N. 0180

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXVII | Nov. 2016 | 4,20€

Dez anos de Encontros entre a Matemática e a Indústria em Portugal

ELIANA COSTA E SILVA, ISABEL CRISTINA LOPES e ALDINA CORREIA

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM

Cédric Vilani

Gazeta de Matemática

TABELA DE PUBLICIDADE 2017

Características Técnicas da Revista

Periodicidade: Quadrimestral
Tiragem: 1900
Nº de páginas: 64
Formato: 20,2 x 26,6 cm
Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

Condições Gerais:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

Contactos

Tel.: 21 793 97 85
imprensa@spm.pt

Especificações Técnicas:

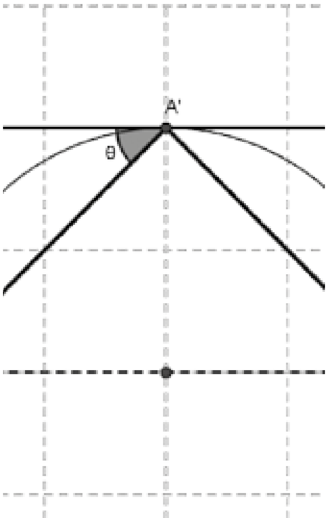
Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK
Resolução: 300 dpi (alta resolução)
Margem de corte: 4 mm

Localizações Específicas:

Verso capa: 1240€
Contracapa: 1100€
Verso contracapa: 990€

	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	**590€**	**390€**	**220€**	**120€**	**220€**
PAR	**490€**	**290€**	**170€**	**120€**	**170€**

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.



26 SOLUÇÕES GEOMÉTRICAS DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

21 NA LINHA DE FRENTE **Matéria atrai Matéria... e a Anti-Matéria?**

40 CONVERSA COM... **Cédric Villani**

36 A IDENTIDADE TROPICAL $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

ÍNDICE

Adérito Araújo
Universidade
de Coimbra
alma@mat.uc.pt

A MATEMÁTICA NA INDÚSTRIA

Os desafios que se colocam no desenvolvimento industrial e social apresentam uma complexidade crescente e ciclos de inovação cada vez mais frequentes. Neste contexto, a matemática tem um papel relevante a desempenhar.

A discussão sobre a situação da matemática industrial em Portugal não é nova. Desde, pelo menos, a última década do século XX que instituições como o Centro Internacional de Matemática (CIM) e a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) têm vindo a promover fóruns de discussão com o objetivo de analisar a relação entre a matemática e a indústria (interpretada como qualquer atividade de valor económico ou social, independentemente de pertencer ao setor público ou privado), incluindo a identificação de tendências significativas na investigação matemática e nos desafios industriais com potencial para criar oportunidades de interação e parceria entre as duas comunidades. São disso exemplo, os debates promovidos pelo CIM sobre a investigação matemática em Portugal (1997 e 2000), o debate sobre matemática industrial promovido pela SPM (em 2004) ou, mais recentemente (em 2010), a iniciativa da Comissão Nacional de Matemática e apoiada pela CIM de organizar em Portugal o seminário *Educational Interfaces between Mathematics in Industry*, promovido pelo International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) e pelo International Council for Industrial and Applied Mathematics (ICIAM).

Apesar de todo esse esforço, segundo a opinião de Jorge Buescu (no seu ensaio "Matemática em Portugal: uma questão de educação", publicado pela Fundação Francisco Manuel dos Santos em 2012): "À parte casos muito excecionais e meritórios, a matemática ainda não conseguiu estabelecer ligações efetivas com impacto na inovação e no desenvolvimento económico". "A indústria continua, com pontuais exceções, a desconhecer o potencial que a existência de uma comunidade matemática significativa pode representar para a inovação: os matemáticos, por outro lado, raramente fazem o esforço de tentar estabelecer contactos com a indústria."

Nesta edição da *Gazeta* damos conta de uma iniciativa que tem vindo a ocorrer, desde 2007, um pouco por todo o País, que pretende fomentar a cooperação entre a matemática e a indústria. Os grupos de estudo descritos no artigo "Dez anos de encontros entre a matemática e a indústria" são eventos de uma semana nos quais as empresas são convidadas a apresentar desafios que possam ser tratados pelos matemáticos presentes. Esta iniciativa tem-se revelado particularmente profícua, não só por permitir identificar pontos de interesse comum entre o meio académico e o setor produtivo, mas também por se constituir como uma rede de contactos entre os matemáticos industriais portugueses.

A recente criação da Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação (PT-MATHS-IN) no seio da SPM, tendo como membros fundadores a maioria dos principais centros de investigação em matemática do País, vem ao encontro de uma aspiração antiga da comunidade matemática: a criação de uma estrutura de âmbito nacional com o objetivo de fomentar a transferência de tecnologia matemática para o contexto empresarial. Cabe agora aos matemáticos, às empresas e aos responsáveis pela gestão científica em Portugal acarinhar esta estrutura, criando condições para que possa crescer e cumprir o seu desígnio de proporcionar o aumento de competitividade tanto dos grupos de investigação envolvidos como da indústria nacional.

Com este número da *Gazeta de Matemática*, a atual direção termina o seu mandato. Foi com enorme orgulho que, durante três anos, assumimos a responsabilidade de gerir os destinos desta prestigiada publicação. Queremos deixar o nosso agradecimento muito especial a todos os leitores, autores, membros da redação, revisores e membros do Conselho Editorial, por nos terem feito perceber que valeu a pena percorrer este caminho.

A partir do próximo número, a direção da revista ficará a cargo de Sílvia Barbeiro, da Universidade de Coimbra, coadjuvada por Daniel Pinto, também da Universidade de Coimbra, e Ana Cristina Freitas, da Universidade do Porto. A nossa *Gazeta* não poderia ficar em melhores mãos.

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu *site* *www.atractor.pt* . Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

ADIVINHAS COM NÚMEROS

Como se constrói uma adivinha?

Comecemos por recordar uma adivinha com números, utilizada frequentemente: o "adivinho" pede a alguém para pensar num número natural até 63, mostra seis cartões com números até 63 (ver figura 1) e pergunta à pessoa em quais dos cartões encontra o número em que pensou. De posse desta informação, imediatamente "adivinha" qual o número pensado.

À partida, o leitor poderá estar numa das seguintes situações: 1) conhecendo ou não a adivinha, não faz ideia de como foi possível descobrir o número[1]; 2) conhece uma regra que permite descobrir o número, mas não sabe por que razão funciona nem saberia como arranjar um conjunto maior de cartões, cada um eventualmente com mais números, de modo a alargar o leque dos números a adivinhar.

Se o leitor não está em nenhuma destas duas categorias e sabe como e por que razão funciona a adivinha, sugerimos que procure criar uma adivinha análoga que permita adivinhar um leque mais alargado de números com menos cartões.

[1] Estamos a supor que o leitor não acredita em poderes sobrenaturais do adivinho.

1	3	5	7	9	11	13
15	17	19	21	23	25	27
29	31	33	35	37	39	41
43	45	47	49	51	53	55
57	59	61	63			

2	3	6	7	10	11	14
15	18	19	22	23	26	27
30	31	34	35	38	39	42
43	46	47	50	51	54	55
58	59	62	63			

4	5	6	7	12	13	14
15	20	21	22	23	28	29
30	31	36	37	38	39	44
45	46	47	52	53	54	55
60	61	62	63			

8	9	10	11	12	13	14
15	24	25	26	27	28	29
30	31	40	41	42	43	44
45	46	47	56	57	58	59
60	61	62	63			

16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63			

32	33	34	35	36	37	38
39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63			

Figura 1

Entretanto, começamos por nos dirigir aos leitores na situação 1. Notemos primeiro que, para ser possível deduzir qual o número pensado, é necessário que não haja dois números distintos que estejam exatamente nos mesmos cartões: se se escolher um número qualquer e se se procurar os cartões em que ele se encontra (por exemplo, 53 nos cartões 1, 3, 5, 6) não há nenhum outro número que esteja nesses cartões e só nesses. Procure agora encontrar uma relação entre um número pensado (por exemplo, 34) e os números mais pequenos de cada um dos cartões em que ele se encontra. Se conseguir, veja se ela ainda se aplica quando pensa noutros números. Terá porventura encontrado a regra utilizada pelo adivinho e estará então em condições de testar a adivinha com outras pessoas.

