de Mouro, 2009, p. 201.

² Investigador do Centro de Ciências Humanas y Sociales de Madrid, (CCHS). Castro, Jorge Morales de; *Religiones del Mundo. Cultos y Creencias del Hombre*, (2002), trad. Maria da Fonseca, Religiões do Mundo – cultos e crenças, Editorial Estampa, Lisboa, 2004, p. 124

Christos Theou Uios Soter). Sabe-se, pelo mesmo autor, que a imagem que simbolizava o *Ichthus* consistia em dois arcos desenhados na areia, em todo semelhante àquilo a que chamamos “Mandorla” neste trabalho, figura que, relembramos, deriva da Vesica Pisces. A Mandorla, estes dois arcos que os primeiros cristãos desenhavam na areia, “era usada pelos crentes, nos primeiros tempos de perseguição, como sinal secreto da sua fé partilhada. A pessoa desenhava um arco na areia e a outra completava o símbolo, para mostrar a sua fraternidade em Cristo³”.

O termo Vesica Pisces continuou a ser usado durante a Idade Média nas lojas dos construtores para representar o desenho de dois arcos fechados entre si [3]. Albrecht

Dürer utilizou o termo germânico *Fischblasen*, literalmente “bexiga do peixe”, para o mesmo significado no seu tratado geométrico *Instrução para medições à régua e ao compasso*⁴.

2. IMPORTÂNCIA DESTE MÉTODO DE CONSTRUÇÃO.

Não serão aqui expostos os métodos de construção de todos os polígonos possíveis de construir a partir da Mandorla e da Vesica Pisces, pois tal extravasaria o propósito deste artigo⁵. Tomaremos como exemplos as figuras do pentágono regular e do heptágono. Note-se que não aplicamos a denominação “regular” ao heptágono, ao passo que o fizemos para o pentágono, pois a construção do heptágono com todos os lados iguais é impossível utilizando apenas régua e compasso, tal como comprovado em 1837 pelo matemático Pierre Wantzel, no seu artigo *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas* [4].

Começemos pelo pentágono tal como era transmitido entre os artesãos e arquitetos medievais [5]. Devemos ter em atenção que aos métodos medievais de construção se aplica o axioma: “o método mais simples deve ser sempre preferido ao método mais complexo quando se trata da Idade Média” [6], ressaltando assim a sua fácil memorização pela sua simplicidade⁶ como assegura o autor Shelby.

2.1 Uma variante do desenho do pentágono regular dado o lado pelo método da Vesica Pisces

Considere-se a Vesica Pisces BCDE (ver figura 3)

1) Centro em *E* até *B*, traçar arco de circunferência. Encontrados os pontos *F* e *G* na Vesica Pisces e o ponto *C1* no eixo vertical *CE*.

2) Traçar retas de *G* e *F* para *C1*. Encontrados os pontos *H* e *I* por interseção das retas *GC1* e *FC1* (respetivamente) com os arcos exteriores da Vesica.

³ Ibidem.

⁴Do título original: *Ungerweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheit*, Fl. 59.

⁵Para aprofundar este tema, ver a tese do autor: Silva da, Filipe. *As figuras da Mandorla e da Vesica Pisces, suas possibilidades de construção*. Dissertação de Mestrado em Desenho. FBAUL, Lisboa, 2013.

⁶No Período da Idade Média a transmissão do conhecimento era essencialmente efetuada pela observação direta do mestre. Aprendia-se, vendo e fazendo. Shelby, Lon R.; *Gothic Design Techniques The Fifteenth-Century Design Booklets of Mathes Roriczer and Hanns Schmuttermayer*, Southern Illinois University Press, U.S.A., 1977, p. 53.

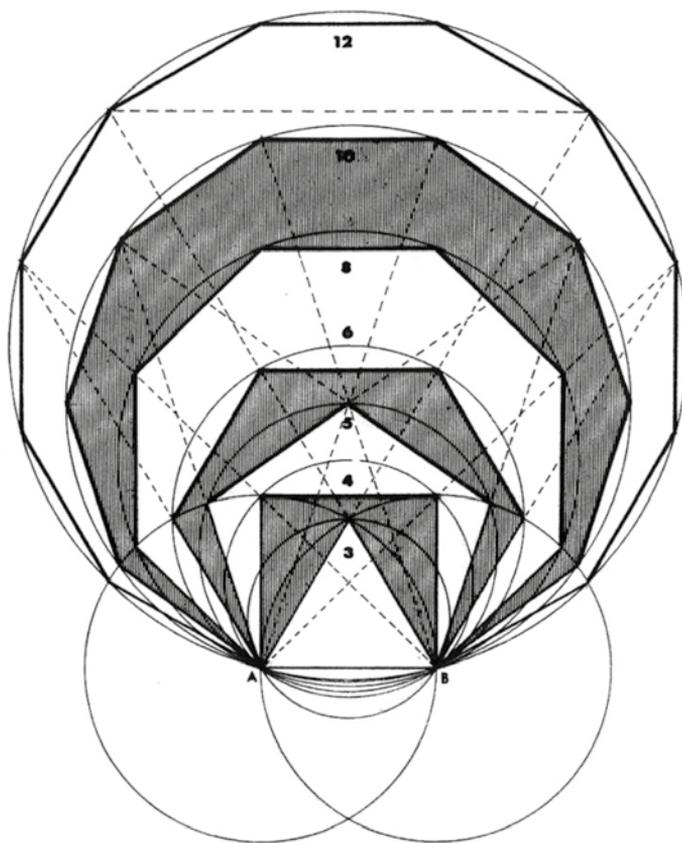


Figura 2. Vesica Pisces como matriz geradora. Fonte: Critchlow, Keith; *Order in Space a design source book*, Thames & Hudson, London, 1969, p. 33. (Esta figura de K. Critchlow é idêntica a de Robert Lawlor no seu livro *Sacred Geometry Philosophy & Practice*, p. 34. Escolheu-se a imagem de Critchlow pela maior clareza do desenho).

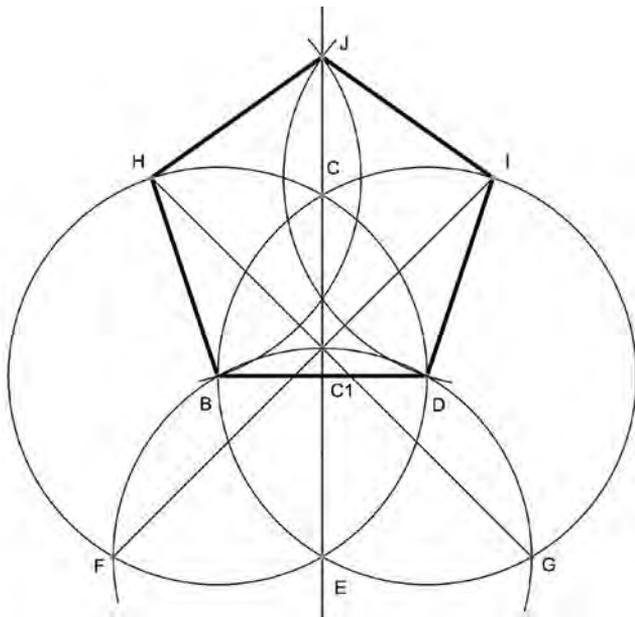


Figura 3. Construção do pentágono regular pelo método medieval. Fonte: Shelby, Lon R.; *Gothic Design Techniques The Fifteenth-Century Design Booklets of Mathes Roriczer and Hanns Schmuttermayer*, Southern Illinois University Press, U.S.A., 1977, p. 117.

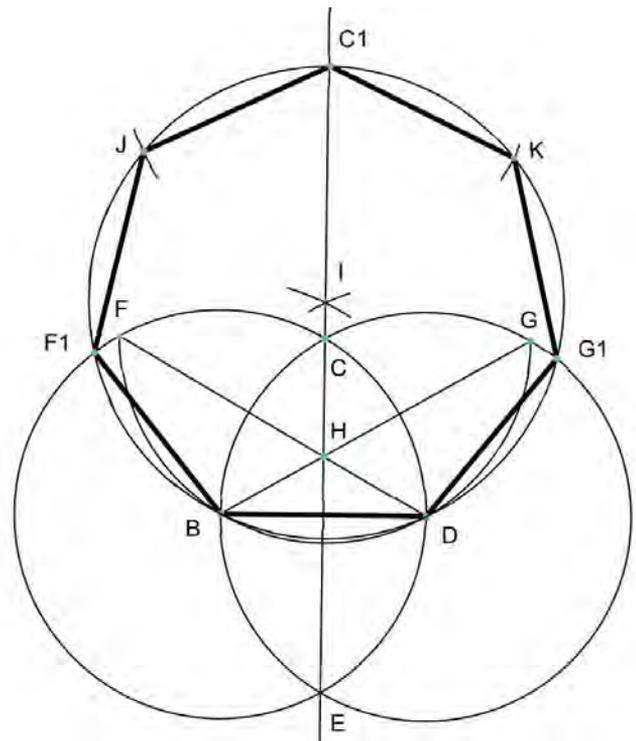


Figura 4. Construção do heptágono. Fonte: Sutton, Andrew; *Ruler & Compass practical geometric constructions*, Wooden Books, England, 2009, p. 41.

3) Centro em H até B , traçar arco. Repetir a mesma operação com centro em I . Encontrado o ponto J no eixo vertical CE .

4) Completar o pentágono regular $JIBDH$.

2.2 Desenho do heptágono pelo método da Vesica Pisces

Passemos agora para o heptágono, figura de sete lados. Tradicionalmente, no terceiro ciclo do ensino básico, é ensinado o método da divisão da circunferência em sete partes iguais como meio de construir um heptágono [7] inscrito numa circunferência. Esta construção mais complexa fomenta uma menor precisão e uma maior margem para a ocorrência de erros. Pelo método da Vesica Pisces, que se inicia por um lado, ganha-se tanto em simplicidade como em precisão.

Dado um segmento BD , considere-se a Vesica Pisces $BCDE$ de centros B e D . (ver figura 4)

1) Centro em C até B , traçar arco (medida da Vesica). Encontrados os pontos F e G na Vesica.

2) Traçar os segmentos de reta BG e DF . Intersectam-se no ponto H no eixo vertical CE .

3) Tomar por medida FH , centro em B e D , traçar os arcos respectivos. Encontrado o ponto I no eixo vertical CE .

4) Com a mesma medida da etapa anterior, centro em I , traçar circunferência. Encontrados os pontos $F1$ e $G1$ na Vesica e a localização do ponto $C1$ no eixo vertical CE .

5) Retomar por medida a Vesica, centro em $C1$, marcar os pontos J e K .

6) Completar o heptágono $C1KG1DBF1J$.

Além deste papel gerador de polígonos, a Vesica presta-se a outras construções geométricas que não podemos aqui abordar por economia de espaço, nomeadamente, a

construção da Secção de Ouro e da raiz quadrada de 2, 3 e 5 que ilustramos a seguir (figuras 5 e 6).

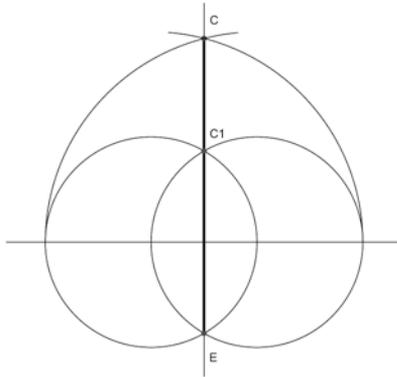


Figura 5. A Secção de Ouro na Vesica Pisces. Fonte: Sutton, Andrew; *Ruler & Compass practical geometric constructions*, Wooden Books, England, 2009, p. 32.

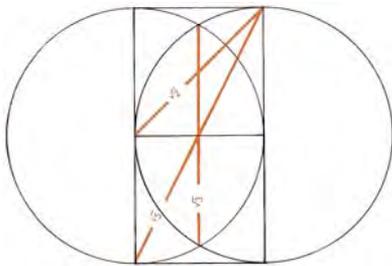


Figura 6. As raízes quadradas da Vesica Pisces. Fonte: Lawlor, Robert; *Sacred Geometry Philosophy & Practice*, Thames & Hudson, London, 2007, p. 37.

3. O PAPEL FEMININO E SAGRADO DA MANDORLA E DA VESICA PISCES

O autor Alick Bartholomew associa as figuras deste trabalho à “Mãe” ou ao “princípio feminino da geração da qual brotam todas as outras formas geométricas, triângulos, quadrados, polígonos, (...)” [8] Contudo, este carácter feminino não é exclusivo do mundo ocidental. A Mandorla relembra a forma de peixe e por isso foi batizada de Vesica Pisces no ocidente, mas tem por nome “Yoni” na Índia [9]. “Yoni” vem do sânscrito e tem vários significados [10]. São estes: “passagem divina”, “lugar de nascimento”, “fonte de vida”, “templo sagrado” e “órgão sexual feminino”. Atendendo ao manual de arquitetura hindu do séc. VI *Mānasāra Shilpa Shāstra*, a figura da Yoni era usada para projetar os lugares sagrados.

Traçar a Yoni no solo significa encontrar os eixos norte-sul e oeste-este, as direções do futuro templo [11].

Segundo o historiador Titus Burckhardt, tal figura era fundamental para criar na Terra a ordem celeste. “O esquema fundamental do templo resulta do processo de orientação que é um ritual, pois reconcilia a forma do santuário e do Universo, que é aqui a expressão da norma Divina [12]”.

Embora não haja certezas sobre a figura que era desenhada no solo no ocidente para elevar um edifício sagrado, sabe-se pelos textos herméticos que no Egito a ordem na terra era a projeção da ordem no céu. “Ignoras, ó Asclépio, que o Egito é a imagem do céu, ou melhor, que é a projeção aqui em baixo de toda a ordem das coisas celestiais? [13]”

Assim, o carácter gerador e ordenador das figuras deste trabalho não consistia em meros artifícios ou exercícios geométricos para os nossos antepassados, mas sim em autênticas ferramentas para a criação da ordem celeste na Terra. Segundo a cosmologia de Platão, que muito influenciou a Idade Média, um criador benigno concebeu o Universo através da aplicação de leis matemáticas que resultaram em harmonia [14]. O carácter sagrado dado à Geometria na Idade Média explica-se por esta associar Deus ao supremo geômetra, em referência ao Antigo Testamento: “dispusestes tudo com medida, quantidade e peso” [15], e à sustentação deste pensamento por Platão.

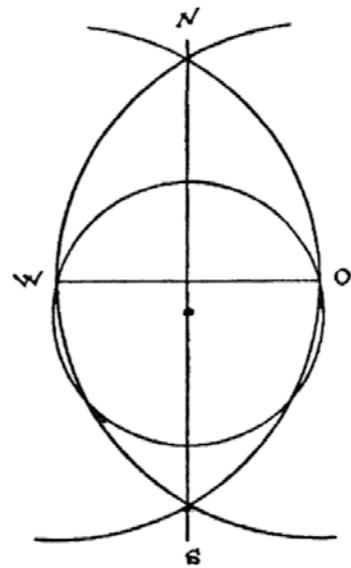


Figura 7. Mandorla hindu. Fonte: Burckhardt, Titus; *Principes et méthodes de l'art sacré*, Éditions Dervy, Paris, 2011, p. 31.

REFERÊNCIAS

- [1] Hall, James; *Dictionary of Subjects and Symbols in Art*, John Murray (publishers), England, 1992, p. 197.
- [2] Lawlor, Robert; *Sacred Geometry Philosophy & Practice*, Thames & Hudson, London, 2007, p. 34.
- [3] Peiffer, Jeanne; *Albrecht Dürer Géométrie*, présentation, traduction de l'allemand et notes par Jeanne Peiffer, Seuil, Paris, 1995, p. 209.
- [4] Wantzel, "Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas". *Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 2 (1837), p. 366-372.
- [5] Shelby, Lon R.; *Gothic Design Techniques The Fifteenth-Century Design Booklets of Mathes Roriczer and Hanns Schmuttermayer*, Southern Illinois University Press, U.S.A., 1977, p. 117.
- [6] Cfr. Shelby, Lon R; *Setting Out the Keystones of Pointed Arches: a Note on Medieval "Baugeometrie"*, Technology and Culture, Vol. X, Chicago, 1969, p. 534-548.
- [7] Graça, Cristina Carrilho da; Trindade, Maria Júlia; *Educação Visual 7.º, 8.º, 9.º anos – ciclo do ensino básico*, Lisboa Editora, Lisboa, 1995, p. 82.
- [8] Bartholomew, Alick; *Hidden Nature, The Startling Insights of Viktor Schauberg*, Floris Books, Poland, 2005, p. 64.
- [9] Critchlow, Keith; *Time Stands Still New Light on Megalithic Science*, (1979), Floris Books, Poland, 2007, p. 54.
- [10] Sanskrit dictionary, em <http://www.sanskritdictionary.com/?iencoding=iast&q=yoni&lang=sans&action=Search> Acesso em 7 de Fevereiro 2017.
- [11] Critchlow, Keith; Op. Cit., 2007, pp. 55-56.
- [12] Burckhardt, Titus; *Principes et méthodes de l'art sacré*, Éditions Dervy, Paris, 2011, p. 31.
- [13] Trismegistos, Hermes; *Livre II, Discours d'Initiation ou Asclépios*, Trad. Louis Ménard, Librairie Académique, Didier et Ce, Libraires-éditeurs, Paris, 1867.
- [14] Hiscock, Nigel; *The Symbol at Your Door: Number and Geometry in Religious Architecture of the Greek and Latin Middle Ages*, Ashgate, Grã-Bretanha, 2007, p.12.
- [15] Livro da Sabedoria 11:20

SOBRE O AUTOR

Filipe Alberto da Silva é Mestre em Desenho pela Faculdade de Belas-Artes da Universidade de Lisboa, investigador integrado na Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias na área de Ciência das Religiões e Doutorando em História de Arte pela Faculdade de Ciências Sociais e Humanas da Universidade Nova de Lisboa.

WORKSHOP MATEMÁTICA E ARTE

UNIVERSIDADE
DE ÉVORA

17 e 18 JULHO 2017 | COLÉGIO LUÍS ANTÓNIO VERNEY

π

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
DELEGACÃO REGIONAL DO SUL E ILHAS



UNIVERSIDADE
DE ÉVORA



UNIVERSIDADE DE ÉVORA
ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CIMA

FCT

Fundação para a Ciência e a Tecnologia



Governo da República
Portuguesa

contactos

<http://spmsul.uevora.pt/workshop>
spmsul@uevora.pt



AMÍLCAR
BRANQUINHO
Universidade de
Coimbra
ajplb@mat.uc.pt

ARQUIMEDES, UMA MENTE BRILHANTE

Caro leitor, vamos ver como alguns modelos e princípios devidos a Arquimedes estão na base da teoria matemática que se conhece hoje como Cálculo Integral.

A matemática pode ser vista como uma ciência utilitária; para tal basta analisar os programas de estudo dos cursos de qualquer Faculdade de Ciências, que incluem disciplinas de Cálculo, Álgebra, Estatística ou Matemáticas Gerais. De uma forma geral estas disciplinas tratam temas de matemática de maneira clássica sem relação com o curso a que estão destinadas, o que pode constituir um problema. Acresce ainda que, para os alunos de uma licenciatura em Matemática, é importante ver como se intuem fórmulas de Física sem ter o *porto seguro* de axiomas, definições e rigor.