Antes de procurarmos a razão pela qual o processo funciona, tentemos usar três novos cartões, agora com números escritos em duas cores (ver figura 2). Pensemos num número de 1 a 26, por exemplo, 19, e, para cada um dos cartões em que ele se encontra – naquele exemplo do 19, no primeiro cartão em preto e no terceiro em verde – tomemos nota do menor número no cartão que tem a mesma cor do pensado. Que relação há entre esses diversos números mais pequenos e o pensado inicialmente? Façamos agora o mesmo para os três cartões de 1 a 63 representados na figura 3, mas agora com números em três cores diferentes. Por exemplo, o número 56 está nos cartões 2 e 3, respetivamente com cores verde e azul. E, nesses cartões, os menores números das mesmas cores são 8 e 48. Ora, $56 = 8 + 48$. Como é que foram escolhidos os cartões de modo que esta regra tão simples para adivinhar o número funcione? Antes de responder a esta pergunta, vejamos um outro caso que só não constitui uma boa adivinha porque toda a gente percebe logo o raciocínio que está a ser feito. Suponhamos que queremos "adivinhar" um número entre 0 e 99. Claro que nos basta conhecer o algarismo das dezenas e o das unidades para conhecer o número! E se dispusermos de nove cores, podemos fazer corresponder uma cor diferente a cada um dos algarismos não nulos. Então, construímos um cartão que nos permita descobrir o algarismo das unidades e outro que nos permita descobrir o das dezenas. Por exemplo, nos dois cartões da figura 4, o que é que há em comum a todos os números representados a lilás no primeiro cartão? É terem o algarismo das unidades igual a 7. E todos os números representados a castanho no segundo cartão têm o algarismo das dezenas igual a 9. Portanto, quando uma pessoa diz que pensou num número que está no primeiro cartão com a cor lilás e no outro cartão a castanho, está a revelar que pensou no número com o algarismo 7 das unidades e o algarismo 9 das dezenas, ou seja, no número $7 + 9 \times 10 = 97$ (note-se que 7 é

1	2	4	5	7
8	10	11	13	14
16	17	19	20	22
23	25	26		

3	4	5	6	7
8	12	13	14	15
16	17	21	22	23
24	25	26		

9	10	11	12	13
14	15	16	17	18
19	20	21	22	23
24	25	26		

Figura 2

1	2	3	5	6	7
9	10	11	13	14	15
17	18	19	21	22	23
25	26	27	29	30	31
33	34	35	37	38	39
41	42	43	45	46	47
49	50	51	53	54	55
57	58	59	61	62	63

4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31
36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47
52	53	54	55	56	57
58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33
34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51
52	53	54	55	56	57
58	59	60	61	62	63

Figura 3

o menor número do primeiro cartão com a mesma cor de 97, e 90 é o menor número do outro cartão com a mesma cor de 97). Não estar num cartão significa que o algarismo correspondente (das unidades ou das dezenas) é nulo e neste caso nada há a somar (respetivamente ao nível das unidades ou das dezenas). Por exemplo, o único número que só está no segundo cartão e nesse está representado a castanho é o 90. Na situação que acabamos de descrever com números de 0 a 99 e dois cartões com nove cores, o efeito da adivinha como tal é nulo, porque ninguém se espantará que, fornecendo-se informação sobre os dois algarismos de um número até 99, se saiba qual é o número! E não é difícil imaginar como construir três cartões análogos com números de 0 a 999.

Se este exemplo foi referido, foi porque ele é representativo do que se passa em todos os outros casos vistos antes e permite compreender melhor a razão do funcionamento da regra já verificada para eles. Consideremos o caso da figura 3, em que havia três cores. Para três cores darem informação sobre os algarismos não nulos, devemos tomar 4 como base. Então, escrevamos em base 4 os números dos três cartões de três cores representados na figura 3. Obtemos os cartões representados na figura 5 e podemos observar que no primeiro cartão estão os números com algarismos das unidades 1, 2 e 3, respetivamente a preto, verde e azul. No segundo estão aqueles cujos algarismos das "dezenas" são 1, 2 e 3, nas cores correspondentes, e analogamente para o terceiro cartão e os algarismos das "centenas". Então, no exemplo atrás indicado em que dispúnhamos da informação de que o número estava nos car-

1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	12	13	14	15	16	17	18	19
21	22	23	24	25	26	27	28	29
31	32	33	34	35	36	37	38	39
41	42	43	44	45	46	47	48	49
51	52	53	54	55	56	57	58	59
61	62	63	64	65	66	67	68	69
71	72	73	74	75	76	77	78	79
81	82	83	84	85	86	87	88	89
91	92	93	94	95	96	97	98	99

10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81
82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99

Figura 4

1	2	3	11	12	13
21	22	23	31	32	33
101	102	103	111	112	113
121	122	123	131	132	133
201	202	203	211	212	213
221	222	223	231	232	233
301	302	303	311	312	313
321	322	323	331	332	333

10	11	12	13	20	21
22	23	30	31	32	33
110	111	112	113	120	121
122	123	130	131	132	133
210	211	212	213	220	221
222	223	230	231	232	233
310	311	312	313	320	321
322	323	330	331	332	333

100	101	102	103	110	111
112	113	120	121	122	123
130	131	132	133	200	201
202	203	210	211	212	213
220	221	222	223	230	231
232	233	300	301	302	303
310	311	312	313	320	321
322	323	330	331	332	333

Figura 5

1	2	11	12	21
22	101	102	111	112
121	122	201	202	211
212	221	222		

10	11	12	20	21
22	110	111	112	120
121	122	210	211	212
220	221	222		

100	101	102	110	111
112	120	121	122	200
201	202	210	211	212
220	221	222		

Figura 6

tões 2 e 3, respetivamente com as cores verde e azul, isso diz-nos que o algarismo das "dezenas" é 2 e o das "centenas" é 3, significando o facto de o número não estar no primeiro cartão que o algarismo das unidades é 0. Ou seja, trata-se do número 320_4 que se escreve como 56 na base 10 $(= 3 \times 4^2 + 2 \times 4^1 + 0)$. Analogamente, para obter os cartões da figura 2, com apenas duas cores, usámos a descrição em base 3 (na qual o número de algarismos não nulos é igual ao número – 2 – de cores disponíveis). Na figura 6 estão representados cartões com os mesmos números que na figura 2, mas agora escritos na base 3.

Ao dizer-se que o número aparece no primeiro cartão a preto e no terceiro a verde, está a dar-se a informação de que o algarismo das unidades é 1 e o das "centenas" é 2, sendo o das "dezenas" 0 por o número não aparecer no segundo cartão. Ou seja, o número é 201_3 (em base decimal $19 = 2 \times 3^2 + 1$). Analogamente para a adivinha tradicional, com os cartões da figura 1, em que só há algarismos de uma cor: dizer se está ou não num cartão é dizer se em base 2 o algarismo de ordem correspondente é 1 ou 0. O leitor pode observar a figura 7 com os cartões análogos aos da figura 1, mas com os números agora escritos em base 2.

No primeiro cartão estão os números cujo algarismo das unidades em base 2 é 1, no segundo, aqueles cujo algarismo das "dezenas" é 1, etc. Por exemplo, o número que está só no segundo e no último cartão será 100010_2 (em base decimal $2^5 + 2^1 = 34$).

O leitor que desejar ver outros cartões com diversos números de algarismos e de cores, escritos em base 10 ou na base adequada ao número de cores desejado, pode consultar [1]. Aí encontrará também vários PDFs com algumas coleções de cartões prontos a ser impressos em formato A4, inclusive um deles algo diferente dos restantes, por usar uma forma pouco usual de representar os números, no chamado sistema ternário equilibrado. Em [2] o leitor poderá consultar outros *Truques e Magias* relacionados com adivinhas com números.

REFERÊNCIAS

[1] *www.atractor.pt/mat/adivinhascomnumeros*

[2] Estefani M. Moreira e Jorge Picado, "Truques e Magia com códigos algébricos", *Gazeta de Matemática*, n.º 175.

1	11	101	111	1001	1011	1101
1111	10001	10011	10101	10111	11001	11011
11101	11111	100001	100011	100101	100111	101001
101011	101101	101111	110001	110011	110101	110111
111001	111011	111101	111111			

10	11	110	111	1010	1011	1110
1111	10010	10011	10110	10111	11010	11011
11110	11111	100010	100011	100110	100111	101010
101011	101110	101111	110010	110011	110110	110111
111010	111011	111110	111111			

100	101	110	111	1100	1101	1110
1111	10100	10101	10110	10111	11100	11101
11110	11111	100100	100101	100110	100111	101100
101101	101110	101111	110100	110101	110110	110111
111100	111101	111110	111111			

1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110
1111	11000	11001	11010	11011	11100	11101
11110	11111	101000	101001	101010	101011	101100
101101	101110	101111	111000	111001	111010	111011
111100	111101	111110	111111			

10000	10001	10010	10011	10100	10101	10110
10111	11000	11001	11010	11011	11100	11101
11110	11111	110000	110001	110010	110011	110100
110101	110110	110111	111000	111001	111010	111011
111100	111101	111110	111111			

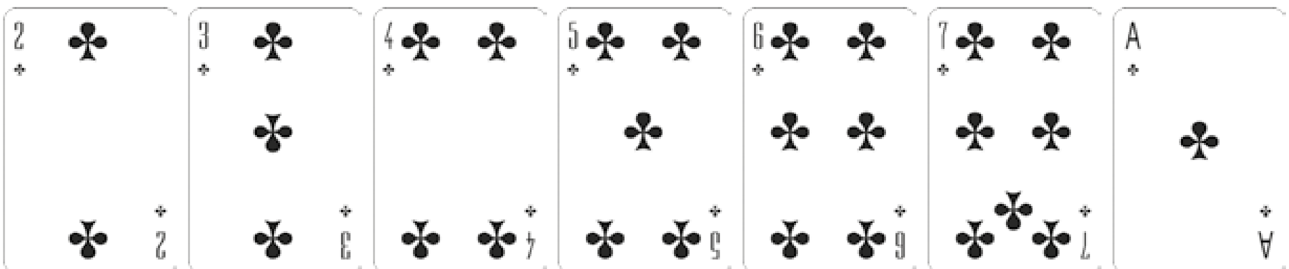
100000	100001	100010	100011	100100	100101	100110
100111	101000	101001	101010	101011	101100	101101
101110	101111	110000	110001	110010	110011	110100
110101	110110	110111	111000	111001	111010	111011
111100	111101	111110	111111			

Figura 7

Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

COMUNICAÇÃO INVISÍVEL

Um problema saído nas Olimpíadas de Matemática de Moscovo (OMM) em 2000 deu origem a algumas soluções matematicamente muito interessantes. Uma delas surpreendeu o júri pela simplicidade, mas teve de ser aceite. Acrescentamos mais uma, que também serviu de inspiração para criarmos mais um truque de cartas matemático!



O problema da OMM: *Há três jogadores, o Andrey, o Boris e o Sergey. As cartas são distribuídas da seguinte forma: três para o Andrey, três para o Boris e uma para o Sergey. Nenhum deles sabe nada sobre a distribuição das cartas, além das que tem na mão. Será possível o Andrey e o Boris terem uma conversa, em voz alta, à frente do Sergey, de forma a que fiquem a conhecer a distribuição das cartas e o Sergey continue a saber somente qual é a sua carta?*

A organização esperava uma resolução baseada em aritmética modular. Para facilitar, e sem perda de generalidade, vamos supor que o Andrey tem as cartas A♣, 2♣, 3♣, o Boris tem 4♣, 5♣, 6♣ e o Sergey tem o 7♣. Identificando cada carta com o número de pintas que apresenta, o Andrey soma módulo 7 as suas cartas e diz: "6". O Boris soma 6 aos valores das suas cartas, obtendo 0. Como sabe que só falta somar a carta do Sergey para obter a soma $1 + \cdots + 7 = 0 \pmod{7}$, conclui que este esconde a carta 7♣. Em conformidade, o Boris anuncia: "A carta do Sergey é o 7♣". Agora é evidente que o Andrey e o Boris conhecem completamente a distribuição, mas o Sergey só conhece a sua própria carta.

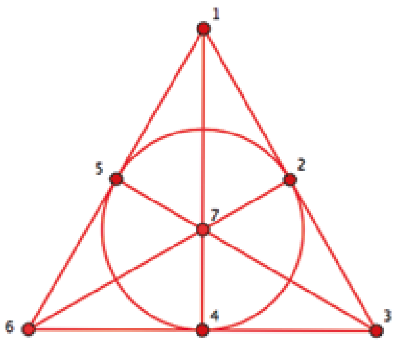
Mesmo que Sergey conheça o processo envolvido, não consegue obter nenhuma informação. Isto deve-se ao facto de haver mais do que uma combinação possível para cada soma parcial módulo 7: 0 = 7+2+5 = 7+3+4 = 1+2+4, 1 = 7+3+5 = 1+2+5 = 1+3+4, 2 = 7+4+5 = 1+3+5 = 2+3+4, 3 = 7+1+2 = 1+4+5 = 2+3+5, 4 = 7+1+3 = 2+4+5, 5 = 7+1+4 = 7+2+3 = 3+4+5, 6 = 7+1+5 = 7+2+4 = 1+2+3.

No lugar da soma modular pode usar-se soma-Nim. Relembremos que para efetuar uma destas somas se escrevem os números em binário e se usa a tabuada $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$, $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$. No exemplo acima, o Andrey calcularia $1 \oplus 2 \oplus 3 = 0$ e diria: "0". O Boris faria a conta $4 \oplus 5 \oplus 6 = 7$ e, sabendo que $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5 \oplus 6 \oplus 7 = 0$, diria: "A carta do Sergey é o 7♣" (já que $7 \oplus 7 = 0$).

O que há de errado com este processo?

A resposta que surpreendeu os organizadores foi a seguinte. Suponhamos ainda a distribuição acima. O Andrey diz ao Boris: "As minhas três cartas são A♣, 2♣, 3♣ ou as tuas três cartas são A♣, 2♣, 3♣. Claro que o Boris fica logo a saber tudo e responde: "A carta do Sergey é o 7♣". Este processo levanta problemas, já que o Andrey só pode ter a certeza da veracidade da disjunção que anuncia se tiver na mão as cartas A♣, 2♣, 3♣ ...