A motivação ao escrever este texto é dupla: por um lado pretendemos levar os alunos a contemplar alguns temas de divulgação que dentro de algum tempo formarão parte dos seus estudos universitários e, por outro, queremos ajudar a difícil tarefa de incluir, nos estudos de matemática, temas de Física, despertando no aluno o gosto pela análise abstrata destes temas. Isto pode contribuir para o desenvolvimento nos estudantes de capacidades dedutivas e de uma postura de investigador fundamental ao seu processo de crescimento. Devemos lembrar-nos de que foi pela admiração que o Homem começou a filosofar.

UM POUCO DE HISTÓRIA. Pode dizer-se que, de entre as descobertas que Arquimedes fez, a de que mais se or-

gulhava era do cálculo do volume de uma esfera. Demonstrou, de uma forma bastante original, que

o volume de uma esfera é igual a dois terços do volume do cilindro que a circunscreve.

Ficou de tal forma maravilhado com esta descoberta que, como recordação da melhor das suas ideias, mandou gravar na sua pedra tumular a figura 1. Quando Cícero foi nomeado questor na Sicília (75 a.C.), descobriu o túmulo de Arquimedes, graças à inscrição que este tinha mandado gravar no seu túmulo e que os seus conterrâneos de

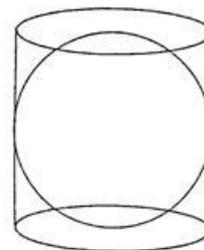


Figura 1. Símbolo de Arquimedes.

Siracusa tinham perdido de vista. Cícero restaurou-a, para mais tarde voltar a perder-se. Recentemente encontraram-se dois túmulos que disputam a autenticidade...

IDEIA DA DEMONSTRAÇÃO. Arquimedes imaginou uma semiesfera e junto dela um cilindro circular reto e um cone circular reto, ambos de base igual à do círculo máximo da semiesfera, mais ou menos como indicado na figura 2. Arquimedes cortou as três figuras por um plano paralelo à base do cilindro e do cone, perguntando-se como seriam as secções determinadas por este plano no cilindro, na semiesfera e no cone. Determinemos a área das regiões indicadas na figura 2.

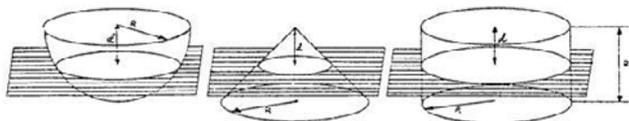


Figura 2. Método de Arquimedes.

No cilindro, é evidente, pois trata-se de um círculo de raio R . Na esfera, também se tem um círculo, mas o seu raio depende da altura do corte, d . Olhando melhor para a figura 2 e tendo em conta o teorema de Pitágoras, facilmente se pode escrever, considerando o raio da secção igual a r , que $r^2 + d^2 = R^2$. Já no cone, a secção também será um círculo e agora o raio é ainda mais fácil de determinar; como a sua abertura é de 45° , $r = d$, i.e., a secção do cilindro coincide com a secção da semiesfera adicionada da secção do cone, pelo que o volume do cilindro é igual à soma dos volumes da semiesfera e do cone (cf. figura 3).

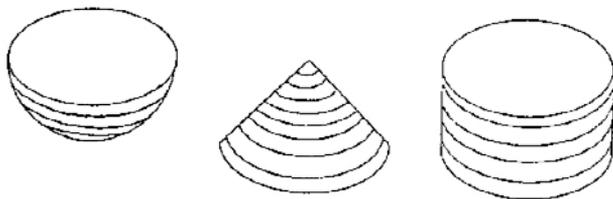


Figura 3. Secções cilíndricas.

Assim,

$$\pi R^3 = \text{Volume da semiesfera} + \pi R^3/3,$$

pois Arquimedes sabia que os volumes do cilindro e do cone são, respetivamente, πR^3 e $\pi R^3/3$; logo, obtemos que o volume da semiesfera é $2\pi R^3/3$, c.q.d.

Esta demonstração pode ser encontrada em textos de matemática elementar, como o de Miguel de Guzmán, "Experimentos de Geometria".

Com este resultado, Arquimedes avançou para a determinação da área da superfície de uma esfera de raio R . Con-

siderou a esfera composta por *muitas* pirâmides de vértice no centro da esfera e base de área muito *pequena* , S , sobre a esfera. Para ter uma ideia do que pode valer a área de superfície esférica, considerou que o volume da esfera é, como acabámos de ver, $4\pi R^3/3$ e que o volume de cada pirâmide é $RS/3$ (pois a altura de cada pirâmide é R). Somando o volume de todas as pirâmides e colocando em evidência $R/3$, obtemos:

o volume da esfera é igual à área de superfície da esfera multiplicada por $R/3$.

Logo, a área de superfície da esfera de raio R é igual a $4\pi R^2$.

EXPERIÊNCIA. Propomo-nos comprovar por experimentação o princípio de Arquimedes, ao mesmo tempo que mostramos uma *relação* entre integrais de volume e de superfície. Vamos utilizar uma bola de borracha, um copo de água, uma régua, um cordel, uma caneta de feltro, uma balança e um nónio (cf. "Cálculo Diferencial e Integral", de Fernando Chamizo).

Coloquemos a bola numa tina com água e marquemos a linha de flutuação com a caneta de feltro (para efetuar esta operação convém segurar a bola com a mão sem a afundar e marcar somente alguns pontos por forma a completar a linha com a bola fora da água e munidos de um canudo de papel).

No paralelo determinado pela linha de flutuação (que é a circunferência traçada), marquemos dois pontos diametralmente opostos. Para tal, podemos simplesmente estender o cordel sobre a circunferência, desenrolá-lo, marcar o ponto médio e voltar a enrolar à volta da bola como mostra a figura 4. Entre estes dois pontos, estique-

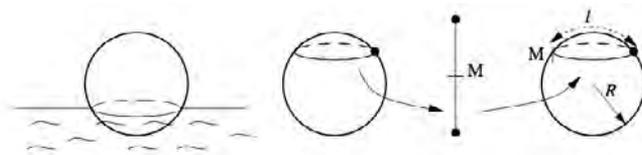


Figura 4. Descrição da experiência.

mos o cordel de forma a descrever um arco de meridiano para que possamos medi-lo. A partir do comprimento do meridiano, determinamos o raio da bola (recorde-se que, em radianos, o ângulo ao centro é dado pelo quociente entre o comprimento do arco e o raio da circunferência). Com o nónio é trivial este cálculo!

Escolhendo uma bola de borracha um pouco mais pequena do que uma bola de ténis, os valores encontrados para o comprimento do arco, ℓ , e do raio da bola, R , foram de $\ell = 8.9$ cm e $R = 2.8$ cm. Aplicando a fórmula

$$\frac{\pi R^3}{3} \left(2 - 3 \cos(\ell/(2R)) + \cos^3(\ell/(2R)) \right), \quad (1)$$

com ℓ e R em centímetros (com os dados citados anteriormente, obtemos 47.25), podemos verificar que este resultado está muito próximo do peso real da bola (considerado em gramas). Basta para tal usar uma balança de cozinha (no nosso caso, a bola pesa aproximadamente 45 gr). Assim, a partir da observação de como uma bola flutua podemos saber quanto é que ela pesa.

EXPLICAÇÃO. O que está na base da experiência anterior é o *princípio de Arquimedes*:

todo o corpo mergulhado num líquido está sujeito a uma força de direção vertical, de sentido de baixo para cima, e cuja grandeza é igual ao peso do volume de líquido deslocado.

Como o impulso deve compensar o peso da bola e o líquido deslocado, que neste caso é a água, cuja massa e o volume coincidem, basta verificar que a fórmula (1) dá o volume da parte submersa da bola (cf. figura 5). Para determinar a massa da bola, integramos a função indicatriz da região correspondente, T , que em coordenadas esféricas $X(\phi, \theta, \rho) = (\rho \cos \phi \sin \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \theta)$ se descreve (considerando a origem do referencial no centro da bola) como

$$(\phi, \theta, \rho) \in [0, 2\pi] \times [\pi - \theta_0, \pi] \times [R_0, R],$$

com $R_0 = -R \cos \theta_0 / \cos \theta$ e $\theta_0 = \ell/(2R)$, i.e.

$$\int_T 1 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi-\theta_0}^{\pi} d\theta \int_{R_0}^R |J_X| d\rho,$$

onde $|J_X| = \rho^2 \sin \theta$, que coincide com (1).

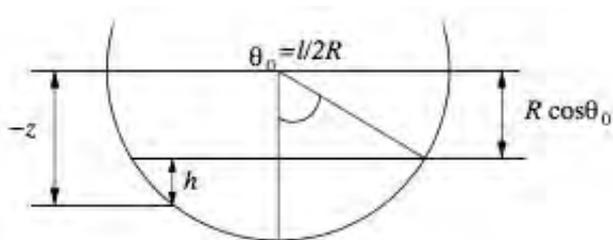


Figura 5. Leitura em coordenadas esféricas.

Acabámos de ver como o princípio de Arquimedes permite calcular a massa por meio de um integral de volume. Agora, usando a noção de *pressão*, veremos como determinar a massa da bola mediante um integral de superfície.

Chegados aqui, podemos perguntar-nos se existe uma relação geral entre estes dois integrais? A resposta afirmativa é dada pelo teorema de Gauss ou da divergência.

O que faremos é utilizar as ideias básicas previamente apresentadas, concetualmente mas não historicamente, no princípio de Arquimedes, que nos levarão a expressar o impulso como um integral de superfície.

Imaginemos um *quadrado* infinitesimal de área A paralelo à superfície da água e situado a uma profundidade h . O peso da água por cima desse quadrado será $m g = A h g$ (considerando a densidade unitária, temos que a massa coincide com o volume que, por isso, vale $A h$). Se pudéssemos retirar repentinamente essa coluna de água, por ação e reação, a água que está por baixo saltaria para cima com uma força $A h g$. Assim, a uma profundidade h há uma força por unidade de superfície dada por $P = (0, 0, h g)$.

Normalmente, esta força é compensada pelo peso da água que está por cima, que na nossa experiência é o peso da bola. Vale a pena notar que P atua sobre uma superfície curva onde a profundidade e a direção onde se aplica a força vai mudando de ponto para ponto. Por isso, a força total é dada pelo integral de P na superfície submersa, S , fronteira de T , e deve estar compensada pelo peso $m g$ da bola. Em conclusão, considerada a superfície, S , com a orientação usual temos

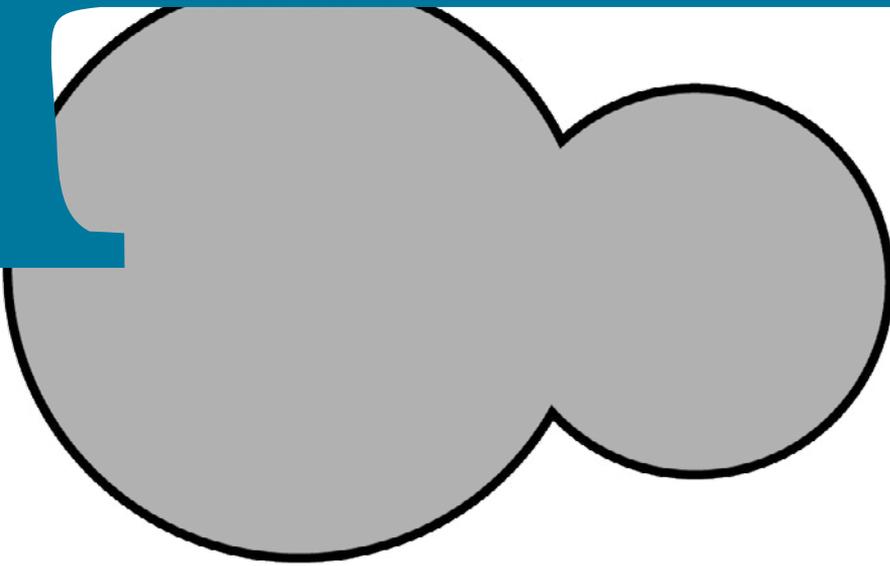
$$m g + \int_S P = 0. \quad (2)$$

Para calcular o integral, convém parametrizar a superfície, S , usando coordenadas esféricas, i.e. S é descrita por $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $\pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi$ e $\rho = R$. Pode ver-se que o vetor normal, N , a S é dado por $N = R \sin \theta X(\phi, \theta, R)$ e que a profundidade do ponto (x, y, z) sobre a superfície esférica é $h = -z - R \cos \theta_0 = -R (\cos \theta + \cos \theta_0)$ (como mostra a figura 5).

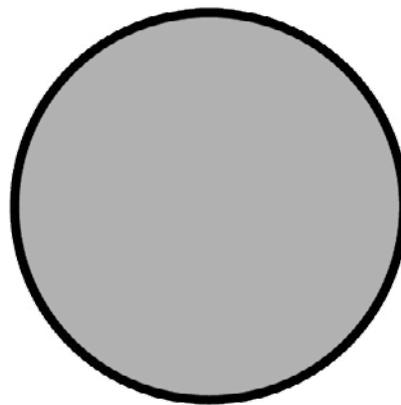
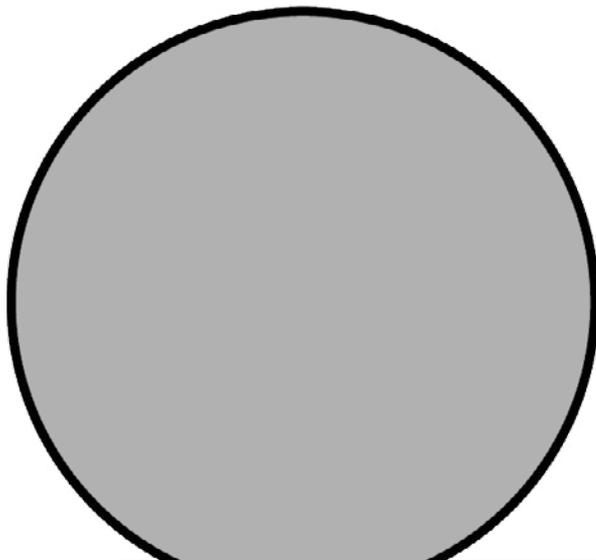
Assim, (2) leva-nos ao integral

$$m = R^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi-\theta_0}^{\pi} (\cos \theta + \cos \theta_0) \times \sin \theta \cos \theta d\theta$$

que coincide uma vez mais com (1).



O conjunto dos números reais é conexo, uma propriedade topológica que formaliza o conceito de ser formado por “uma só peça”. Apresentamos uma demonstração deste facto usando uma construção de Bolzano-Weierstrass, que apela à intuição geométrica, e que nos é familiar das demonstrações de \mathbb{R} ser compacto.



UMA DEMONSTRAÇÃO DO TIPO BOLZANO–WEIERSTRASS DE QUE QUALQUER INTERVALO EM \mathbb{R} É CONEXO

SAGAR PRATAPSI

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA, UNIVERSIDADE DE COIMBRA
sagar.dipak@gmail.com

A noção de conjunto conexo é da maior importância em Matemática, ocupando um lugar central, por exemplo, em muitas questões da Análise, incluindo Análise Complexa. Esta noção pretende formalizar a intuição de um conjunto ser formado por uma só “peça”, por oposição a duas ou mais peças separadas, como ilustram os exemplos da Figura 1.

A definição aparece habitualmente quando se estuda Topologia, porque se consegue apresentar usando o conceito primitivo de conjunto aberto. Depois de apresentada a definição exata, surge naturalmente o problema de determinar quais são os conjuntos conexos em \mathbb{R} , o mais importante e básico dos espaços topológicos, com os conjuntos abertos habituais (cuja definição recordamos a seguir). A intuição diz-nos que deverão ser os intervalos, os subconjuntos dos reais que não têm “buracos”. Mas em Matemática, e em especial neste tipo de questões fundamentais, a intuição não chega, sendo necessário definir os conceitos e provar as afirmações com todo o rigor.

O propósito desta nota é precisamente apresentar uma nova demonstração para esse resultado clássico, que em \mathbb{R} os conjuntos conexos são os intervalos.

Para tal, vamos utilizar uma construção do tipo Bolzano–Weierstrass, ou bissecção de intervalos, que é a técnica habitualmente usada para mostrar que, em \mathbb{R} , os conjuntos compactos são os fechados e limitados. A construção consiste em dividir o conjunto de interesse em metades sucessivas, mantendo aquelas que têm a propriedade desejada, até se atingir um ponto limite. Neste limite, chega-se a uma contradição e prova-se o pretendido. Esta construção parece ter sido usada originalmente por Bolzano para provar o Teorema do Valor Intermédio [1]. A prova original encontra-se traduzida em inglês em [2].

Começamos por definir os intervalos em \mathbb{R} .

Definição. Um conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo se, quaisquer que sejam $x, y \in I$, se $z \in \mathbb{R}$ for tal que $x < z < y$, então $z \in I$.

Assim, como é habitual, os intervalos são os conjuntos da forma $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ e $]a, b]$ e também os conjuntos que se estendem indefinidamente como $] - \infty, a[$, $] - \infty, a]$, $[a, +\infty[$, $[a, +\infty]$ e o próprio \mathbb{R} .

Como já referimos, sendo a conectividade um conceito topológico, é necessário definir os conjuntos abertos de \mathbb{R} .

Definição. Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se aberto se, para todo $x \in A$, existir um $\epsilon > 0$ tal que o intervalo $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ está contido em A .

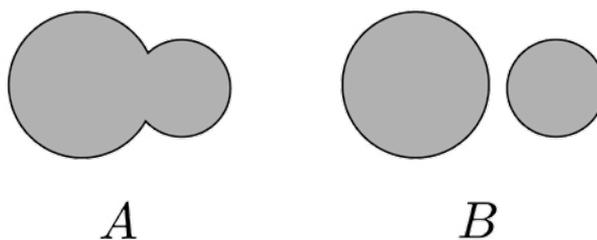


Figura 1. Exemplo de um conjunto conexo (A) e de um conjunto desconexo (B) em \mathbb{R}^2 .

Definimos agora a conectividade em \mathbb{R} .

Definição. Dado $X \subseteq \mathbb{R}$, dois conjuntos abertos $A, B \subset \mathbb{R}$ dizem-se uma desconexão de X se:

1. $X \cap A$ e $X \cap B$ forem disjuntos e não-vazios;
2. $X \subseteq A \cup B$.

Definição. Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é conexo se não existir nenhuma desconexão de X . Caso contrário, diz-se que é desconexo.

Vamos então mostrar que os intervalos em \mathbb{R} são conexos. A implicação recíproca, que os conjuntos conexos são intervalos, é um resultado de demonstração muito simples.

Teorema. Os intervalos em \mathbb{R} são conexos.

Demonstração. Vamos demonstrar o resultado por redução ao absurdo. Suponhamos que $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo e que I é desconexo, sendo A, B uma desconexão de I . Para simplificar a notação, definimos $A' = I \cap A$ e $B' = I \cap B$. Como estes conjuntos são não-vazios, escolhemos dois elementos $a_0 \in A'$ e $b_0 \in B'$. Assumimos, sem perda de generalidade, que $a_0 < b_0$ (caso contrário, alteramos os nomes de A e B). Consideremos agora o intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$ e tomemos o seu ponto médio $x_0 = (a_0 + b_0)/2$. Sendo I um intervalo, temos $x_0 \in I = A' \cup B'$, pelo que x_0 deve pertencer a A' ou a B' , mas não a ambos, porque estes conjuntos são disjuntos.