Uma outra solução, proposta por Ruaan Kellerman, é baseada nas propriedades do plano de Fano. O Andrey constrói uma destas configurações em que as suas cartas sejam colineares e diz: "As minhas cartas correspondem a uma linha reta neste plano".



O Boris conclui imediatamente quais são essas cartas e, com as suas, compreende a distribuição totalmente. As três cartas do Boris pertencem a seis das sete retas do plano de Fano! Isto permite-lhe deduzir a distribuição. Note-se que a informação que o Andrey dá ao Sergey é mínima, as suas cartas podem ser, em princípio, um dos sete conjuntos lineares da configuração.

Como poderemos inventar um truque de cartas matemático, de fácil execução, a partir deste problema olímpico?

Relembremos a questão do número anterior.

1. Neste problema, cuja autoria David atribui a Nob Yoshigahara, cada letra $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ representa um dígito positivo diferente. Que valores tem cada uma delas de forma a valer a seguinte igualdade?

$$\frac{A}{BC}+\frac{D}{EF}+\frac{G}{HI}=1.$$

(BC, EF, HI são números que se escrevem com dois dígitos).

Solução:

$$\frac{5}{34}+\frac{7}{68}+\frac{9}{12}=1.$$

2. O inspetor Lestrade entra na sala de jantar. O corpo jaz no chão. Quatro pessoas manifestam-se.

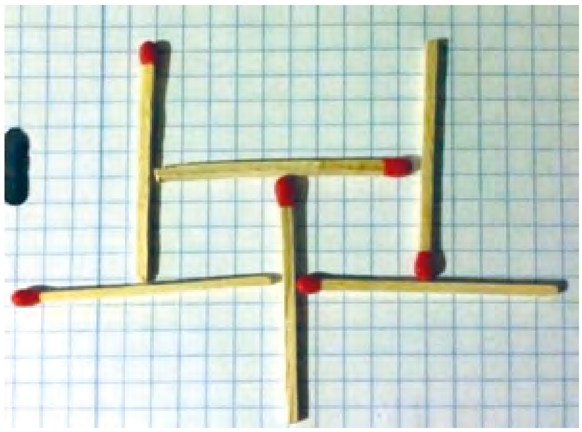
Ágata: Eu sei quem a matou.
Bravo: Eu matei-a.
Carla: O Bravo matou-a.
Dário: Não foi o Bravo nem a Carla.

Há que determinar quem é responsável pelo crime em duas hipóteses diferentes: a) Todos mentem; b) Só uma pessoa mente.

Solução: a) A Carla; b) O Bravo (o Dário é o mentiroso).

3. É fácil fazer um quadrado com quatro fósforos. Também não é difícil fazer dois quadrados com sete fósforos. E fazer dois quadrados com seis fósforos? (Os quadrados devem ter o mesmo tamanho, os fósforos, que não dobram nem partem, também não se cruzam.)

Solução de Tiago Robalo:



DEZ ANOS DE ENCONTROS ENTRE A MATEMÁTICA E A INDÚSTRIA EM PORTUGAL

Eliana Costa e Silva[a], Isabel Cristina Lopes[b] e Aldina Correia[c]

CIICESI/ESTG - Politécnico do Porto[a, c], Centro Algoritmi[a] e LEMA/ISCAP - Politécnico do Porto, Portugal[b]

eos@estg.ipp.pt[a], cristinalopes@iscap.ipp.pt[b] e aic@estg.ipp.pt[c]

Processos aparentemente tão distintos como os que envolvem sapatos, vinho, eletricidade, hotéis e ordens de fabrico estão, afinal, relacionados: todos eles podem ser tornados mais eficientes através da utilização de técnicas matemáticas! Estes assuntos foram o mote para o centésimo décimo nono *European Study Group with Industry* – ESGI 119, que decorreu na Porto Design Factory, entre os dias 27 de junho e 1 de julho de 2016. Este evento, organizado pela Escola Superior de Tecnologias e Gestão de Felgueiras (ESTGF) e pela Escola Superior de Estudos Industriais e de Gestão (ESEIG), do Politécnico do Porto, reuniu académicos das mais diversas áreas da matemática com experiência na resolução de problemas industriais, para transferência de I&D. Sugerindo metodologias da sua área de especialização, os participantes trabalharam em colaboração durante uma semana, para dar resposta aos desafios colocados pelas empresas. Esta foi a décima edição em Portugal de uma série de eventos que tem juntado anualmente empresas e matemáticos na resolução de problemas reais com os quais as empresas se deparam diariamente.

1. *EUROPEAN STUDY GROUPS WITH INDUSTRY*: O QUE SÃO E COMO FUNCIONAM

Os *European Study Groups with Industry* (ESGI) tiveram origem no Reino Unido, em 1968, na Universidade de Oxford, sob o nome de *Oxford Study Groups with Industry*. Desde então, o conceito foi adotado por vários países, tendo-se revelado particularmente eficaz na criação de ligações entre os matemáticos e a indústria um pouco por toda a Europa [10, 11]. Desde 1987, a coordenação dos ESGI tem sido feita pelo *European Consortium for Mathematics in Industry* (ECMI), um consórcio de instituições académicas e de empresas que, operando à escala europeia, pretende promover o uso de matemática no tecido empresarial e, simultaneamente, fomentar a formação de jovens matemáticos industriais [1]. Países como Portugal, Bulgária, Dinamarca, Espanha, Holanda, Inglaterra e Irlanda, entre outros, têm-se revelado particularmente ativos na promoção

Figura 1. Grupo de trabalho do desafio proposto pela Active Space Technology no ESGI 92, que decorreu em Coimbra, em 2013.

Figura 2. Grupo de trabalho do desafio proposto pela Aveleda S.A. no ESGI 119, que decorreu no Porto, em 2016.

regular destes eventos. A experiência europeia foi adotada um pouco por todo o mundo, sendo possível, hoje em dia, encontrar eventos semelhantes organizados na Austrália, na China, nos EUA, no Canadá e na África do Sul.

Os ESGI têm atraído empresas de todos os setores económicos e de todos os tamanhos, incluindo nomes como Philips, Unilever, IBM e Jaguar – Land Rover. Os mais de 500 relatórios técnicos disponíveis [em 5] atestam bem a diversidade e o número de problemas abordados. Nesse repositório é possível encontrar problemas tão diversos como a otimização do traçado de parques de estacionamento, a redução de vibrações nos trens de aterragem de aviões e a melhoria do processo de deteção de fraudes.

Os ESGI consistem num fórum para empresas e matemáticos trabalharem lado a lado em problemas concretos de importância para a indústria e os serviços. Participam nestes eventos professores, investigadores e estudantes, com competências nas mais diversas áreas da matemática, desde a investigação operacional, à otimização, à estatística, à análise numérica, às ciências da computação, entre outras.

Com ligeiras adaptações em cada país, estes eventos têm lugar em quatro ou cinco dias consecutivos, iniciando-se com a apresentação dos desafios propostos por um representante de cada uma das empresas participantes e terminando com uma breve apresentação dos resultados obtidos até então por parte dos matemáticos envolvidos. Tipicamente, em cada ESGI são apresentados pelas empresas três a seis desafios. No decorrer dos vários dias da semana, desde a manhã até ao fim do dia (e mesmo ao jantar!), os matemáticos formam grupos em que debatem ideias, experimentam diferentes modelações, efetuam diversas simulações e, claro, usam um largo leque de técnicas matemáticas. O desafio intelectual que cada um dos problemas proporciona, bem como o espírito de equipa que se cria entre os participantes são, sem dúvida, características que tornam únicos estes encontros.