Definimos agora o intervalo I_1 da seguinte maneira:

$$I_1 = [a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, x_0], & \text{se } x_0 \in B' \\ [x_0, b_0], & \text{se } x_0 \in A'. \end{cases}$$

Por construção, $a_1 \in A'$ e $b_1 \in B'$. Além disso, $I_1 \subset I_0$ e $|a_1 - b_1| = 1/2|a_0 - b_0|$.

Construímos sucessivamente uma família de intervalos de forma análoga, fazendo $x_n = (a_n + b_n)/2$ e definindo os intervalos

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, x_n], & \text{se } x_n \in B' \\ [x_n, b_n], & \text{se } x_n \in A' \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tal como anteriormente, os conjuntos I_n intersectam A' e B' . Temos também a cadeia de inclusões $I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ e sabemos que $|a_n - b_n| = (1/2)^n |a_0 - b_0|$. Como \mathbb{R} é completo, esta sequência converge para um conjunto $\{c\}$, ou seja,

$$\exists c \in \mathbb{R} : \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{c\}.$$

Como $c \in I$, c deve pertencer ou a A' ou a B' . Suponhamos que $c \in A'$ (o raciocínio é análogo se $c \in B'$). Como A é um conjunto aberto e $c \in A$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $]c - \epsilon, c + \epsilon[\subseteq A$. Também existe um intervalo I_n totalmente contido em $]c - \epsilon, c + \epsilon[$ (o n tem de ser tal que $|a_n - b_n| < \epsilon$, o que é sempre possível encontrar). Então, I_n está totalmente contido em $A' = I \cap A$. Mas isto é absurdo, porque I_n também contém b_n , que está em B' e não em A' . Logo, a nossa suposição inicial era falsa, e I é conexo. \square

Apesar de não ser relevante na demonstração, é interessante notar que os conjuntos A e B seriam uma desconexão de todos os I_n , e não só de I (basta mostrar que A e B obedecem aos critérios da definição de desconexão). Neste sentido, os conjuntos I_n “herdam” de I a propriedade de serem desconexos. Este facto está em analogia direta com as provas de compacidade. Nestas, assumimos que o conjunto original X não é compacto e construímos uma sucessão de intervalos que partilham essa propriedade.

A demonstração habitual de que \mathbb{R} (ou um intervalo de \mathbb{R}) é conexo não utiliza a bissecção de intervalos. A construção, nesse caso, utiliza o supremo do conjunto $[a_0, b_0] \cap A$. A existência deste supremo, tal como a existência do conjunto-limite $\{c\}$ desta prova, é uma consequência de \mathbb{R} ser completo, pelo que parece ser este o facto crucial, independentemente da forma de completude que usamos.

De facto, de acordo com [3], é conhecida a equivalência entre

- ▶ conectividade;
- ▶ existência de supremos para intervalos limitados superiormente;
- ▶ convergência de sequências de intervalos (cada um contido no anterior).

(Em rigor, para ter equivalência, é preciso juntar a propriedade arquimediana a esta última).

Esta pequena nota foi escrita com a convicção de, apesar de se conhecer a equivalência, não se ter ainda escrito a demonstração explicitamente. A ideia surgiu enquanto frequentava a disciplina de Topologia e Análise Linear do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

REFERÊNCIAS

- [1] Raman-Sundström, M. (2015). “A Pedagogical History of Compactness”. *The American Mathematical Monthly*, 122(7), 619-635.
- [2] Russ, S. B. (1980). *A translation of Bolzano’s paper on the intermediate value theorem*. *Historia Mathematica*, 7(2), 156-185.
- [3] Holger Teismann. (2013). “Toward a More Complete List of Completeness Axioms”. *The American Mathematical Monthly*, 120(2), 99-114.

SOBRE O AUTOR

Sagar Pratapsi é estudante de Mestrado em Física (ramo de Física Nuclear e de Partículas) da Universidade de Coimbra, tem um forte gosto pela matemática, tendo já participado nalguns projetos, nomeadamente Novos Talentos em Matemática da Fundação Calouste Gulbenkian.



FABIO CHALUB
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

O POVO É QUEM MAIS ORDENA?

Em democracia, ganha quem tem mais votos numa eleição, certo? Nem sempre. Como mostrou a eleição de Donald Trump para Presidente dos EUA – ingerências estrangeiras à parte –, o resultado de uma eleição é tão determinado pelas regras eleitorais quanto pelos votos. Vamos neste artigo analisar o funcionamento do sistema eleitoral americano de um ponto de vista estritamente matemático.

O Colégio Eleitoral é parte central do mecanismo utilizado nos Estados Unidos para escolher o seu Presidente. Genericamente considerado um anacronismo, foi desenhado no século XVIII. Quando pensamos nele, a primeira ideia que vem na mente é o conceito de que o vencedor em cada Estado leva todos os votos do mesmo, distorcendo a proporcionalidade entre causa (o voto popular) e efeito (o comportamento dos "eleitores", ou seja, as pessoas encarregadas em cada Estado de indicar o próximo Presidente). Isto explica em parte a possibilidade de alguém ser eleito sem ter o maior número de votos da população, – o que ocorreu agora, mas não pela primeira vez; foi também o caso em 1824, 1876, 1888 e 2000. É possível ganhar por grande diferença em diversos Estados e perder por pouco em outros tantos. Se estes tiverem maior representação no colégio eleitoral do que aqueles, então a derrota é certa.

No entanto, esta característica que salta aos olhos e parece ser a maior fonte de injustiça do sistema não está na lei federal (nacional). De facto, o Nebraska e o Maine não seguem esta regra, fazendo uma divisão dos votos que dá maior proporcionalidade entre a opinião da população e os votos finais do Estado. O que vamos discutir neste artigo é o porquê da regra de "o vencedor leva tudo", vantagens e desvantagens deste método e o que está a ser feito para o alterar, sempre de um ponto de

vista estritamente matemático. Muita informação sobre o funcionamento deste sistema pode ser obtida em [1].

Vamos inicialmente perceber que há que pensar de forma separada três características do sistema americano:

- 1) A existência do colégio eleitoral: ou seja, a ideia de que o presidente é eleito por um número diminuto de representantes – os "eleitores" – de cada jurisdição – 50 Estados e o Distrito de Colúmbia (DC) – e não pela população;
- 2) O número de representantes que cada jurisdição é autorizada a ter;
- 3) Como cada jurisdição escolhe seus representantes.

O terceiro ponto será o mais interessante para a análise matemática; falemos, inicialmente, no entanto, dos outros dois. Para simplificar a vida, usaremos "Estado" a partir de agora, supondo o DC aí incluído.

Na essência, o que está por trás do primeiro ponto é o "federalismo". Os EUA foram fundados mais como um conjunto de colónias que se uniram do que como uma entidade única. De facto, o próprio nome representa esta ideia. Assim, o facto de que o Presidente resulta de um acordo, de uma forma ou de outra, entre Estados não é assim tão estranho. Poderia ser eleito numa assembleia conjunta de deputados e senadores, mas duas

ideias limitaram esta abordagem. Em primeiro lugar, os EUA deviam ser um compromisso entre uma reunião de Estados e uma democracia popular, ambos muito receosos da concentração de poder no governo federal. A outra ideia, mais negativa, é a de que os anos e anos de convivência entre os parlamentares poderiam ser campo fértil para interesses escusos. Assim, um conjunto de pessoas diretamente e especialmente indicadas pelos Estados estaria em melhores condições para tomar tão crítica decisão. A Constituição norte-americana explicitamente proíbe deputados e senadores de acumularem esta função.

E quantas pessoas seriam? Ora, se o colégio eleitoral substitui o parlamento, nada mais natural do que o número de eleitores de cada Estado igualar a soma de deputados e senadores. Para a capital - que não possui representação parlamentar - o número de eleitores é estabelecido *como se esta fosse um Estado*. O número de eleitores será uma função crescente da população mais 2. Note que o que interessa nesta fórmula é a população, que não se altera com maior ou menor participação eleitoral.

A fórmula acima sobredimensiona a importância dos pequenos Estados, normalmente republicanos. Apesar de Clinton ter ganhado no voto popular, conta do *site* [3] indica que, mesmo se cada Estado dividisse os seus eleitores proporcionalmente ao número de votos, Donald Trump teria mais representantes no Colégio Eleitoral. Veja a figura 1 para uma comparação do efeito dos diversos métodos de votos no resultado eleitoral.

Agora vem a questão central: como devem os Estados escolher estes eleitores? Para começar, a Constituição é omissa neste ponto, de forma a afastar qualquer suspeita de que o governo central poderia querer comandar, à distância, este processo. Os deputados são escolhidos a partir do fracionamento de cada Estado em *distritos*: cada uma destas partes elege os seus representantes na câmara baixa a partir da maioria simples. No entanto, na câmara alta, os eleitos resultam da maioria dos votos do Estado inteiro. O Nebraska e o Maine reproduzem este sistema: quem tem a maioria em cada um dos distritos (3 e 2, respetivamente) indica um dos eleitores; quem tem a maioria no estado indica os dois restantes. Isto pode levar a situações peculiares, pois quem vence no Estado inteiro pode não ter vencido em nenhum dos distritos, fazendo com que o comportamento dos eleitores destes dois Estados seja disperso em vários candidatos.

De facto, qualquer forma eleitoral que não seja do mo-

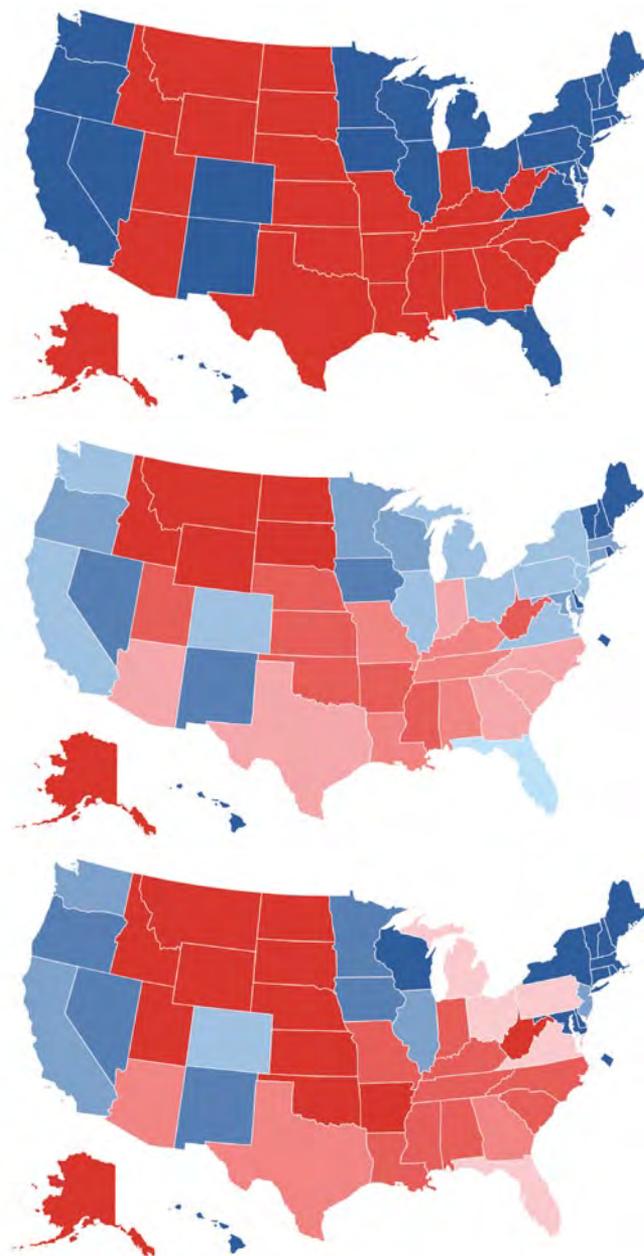


Figura 1. Comparação do resultado eleitoral de 2012 (vencido por Barack Obama) Estado a Estado. Na figura de cima, seguimos a legislação corrente e o Estado é todo de uma só cor (com duas exceções), dependendo do seu vencedor. Na figura do meio, todos os Estados adotam a divisão de votos seguida pelo Nebraska e pelo Maine, como discutido no texto. Em baixo, uma distribuição proporcional dos votos, com retirada final de 50 votos de Obama. A intensidade das cores indica o resultado do Estado. Em 2016, todos estes métodos dariam mais eleitores a Donald Trump, sendo que em alguns casos nenhum candidato obteria a maioria absoluta do colégio eleitoral. **Fonte:** <http://www.270towin.com>.

delo o vencedor leva tudo pode – e provavelmente vai – levar à dispersão dos votos. A questão é que isto faz com que o interesse dos candidatos em vencer naquele Estado diminua – e juntamente diminuam as promessas que interessam aos eleitores locais. Vamos exemplificar: imagine um Estado com dez votos no colégio eleitoral cujas sondagens indiquem um quase empate entre os dois principais candidatos. Numa distribuição proporcional, cada um terá cinco votos. Com um grande esforço talvez algum candidato amealhe seis ou sete eleitores. Agora imagine um outro Estado, muito menor, com apenas cinco votos, mas que atribua todos ao vencedor. As sondagens também indicam uma disputa renhida. Onde colocaria o leitor o seu esforço: tempo, dinheiro? A que Estado seriam feitas maiores promessas: mais investimento federal, uma nova infraestrutura, ou o que seja capaz de cativar o público local (poder ir às aulas carregando armas, por exemplo)? Parece natural que o menor Estado soube tornar-se mais apetecível aos candidatos, e há de colher os louros.

Desta forma, o que cada um destes faz é aumentar a sua relevância ao colocar todos os seus votos em disputa – e não apenas os eleitores na proporção do que conhecemos como "não sabe/não responde". Na verdade, o que cada uma das entidades está a fazer é atuar *racionalmente*, ou seja, maximizando seu próprio interesse. Curiosamente, os Estados que oscilam entre partidos eleição a eleição recebem em média mais 7% de investimento federal *per capita* do que os que são considerados seguros para um partido, independentemente de sua cor. Veja a figura 2 para uma ilustração da atenção dedicada pelos principais partidos a cada Estado.

Olhando para o sistema que cada Estado utiliza na seleção dos seus eleitores vemos que, na verdade, estes não são agentes racionais, mas atuam de acordo com o que é conhecido como "dinâmica de imitação": a cada eleição, os intervenientes analisam tudo o que aconteceu, veem os bem-sucedidos e imitam a sua estratégia. Assim, de dois Estados com distribuição *at large* (o vencedor leva tudo) contra dois com distribuição de acordo com os distritos em 1789 (outros Estados escolhiam os seus eleitores por iniciativa legislativa), temos oito *at large* contra seis distritais em 1820, para todos menos um colocando todos os votos em disputa no ano de 1832, uma situação que permanece similar até hoje.

No entanto, a dinâmica de imitação (assim como muitas outras dinâmicas) leva ao equilíbrio de Nash, aquele que seria obtido por agentes racionais.

Termos os vários agentes atuando de acordo com os

seus interesses imediatos pode levar a uma situação que todos concordam que é ruim. Em teoria de jogos, isto é conhecido como "o dilema do prisioneiro".

O dilema do prisioneiro foi criado como uma crítica ao típico raciocínio da teoria de jogos. Ou seja, mostrava como o exercício do autointeresse poderia levar a um resultado consensualmente mau. No entanto, é isto que acontece em diversas situações: quando enfrentamos um engarrafamento de 30 minutos ao sol para uma leve espreitadela a um acidente ocorrido na outra faixa! Cada um concordaria que seria melhor manter os olhos voltados para a frente e não termos de torrar lentamente; mas não é isto que ocorre. Após o engarrafamento é que somos *convidados* a olhar ou não. A decisão individual de um breve desviar de rosto é que causa o inconveniente geral.

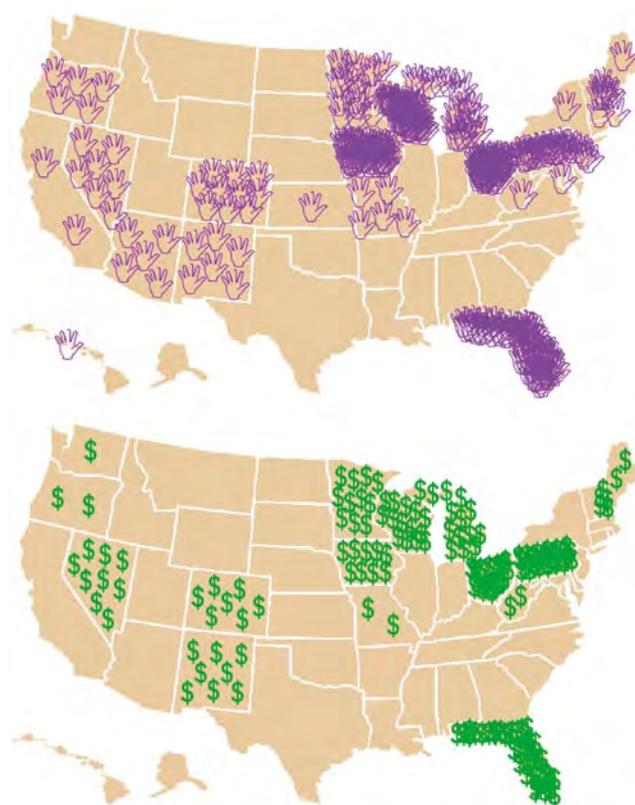


Figura 2. Gráfico que mostra a atenção dispensada pelos dois principais candidatos e seus vice-presidentes nas eleições presidenciais de 2004 nas cinco últimas semanas de campanha. Acima: o número de visitas dos candidatos a Presidente e vice-presidentes. Cada mão indica uma visita. Abaixo: o investimento financeiro em propaganda televisiva. Cada \$ indica um milhão de dólares investidos. Mesmo Estados com muitos votos, como a Califórnia, são ignorados pelos candidatos na reta final. **Fonte:** Wikimedia Commons.

Qualquer um que esteja insatisfeito com a derrota do mais votado tem de lidar com uma das duas possíveis soluções: ou uma alteração das regras do jogo, vinda de cima para baixo, ou então um acordo entre as entidades relevantes, ou seja, os Estados.

Na primeira solução, já foi aprovada na câmara baixa em 1969 a emenda Bayh–Celler [2], que propõe nomear vitorioso quem tiver mais votos populares. A *house* representa o povo; o senado representa os Estados. Sem surpresa, a emenda parou por aí. De qualquer forma, teria de ser posteriormente ratificada por 38 Estados.

O segundo caso envolve uma coordenação entre os Estados que pode ignorar as subtilezas do colégio eleitoral, sem, no entanto, o alterar. Estados representando 165 votos eleitorais já assinaram e ratificaram em suas casas legislativas a iniciativa *National Popular Vote* [4], que garante que o colégio eleitoral deste Estado será atribuído a quem tiver ganhado o voto popular em todo o território norte-americano, independentemente de quem tiver ganhado naquele Estado. No entanto, só entrará em vigor quando os integrantes deste tratado garantirem a maioria do colégio eleitoral, o que ainda não ocorreu.

Toda a análise acima reproduz num exemplo especial e muito importante uma área clássica da matemática: a teoria dos jogos, com os seus estudos sobre cooperação entre agentes racionais, e também a formulação dinâmica. Fazer agentes egoístas cooperarem é um dos grandes assuntos de investigação corrente, seja em economia, em biologia, e, como vemos, em política.

REFERÊNCIAS

[1] <https://www.archives.gov/federal-register/electoral-college/faq.html>

[2] [https://en.wikipedia.org/wiki/Electoral_College_\(United_States\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Electoral_College_(United_States))

[3] <http://www.270towin.com/>

[4] <http://www.nationalpopularvote.com/>



Visite o site da
Gazeta de Matemática.

www.gazeta.spm.pt

Para aceder à área reservada a assinantes, solicite o seu código de subscrição através do e-mail gazeta@spm.pt



PAULA AMARAL
Universidade de
Lisboa
[pt-maths-in@
spm.pt](mailto:pt-maths-in@spm.pt)

MATEMÁTICA INDUSTRIAL EM REDE

Estreamos, neste número da *Gazeta de Matemática*, uma rubrica que será dedicada à PT-MATHS-IN, a Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação. Assim sendo, nas próximas edições, este espaço será preenchido com notícias relacionadas, direta ou indiretamente, com a atividade desta organização, formalmente constituída como uma nova secção da SPM, dedicada ao desenvolvimento e à promoção da Matemática Industrial.



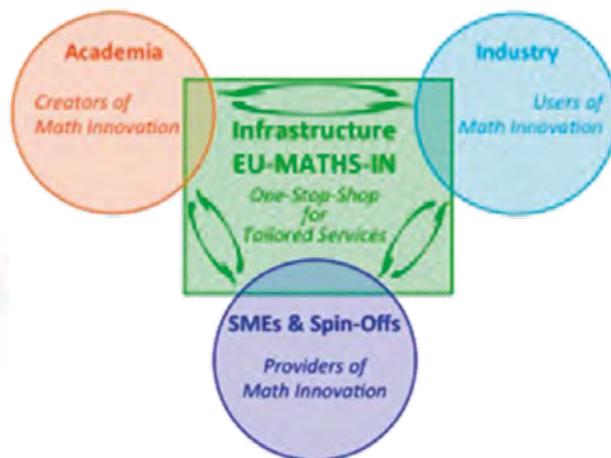
Como primeiro artigo desta secção, achámos conveniente contextualizar a criação desta organização em Portugal, falar da sua inserção na Rede Europeia de Matemática para a Indústria (EU-MATHS-IN), mostrar algumas atividades da rede espanhola e abrir uma cortina para a nossa próxima iniciativa.

A PT-MATHS-IN é, desde dezembro de 2015, o núcleo português da *European Service Network of Mathematics for Industry and Innovation* a EU-MATHS-IN. O propósito da PT-MATHS-IN é mais bem compreendido à luz da organização que lhe está na génese e que representa, no contexto europeu, o dinamizador da Matemática Industrial.

A REDE DAS REDES NA EUROPA: A EU-MATHS-IN

A EU-MATHS-IN foi criada em Amesterdão a 27 de novembro de 2013 com o apoio da EMS (*European Mathematical Society*) e do ECMI (*European Consortium for Mathematics in Industry*). Estruturada como uma rede europeia de redes nacionais, de seis países fundadores passou, em menos de três anos, a 14, prevendo-se que continue a crescer a curto prazo. Cada uma destas organizações agrega, por seu turno um conjunto de centros nacionais de I&D, na sua maior parte associados a instituições de ensino superior e com méritos comprovados no que respeita à qualidade da investigação científica produzida. É precisamente esta topologia, de “rede de redes”, que confere à EU-MATHS-IN um poder de ação dinâmico e abrangente mas também robusto, com uma capacidade de intervenção à escala europeia, por isso, superior ao conjunto das partes que congrega.

A EU-MATHS-IN, mais do que uma nova instituição para o desenvolvimento da matemática, representa um propósito de dinamização de um potencial científico já existente, permitindo a consolidação da transferência de tecnologia em torno de um projeto comum, a Matemática Industrial. Se analisarmos o primeiro ano de atividade da EU-MATHS-IN, deparamo-nos com uma série de iniciativas fundamentais para o desenvolvimento da Matemática Industrial, como sejam: o lançamento de um portal europeu de emprego científico na academia e na indústria; o desen-



volvimento de contactos com outras organizações científicas, como a SIAM e a ENBIS (*European Network for Business and Industrial Statistics*) com vista ao estabelecimento de parcerias; a submissão, com sucesso, de um projeto COST (*Modeling, Simulation, Optimization and Control of Large Infrastructure Networks*). No entanto, o que nos parece merecer maior destaque são os esforços para reforçar a consciencialização dos grupos de decisores, com maior intervenção ao nível do financiamento de projetos europeus, para a importância da Matemática Industrial como uma mais-valia na vitalização do setor industrial. Nesse sentido, merece realce o desenvolvimento de uma campanha proativa, em conjunto com a ECMI e a EMS, para estabelecer a Modelação, a Simulação e a Optimização Matemática (MSO) como uma FET (*Future Emerging Technology*) no contexto do programa Horizonte 2020. Motivadas por esta campanha seguiram-se reuniões com a Direção Geral da Comissão Europeia para a Investigação e o Desenvolvimento (DGI&D) para discutir o papel da matemática no programa de trabalho do Horizonte 2020. Como resultado destas reuniões, a DG Connect (Direção Geral para as Redes de Comunicação, Conteúdos e Tecnologias) lançou uma consulta *online* sobre “Matemática e Ciência Digital” e promoveu um encontro sobre o mesmo tema, com posterior impacto na redação do programa de trabalho do Horizonte 2020.

Analisando o trabalho da EU-MATHS-IN ao nível de países, a rede espanhola – math-in.net – é uma boa referência para Portugal, quer pela proximidade geográfica quer pelas colaborações já estabelecidas.

O EXEMPLO DA REDE ESPANHOLA – MATH-IN.NET

O trabalho da math-in.net é uma fonte de inspiração para a rede portuguesa. Criada em 2011, agrega hoje cerca de 30 grupos de I&D, com um total de 400 investigadores cobrindo diversas áreas da matemática. Com uma área de intervenção diversificada, passando, por exemplo, por consultoria, formação, colaboração em projetos, desenvolvimento de aplicações informáticas e organização de encontros, reporta hoje uma atividade que é difícil de resumir num artigo, mas sobre a qual os números falam por si: 225 clientes de corporações nacionais e multinacionais e PME que utilizaram a rede para serviços de consultoria e que conduziram ao estabelecimento de cerca de 420 contratos; 170 cursos cujos conteúdos foram delineados em resposta a pedidos específicos de empresas; mais de 50 parcerias na forma de projetos, cujo objetivo foi o desenvolvimento de novas metodologias de interesse para as empresas e que permitiram abrir caminho para processos inovadores; 75 encontros de cariz científico, desde encontros com empresas, a convenções e *workshops*, que envolveram mais de 40 empresas e 15 grupos de investigação; um portefólio de mais de 400 empresas com as quais foi estabelecido algum tipo de colaboração, como as acima especificadas.

Numa escala diferente, a PT-MATHS-IN pode projetar a sua actividade futura utilizando os padrões da sua congénere espanhola, com a qual, aliás, tem vindo a colaborar, por exemplo, na organização das *Iberian Modelling Week*.

INDÚSTRIA 4.0

Espera-se que a era digital venha estabelecer um novo paradigma, a 4.^a revolução industrial, que compreende uma transformação social com impacto na sociedade civil, nas estruturas de governação, na vida dos cidadãos, na dinâmica das cidades, nos *media*, nos serviços, na economia e também, obviamente nos processos de produção, a “Indústria 4.0”. Embora este termo esteja originalmente ligado a um projeto na Alemanha, relacionado com a automação/computorização dos processos de fabrico, o símbolo “4.0” tem vindo a ser associado às mudanças globais, ligadas a desenvolvimentos tecnológicos subjacentes à era digital.

Como primeira iniciativa pública, a PT-MATHS-IN vai organizar no Porto, a 2 de junho, o encontro *Big Data – Mathematics in Industry 4.0: challenges and opportunities*. A escolha deste tema prende-se com o entendimento de que, nesta era digital, a análise da informação que é produzida massivamente e a uma escala cada vez maior em vários setores de atividade representa um dos maiores desafios que se colocam hoje a muitas empresas. O contributo que a comunidade matemática pode ter nesta matéria é

assinalável, e a forma como a mesma irá reagir a este desafio pode moldar, decisivamente, as relações entre a matemática e a indústria. Foi precisamente este pensamento que esteve subjacente à escolha do tema deste encontro.

Terminamos com um convite para a participação neste encontro e para que se mantenha a par das atividades da PT-MATHS-IN a partir da nossa página - <http://www.spm.pt/PT-MATHS-IN/index>.



Exposições (ma)temáticas da SPM.

Disponíveis para exibição nas escolas, bibliotecas ou instituições similares*.

Mais Informações em www.spm.pt/exposicoes

*A requisição das exposições tem custos de manutenção.



JOSÉ CARLOS SANTOS
 Universidade
 do Porto
jcsantos@fc.up.pt

DEMONSTRAÇÕES COM USO DE COMPUTADORES

Até que ponto se pode confiar nas demonstrações feitas com auxílio de computadores? É um tópico bastante polémico.

Será possível fazer demonstrações usando computadores? E até que ponto são fiáveis? São questões complexas que já provocaram muita polémica.

Para começar, vejamos um caso bastante pacífico. Conforme já foi abordado em [3], Euler conjecturou no séc. XVIII a seguinte generalização do Último Teorema de Fermat: uma potência de grau n só pode escrever-se como soma de k potências de grau n (com $k > 1$) quando $k \geq n$. Por outras palavras, quando um cubo pode escrever-se como soma de vários cubos, são necessários pelo menos três cubos, quando uma quarta potência pode escrever-se como soma de várias quartas potências, são necessárias pelo menos quatro quartas potências, e assim sucessivamente. Acontece que Euler estava enganado. O primeiro contra-exemplo à conjectura de Euler surgiu em 1966. Foi nesse ano que T. R. Parkin e J. Selfridge observaram que $144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5$ (veja-se [2]). O artigo em questão é dos artigos de matemática mais curtos jamais publicados. Contém unicamente duas frases e uma referência bibliográfica. Quanto ao método adotado, consistiu numa “busca direta no CDC 6600”. Isto refere-se àquele que é geralmente considerado o primeiro supercomputador bem-sucedido da história, fabricado pela *Control Data Corporation*. Parte de um tal computador pode ser vista na figura 1.

Este tipo de uso de computadores em demonstrações é pacífico, pois é fácil confirmar à mão *a posteriori* que os cálculos estão corretos.

À medida que os cálculos ficam mais complexos, a questão da fiabilidade dos computadores começa a ganhar importância. De facto, não é tanto a fiabilidade dos computadores que costuma estar em causa (embora por vezes esteja, como sabem as pessoas que se lembram do *bug* do processador Pentium FDIV¹), mas a de quem os programou. Um exemplo de um erro desta natureza pode ser observado quando se calcula o seguinte integral:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^4(t) + \sin^2(t)\cos^2(t)} dt.$$

Pode ter um aspeto assustador, mas é muito simples de calcular. Basta ver que aquilo que surge sob o sinal de raiz quadrada é simplesmente $\sin^2(t)$. Como se está no intervalo $[0, \pi/2]$, a raiz quadrada disto é $\sin(t)$, pelo que



Figura 1. Monitor e teclado de um CDC 6600.

o integral é igual a 1. Simples, não?! No entanto, se se pedir ao *software* Maxima para calcular aquele integral (em algumas versões, entre as quais as versões 5.30 e 5.38), o resultado obtido é -1 .

Mas este tipo de uso de computadores na investigação matemática é, de um modo geral, pacífico. Só quando se começa a usar computadores para *demonstrar* teoremas, e não apenas para procurar contra-exemplos, é que surgem polémicas.

O exemplo mais famoso de uso de computadores na demonstração de um teorema ocorreu na resolução do problema das quatro cores. Este, que é bastante conhecido², consiste em determinar se é ou não verdade que qualquer mapa pode ser colorido com somente quatro cores. Isto com as seguintes restrições:

- ▶ regiões com uma fronteira comum têm de ter cores distintas;
- ▶ não se está a ter em conta a possibilidade de uma mesma região estar dividida em vários bocados separados (basta pensar no caso de Angola e do enclave de Cabinda).

Um exemplo de como colorir o mapa dos distritos de Portugal continental usando somente quatro cores pode ser visto na figura 2.

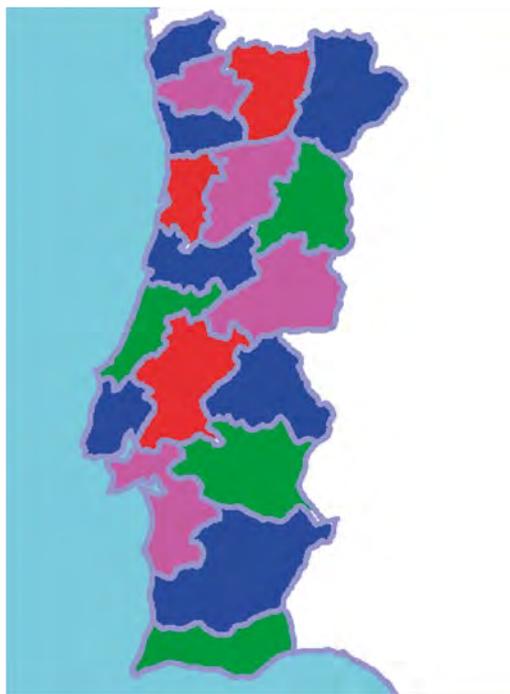


Figura 2. Distritos de Portugal continental.

No fim do séc. XIX julgou-se que o problema estava resolvido e que a resposta era afirmativa, pois foi publicada uma demonstração desse facto em 1879, por Alfred Kempe. Mas o problema foi reaberto 11 anos mais tarde, quando foi descoberto, por P. J. Heawood, que havia um erro na demonstração. Foi apenas em 1976 que surgiu aquela que é geralmente descrita como a primeira demonstração correta de que, de facto, bastam quatro cores. A demonstração, da autoria de Kenneth Appel e de Wolfgang Haken, recorreu ao uso de computadores.

Convém agora explicar o que é que se entende, neste contexto, por “uso de computadores”. Imaginemos o problema de saber se um dado número natural n é primo ou composto. Poder-se-ia pensar que é um problema fácil para um computador. Afinal, basta ver se é múltiplo de 2, caso não seja, se é múltiplo de 3, e por aí adiante. E realmente é uma tarefa simples para um computador. Mas não é uma tarefa que possa ser levada a cabo em tempo útil caso o número seja mesmo muito grande (cuja representação decimal tenha, digamos, 200 algarismos). Consegue-se determinar se certos números muito grandes são ou não primos recorrendo a métodos muito mais sofisticados do que o simples emprego da força bruta.

No caso do problema das quatro cores, foi exatamente isso o que aconteceu. Obviamente, Appel e Haken não mandaram um computador colorir com somente quatro cores todos os mapas possíveis. Nem poderiam, pois há uma infinidade de mapas e os computadores só fazem um número finito (mesmo que potencialmente muito grande) de cálculos. O que eles fizeram foi provar que havia um conjunto finito de mapas (cerca de 1500 mapas) com a seguinte propriedade: se todos os mapas desse conjunto pudessem ser coloridos usando somente quatro cores, então isso seria verdade para qualquer mapa. Em seguida, recorreram ao uso de computadores para verificar que, de facto, todos os mapas do conjunto em questão podem ser coloridos usando meramente quatro cores.

Isto levou a uma polémica que não se extinguiu até hoje. Aquela que é talvez a crítica mais bem fundamentada a esta demonstração foi formulada pelo filósofo Thomas Tymoczko, em [5]. A sua principal objeção foi a de que a demonstração é demasiado longa para que um ser humano possa segui-la passo a passo e confirmar que

¹<http://www.trnicely.net/pentbug/pentbug.html>

²A história deste problema pode ser vista em http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/The_four_colour_theorem.html.

está correta. Além disso, o *software* utilizado (que não era genérico, ou seja, foi criado especificamente para lidar com este problema) podia conter erros. Em [4] podem ser vistas críticas às objeções de Tymoczko.

Pode-se dizer que o uso que Appel e Haken deram ao computador consistiu em fazer uma verificação puramente mecânica (mas muito longa); a parte da demonstração que consistiu numa argumentação foi feita por eles. No entanto, já há algum tempo que se desenvolve *software* para verificar demonstrações, tal como o Coq³ ou o Isabelle⁴. De facto, uma nova demonstração de que qualquer mapa pode ser colorido usando apenas quatro cores foi feita recorrendo ao Coq; veja-se [1].

Embora o uso de computadores para fazer demonstrações ainda não esteja muito divulgado junto do grande público, é um facto que se têm feito grandes progressos nesse sentido. Há mesmo um campeonato do mundo de demonstrações automáticas de teoremas.⁵

Chegará o dia em que bastará introduzir num computador um enunciado matemático e esperar que ele nos diga se é ou não verdadeiro?

BIBLIOGRAFIA

[1] Georges Gonthier, "Formal Proof – The Four-Color Theorem", *Notices of the American Mathematical Society*, 55 (11), pp. 1382–1393, 2008. <http://www.ams.org/notices/200811/tx081101382p.pdf>

[2] L. J. Lander e T. R. Parkin, "Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers". *Bull. Amer. Math. Soc.* 72 (6), p. 1079, 1966

[3] José Carlos Santos, "Computação distribuída e Matemática", *Gazeta de Matemática* 177, pp 26–28, 2015

[4] Edward Reinier Swart, "The philosophical implications of the four-color problem", *American Mathematical Monthly*, 87 (9), pp. 697–702, 1980

[5] Thomas Tymoczko, "The Four-Color Problem and its Mathematical Significance", *The Journal of Philosophy*, 76 (2):57–83, 1979.

³ <http://coq.inria.fr/>

⁴ <http://isabelle.in.tum.de/>

⁵ <http://www.cs.miami.edu/~tptp/CASC/>

TABELA DE PUBLICIDADE 2017

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1900

Nº de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

CONTACTOS

Tel.: 21 793 97 85

imprensa@spm.pt

ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)

Margem de corte: 4 mm

LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

					
	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPE
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.



Publicado originalmente no jornal Público, em 11/12/2016. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:

Ana Cristina Moreira Freitas Universidade do Porto

Daniel Pinto Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:

Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **Humberto Bortolossi** Universidade Federal Fluminense, Brasil • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Peregrino Costa** Universidade de S. Tomé e Príncipe, São Tomé e Príncipe • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

Ana Isabel Figueiredo SPM • **Sílvia Dias** SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

Fid'algo – Print Graphic Design

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Sílvia Dias SPM

PROPRIEDADE:

Sociedade Portuguesa de Matemática

Av. República 45, 3^a Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

TIRAGEM 1250 Exemplares

ISSN 0373-2681 • ICS 123299 • DEPÓSITO LEGAL: 159725/00



REPRESENTAÇÃO HOLISTA DE NÚMEROS REAIS

MÁRIO ABRANTES

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA

mar@ipb.pt

INTRODUÇÃO

Designa-se por *representação híbrida* de números reais qualquer representação de números reais numa dada base b , na forma $\sum_{i=m}^n a_i b^i$, com $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}$ ou $m = -\infty$, sendo os termos a_i elementos do alfabeto da base b afetados pelos sinais '+' ou '-', ditos *dígitos*, no caso geral, ou, especificamente e por simplicidade, *dígitos positivos* ou *dígitos negativos*, conforme a afetação de sinal.