Os ESGI são encontros de curta duração e, dada a complexidade dos problemas propostos, é pouco provável que, numa semana, se consiga o desenvolvimento de uma solução acabada e pronta a usar. Apesar de tal poder acontecer em casos pontuais, o principal objetivo e a grande mais-valia destes grupos de estudo é a apresentação de novas formas de inovação e desenvolvimento, representadas pelos modelos matemáticos construídos à medida do problema. Estes modelos, ao serem alimentados com os dados fornecidos pelas empresas, conduzem às primeiras simulações, essenciais para avaliar a abordagem proposta. O relatório que cada grupo de trabalho envia posteriormente às empresas tem informação suficiente para permitir aos responsáveis decidirem se continuam o trabalho internamente ou se é vantajoso estabelecer uma colaboração mais duradoura com um ou vários matemáticos para a prossecução de um objetivo específico.

De realçar a importância que os ESGI podem ter para as pequenas e médias empresas. De facto, não tendo os meios nem a necessidade de manter recursos humanos para resolver problemas específicos que podem surgir no decorrer das suas atividades empresariais, as pequenas e médias empresas podem encarar os ESGI como uma oportunidade única para aceder, com custos reduzidos, aos conhecimentos técnicos especializados mais atuais da comunidade científica.

2. OS ESGI EM PORTUGAL

Em Portugal, os ESGI têm-se realizado anualmente, um pouco por todo o País, desde 2007 (figura 3a). Têm sido várias as instituições e os investigadores envolvidos, tanto na organização local como na participação dos ESGI em Portugal. A organização nacional tem estado a cargo de uma comissão coordenadora constituída por matemáticos oriundos de diversos centros de investigação partilhada, em cada ano, com uma comissão organizadora local que varia consoante a instituição de acolhimento do evento. Em [7] e na Tabela 1, é disponibilizado um resumo de todos os ESGI realizados em Portugal.

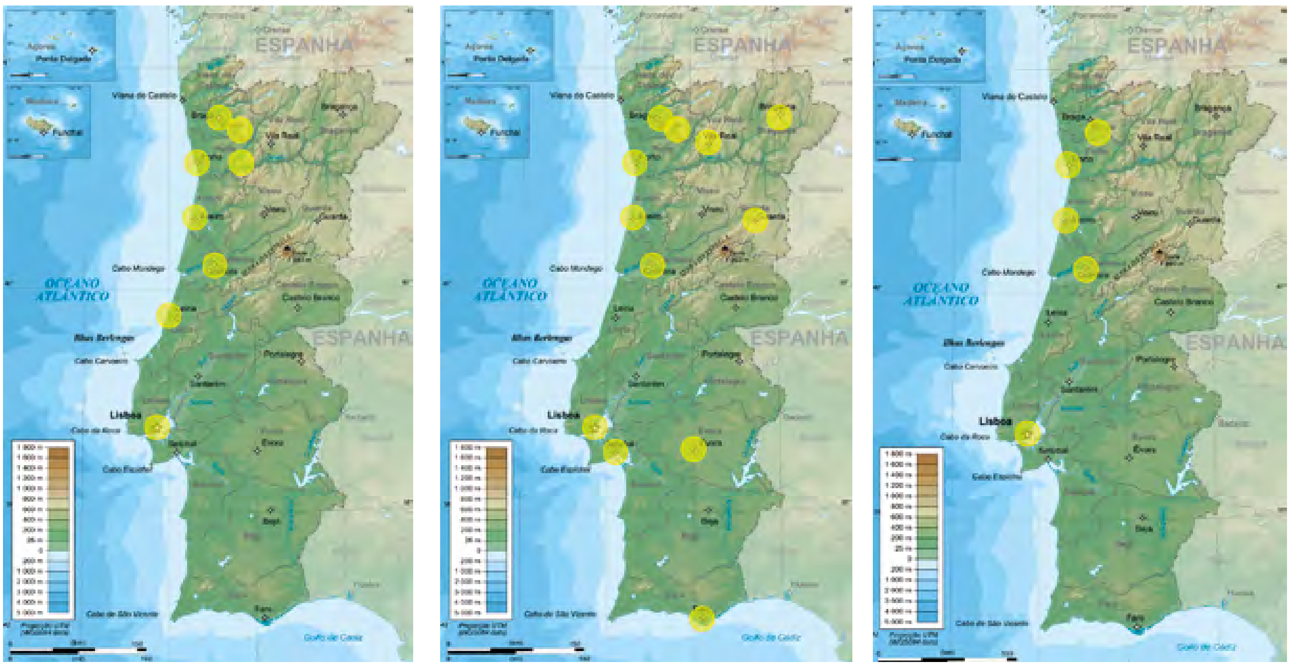
Desde 2007, participaram nas edições portuguesas dos ESGIs empresas dos mais diversos tamanhos, regiões (figura 3b) e setores. Áreas tão diversas como transportes, hotelaria e turismo, retalho e distribuição, calçado, têxtil, tecnologias da informação e informática, distribuição de água, serviços financeiros, energia, farmacêutica, consultoria informática, materiais de construção, moldes, papel e cortiça, aeronáutica ou saúde (ver tabela 1) refletem bem a transversalidade da matemática.

Também na resolução dos desafios colocados pelas empresas é usada uma grande diversidade de técnicas e metodologias matemáticas. Além dos conhecimentos inerentes a áreas específicas como otimização combinatória, equações diferenciais, estatística e simulação estocástica, uma das principais mais-valias para industriais e académicos presentes nestas edições prende-se com a utilização das técnicas de modelação matemática como meio de formalização do problema proposto.

Na primeira edição portuguesa dos ESGI (a sexagésima na série europeia) foram apresentados dois problemas e participaram cerca de 30 investigadores, enquanto nas edições subsequentes este número variou entre quatro e seis problemas e estiveram presentes entre 40 e 60 participantes. Além dos participantes portugueses, oriundos das mais diversas instituições (figura 3c), estes eventos têm acolhido matemáticos de diferentes países, incluindo alunos de mestrado e doutoramento.

O ESGI 60, realizado no Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, foi o primeiro ESGI português. Neste foram propostos dois problemas, pela BRISA e pela Fun Zone Villages. No ano seguinte, em 2008, a Universidade do Porto organizou o ESGI 65, no qual as empresas Grohe, Biosafe e Forever propuseram um total de quatro desafios. Em 2009, a AdP – Águas de Portugal, a Critical Software, a SIBS, a REN e a Sonae Distribuição propuseram cinco desafios para o ESGI 69, na Universidade de Coimbra. A Universidade de Aveiro organizou o ESGI 74, no ano seguinte, tendo sido propostos seis desafios pelas empresas BA Vidro, Bluepharma, Extruverde, Food Bank of Lisbon, Globalvia e Sonae Distribuição. O ESGI 81 teve lugar no Instituto Superior de Economia e Gestão, da Universidade Técnica de Lisboa, em 2011, e contou com quatro desafios colocados pelas empresas Iberomoldes, Critical Software e TAP Maintenance and Engineering. Em 2012, o ESGI 86 teve lugar no Instituto Superior de Engenharia do Porto. Neste evento participaram as empresas Neoturf, TAP Maintenance and Engineering, Sonae Indústria – Produção e Comercialização de Derivados de Madeira, S.A., Euroresinas – Indústrias Químicas, S.A. e INESC. O Instituto Superior de Engenharia de Coimbra organizou no ano se-

▼Figura 3. Os ESGI têm-se realizado um pouco por todo o País com especial incidência no litoral. Além dos participantes portugueses, oriundos de todo o País, há também a registar investigadores de outros países como Reino Unido, Polónia, Malásia e Cabo Verde.



(a) Local (b) Empresas (c) Participantes

Tabela 1. Dez anos de ESGI em Portugal. (Mais informações em *http://www.spm.pt/pt-maths-in/esgi-portugal*).