Como exemplo sugestivo duma representação híbrida de um número real, consideremos o número decimal $1.5 = 1 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1}$. Verifica-se imediatamente a igualdade $1.5 = 2 \times 10^0 + (-5) \times 10^{-1}$, que induz a representação 2.-5 para o número 1.5, na qual o operador '-' que afeta o dígito 5 é unário. Para tornar mais simples a leitura de representações híbridas, usaremos a *notação de Colson* [3] que consiste em denotar cada dígito negativo pelo correspondente dígito positivo encimado por uma barra. Assim, em vez de 2.-5 escrevemos 2. $\bar{5}$. Existem várias representações híbridas para o número 1.5, como sejam

$$\begin{aligned} 1.5 &= 1\bar{8}\bar{5} = 10 - 8 - 0.5 \\ 1.5 &= 1\bar{9}.5 = 10 - 9 + 0.5 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Veremos adiante que a denotação do número 1.5 segundo a representação holista é 2. $\bar{5}$.

As aplicações de representações numéricas híbridas de números inteiros incluem áreas como a aritmética computacional, a criptografia e o processamento digital de sinal [4]. Na aritmética computacional, este tipo de representa-

ção numérica torna possível implementar somadores que limitam o comprimento das *cadeias de propagação de transporte* (*carry propagation chains*, na terminologia inglesa), o que permite que o tempo gasto na adição de dois números seja independente do número de dígitos envolvidos [5]. Isto é conseguido fazendo com que o valor de qualquer dígito s_i que ocorre na soma de dois números positivos com $n + 1$ dígitos, $(x_n \cdots x_2 x_1 x_0) + (y_n \cdots y_2 y_1 y_0)$, dependa apenas dos dígitos x_i, x_{i-1} e y_i, y_{i-1} .

Apresentamos no esquema seguinte a soma de dois números de quatro dígitos, $x = x_3 x_2 x_1 x_0 = 2345$ e $y = y_3 y_2 y_1 y_0 = 7818$, usando um algoritmo de adição que evita a propagação de dígitos de transporte [5].

$$\begin{array}{r} c_3 c_2 c_1 c_0 \\ 2345 \\ + 7818 \\ \hline 11010 \quad \rightarrow \text{dígitos de transporte} \\ \bar{1}\bar{9}5\bar{7} \quad \rightarrow \text{somas de dígitos por coluna} \\ \hline 10\bar{9}6\bar{7} \quad \rightarrow \text{resultado} \end{array}$$

Na linha *dígitos de transporte* está colocado, por coluna c_i , o dígito de transporte t_i da coluna anterior, sendo $t_i = 1$ se $x_{i-1} + y_{i-1} \geq 9$ e $t_i = 0$ se $x_{i-1} + y_{i-1} < 9$. Tomando como exemplo a coluna c_2 , temos que o dígito de transporte a colocar na coluna c_3 é $t_3 = 1$, porque $x_2 + y_2 = 3 + 8 = 11$. Na linha *somas de dígitos por coluna* está colocado, por coluna c_i , o simétrico do complemento para 10 do dígito menos significativo da soma $x_i + y_i$, se $x_i + y_i \geq 9$, ou o dígito correspondente à soma no caso de ser $x_i + y_i < 9$. Tomando como exemplo a coluna c_3 , temos $x_3 + y_3 = 3 + 8 = 11$, pelo que o dígito a colocar é $-(10 - 1) = \bar{1}$. Na linha *resultado*, está colocada a soma dos números nas linhas *dígitos de transporte* e *somas de dígitos por coluna*, sendo que uma soma de dígitos do tipo $a + \bar{b}$ deve ser interpretada como $a - b$, se $a \geq b$, ou $\overline{b - a}$, se $b > a$. No resultado final, $10\bar{9}6\bar{7}$, os dígitos com barra revertem para os correspondentes valores positivos, $\bar{9} \rightarrow 1$ e $\bar{7} \rightarrow 3$, obtendo-se 10163.

O leitor pode apreciar este esquema e verificar que para conhecer o resultado em cada coluna são necessários apenas os dígitos de cada operando nessa coluna e na coluna anterior. Esta virtude permite calcular em paralelo os dígitos do resultado, tornando o tempo de cálculo independente do número de dígitos dos operandos e do número de transportes verificados.

No restante deste artigo apresentamos a representação holista de números reais. Designamos por *forma holista* de

O propósito deste artigo é a definição e a caracterização de uma certa representação híbrida de números reais, aqui designada por *representação holista*, salientando-se um conjunto de propriedades que a tornam interessante na classe das representações híbridas *equiponderadas* apresentada no texto.

um número real r a sua denotação segundo a representação holista, que abreviaremos por h_r ou $h(r)$, conforme a conveniência. Representa-se pelo símbolo \mathbb{H} o conjunto das formas holistas obtidas para todos os números reais. A representação holista tem as propriedades seguintes: (i) estabelece uma relação biunívoca entre o conjunto dos números reais \mathbb{R} e o conjunto das formas holistas \mathbb{H} ; (ii) é uma representação equiponderada (ver definição 2); (iii) de entre todas as representações híbridas equiponderadas de números reais positivos (respetivamente negativos), nenhuma utiliza mais dígitos negativos (respetivamente positivos) do que a representação holista; (iv) não existem zeros entre quaisquer dois dígitos não nulos da forma holista h_r de um número real r .

A representação holista e as suas propriedades vão ser definidas para números na base 10, por comodidade, mas são estendíveis a qualquer outra base inteira de numeração.

REPRESENTAÇÃO HOLISTA

Vamos definir representação holista. Começemos com um exemplo prévio. Seja o número real $r = 19.945$. A forma holista deste número constrói-se nos passos seguintes:

1. Adicionar 1 ao dígito mais significativo. Obtém-se 29.945;
2. Substituir o número formado pelos restantes dígitos, 9.945, pelo seu complemento para 10, 0.055, afetando pelo sinal ‘-’ cada dígito não nulo deste complemento. Obtém-se 20.055. Designamos esta forma por h'_r ;
3. Eliminar os zeros de h'_r , substituindo o par 05 por 15, do que resulta a sequência de símbolos 20.155, e depois o par 01 por 19, obtendo-se 21.955. A forma obtida $h_r = 2\bar{1}.95\bar{5}$ é a forma holista de r . Note-se que não existem zeros entre cada dois dígitos não nulos de h_r .

Definição 1. (Representação Holista). Seja r um número real, $\text{sin}al(r)$ o sinal de r e $r = \text{sin}al(r)r_n r_{n-1} \cdots r_0 . r_{-1} r_{-2} \cdots$ a representação decimal mais curta possível de r , com $r_n \neq 0$. Diz-se *representação holista* de r a forma decimal $h_r = a_n a_{n-1} \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots$, com $a_n \neq 0$, calculada do modo que se segue.

1. Se r é um inteiro não negativo, $0 \leq r \leq 9$, então $h_r = r$;
2. Se $r > 0$ e $r \notin \{1, 2, \dots, 9\}$, então:
 - a. Fazer
$$h'_r = (r_n + 1) \times 10^n + (10^n - r_{n-1} \cdots r_0 . r_{-1} r_{-2} \cdots)_c$$
sendo $(10^n - r_{n-1} \cdots r_0 . r_{-1} r_{-2} \cdots)_c$ a sequência de símbolos que se obtém afetando com o opera-

dor unário ‘-’ todos os dígitos não nulos do complemento para 10 do número $r_{n-1} \cdots r_0 . r_{-1} r_{-2} \cdots$;

- b. Fazer *substituições de Colson* [3] que consistem em substituir em h'_r , sucessivamente, todos os pares de dígitos consecutivos do tipo $0\bar{d}$, $d > 0$, por \bar{d}' , com $d' = 10 - d$, até se obter uma representação sem pares do tipo $0\bar{d}$. Seja h''_r a sequência de símbolos resultante;
- c. Se os dois dígitos mais significativos de h''_r forem $1\bar{1}$, então substituí-los pelo dígito 9. O número resultante é a representação holista h_r de r .

3. Se $r < 0$, então tomamos $-r$ e procedemos como nos itens 1, 2 anteriores, sendo h_r a representação que se obtém trocando o sinal de cada dígito da sequência final obtida.

Exemplo 1. Consideremos alguns exemplos. Seja $r = 9.91$. Calcula-se h_r a partir de $h'_r = (9 + 1) \times 10^0 - (10^0 - 0.91) = 10.09$ nos seguintes passos: substitui-se o par de dígitos 09 por 11 , obtendo-se 10.11 ; substitui-se em 10.11 o par de dígitos 01 por 19 , obtendo-se $h'_r = 11.91$; finalmente substitui-se em 11.91 o par de dígitos 11 por 9, “encurtando” a parte inteira de h'_r , obtendo-se $h_r = 9.91$. Assim, obtemos sucessivamente

$$r = 9.91, \quad h'_r = 10.09, \quad h''_r = 11.91, \quad h_r = 9.91.$$

De modo análogo temos,

$$r = 900, \quad h'_r = 1100, \quad h''_r = 1100, \quad h_r = 900;$$

$$r = -19.91, \quad h'_r = 20.09, \quad h''_r = 21.91, \quad h_r = 2\bar{1}.9\bar{1}.$$

Uma das consequências do Teorema 1 apresentado adiante é que no processo referido no item 2b. da definição anterior a ordem pela qual são eliminados os pares $0\bar{d}$ não altera a forma h'_r obtida.

PROPRIEDADES DA REPRESENTAÇÃO HOLISTA

A proposição seguinte é uma caracterização da forma holista dos números reais.

Proposição 1. A forma holista $h_r = a_n a_{n-1} \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots$ de um número real r não negativo tem as seguintes propriedades:

1. h_r não tem dois dígitos positivos consecutivos $d_1 d_2$ com $d_1 \neq 9$;
2. h_r não tem dois símbolos consecutivos do tipo $\bar{d}_1 d_2$ com $d_1 \neq 1$;

3. As seqüências de dígitos consecutivos situados entre dois quaisquer dígitos não nulos de h_r , não contêm nenhum dígito nulo.

Se h_r é um número negativo, então estas propriedades são verificadas por $-h_r$, que se obtém trocando o sinal a cada dígito de h_r .

Prova.

1. Os dígitos do número

$h'_r = (r_n + 1) \times 10^n + (10^n - r_{n-1} \cdots r_0.r_{-1}r_{-2} \cdots)_c$ (ver item 2a. da definição 1) são, à exceção do dígito mais significativo, negativos ou nulos. Os dígitos positivos do número h_r correspondente, para além do dígito mais significativo, são produzidos pelas substituições de Colson indicadas no item 2b. da definição 1, as quais trocam cada par consecutivo de dígitos do tipo $0\bar{d}$, $d > 0$, por um par de dígitos na forma $\bar{1}d'$, $d' = 10 - d > 0$. Por aplicação de substituições de Colson, as únicas formas de obter um dígito positivo à esquerda de $d' > 0$ são: (i) existir um zero à esquerda de $\bar{1}d'$, sendo a seqüência $0\bar{1}d'$ substituída por $\bar{1}9d'$; (ii) o dígito mais significativo do número h'_r ser 1 e estar à esquerda do par $\bar{1}d'$, caso em que a seqüência $1\bar{1}d'$ é substituída por $9d'$ (cf. item 2c. da definição 1). Este argumento prova o item 1 da proposição.

2. Como se referiu no item anterior, os dígitos positivos de h_r à direita do seu dígito mais significativo são produzidos pelas substituições de Colson, que não geram pares de dígitos consecutivos do tipo $\bar{d}_1\bar{d}_2$, $d_1, d_2 > 0$, com $d_1 \neq 1$. Este argumento prova o ponto 2 da proposição.

3. Qualquer dígito nulo situado entre dois quaisquer dígitos não nulos de h_r , teria de 'sobreviver' à transformação de r em h_r descrita no item 2b. da definição 1. Mas qualquer seqüência de zeros situada entre dois dígitos não nulos de h'_r , tem um dígito negativo à sua direita, o que permite a aplicação de uma substituição de Colson, eliminando um zero da seqüência. Qualquer seqüência de zeros remanescente mantém ainda um dígito negativo à sua direita, o que permite aplicar nova substituição de Colson. Por consequência, não pode existir nenhuma posição $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a_k \neq 0$ e exista algum dígito nulo na subsequência de dígitos $a_n \cdots a_k$ de h_r . Este argumento prova o item 3 da proposição. \square

No que se segue, mostraremos que a cada número real r corresponde uma, e uma só, forma holista, sendo esta uma propriedade distintiva desta representação híbrida.

Definição 2. (*Representação equiponderada*). Dizemos que uma representação híbrida de números reais é *equiponderada* se, e somente se, cada número real r e a correspondente forma híbrida γ_r , têm: (a) os dígitos mais e menos significativos nas mesmas posições em relação ao ponto decimal, no caso de r ter dízima finita; (b) os dígitos mais significativos nas mesmas posições em relação ao ponto decimal, e as dízimas infinitas, no caso de r ter dízima infinita.

Proposição 2. *A representação holista é equiponderada.*

Prova. Seja r um número real. Se a dízima de r for finita, a definição 1 diz-nos que o dígito menos significativo de h'_r tem o mesmo peso que os dígitos menos significativos de r e de h_r . No item 2a. da definição 1, verifica-se que se houver transporte na soma $(r_n + 1)$, então os dois dígitos mais significativos de h'_r são 10, depois transformados em $1\bar{1}$ em h''_r , no item 2b., e finalmente transformados em 9 no item 2c. Portanto, havendo ou não transporte, os dígitos mais significativos de h_r e de r têm o mesmo peso. Se a dízima de r for infinita, então a dízima de h_r também é infinita, pela definição 1. \square

Proposição 3. *Sejam $u = (a_n a_{n-1} \cdots) \times 10^q$ e $v = (b_n b_{n-1} \cdots) \times 10^q$, com $q, n \in \mathbb{Z}$, duas representações equiponderadas o mais curtas possível (cf. nota de rodapé 1) de um mesmo número real r , com dígitos diferentes em, pelo menos, uma posição $p \leq n$. Para qualquer k inteiro, $k \leq n$, verifica-se $|a_n a_{n-1} \cdots a_k - b_n b_{n-1} \cdots b_k| = 0$ ou $|a_n a_{n-1} \cdots a_k - b_n b_{n-1} \cdots b_k| = 1$.*

Prova. Dado ser $|0.a_{k-1}a_{k-2} \cdots - 0.b_{k-1}b_{k-2} \cdots| < 2$, uma vez que nenhuma destas dízimas pode ser dos tipos $0.99 \cdots$ ou $0.\bar{9}9 \cdots$ (cf. nota de rodapé 1), então também deve ser $|a_n a_{n-1} \cdots a_k - b_n b_{n-1} \cdots b_k| = 0$ ou $|a_n a_{n-1} \cdots a_k - b_n b_{n-1} \cdots b_k| = 1$, uma vez que se o módulo nestas igualdades for diferente de 0 ou de 1, deverá ser maior ou igual a 2, não podendo nesse caso ser compensado pelo valor de $|0.a_{k-1}a_{k-2} \cdots - 0.b_{k-1}b_{k-2} \cdots|$, de modo a termos $u = v$. \square

¹Por representação decimal mais curta possível, quer dizer-se que em vez das representações terminadas por uma seqüência infinita de 9s, $\pm \cdots r_n r_{n-1} \cdots r_k 99 \cdots$, com $r_k \neq 9$, escreveremos $\pm \cdots r_n r_{n-1} \cdots r'_k$, com $r'_k = r_k + 1$. No que se segue, supõe-se cada número real r representado sempre na forma decimal mais curta possível.

O resultado seguinte garante que a cada número real corresponde uma, e uma só, forma holista, mostrando que a Definição 1 estabelece uma relação biunívova entre o conjunto \mathbb{R} dos números reais e o conjunto \mathbb{H} das formas holistas.

Teorema 1. *A representação holista define uma relação funcional bijetiva $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$.*

Prova. A série que representa a forma holista, $h_r = \sum_{k=-\infty}^n a_k \times 10^k$, na qual os dígitos da forma $a_k = \bar{d}$ são substituídos por $-d$, é uma série absolutamente convergente. Daqui resulta que a cada forma holista corresponde um só número real, que é a soma da série. Mostremos agora, por redução ao absurdo, que, no sentido inverso, a cada número real r corresponde uma só forma holista h_r . Sejam $h^* = a_n a_{n-1} \dots$ e $h^{**} = b_n b_{n-1} \dots$ duas representações holistas do mesmo número real r (para efeito desta demonstração, não consideramos os eventuais pontos decimais). Suponhamos então, por hipótese, que h^* e h^{**} são diferentes em algum dígito. Seja p o maior inteiro para o qual se verifica $a_p \neq b_p$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $a_p > b_p$. Fazendo

$$h^* = \sum_{i=p+1}^n a_i 10^i + a_p 10^p + h_o^*$$

$$h^{**} = \sum_{i=p+1}^n b_i 10^i + b_p 10^p + h_o^{**}$$

em que h_o^* e h_o^{**} representam os restos das respectivas séries, obtemos

$$r = h^* = h^{**} \Leftrightarrow h^* - h^{**} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_p - b_p)10^p + h_o^* - h_o^{**} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_p - b_p)10^p = h_o^{**} - h_o^*,$$

Verifica-se imediatamente que a_p e b_p devem ter o mesmo sinal porque, de contrário, seria $|a_n a_{n-1} \dots a_p - b_n b_{n-1} \dots b_p| > 1$, dado que, por hipótese, $a_i = b_i$ para $p+1 \leq i \leq n$. Isto impede a igualdade $h^* = h^{**}$, de acordo com a Proposição 3. Segundo esta proposição, devemos ter $|a_n a_{n-1} \dots a_p - b_n b_{n-1} \dots b_p| = 1$. Como estamos a supor $a_p > b_p$, então deve ser $a_n a_{n-1} \dots a_p - b_n b_{n-1} \dots b_p = 1$, diferença esta que só permite $h^* = h^{**}$ se for $h_o^* < 0$ e $h_o^{**} > 0$. Isto implica ser $a_{p-1} < 0$ e $b_{p-1} > 0$. Mas esta conclusão levanta uma contradição: se for $b_p > 0$, então deve ser $b_p = 9$ pelo item 1 da Proposição 1, o que contraria a hipótese de ser $a_p > b_p$, uma vez que a_p e b_p têm o mesmo sinal; se for $b_p < 0$, então deve ser $b_p = -1$ pelo item 2 da proposição 1, o que contraria a hipótese de ser

$a_p > b_p$, uma vez que a_p e b_p têm o mesmo sinal. Como consequência, não existe nenhum inteiro p para o qual seja $a_p \neq b_p$, pelo que as representações holistas h^* e h^{**} são, dígito a dígito, iguais. \square

Proposição 4. *Seja $h_r = a_n a_{n-1} \dots$ a forma holista de um número real r positivo, e $\gamma_r = b_n b_{n-1} \dots$ uma forma híbrida equiponderada qualquer de r (ignorando eventuais pontos decimais). Se existe uma posição k tal que $b_k < 0$ e $a_k > 0$, então:*

1. Ou $a_{k+1} = -1$ e $b_{k+1} = 0$;
2. Ou então existe em h_r uma sequência $a_{k+p} a_{k+p-1} \dots a_{k+1} a_k = \bar{1}99 \dots 9 a_k$, a que corresponde em γ_r a sequência $b_{k+p} b_{k+p-1} \dots b_{k+1} b_k = 00 \dots 0 b_k$.