2007 – ESGI 60	
Brisa	Time travel for a single origin-destination
CONFIDENTIAL	Inverse kinematics for Stewart platform
2008 – ESGI 65	
GROHE	Warehouse storing and collecting of parts
Biosafe	Electrostatic separation of rubber and textiles
Biosafe	Cooling of a rotor
For Ever	Optimization of task assignment in a factory
2009 – ESGI 69	
Águas de Portugal	Estimating the price elasticity of water
SIBS	Fraud detection in plastic card operations
REN	Optimizing a complex hydroelectric cascade in electricity market
Critical	Reliability of a customer relationship manegement
Sonae Distribuição	Management of stock surplus
2010 – ESGI 74	
ba vidro	Lotsizing and Scheduling in BA Vidro
bluepharma	BLUEPHARMA
Grupo FGO	How far can we go in aluminum extrusion
	Food distribution by a food bank among local social solidarity institutions
Globalvia	Evaluation of taxi services provision on airport terminals curbside for picking up passengers
Sonae Distribuição	Checkout area design
2011 – ESGI 81	
Iberomoldes	Multiplier effect of the Engineering & Tooling sector in Portugal
Iberomoldes	Innovation effect on the Engineering & Tooling sector
Critical	Balanced Scorecard, objectives and its relationships
TAP Maintenance & Engineering	Aircraft Components Maintenance Shop Production Planning: Random events prioritization

2012 – ESGI 86	
	Service scheduling in garden maintenance
TAP Maintenance & Engineering	Optimal scheduling of the engine repair process
Sonae Indústria	Modelling fiber flow in fiberboard manufacturing
(Euroresinas)	Modelling drying process in paper manufacturing
INESC Porto	Modelling power networks
2013 – ESGI 92	
activespace	Modelling percolation and fractal structure in aerogels
Critical	Model to Estimate and Monitor the progress of System Testing Phase
	Customer's expected energy consumption
SONAE MC	Picking optimization
2014 – ESGI 101	
TAP Maintenance & Engineering	AMT (airline maintenance technicians) timetabling optimization
edp	Identification of energy supply units
SISCOG	Optimizing crew operations in railways and subways
	Packing and shipping cardboard tubes effciently
2015 – ESGI 109	
Adalberto Estampados	Modelling and optimization of production scheduling
CONFIDENTIAL	Physical model of MDF boards
	Setting the Reserve Fleet
Hospital Braga	Surgical cases packages
Continental	Prediction model to textile parameters
CONFIDENTIAL	Stock and production planning
2016 – ESGI 119	
Savana	Time Reduction of the Packaging Process
Douro Royal Valley / Douro Palace	Revenue Management Pricing in Douro Hotels
edp	Pattern simulation
AVELEDA	Improving the grape reception process - Harvest
Primavera	Optimization of Production Planning

guinte o ESGI 92, tendo sido abordados os problemas propostos pelas empresas Active Space Technologies, Critical Software, Tula e Sonae MC. O ESGI 101 teve lugar na Universidade Nova de Lisboa, em 2014. Neste evento participaram as empresas TAP Maintenance and Engineering, EDP, SISCOG e Spiralpack, tendo cada uma apresentado um desafio. Em 2015, a Universidade do Minho organizou o ESGI 109, que contou com os seis desafios colocados pelas empresas Estamparia Têxtil Adalberto Pinto da Silva S.A., Transportes Urbanos de Braga, Continental e duas empresas que preferiram manter o anonimato, sendo uma da área do mobiliário e outra da área do calçado.

O décimo ESGI realizado em Portugal, ESGI 119, foi fruto de uma organização conjunta da ESTGF e da ESEIG, do Politécnico do Porto. Realizado de 27 de junho a 1 de julho de 2016, este evento contou com a presença de cinco empresas que apresentaram outros tantos problemas, cuja descrição sucinta se apresenta nas linhas seguintes.

Figura 4. Reuniões de atualização de trabalho durante os ESGI 101 e 109.

A Savana Shoes, empresa do setor do calçado, com mais de 27 anos de existência e especializada em calçado infantil, propôs o estudo do seu processo de embalagem, a fim de reduzir a variedade de tamanhos de caixa e o desperdício de espaço vazio no interior das caixas e para eliminar a necessidade de realizar o procedimento experimental até agora sempre utilizado, reduzindo assim o tempo da embalagem e o aumento da eficiência do processo. O grupo de unidades hoteleiras de luxo Douro Palace Hotel Resort & Spa e Douro Royal Valley Hotel & Spa pretendeu estudar a melhor política de preços, encontrando um algoritmo que pudesse gerir o preço ideal com respeito a algumas características que a empresa considera importantes. O terceiro problema foi apresentado pela Aveleda S.A., empresa líder mundial na produção de vinho verde, exportando anualmente mais de metade da sua produção para mais de 70 países em todo o mundo. Esta empresa mostrou a sua preocupação com o facto de a capacidade de processamento das remessas de uva estar longe da sua capacidade máxima, devido à irregularidade do fluxo de uva ao longo do dia, sendo importante melhorar o processo existente. A empresa Primavera BSS solicitou um algoritmo eficaz para agendamento de tarefas de produção que pudesse adicionar novos recursos ao seu *software* de gestão, com um bom desempenho, e que pudesse ser suficientemente genérico e adaptável para ser usado por diferentes indústrias (metal, móveis, madeira, têxtil e indústria de alimentos). Participou ainda no ESGI 119 a EDP (Energias de Portugal), empresa que está entre os grandes operadores europeus do setor da energia, sendo um dos maiores operadores energéticos da Península Ibérica e o maior grupo industrial português. O problema apresentado pela EDP consistia em simular preços de eletricidade, não só para fins de cálculo de medidas de risco, mas também para análise de cenários em termos de preços e estratégia.

Em 2017, caberá à Universidade de Aveiro organizar o próximo *European Study Group with Industry* em Portugal.

De referir que os ESGI em Portugal têm sido financiados, além das empresas participantes, pelos centros de investigação mais diretamente envolvidos na organização. Este ano, o ESGI 119 contou com o financiamento da Ação COST TD1409, *Mathematics for Industry Network* (MI-NET) [6]. O programa *COST – European Cooperation in Science and Technology* – é um dos mais antigos instrumentos a nível europeu para a cooperação entre investigadores, engenheiros e académicos de toda a Europa.

3. ALGUNS CASOS DE SUCESSO

São vários os casos de sucesso de participações de empresas que podem ser reportados. Este sucesso pode ser medido pelas participações consecutivas de empresas nas diversas edições, como é o caso da TAP, da Sonae ou da EDP, bem como pelos testemunhos recolhidos no final das edições ou ainda pelo desenvolvimento de *software* específico, conforme explicitado nos parágrafos seguintes.

Um dos problemas abordados no ESGI 86, no Porto, foi colocado pela Sonae Indústria – Produção e Comercialização de Derivados de Madeira, S. A., e consistia em modelar o fluxo de fibra de madeira e resina no processo de produção de aglomerados de madeira MDF. No final do evento, Telmo Rodrigues, da Sonae Indústria, disse: "Esta participação foi muito importante, pois permitiu-nos perceber alguns fenómenos que ocorrem nos nossos processos que não estavam perfeitamente caracterizados"[9].