Prova. Seja então $h_r = a_n a_{n-1} \dots$, $\gamma_r = b_n b_{n-1} \dots$, com $b_k < 0$ e $a_k > 0$. Vale o seguinte argumento.

1. Se $a_{k+1} > 0$, então $a_{k+1} = 9$, pelo item 1 da proposição 1. Analogamente, se $a_{k+2} > 0$, então deve ser $a_{k+2} = 9$. Como $\gamma_r = h_r$ e $a_k a_{k-1} \dots > b_k b_{k-1} \dots$, para alguma posição $k+p$ deve ser $a_{k+p} < 0$. Pelo item 2 da proposição 1, deve ser $a_{k+p} = -1$, e portanto $a_{k+p} a_{k+p-1} \dots a_{k+1} a_k = \bar{1}99 \dots 9 a_k$. Se $a_{k+1} < 0$, então $a_{k+1} = -1$, pelo item 2 da proposição 1. Mostramos assim que os tipos de sequências de dígitos à esquerda de a_k na forma h_r , são conforme enunciado na proposição. Vamos agora verificar o que aí é dito a respeito das sequências de dígitos à esquerda de b_k na forma γ_r .
2. Consideremos o caso em que $a_{k+1} = -1$ e $a_k - b_k = 10 + d > 10$, com $0 \leq d \leq 9$. Temos (a menos da ponderação devida a eventuais pontos decimais nas representações),

$$h_r - \gamma_r = (a_n \dots a_{k+1} - b_n \dots b_{k+1}) \times 10^{k+1} + (a_k - b_k) \times 10^k + h_r^* - \gamma_r^*$$

$$= (a_n \dots a_{k+1} - b_n \dots b_{k+1}) \times 10^{k+1} + 10^{k+1} + d \times 10^k + h_r^* - \gamma_r^*$$

sendo h_r^*, γ_r^* os restos das séries respetivas. Nesta última igualdade deve ser $a_n \dots a_{k+1} - b_n \dots b_{k+1} = -1$, para compensar a parcela 10^{k+1} . Dado ser $a_{k+1} = -1$ e $a_n \dots a_{k+1} - b_n \dots b_{k+1} = (a_n \dots a_{k+2} - b_n \dots b_{k+2}) \times 10 + (a_{k+1} - b_{k+1})$, então deve ser $a_n \dots a_{k+2} - b_n \dots b_{k+2} = 0$ e $b_{k+1} = 0^2$.

3. Seja agora o caso $a_{k+1} = -1$ e $a_k - b_k = d < 10$, com $2 \leq d \leq 9$. Temos

$$\begin{aligned}
h_r - \gamma_r &= (a_n \cdots a_{k+1} - b_n \cdots b_{k+1}) \times 10^{k+1} + \\
&+ (a_k - b_k) \times 10^k + h_r^* - \gamma_r^* \\
&= (a_n \cdots a_{k+1} - b_n \cdots b_{k+1}) \times 10^{k+1} + \\
&+ d \times 10^k + h_r^* - \gamma_r^*
\end{aligned}$$

sendo h_r^*, γ_r^* os restos das séries respectivas. Se for $2 \leq d \leq 8$, então $h_r \neq \gamma_r$, já que o valor de d não pode ser compensado pelo valor da expressão $h_r^* - \gamma_r^*$. Então deve ser $d = 9$, o que implica ser também $a_n \cdots a_{k+1} - b_n \cdots b_{k+1} = -1$, de modo a obtermos $(a_n \cdots a_{k+1} - b_n \cdots b_{k+1}) \times 10 + d = -1$, compensável por $h_r^* - \gamma_r^*$. Da mesma forma que no item anterior, isto implica $b_{k+1} = 0$.

4. Resta mostrar que se for $a_{k+p}a_{k+p-1} \cdots a_{k+1}a_k = \bar{1}99 \cdots 9a_k$, então temos $b_{k+p}b_{k+p-1} \cdots b_{k+1}b_k = 00 \cdots 0b_k$. Como $\bar{1}99 \cdots 9a_k = \bar{1}a_k$, então deve ser $b_{k+1} = 0$, pelo que foi estabelecido nos itens anteriores. Por outro lado, se para alguma posição $k+2 \leq i \leq k+p$ for $b_i = \alpha \neq 0$, fazendo $D = a_{k+p}a_{k+p-1} \cdots a_{k+1} - b_{k+p}b_{k+p-1} \cdots b_{k+1}$, e por ser $|a_{k+p}a_{k+p-1} \cdots a_{k+1}| = 1$ e $|b_{k+p}b_{k+p-1} \cdots b_{k+1}| \geq 10|\alpha|$, temos $|D| \geq 2$, pelo que D não pode ser compensado por $a_n \cdots a_{k+p+1} - b_n \cdots b_{k+p+1}$, e por isso $h_r \neq \gamma_r$. Não pode pois ser o caso de, para alguma posição $k+1 \leq i \leq k+p$, se ter $b_i \neq 0$.

O teorema seguinte exibe uma propriedade que distingue a representação holista entre todas as representações híbridas equiponderadas de números reais.

Teorema 2. *De entre todas as formas produzidas por representações híbridas equiponderadas de um número real positivo (respetivamente negativo) r , nenhuma tem mais dígitos negativos (respetivamente positivos) do que a forma holista h_r .*

Prova. Esta demonstração é imediata, uma vez que a Proposição 4 afirma que, dada a representação holista $h_r = a_n \cdots a_k \cdots$ e uma outra representação híbrida equiponderada $\gamma_r = b_n \cdots b_k \cdots$ de um número real $r > 0$, se para alguma posição $k < n$ se tem $a_k > 0$ e $b_k < 0$, então existe uma sequência de dígitos $a_{k+p} \cdots a_{k+1}$ em h_r , com $p \geq 1$, contendo um dígito negativo, ao passo que a sequência homóloga $b_{k+p} \cdots b_{k+1}$, em γ_r não contém dígitos negativos. Logo γ_r não pode ter mais dígitos negativos do que h_r . Disto resulta que se for $r < 0$, então $-\gamma_r$ não pode ter mais dígitos negativos do que $-h_r$, pelo que γ_r não pode ter mais dígitos positivos do que h_r (notar que

o simétrico dum forma se obtém trocando os sinais dos dígitos da mesma). \square

REPRESENTAÇÕES HÍBRIDAS USUAIS

Existem na literatura várias propostas para representar números reais usando dígitos com sinal positivo ou negativo. Uma delas é devida a John Colson [3], quinto professor lucasiano na Universidade de Cambridge. Colson propõe que cada um dos dígitos $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ da representação decimal usual de números reais possa ser substituído pela sequência $1\bar{d} = 1 \times 10 - (10 - d)$, de uma forma não determinista. Substituições deste tipo, que atrás designámos por *substituições de Colson*, produzem formas múltiplas para cada número real. Por exemplo, $121 = 2\bar{8}1 = 1\bar{9}21$. De todas as denotações possíveis resultantes para cada número real, Colson usa, no entanto, a que resulta de uma transformação por ele designada *Redução aos Menores Dígitos* (*Reduction to Small Figures*, no original), em que se transforma cada número decimal positivo fazendo substituições de Colson apenas nos dígitos 'grandes' $\{6, 7, 8, 9\}$. Por exemplo, de 98736 obtém-se sucessivamente, do dígito menos significativo para o mais significativo, $9874\bar{4}$, $993\bar{4}\bar{4}$, $10\bar{1}34\bar{4}$, sendo esta última a *reduzida aos menores dígitos* do número 98736. Usando os números nesta notação, as operações aritméticas de adição e multiplicação, por envolverem apenas números formados com os dígitos mais pequenos, e com ambos os sinais, $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, promovem uma menor quantidade de operações de transporte, efetuando-se por isso de forma mais expedita. Propostas semelhantes foram apresentadas por A. Cauchy [2], E. Selling e W. Ford [1].

Outras propostas podem ser mencionadas, como a representação na *Forma Não Adjacente*³, que utiliza a base 2 e dígitos com os valores $\{-1, 0, 1\}$, produzindo números que exibem, pelo menos, um zero entre cada dois dígitos não nulos. Outro tipo de representação com dígitos positivos e negativos é a notação na *forma balanceada*⁴ que, para cada base b , representa os números usando o alfabeto $\{-k, \dots, (b-1) - k\}$ sendo geralmente $k = \lfloor b/2 \rfloor$. Nesta última família de representações, tem especial interesse a representação *balanceada ternária*, que usa o alfabeto $\{-1, 0, 1\}$, adotada como representação numérica interna da clas-

² Deve ser também $d = 0$ ou $d = 1$, de modo a que o valor de d possa ser compensado pelo valor da expressão $h_r^* - \gamma_r^*$, para se obter $h_r = \gamma_r$.

³ Ver https://en.wikipedia.org/wiki/Non-adjacent_form.

⁴ Ver https://en.wikipedia.org/wiki/Signed-digit_representation.

se de computadores russos *Setun*, desenvolvidos nos anos 50 e 60 do séc. XX.⁵

UM PROBLEMA PARA O LEITOR

Existe uma representação híbrida equiponderada, designemo-la por ω , interessante pela propriedade seguinte. Sejam r um número real qualquer, ω_r a forma de r nesta representação, e ω_r^-, ω_r^+ os módulos dos valores das partes negativa e positiva de ω_r (e.g. se for $\omega_r = 1.\bar{2}9$, então $\omega_r^- = 0.2, \omega_r^+ = 1.09$). Para toda a forma híbrida equiponderada γ_r de r , verifica-se:

$$\begin{aligned}\omega_r^- &\geq \gamma_r^- \\ \omega_r^+ &\geq \gamma_r^+.\end{aligned}$$

Deixamos ao leitor o desafio de definir esta representação.

AGRADECIMENTO

O autor agradece o trabalho de revisão deste artigo, que concorreu para melhorar a clareza e a correção do mesmo.

REFERÊNCIAS

- [1] Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Dover Publications, 1993. p. 57.
- [2] Augustin-Louis Cauchy, *Sur les Moyens d'Éviter les Erreurs dans les Calculs Numériques*, Comptes Rendus 1840, 11:789.
- [3] John Colson, *A Short Account of Negative-Affirmative Arithmetick*, Philosophical Transactions of the Royal Socie-

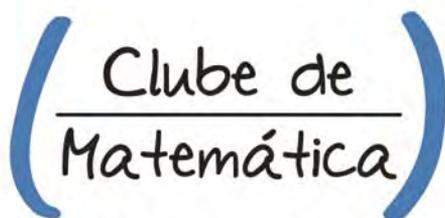
ty 1726 34:161–73.

- [4] Ebeid, N., M. and Hasan, M., A. *On binary signed digit representations of integers*, Des. Codes Cryptography, Vol. 42, No. 1, 2007.
- [5] Koren, I., *Computer Arithmetic Algorithms*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [6] Phatak, D. S. and Koren, I., *Hybrid Signed-Digit Number Systems: A Unified Framework for Redundant Number Representations with Bounded Carry Propagation Chains*, IEEE Trans. Comput., Vol. 43, No. 8, 1994, pp. 880-891.

SOBRE O AUTOR

Mário Abrantes, doutorado pela Universidade Nova de Lisboa, é professor de Matemática no Instituto Politécnico de Bragança.

⁵ Ver <https://en.wikipedia.org/wiki/Setun>.



SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

VISITE O CLUBE DE MATEMÁTICA

DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

- ✓ ARTIGOS DE OPINIÃO
- ✓ ENTREVISTAS
- ✓ PROBLEMAS
- ✓ HISTÓRIAS
- ✓ PASSATEMPOS
- ✓ PRÉMIOS

TUDO ISTO E MUITO MAIS EM WWW.CLUBE.SPM.PT



NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfc@ua.pt

CIÊNCIA E FICÇÃO

Andará a ficção científica atrás da ciência ou a ciência atrás da ficção?
Quanta ciência teria Júlio Verne? E quantos cientistas o terão lido?

Em 1865 é publicado o romance de Júlio Verne “Da Terra à Lua”, que descreve como uma organização norte-americana, a *Gun Club*, decide enviar uma tripulação à Lua usando um grande canhão situado na Flórida. Como sabemos, a primeira missão tripulada à Lua, a Apolo 11, foi realizada em 1969 com uma tecnologia muito diferente, usando um foguete em vez de um canhão, mas Júlio Verne teve algumas intuições acertadas: o local de lançamento foi, de facto, a Flórida; a tripulação era composta por três astronautas; o retorno foi feito através de uma amargem no oceano Pacífico.

Júlio Verne foi um visionário tecnológico em muitos outros aspetos, refere, por exemplo, a utilização de velas solares (ainda no “Da Terra à Lua”), o que viria a acontecer em 2010 com o lançamento da sonda japonesa Ikaros, e antecipa em quase um século o submarino elétrico no romance “20.000 Léguas Submarinas”.

Há outros casos notáveis de autores de ficção científica que anteciparam ideias ou invenções em muitas décadas, por exemplo, o autor britânico H.G Wells, que no seu romance distópico de 1899 “When The Sleeper Wakes”, refere a existência de portas automáticas; o escritor norte-americano Edward Bellamy, que no roman-

ce “Looking Backwards”, publicado em 1888, prevê a utilização de cartões de crédito; ou Aldous Huxley, que no conhecido romance “Admirável Mundo Novo” (publicado em 1931), idealiza uma sociedade futura onde se banaliza o uso de drogas antidepressivas e da engenharia genética.

É verdade que uma coisa é imaginar um conceito, uma inovação ou mesmo uma tecnologia futura, e outra, bem diferente e muito mais trabalhosa é desenvolvê-lo, com todo o labor científico, técnico e económico que isso envolve. Ainda assim, acredito que os criadores artísticos, sejam artistas plásticos, escritores, cineastas ou autores de jogos de computador, desempenham um papel importante na idealização do futuro e até na escolha das áreas científicas em que haverá maior investimento. Quantos cientistas e engenheiros terão sonhado com o submarino de Júlio Verne? Que impacto terão causado os “tablets” do “2001 Odisseia no Espaço” no adolescente Steve Jobs?

Só posso concluir que os cientistas que leem e veem bons filmes estarão sempre em vantagem, alguns talvez cheguem a transformar a “ficção científica” em ciência, não serão os primeiros.



GONÇALO MORAIS CONVERSA COM HENRIQUE LEITÃO

Henrique Leitão fez todo o seu percurso em Física. Depois de ser doutorado nesta área, onde desenvolveu investigação em Física Estatística, direccionou a sua atenção para a História da Ciência. Dos inúmeros trabalhos, destacamos a coordenação da publicação conjunta da Academia de Ciências e da Fundação Calouste Gulbenkian da obra de Pedro Nunes e mais recentemente da tradução a partir do original do *Siderius Nuncius* de Galileu. Em 2014 foi distinguido com o Prémio Pessoa e é actualmente Presidente do Departamento de História e Filosofia da Ciência da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. A longa conversa que tivemos o oportunidade de ter encontra-se aqui resumida.



GONÇALO MORAIS
Instituto Superior
Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

HENRIQUE Como é que queres fazer as coisas?

GONÇALO Da forma mais simples... Mantemos uma conversa sem planos. Parece-me o melhor. O que achas?

HENRIQUE Parece-me bem!

GONÇALO Vamos começar pela Física... A motivação que sentias prendia-se com o quê?

HENRIQUE Eu sempre gostei de Física. Fiz o curso de Física e, se hoje tivesse 18 anos, acho que voltaria a fazê-lo. Fiz a licenciatura, o mestrado e o doutoramento em Física nas partes mais teóricas. Não tenho muito jeito para a parte experimental. As memórias que tenho desses tempos são ótimas. E note-se que nunca fiz nenhum plano para mudar de carreira. As coisas foram progressivamente acontecendo, às vezes até com surpresa minha.

Mas também sempre reconheci que, embora tivesse

um enorme gosto em estudar Física, gostava imenso das chamadas Humanidades. Não necessariamente de História, pelo menos a princípio, mas sempre gostei de questões filosóficas, de línguas e, é certo, de perceber um ou outro contexto histórico. Quando estava a fazer o mestrado e o doutoramento, comecei a interessar-me de forma mais decisiva por estes temas e, mais por descanso mental, comecei a estudar outras coisas. Neste momento já estudava sobretudo História. O momento decisivo foi quando li pela primeira vez alguns textos do Pedro Nunes.

GONÇALO E isso surgiu como?

HENRIQUE As pessoas todas diziam que em Portugal tinha existido um bom matemático, mas eu não percebia por que razão ele tinha sido assim tão bom.. Davam-me sempre o exemplo do nónio. O nónio é uma escala e ninguém ficava famoso por ter feito uma escala. Achava que a história tinha de ter algo mais e então li um texto dele, que



por acaso estava em português, e fiquei deslumbrado. Reconheci nesse texto aquilo que reconhecemos quando lemos um texto de um grande cientista. Aliada a essa grandeza de estarmos perante um grande cientista, a surpresa de ele ter vivido há 500 anos. A partir daí, fiquei curiosíssimo e, num processo lentíssimo, comecei a transitar da Física para a História. O processo deu-se de forma muito gradual. Comecei a publicar umas coisinhas em História...

GONÇALO Ao mesmo tempo que ainda trabalhavas em Física?

HENRIQUE A decisão mais importante que tive de tomar foi a de aprender línguas antigas. Aprendi latim. Encarava isto como um *hobby*. Passados uns tempos, isso deu-me uma vantagem enorme, que era a de estudar textos matemáticos diretamente em latim. Por volta do ano 2001, a Academia das Ciências e a Fundação Gulbenkian quiseram fazer a edição das obras de Pedro Nunes e contactaram-me para que eu ficasse responsável por esse projeto. Ficou para mim claro que não podia conciliar isto com qualquer outra atividade. Tinha de tomar uma decisão e decidi mudar definitivamente para História. Ou seja, nunca tive um plano para mudar, mas em 2001 deu-se a transição de fase. Após esta transição, as coisas funciona-

ram muito bem. A razão principal tem a ver com o facto de haver tanta documentação portuguesa por estudar, que eu percebi que estava literalmente numa mina...

GONÇALO Existia uma tradição na História das Ciências em Portugal?

HENRIQUE Sim, mas muito focada em coisas sobretudo dos descobrimentos, da navegação e da náutica. Esta corrente tem uma tradição muito antiga em Portugal. Depois, também havia algumas coisas de História da Matemática, mas não havia muitas coisas de História da Matemática técnica. O que faltava muitas vezes era olhar para muitos textos com um entendimento técnico. Uma das primeiras coisas para as quais eu comecei a olhar foi para textos de Astronomia técnica dos séculos XVI e XVII. Devido ao espólio imenso que existia, as coisas começaram a aparecer umas a seguir às outras. De uma forma ou de outra, estava muito centrado ainda no Pedro Nunes.

GONÇALO Para quem já tentou ler textos antigos, ou pelo menos não contemporâneos de Matemática, uma das coisas com que nos deparamos é com o facto de a cultura da pessoa que escreveu esse texto ser muito diferente da nossa. A linguagem é diferente. Tudo é diferente.

HENRIQUE Completamente diferente. Não é só a língua que é diferente. Os próprios conceitos são completamente diferentes. Até a própria maneira de pensar tem muitas diferenças.

GONÇALO E como é que se entra nisso? Como é que começamos a descascar a cebola?