Foi ainda trabalhado neste ESGI 86 um problema de agendamento de manutenção de jardins e roteamento de veículos da empresa Neoturf. O CEO desta empresa, Paulo Palha, afirmou: "Este *workshop* excedeu certamente as nossas melhores expectativas, porque o problema que colocámos já tinha sido identificado há mais de dez anos, mas continuava sem solução. Já tínhamos consultado várias empresas de *software* e experimentado algumas das suas propostas de solução, mas nenhuma chegou perto dos resultados conseguidos no grupo de estudo do ESGI." Acrescentou ainda: "Penso que seria muito importante disseminar extensivamente este evento, pois muitas das PME não têm conhecimento do enorme arsenal de técnicas e recursos que os matemáticos possuem para resolver os problemas das empresas"[9].

O trabalho desenvolvido durante o ESGI 101 em Lisboa pelo grupo que abordou o problema proposto pela empresa Spiralpack – Manipulados de Papel, S.A., um dos principais produtores ibéricos de tubos de cartão, deu posteriormente origem ao desenvolvimento de um *software* à medida para resolver o seu problema de empacotamento e transporte de tubos (figura 5).

A empresa de calçado Savana ficou também muito satisfeita com a solução conseguida pelo grupo de trabalho do ESGI 119 (figura 6). O representante desta empresa, Jorge Fernandes, afirmou: "Achamos que o grupo que esteve envolvido nestes processos apresentou soluções que realmente podem fazer a diferença num futuro próximo. Estamos certos de que o ESGI é um impulsor de resolução de problemas, usando a matemática aplicada à indústria. Esperamos que este tipo de eventos mostre, não só às empresas mas ao público em geral, que a ciência do raciocínio lógico e abstrato não é uma ciência que fica reservada às escolas, mas uma ciência que é muito útil na vida das pessoas e das empresas."

Figura 5. Investigadores no ESGI 101 a discutir soluções para o desafio proposto pela Spiralpack.

Figura 6. Representantes da empresa Savana reunidos com os investigadores durante o ESGI 119.

4. OPTIMIZAÇÃO DA RECOLHA DE PRODUTOS NO SUPERMERCADO

Um problema proposto no ESGI92 consistiu em tornar mais eficiente o processo de recolha de produtos nas prateleiras dos supermercados da SonaeMC para responder às encomendas de clientes *online*. Este processo, designado por *picking*, pode ser responsável por 50 a 80% dos custos de operação em armazém [14], pelo que é crucial para uma empresa que esteja otimizado, em termos de rapidez e de custos. O processo de *picking* pode ser otimizado em quatro áreas principais: a localização dos artigos nas prateleiras, o zoneamento (zonas de trabalho a que os *pickers* estão confinados), a consolidação de encomendas, e o roteamento (definição dos percursos de recolha dos produtos) [12]. A abordagem escolhida pelo grupo de trabalho no ESGI92 foi a optimização dos percursos de recolha dos produtos, de forma a diminuir as distâncias percorridas pelo funcionário.

O problema consiste num problema de roteamento de veículos com capacidades (CVRP) [13], com restrições adicionais que dizem respeito à organização dos produtos no carrinho de recolha. Os produtos de diferentes clientes devem ser colocados no carrinho em caixas distintas, que estão sujeitas a um limite de peso e capacidade.

Para tal, foi desenvolvido um modelo de programação linear inteira e uma heurística [8].

Dado um conjunto de encomendas de diferentes clientes, o modelo de programação inteira tem como função objetivo minimizar a distância percorrida para recolher todos os produtos, satisfazendo as restrições de peso e capacidade do carrinho e impondo que cada caixa contém itens de um único cliente.

Seja I_c o conjunto de itens encomendados pelo cliente $c \in C$ e $I = \cup_{c \in C} I_c$ o conjunto de itens a recolher.

Um *item* i é subentendido como a quantidade de um produto específico encomendado por um cliente c_i, i.e., no modelo, se o mesmo produto for encomendado por diferentes clientes é representado por diferentes itens.

O digrafo $G = (V_I, A, \rho)$ associado (figura 7) con-

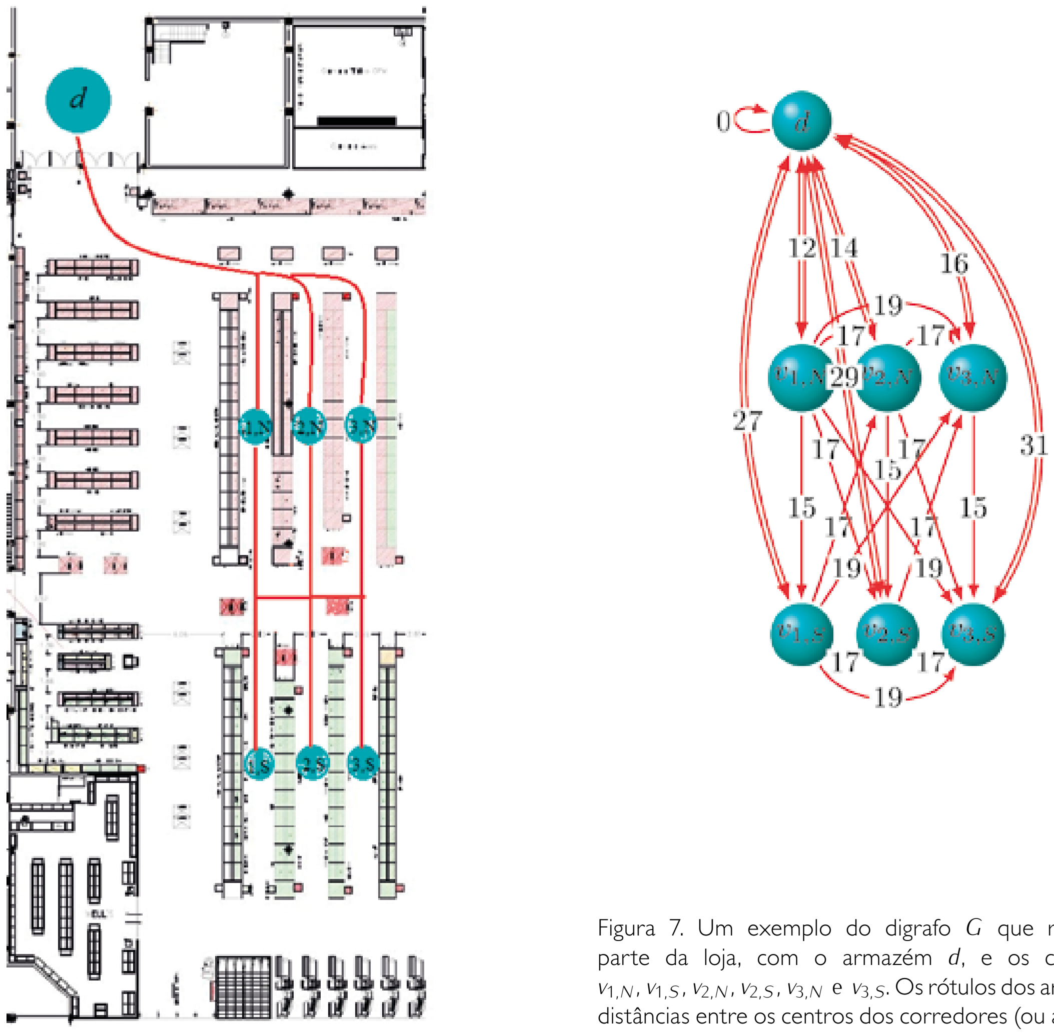


Figura 7. Um exemplo do digrafo G que representa parte da loja, com o armazém d, e os corredores $v_{1,N}$, $v_{1,S}$, $v_{2,N}$, $v_{2,S}$, $v_{3,N}$ e $v_{3,S}$. Os rótulos dos arcos são as distâncias entre os centros dos corredores (ou armazém).

tém um vértice d que representa o armazém e vértices $v_i \in V$ que representam o centro de cada corredor no supermercado.