HENRIQUE A única resposta que posso dar-te é com tempo. Porque o que é preciso fazer é um género de uma translação mental. Uma pessoa tem de começar a habitar o modo mental que não é o nosso mas, e este é o ponto de que as pessoas possivelmente não se apercebem, que é igualmente fascinante. Quando consegui perceber, em primeiro lugar, que os instrumentos mentais que eles estão a usar são muito diferentes dos nossos mas que, em segundo lugar, têm um método de aplicação de uma coerência sofisticadíssima, foi para mim um momento apai-xonante.

GONÇALO Mas quando tentamos ler hoje os artigos originais do Poincaré, por exemplo, que estão na base da Teoria dos Sistemas Dinâmicos, já conseguimos aperceber-nos de um afastamento cultural significativo. Então quando estudamos um texto matemático com 500 anos...

HENRIQUE Não podemos estar sempre a tentar traduzir os textos antigos para conceitos modernos. Isso é um erro. O meu conselho é sempre habitar aquela época mental, perceber o tema a partir da sua lógica interna. E isto precisa de tempo. Por exemplo, uma das coisas que é difícil perceber hoje é a importância e a relevância dos problemas na altura, porque esta percepção perde-se com a passagem do tempo. Quando estudamos um assunto durante muito tempo, percebemos que o problema candente na altura era este ou aquele. Existem muitos textos que quando começamos a ler não percebemos por que razão eles se interessam por isso ou o que é que eles estão ali a fazer. Quando, por fim, percebemos o contexto histórico, percebemos então a importância daquele documento.

GONÇALO Como hoje, um dos aspetos interessantes da vida científica da época era o périplo dos cientistas pelas várias academias...

HENRIQUE Em qualquer época, para lá das viagens, existe sempre uma enorme comunicação entre os cientistas. Esta foi outra das surpresas interessantes do século XVI. Quase todos os grandes cientistas deste século estão em comuni-

cação uns com outros.

GONÇALO Um dos aspetos interessantes do nosso estudo da História é que tendemos a associar a Idade Média à época das trevas. Quando lemos acerca deste período, apercebemo-nos de que não poderíamos estar mais longe da verdade. Foi nesta época, por exemplo, que se deu a fundação das primeiras universidades...

HENRIQUE Absolutamente...

GONÇALO É precisamente na época que tendemos a crer que se trata do período áureo da nossa História, a época dos descobrimentos, que nos apercebemos de que foi introduzida a Inquisição...

HENRIQUE Tem a ver um bocadinho com a História portuguesa e com o facto de termos ficado muito focados neste período. Aquilo que os historiadores trabalham tende a criar uma certa imagem da época. Uma das coisas que me interessaram foi estudar autores que não tivessem trabalhado sobre náutica. No caso do Pedro Nunes, para lá dos textos de náutica, sempre me interessaram todos os outros. Ele tem muitos textos, que por não estarem ligados à náutica, tinham ficado de fora de qualquer estudo. Além do Pedro Nunes, havia muitos autores portugueses que tinham ficado de fora. Este trabalho de tentar reconstituir o que era o nível intelectual alto eu achei, e ainda hoje acho, fascinante. E temos vindo a descobrir cada vez mais e é muito interessante.

GONÇALO E como é que podemos colocar o Pedro Nunes em termos internacionais na época?

HENRIQUE Não há dúvida nenhuma de que na segunda metade do século XVI foi um dos grandes matemáticos europeus. Se tivéssemos de escolher os dez ou os 15 melhores matemáticos da época, ele estaria certamente incluído neste grupo. Agora, como qualquer matemático sabe, a fama é bastante efémera pela velocidade com que a ciência evolui. Os contributos dos matemáticos numa época estão perfeitamente integrados e diluídos na geração seguinte. É por esta razão que é muito importante não perder a memória destes cientistas. Isto é muito diferente do mundo da arte, por exemplo. Um pintor que pinta um quadro numa determinada época verá o seu nome sempre associado a esse quadro. Por esta razão, a sua fama permanece intocada. Nos cientistas isto não acontece. É por esta razão que todos os países relembram os seus cientis-

tas. Relembrem Galileu, relembrem Newton, relembrem Descartes... Se assim não fosse, já há muito teriam sido esquecidos. A Física já não é Newtoniana, já ninguém liga à Cosmologia de Descartes, a Geometria Analítica já é feita de outras maneiras, tudo passou. Mas mostrar que naquele momento, naquele período histórico, fizeram contributos notáveis é uma tarefa importante.

GONÇALO Um outro aspeto interessante desta época prende-se com o papel dos jesuítas. Tendo sido criados com o propósito de educar as elites, veem-se a certa altura no centro da discussão que perspassava a sociedade da altura devido à revolução científica que então ocorria... Mais tarde, teremos o Padre António Vieira a ser perseguido... Ou seja, ao mesmo tempo que parece que existia uma enorme discussão, parece haver um espalhar dessa própria discussão...

HENRIQUE Do ponto de vista da História da Ciência, o que os jesuítas trouxeram de novo a Portugal foi uma base institucional estável ao sistema de ensino que nunca tinha existido antes. É importante perceber que a partir dos séculos XVI e XVII, as ciências exatas, matemática e astronomia, adquirem uma sofisticação técnica tal que se tornam indissociáveis dos sistemas de ensino. Não é mais



possível uma pessoa praticar ciência ao mais alto nível se não tiver atravessado um sistema de ensino importante. Isto vai diferenciar imenso os países. Os países que irão conseguir manter sistemas de ensino estáveis, duradouros e de qualidade e os países que não vão consegui-lo. Em Portugal, a Companhia de Jesus fundou escolas onde isto foi possível. Com muitas limitações, mas muito melhor relativamente ao que havia antes. Portugal debateu-se em todas as épocas históricas com esta dificuldade de estabelecer sistemas de ensino estáveis e de grande qualidade. Isto tem repercussões tremendas na prática científica. A escassez da atividade científica em Portugal está sempre ligada à debilidade dos sistemas educativos. Isto ainda é mais evidente na matemática, onde o sistema de ensino é absolutamente crítico.

GONÇALO A Companhia de Jesus viu-se no meio de um furacão porque todo aquele edifício doutrinário começou aí a desabar porque a Revolução Científica veio pôr em causa muitas das coisas que lidas nas Escrituras...

HENRIQUE Sim! Os jesuítas estão numa grande tensão interna...

GONÇALO Sendo eles próprios a alimentar essa discussão...

HENRIQUE Existe nesta altura uma grande divisão interna na Companhia de Jesus, por exemplo, entre os matemáticos e os filósofos. Os matemáticos, muito rapidamente, dão-se conta das enormes alterações que é preciso fazer e na maioria dos casos fazem-nas. Os filósofos vão demorar muitíssimo mais tempo a perceber o alcance disto. Dou um exemplo simples. Quando se percebe que Vénus tem fases, mostra-se que o sistema de Ptolomeu está errado. Em Portugal, imediatamente, todos os matemáticos abandonaram o sistema de Ptolomeu. Não aceitaram de imediato o sistema de Copérnico mas passaram para uma solução intermédia que é o sistema de Tycho Brahe. Os filósofos vão precisar de décadas e talvez séculos para perceber isto.

Com a saída dos jesuítas, com o Marquês de Pombal, tudo isto vai sofrer um abalo profundo. Há uma queda brutal de todo o sistema de ensino. Mas sublinho que o sistema de ensino jesuíta tinha deficiências quando comparado com sistemas de ensino jesuítas de outros países. Mas no ensino científico do que no ensino da filosofia. Mas mesmo assim era incomparavelmente melhor do que o que havia antes em Portugal.



GONÇALO Temos de falar de uma coisita que ninguém me perdoaria se eu não falasse, que é sobre os prémios. Neste momento, toda a gente parece querer saber se o Dylan vai receber o prémio ou não.

HENRIQUE Exato [risos].

GONÇALO Tu recebeste o Prémio Pessoa... O que é se faz com isso?

HENRIQUE Para mim, foi uma completa surpresa. Antes temos de perceber uma coisa. Este prémio quer premiar uma carreira já feita mas também potenciar novas coisas para essa pessoa. É um tipo de prémio de meio de carreira. É um prémio simpático porque vemos o nosso trabalho reconhecido, e no caso da História da Ciência isto foi um aspeto muito importante para a disciplina como um todo. Por outro lado, acarreta uma enorme responsabilidade porque se dá um destaque momentâneo para que a carreira de uma pessoa possa dar um salto a partir daí. À parte do reconhecimento, fiquei obviamente contente pela disciplina, pelo meu grupo, pelas pessoas com quem colaborei, pelos alunos fantásticos que eu tive, pelos colaboradores que tenho, que são de reputação internacional. De certa maneira, o prémio é de todos. Alguém tem de ter lá a cara e tocou-me a mim, mas sempre o encarei como sendo um prémio de uma disciplina, quando se percebeu

que aqui havia um imenso interesse para a História portuguesa. Mas também tem este aspeto de futuro, porque não permite que agora uma pessoa arraste a carreira. Sempre estive muito ciente desta responsabilidade.

GONÇALO E, para terminar, precisamos ainda de tocar ao de leve no *Siderius Nuncius* do Galileu. Qual é o impacto deste livro hoje? Eu tentei ler o livro do Copérnico e não consegui...

HENRIQUE O livro do Copérnico é difícil. Já no século XVI era para pouquíssimos... *O Mensageiro das Estrelas*, aquele livro em concreto, o que tem de interessante e o que é raríssimo, é que é um livro que vai lançar a Europa em debates sem fim e é acessível a toda a gente. Isto quase nunca acontece em ciência, em que uma obra que vai incendiar tudo é acessível a qualquer pessoa. Por esta razão dava-me imensa pena esta obra não estar disponível em português porque qualquer pessoa pode ler o livro. E é um livro pequenino porque Galileu o escreveu com este propósito: que pessoas cultas mas não especialistas pudessem perceber o que estava a acontecer. Hoje o livro continua a ter este efeito surpreendente.

GONÇALO Henrique, muito obrigado pelo teu tempo...

HENRIQUE Foi um prazer...

COMO MERCATOR FEZ O SEU MAPA

Gerardus Mercator conseguiu uma proeza notável em 1569: desenhar um mapa em que as linhas de rumo se representavam por linhas retas. Deixou-nos, porém, um problema para resolver, pela ausência de anotações sobre o seu trabalho: que método usou para o fazer?



PEDRO J. FREITAS
Universidade de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt



MANUEL SILVA
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

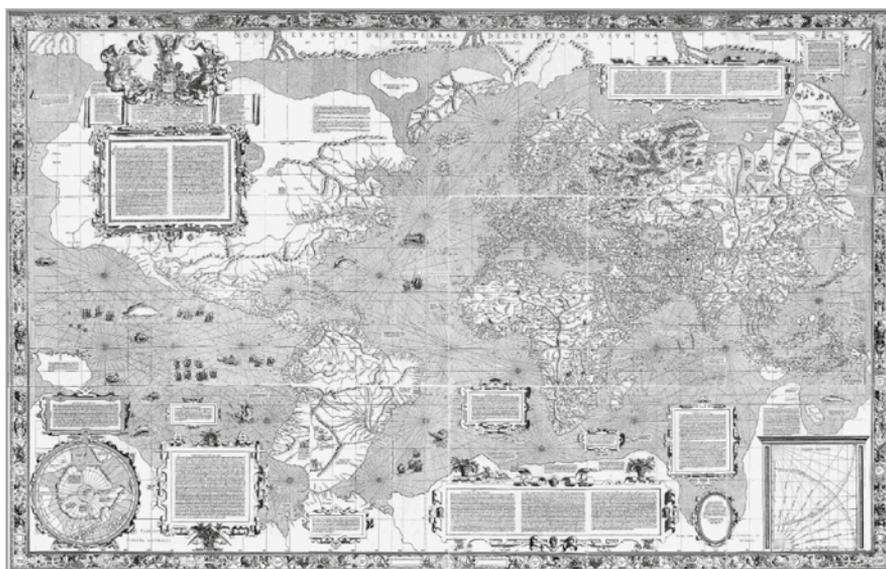


Figura 1. Mapa de Gerardus Mercator (1569).

O problema que trazemos hoje não é estritamente matemático, por lidar com um objeto físico: um famoso mapa. Falamos do mapa de Gerardus Mercator, de 1569, no qual, pela primeira vez, as linhas de rumo estudadas por Pedro Nunes eram representadas por linhas retas (ver figura 1).

Além do mapa, Mercator deixou-nos também um problema: que método usou para o desenhar? Não se tendo encontrado anotações sobre o assunto, desde os finais do século XIX que há artigos com contribuições para o resolver. Recentemente, no artigo [2], é descrita

uma solução que parece coerente e completa, solução essa que aqui expomos.

As linhas de rumo, hoje também chamadas curvas loxodrómicas (ou simplesmente loxodrómicas) são curvas sobre a esfera com a seguinte propriedade: o ângulo que fazem com cada meridiano é constante. A figura 2, da autoria de Carlos Albuquerque, apresenta uma loxodrómica correspondente ao ângulo de 80° com os meridianos.

A curva loxodrómica foi apresentada e estudada matematicamente por Pedro Nunes em 1537, em [3], e o seu estudo foi revisto e aprofundado nas *Obras completas*,

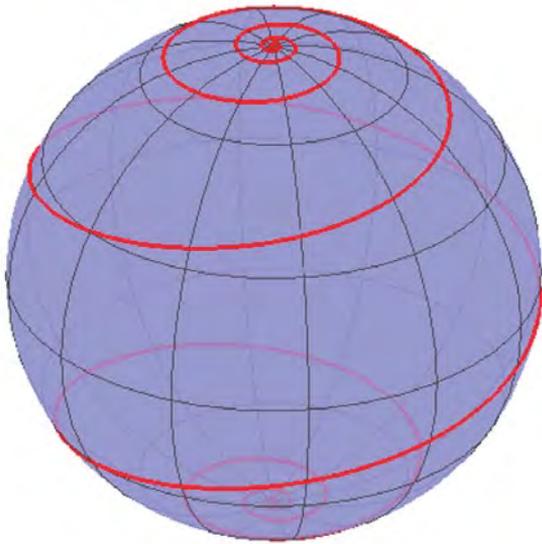


Figura 2. Loxodrômica correspondente a 80° .

[4], em 1566, escritas em latim e publicadas em Basileia. Uma das inovações na segunda obra foi a demonstração de que a curva não entrava no polo, isto é, tratava-se de uma curva infinita na esfera, algo completamente novo na geometria do século XV.

Esta curva tinha importância no tempo das navegações porque, para manter a rota de um navio sobre esta linha, bastava manter o ângulo de navegação fixo com o norte, o que se conseguia simplesmente usando uma bússola. Era muito mais fácil do que navegar sobre um círculo máximo, por exemplo. Pedro Nunes, em [3], refere que no seu tempo havia a crença de que ao navegar mantendo fixo o ângulo com o norte, o navio percorreria um círculo máximo. Esclarece, porém, que isso não acontece, e dá um método, baseado em trigonometria esférica, para conseguir aproximar o círculo máximo através de arcos de loxodrómicas, propondo a sua utilização a bordo (algo que parece que nunca chegou a acontecer).

Assim, a loxodrômica apareceu inicialmente como uma curva auxiliar na descrição do rumo de um navio, que se pretendia que decorresse sobre um círculo máximo (para minimizar a distância navegada). No entanto, a expressão usada por Pedro Nunes para a designar, “linha de rumo” mostra já o desejo de que esta seja a curva a considerar para o rumo de um navio sobre a esfera terrestre, por ser muito mais simples navegar segundo esta do que sobre um círculo máximo. A própria expressão

pode referir-se ao “rumo” isto é, ao ângulo que se mantém constante com os meridianos. É o próprio Pedro Nunes que afirma, em [3], que seria bom que houvesse um mapa em que as linhas de rumo fossem representadas por linhas retas, para facilitar a navegação.

Esse problema seria resolvido em 1569 por Gerardus Mercator, famoso cartógrafo flamengo, que desenvolveu a projeção que tem o seu nome, usada ainda hoje em cartas náuticas. A propriedade destas cartas é, então, que as loxodrómicas se representam como linhas retas. Representando meridianos e paralelos como linhas perpendiculares no mapa, isto equivale a dizer que a proporção entre comprimentos de arcos de meridianos e de paralelos é a mesma no mapa e no globo terrestre. Isto faz desta projeção uma *projeção conforme*, isto é, não distorce os ângulos ao passar do globo para o mapa. Gera, no entanto, uma distorção de áreas, devido ao maior espaçamento dos paralelos ao aumentar a latitude: o fator de dilatação é dado pela secante da latitude, que tende para infinito quando a latitude tende para 90 graus.

No mapa podem ver-se vários pontos donde emanam linhas retas, correspondentes aos vários rumos: habitualmente, cada ângulo de 90 graus era dividido em oito ângulos de $11,25^\circ$, e as linhas retas que os dividiam eram chamadas rumos, numerados de 1 a 7. Por exemplo, o segundo rumo correspondia ao ângulo de $22,5^\circ$.

Mercator não deixou nenhuma referência ao método usado para desenhar este mapa. Assim, desde há cerca de 125 anos que várias propostas têm sido feitas no sentido de esclarecer qual teria sido esse método. A solução agora encontrada, e descrita em [2], baseia-se no método usado no século XVI para descrever uma loxodrômica: a tabela de rumos. Esta tabela consistia simplesmente numa lista de longitudes e respetivas latitudes, calculadas ao longo da curva. O próprio Pedro Nunes apresenta, em [4], um método para construir uma tabela de rumos, embora deixe a tabela em branco, ficando o trabalho para os “moços aplicados”.

Hoje em dia, esta descrição pode ser dada pela função

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2 \arctan e^{\lambda \cotan \alpha}$$

em que φ é a latitude, calculada em função da longitude λ e do rumo (ângulo) α . Para uma dedução desta fórmula, veja-se, por exemplo, o artigo [5], noutra número desta mesma revista.

O artigo [2] (de onde tiramos a explicação seguinte) propõe que o mapa tenha sido construído a partir de uma destas tabelas de rumos, *usando como método*

exatamente a sua propriedade definidora: que a linha de rumo seja uma reta. O método, simplificado, é o seguinte. Traça-se inicialmente um equador graduado, definindo assim longitudes (e, portanto, meridianos). Desenha-se então uma reta, fazendo um ângulo dado com o equador, e marcam-se sobre ela as latitudes dadas pela tabela de rumos para esse ângulo, respeitantes às longitudes já marcadas. Fica assim o reticulado de meridianos e paralelos definido sobre o mapa, que permite depois o desenho. É um método simultaneamente engenhoso e simples.

O modo de fundamentar a tese de que este tinha sido o método usado foi o de comparar os erros do mapa com os erros de tabelas de rumos disponíveis na altura. No entanto, foi necessário separar os erros originados pelo método, já presentes na tabela, dos erros acumulados ao longo do tempo pela distorção física do mapa (note-se que este foi o primeiro artigo a fazer esta distinção). Isto foi conseguido graças a uma pequena figura no canto inferior direito do mapa, chamado *Organum directorium* (figura 3), onde se representam os sete rumos, com gradação. Aqui, a distorção física fica visível, pois é possível comparar os graus representados no mapa com os graus medidos efetivamente. Ou seja, podemos com-

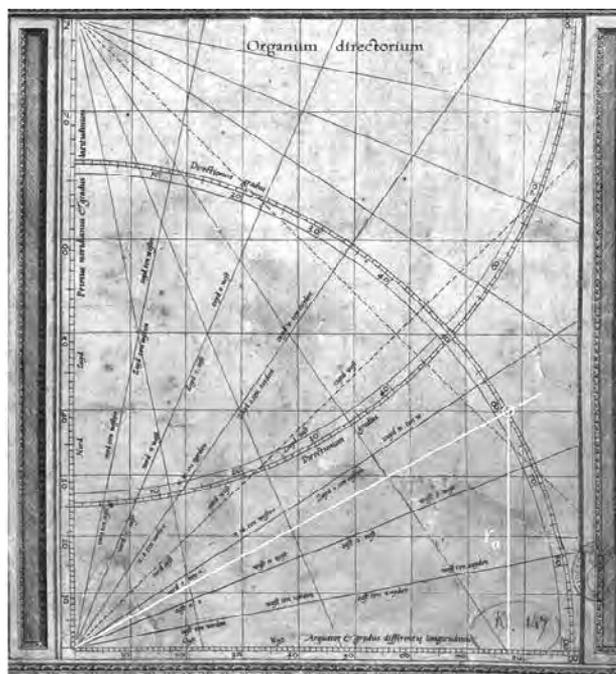


Figura 3. *Organum directorium* do mapa de Mercator.

par a ordenada Y_α dada teoricamente pelo ângulo α com a que se mede efetivamente no mapa.

Faltava então encontrar a tabela com os erros corrigidos agora encontrados. Depois de se testarem várias tabelas disponíveis em 1569, foi encontrada uma em que havia uma notável coincidência de erros para as latitudes descritas no segundo rumo, $22,5^\circ$. Esta tabela usava intervalos de um grau para as longitudes e as diferenças de erro entre a tabela e o mapa são de menos de um quinto de grau. Em comparação com outros métodos apresentados, este é aquele que mais se aproxima das ordenadas do mapa original de Mercator.

Como dissemos no início, este não é um problema estritamente matemático, envolvendo até questões de distorção física de mapas. No entanto, esta proximidade muito grande dos erros leva-nos a acreditar que está aqui finalmente a resolução de um importante e antigo problema de cartografia.

Podem ler-se mais sobre este assunto (nomeadamente, a sua relação com os trabalhos de Pedro Nunes) no artigo [1], no qual este texto se baseia.

REFERÊNCIAS

- [1] Pedro Freitas, “Pedro Nunes and Mercator: a Map From a Table of Rhumbs”, *CIM Bulletin* 37, October 2016, pp 21-25.
- [2] Joaquim Alves Gaspar e Henrique Leitão, “How Mercator Did It in 1569: From Tables of Rhumbs to a Cartographic Projection” *EMS Newsletter* 99, March 2016, pp 44--49.
- [3] Pedro Nunes, *Obras, Vol I: Tratado da sphaera: astronomici introductorii de spaera epitome*. Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa & Fundação Calouste Gulbenkian, 2002 [edição original: Lisboa, 1537; link na Biblioteca Nacional Digital: <http://purl.pt/14445>].
- [4] Pedro Nunes, *Obras, Vol IV: De arte atque ratione navigandi*. Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa & Fundação Calouste Gulbenkian, 2008 [original edition: Basle, 1566; link at the Portuguese Biblioteca Nacional Digital: <http://purl.pt/14448>].
- [5] João Filipe Queiró, “Pedro Nunes e as Linhas de Rumos”, *Gazeta de Matemática*, 143 (2002).

FALECIMENTO DO PROFESSOR AMÍLCAR SERNADAS

Amílcar Sernadas, professor catedrático do Instituto Superior Técnico (IST) e membro do Centro de Matemática, Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional (CMAF-CIO), faleceu no passado dia 7 de fevereiro. Licenciou-se em Engenharia Eletrotécnica em 1975, no IST, e doutorou-se em Ciência da Computação em 1980, na Universidade de Londres. Após o seu doutoramento, regressou à Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa como professor auxiliar. Em 1987, tornou-se professor associado no IST, onde foi professor catedrático desde 1990. Liderou vários projetos de investigação e orientou vários alunos de doutoramento e *post-doc*. Três dos doutoramentos conduziram a prémios IBM e outro a um prémio Anastácio da Cunha. Trabalhava em combinações de lógicas e em lógicas para a mecânica quântica. As suas contribuições científicas mais importantes, que lhe granjearam reconhecimento mundial, centraram-se na especificação temporal de sistemas, na especificação algébrica de objetos, na combinação de lógicas e, mais recentemente, em lógicas probabilísticas e quânticas. Era editor associado da revista *Formal Aspects of Computing*.

**CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM**

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Basta aceder ao campo cartão de sócio, descarregar o pdf e imprimir. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados. Todos os sócios SPM recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral). Têm ainda desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM, no Pavilhão do Conhecimento (50%), nos Livros IST Press e na Livraria Piaget (30%).



FINAL DAS 35.^{AS} OLIMPIADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA EM VISEU

De 5 a 8 de abril, a Escola Secundária de Emídio Navarro, em Viseu, vai receber a final nacional das 35.^{as} Olimpíadas Portuguesas de Matemática. As provas decorrerão durante as manhãs dos dias 6 e 7 e depois do almoço os estudantes terão a oportunidade de passear na cidade de Viriato. Sábado é dia de conhecer os vencedores, 36 no total: 12 na categoria Júnior (6.º e 7.º anos), 12 na categoria A (8.º e 9.º anos) e 12 na categoria B (10.º, 11.º e 12.º anos) – que receberão as merecidas medalhas de ouro, prata e bronze. Os vencedores das categorias A e B poderão ainda vir a integrar as delegações que representarão Portugal nas competições internacionais depois de frequentarem um estágio no projeto Delfos, em Coimbra. As Olimpíadas Internacionais de Matemática terão lugar no Brasil, no mês de julho, e as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática realizar-se-ão no mês de setembro na Argentina.



WORKSHOP MATEMÁTICA E ARTE EM ÉVORA

Irá decorrer em Évora, no Colégio Luís António Verney, o *Workshop* Matemática e Arte, nos dias 17 e 18 de julho, com o objetivo de dar a conhecer o que se faz em Portugal no âmbito das interações da matemática com os diferentes tipos de expressão artística. O *workshop* está em processo de acreditação como ação de formação, com 0,5 créditos, mediante processo de validação de assiduidade e avaliação, destinada a todos os professores de matemática dos ensinos básico e secundário (grupos de recrutamento: 110, 230 e 500). Consulte todas as informações em <http://www.spmul.uevora.pt/workshop>



TARDES DE MATEMÁTICA NA ALMEDINA

A Livraria Almedina do Atrium Saldanha, em Lisboa, continua em 2017 a ser palco de mais um ciclo de palestras “Tardes de Matemática”. Na última quarta-feira de cada mês, pelas 18h30, matemáticos falam sobre assuntos variados, numa linguagem acessível a um público amplo. Não perca, no próximo dia 22 de março, “A matemática na conservação da biodiversidade”, por Jorge Orestes Cerdeira (FCT-UNL & CMA); no dia 26 de abril, “Como modelar o sobe e desce dos mercados bolsistas”, por Cláudia Nunes (IST); e no dia 24 de maio, “Um atuário é... um matemático?”, por Gracinda Guerreiro (FCT-UNL). Confira todos os resumos em www.spm.pt.

TARDES DE MATEMÁTICA

22 MARÇO | 18h30

Livraria Almedina Atrium Saldanha

A MATEMÁTICA NA CONSERVAÇÃO DA BIODIVERSIDADE

A Biologia da Conservação é uma área multidisciplinar recente que tem por objetivo produzir conhecimentos e estabelecer procedimentos que possam contribuir para a persistência da diversidade biológica. Mas onde é que a Matemática entra nisso? Nesta conversa vamos ver que a Matemática está intimamente ligada a este assunto e, em particular, a selecção de áreas prioritárias para a conservação da biodiversidade.

PORTO RECEBE AS 7.ªS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA DA COMUNIDADE DOS PAÍSES DE LÍNGUA PORTUGUESA

Depois de conquistar a melhor classificação de sempre nas Olimpíadas de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (OMC-PLP) no Brasil, em 2016, Portugal recebe este ano a sétima edição das OMCPLP. A competição irá decorrer de 23 a 30 de julho, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, e envolve oito países. Cada equipa será constituída por quatro jovens estudantes apoiados por dois profissionais de matemática. As provas terão lugar nos dias 26 e 27 de julho. No dia 24, os participantes frequentarão um curso intensivo de matemática lecionado por professores das Universidades do Porto e de Coimbra. A organização destas Olimpíadas de Matemática da CPLP será da responsabilidade da Sociedade Portuguesa de Matemática e da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Esta é a segunda vez que Portugal

acolhe o evento, a primeira foi em 2011, na sua primeira edição.



7.ª OLIMPIADA DE MATEMÁTICA DA CPLP
PORTUGAL / PORTO

PLATAFORMA KHAN ACADEMY EM PORTUGUÊS DE PORTUGAL



Com mais de 48,5 milhões de utilizadores, 992 milhões de visualizações e 6,5 mil milhões de exercícios realizados a nível mundial, a plataforma interativa Khan Academy está agora disponível em português de Portugal. Em parceria com a SPM e apoiada pela Fundação PT, a Khan Academy disponibiliza milhares de exercícios interativos e centenas de vídeos gratuitos para toda a comunidade educativa. Tendo a matemática como principal foco, a plataforma Khan Academy em português de Portugal integra características interativas, apresentando sempre novos conteúdos – vídeos explicativos e milhares de exercícios práticos interativos de matemática, sugestões de resolução e relatórios de progresso –, permitindo uma monitorização permanente da *performance* e da evolução na aprendizagem e no domínio da disciplina. Todas as funcionalidades estão descritas em guiões de fácil utilização.

ESCOLA DE VERÃO DA SPM & MAT-OESTE EM LEIRIA

Irá decorrer de 13 a 15 de julho a Escola de Verão da Sociedade Portuguesa de Matemática (EVSPM) na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria. Este ano a EVSPM acontecerá em simultâneo com a 10.^a edição do Mat-Oeste, que se comemora no dia 13 de julho sob o tema “Matemática do Mar”. A Escola de Verão da SPM é um evento que tem por objetivo divulgar novos meios de descoberta da cultura e do conhecimento matemáticos, assim como dar formação específica em certas áreas da matemática. A EVSPM destina-se a professores de matemática de todos os ciclos de ensino, professores universitários, estudantes e a todos os que gostam de matemática. Este evento está organizado em conferências plenárias, cursos de formação, minicursos, mesas redondas, oficinas e exposições de livros. As conferências são de âmbito geral, promovendo a divulgação do conhecimento matemático, estando previstas algumas associadas a vários cursos de formação, acreditados pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua. Veja mais em: <http://evspm2017.ipleiria.pt>

The poster is for the 'Escola de Verão da SPM & Mat-Oeste 2017'. The title is in large, bold, red and blue letters. Below the title, it says '13 a 15 de julho de 2017' and 'ESTG, Instituto Politécnico de Leiria'. A smaller line of text says 'A 10ª Edição do Mat-Oeste decorrerá no dia 13 de julho'. The main theme is 'MATEMÁTICA DO MAR'. Below this, it lists 'Palestras & Minicursos & Mesas Redondas' and 'Ações de formação acreditadas para professores do ensino básico e secundário'. It also mentions 'Entrega dos prémios da 9ª Edição do Concurso Nacional de Matemática Prémio Pedro Matos 2017' with the website 'www.premiopeconomatos.ipleiria.pt'. The website 'www.evspm2017.ipleiria.pt' is also provided. At the bottom, it lists the 'Comissão Organizadora' with names: Conceição Nogueira, Eunice Oliveira, Fernando Sebastião, Leonel Vicente, and Paula Faria. Logos for SPM, Fundação PT, and FCT are at the bottom. The background features a hand holding a pencil and mathematical formulas like $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ and $(-1 + \sqrt{1+m^2}) \times \cos \theta = m \sin \theta$.



ENEMATH II DE 8 A 11 DE ABRIL

A segunda edição do Encontro Nacional de Estudantes de Matemática (ENEMath) decorrerá de 8 a 11 de abril de 2017, em Coimbra. O departamento de Matemática da Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade de Coimbra será o anfitrião do evento organizado pelo Núcleo de Estudantes de Matemática da Associação Académica de Coimbra. Organizado por e para estudantes, este evento tem como objetivos aproximar os alunos do mercado de trabalho, com a divulgação de empresas e sessões de recrutamento, desmistificar a investigação científica, bem como proporcionar uma via de interação na comunidade estudantil de matemática, possibilitando troca de ideias e aprendizagens e estimulando futuros projetos.

PRESIDENTES DAS SOCIEDADES DE MATEMÁTICA EUROPEIAS EM PORTUGAL DIAS 1 E 2 DE ABRIL

Este ano Portugal será o país anfitrião do Encontro dos Presidentes da European Mathematical Society (EMS). Nos dias 1 e 2 de abril estarão reunidos na Fundação Calouste Gulbenkian cerca de 60 presidentes de sociedades europeias, com o objetivo de partilhar ideias e discutir os principais desenvolvimentos da disciplina. Este evento anual vai na sua décima edição.



ALL KINDS OF MATHEMATICS REMIND ME OF YOU

Para homenagear o 70.º aniversário de Peter J. Cameron decorrerá, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, uma conferência intitulada “*All Kinds of Mathematics Remind Me of You*”, de 24 a 27 de julho de 2017. Este evento é uma organização conjunta da Universidade Aberta e das Universidades de Aveiro, Coimbra e Lisboa. As inscrições a preço reduzido terminam no dia 31 de março. Haverá ainda um *workshop* satélite da conferência no dia 28 de julho, “*Symmetry in Finite and Infinite Structures*”. Todas as informações em: <http://cameron17.campus.ciencias.ulisboa.pt>



DOIS EVENTOS A NÃO PERDER

Não faltam motivos de interesse para quem pretende acompanhar as atividades da Sociedade Portuguesa de Matemática no ano de 2017. Destaco, em particular, dois eventos que espelham bem a diversidade e a riqueza temática das iniciativas promovidas pela SPM.

A Escola de Verão da SPM é um evento bienal que tem por objetivo divulgar novos meios de descoberta da cultura e do conhecimento matemáticos, assim como dar formação específica em certas áreas da matemática. Destina-se a professores do 1.º ciclo do ensino básico, a professores de matemática do 2.º e 3.º ciclos do ensino básico e do secundário, professores universitários, estudantes e a todos os que gostam de matemática e com ela trabalham.

A edição deste ano é organizada em parceria com o Departamento de Matemática (DMAT) da Escola Superior de Tecnologia e Gestão (ESTG) do Instituto Politécnico de Leiria (IPLEiria) e decorre, de 13 a 15 de julho de 2017, nas instalações da ESTG-IPLEiria, em simultâneo com a décima edição do Mat-Oeste. De referir que o Mat-Oeste é um evento anual promovido pelo DMAT da ESTG-IPLEiria com o apoio da SPM, muito consolidado junto dos professores da região oeste, que tem como objetivo a divulgação, a discussão e a partilha de experiências e competências, nas mais diferentes vertentes da matemática. Nesta sua décima edição, o evento elegeu como tema a “Matemática do Mar”, tema esse que também irá dar o mote a toda a Escola de Verão da SPM.

À semelhança dos anos anteriores, a Escola de Verão da SPM & Mat-Oeste 2017 está organizada em conferên-

cias plenárias, cursos de formação, minicursos, mesas redondas, oficinas e exposições de livros. As conferências são de âmbito geral, promovendo a divulgação do conhecimento matemático, estando previstas algumas associadas a vários cursos de formação, creditados pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua. Na página do evento, <http://evspsm2017.ipleiria.pt>, podem ser encontradas mais informações sobre esta iniciativa a não perder.

De âmbito muito distinto é o segundo evento que agora destaco e que é promovido pela Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação (PT-MATHS-IN), secção da SPM que tem como objetivo fomentar a transferência de tecnologia matemática para o contexto empresarial e industrial. O encontro “*Big Data – Mathematics in Industry 4.0: challenges and opportunities*”, a realizar no Porto, a 2 de junho de 2017, é o primeiro encontro entre matemática e indústria sob a égide PT-MATHS-IN e, por isso mesmo, constitui uma excelente oportunidade para esta nova secção da SPM se dar a conhecer.

Tendo como tema a matemática industrial e os desafios gerados pela chamada quarta revolução industrial (*Industry 4.0*), o encontro tem como objetivo aproximar a indústria e a comunidade matemática. O *Big Data* foi escolhido para tema central deste primeiro encontro

porque designa um dos principais desafios que se apresentam à sociedade, e em particular às empresas, na atual era digital e uma oportunidade para reforçar o imprescindível contributo que a matemática pode ter neste domínio. A era digital permite acumular um volume de informação que excede largamente a capacidade de interpretação direta do decisor. Tomar decisões corretas neste cenário, e muitas vezes em tempo real, é crucial e a matemática pode, neste contexto, desenvolver ferramentas imprescindíveis para as empresas. Com este encontro pretende-se lançar as bases para o desenvolvimento de sinergias entre a indústria nacional e a PT-MATHS-IN. Os oradores plenários foram escolhidos tendo por base a sua especialização, estando já confirmadas as presenças de: Filipa Calvão (Universidade Católica Portuguesa), com a comunicação “Challenges Concerning the Reform of Data Protection Rules in the EU”, Gabriel Bernardino (presidente da European Insurance and Occupational

Pensions Authority), com a comunicação “Future Challenges for Big Data in Insurance” e Wil Schilders (presidente da EU-MATHS-IN), com a comunicação “Big Data – Challenges and Opportunities from EU-MATHS-IN Point of View”.

Dada a transversalidade do tema escolhido, é expectável a presença de empresas de vários setores. Além das sessões plenárias, o programa inclui um conjunto de comunicações curtas, apresentação de *startups* e sessões de *posters*. De destacar que não se trata de um evento científico, mas sim de uma iniciativa voltada para as empresas e as suas reais necessidades. Nesse sentido, os temas a discutir serão de banda larga e a linguagem, acessível e muito pouco técnica. Para mais informações e atualizações consulte o *site* do encontro em <http://bd2017.spm-pt.org>.

Fica o convite à participação de todos os associados. O sucesso deste e de outros eventos promovidos pela SPM depende muito da participação de todos.

ESCOLA DE VERÃO DA SPM 2017 & MAT-OESTE

13 a 15 de julho de 2017
ESTG, Instituto Politécnico de Leiria

A 10ª Edição do Mat-Oeste decorrerá no dia 13 de julho.

MATEMÁTICA DO MAR

Palestras & Minicursos & Mesas Redondas

Ações de formação acreditadas para professores do ensino básico e secundário

Entrega dos prémios da 9ª Edição do Concurso Nacional de Matemática Prémio Pedro Matos 2017
www.premiopepdomatos.ipleiria.pt

www.evspm2017.ipleiria.pt

Comissão Organizadora
Conceição Nogueira
Eunice Oliveira
Fernando Sebastião
Leonel Vicente
Paulo Faria

spm ESTG FCT

www.evspm2017.ipleiria.pt

BIG DATA | MATHEMATICS IN INDUSTRY 4.0
Challenges and opportunities
June 2, 2017

Instituto Superior de Engenharia do Porto

<http://bd2017.spm-pt.org/>

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: *gazeta@spm.pt*.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2017

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