Note-se que, enquanto V consiste em todos os corredores do supermercado (e o armazém), V_I contém apenas os corredores onde estão os itens a ser recolhidos e o armazém.

Para definir o conjunto de arcos A, considerou-se uma ordenação total do conjunto de corredores, sem o armazém, $V_I \backslash \{d\}$ tal que $u < v$ se e só se $u_x < v_x \vee (u_x = v_x \wedge u_y > v_y)$, onde (u_x, u_y) e (v_x, v_y) são as coordenadas do centro dos corredores $u, v \in V_I \backslash \{d\}$. Assim, os arcos A do grafo são $A = \{(u,v) \in (V_I \backslash \{d\})^2 \mid u < v\} \cup \{(u,v) \in V_I^2 \mid u = d \vee v = d\}$. O peso de cada arco $(u,v) \in A$ foi definido através de uma função $\rho : A \to \mathbb{R}$ que calcula a distância mínima que o funcionário precisa de percorrer ao longo dos corredores do supermercado para ir desde o vértice u, localizado no centro desse corredor, até ao vértice v, no centro de outro corredor (não é, portanto, a distância euclidiana usual).

As variáveis de decisão do modelo são variáveis binárias $x_{uv}^r = 1$ se o arco $(u,v) \in A$ é selecionado na rota r, com $r = 1, \ldots, R$, e $y_i^{rb} = 1$ se o item $i \in I$ é recolhido na rota r e colocado na caixa b, com $r = 1, \ldots, R$, e $b = 1, \ldots, B$, sendo R o máximo número de rotas permitido e B o número de caixas por carrinho.

A função objetivo (1) pretende minimizar a distância total percorrida:

$$\text{Min} \sum_{1 \leq r \leq R} \sum_{(u,v) \in A} \rho_{uv} x_{uv}^r. \tag{1}$$

Para garantir que há no máximo um arco a sair de cada corredor v, e no máximo um arco a entrar, em cada rota r, para todos os vértices de $V_I \backslash \{d\}$, usam-se as restrições (2) e (3).

$$\sum_{(v,u) \in A} x_{vu}^r \leq 1 \forall r = 1, \ldots, R, \ \forall v \in V_I \backslash \{d\}, \tag{2}$$

$$\sum_{(u,v) \in A} x_{uv}^r \leq 1 \forall r = 1, \ldots, R, \ \forall v \in V_I \backslash \{d\}. \tag{3}$$

As equações (4) garantem que, para cada rota, o número de arcos de entrada em cada corredor é igual ao número de arcos de saída.

$$\sum_{(v,u) \in A} x_{vu}^r = \sum_{(u,v) \in A} x_{uv}^r \forall r = 1, \ldots, R, \forall v \in V_I \backslash \{d\}. \tag{4}$$

As restrições (5) e (6) garantem que cada corredor é visitado pelo menos uma vez no total das rotas.

$$\sum_{r=1,\ldots,R} \sum_{(v,u) \in A} x_{vu}^r \geq 1 \forall v \in V_I \backslash \{d\}, \tag{5}$$

$$\sum_{r=1,\ldots,R} \sum_{(u,v) \in A} x_{uv}^r \geq 1 \forall v \in V_I \backslash \{d\}. \tag{6}$$

Há restrições (7) e (8) semelhantes para que cada rota passe pelo armazém d apenas uma vez:.

$$\sum_{(d,u) \in A} x_{du}^r = 1 \forall r = 1, \ldots, R, \tag{7}$$

$$\sum_{(u,d) \in A} x_{ud}^r = 1 \forall r = 1, \ldots, R\,. \tag{8}$$

As restrições seguintes dizem respeito a que durante a recolha os itens sejam logo colocados separadamente em caixas de acordo com os clientes.

$$\sum_{r=1,\ldots,R} \sum_{b=1,\ldots,B} y_i^{rb} = 1 \ \forall i \in I, \tag{9}$$

$$\sum_{b=1,\ldots,B} y_i^{rb} \leq \sum_{(u,v_i) \in A} x_{uv_i}^r \ \forall r = 1, \ldots, R \ \forall i \in I. \tag{10}$$

Em (9) força-se que cada item seja colocado em uma e uma só caixa, durante uma e uma só rota. Se um item é recolhido numa dada rota, o seu corredor tem de ter sido visitado nessa rota (10). As desigualdades (11), definidas $\forall i \in I, \forall j \in I \backslash I_{c_i}, \forall r = 1, \ldots, R, \forall b = 1, \ldots, B$, garantem que, numa dada rota, cada caixa não pode conter itens de clientes diferentes.

$$y_i^{rb} + y_j^{rb} \leq 1. \tag{11}$$

Por fim, adicionam-se restrições para que o peso (12) e volume (13) totais dos itens recolhidos numa rota não exceda a capacidade do veículo e das caixas.

$$\sum_{i \in I} w_i y_i^{rb} \leq W \forall r = 1, \ldots, R, \ \forall b = 1, \ldots, B, \tag{12}$$

$$\sum_{i \in I} s_i y_i^{rb} \leq S \forall r = 1, \ldots, R, \ \forall b = 1, \ldots, B. \tag{13}$$

Este modelo foi implementado em AMPL e testado num conjunto de dados reais respeitantes a encomendas de uma dada semana para um dos maiores supermercados da cadeia SonaeMC. Como a complexidade deste tipo de modelos é não polinomial, usou-se uma heurística para reduzir a dimensão do problema. A heurística agrupa os clientes consoante a semelhança entre os produtos encomendados, de forma a que o modelo de programação inteira seja capaz de resolver o problema em tempo razoável.

Os resultados obtidos com este modelo foram comparados com uma simulação do procedimento corrente na empresa e concluiu-se que permitia melhorar a taxa de picking em 24% e reduzir a distância percorrida em 39%, um resultado claramente acima das metas indicadas pela empresa no Study-Group.

5. UMA NOVA INTERFACE NACIONAL ENTRE MATEMÁTICA E INDÚSTRIA

A partir de 2016, os ESGI em Portugal passaram a ser organizados pela recém-criada Rede Portuguesa para a Indústria e Inovação (PT-MATHS-IN) [7], que é o núcleo português da *European Service Network of Mathematics for Industry and Innovation* (EU-MATHS-IN) [2], e que foi formalmente instituída como membro pleno desta rede internacional em dezembro de 2015.

Constituída como uma secção da Sociedade Portuguesa de Matemática e tendo como membros fundadores 13 dos principais centros de investigação em matemática do País, a PT-MATHS-IN foi fruto de um crescente dinamismo de um grupo de investigadores na área da Matemática Industrial, que sob a égide da EU-MATHS-IN tem vindo a desenvolver, nos últimos anos, diversas iniciativas em colaboração com empresas portuguesas no setor industrial e de serviços.

Esta organização pretende, a médio prazo, consolidar-se como um ponto de referência da Matemática Industrial em Portugal, assumindo uma função de suporte ao desenvolvimento de sinergias entre a academia e a indústria, prestando assim um serviço de relevo não só a estas duas comunidades, como também indiretamente a toda a Sociedade.

A exemplo das suas congéneres europeias, a PT-MATHS-IN pretende ser um interlocutor entre a matemática desenvolvida nas universidades, nos institutos, nos centros de investigação e a indústria com os seus constantes desafios e potenciadora de campos inovadores de investigação. O seu modelo de ação assenta na criação de sinergias Matemática-Indústria, sob a forma de parcerias, desenvolvimento de aplicações científicas, candidaturas a projetos, dinamização de grupos de investigação multidisciplinares, formação e divulgação, entre outros.

A PT-MATHS-IN pretende também difundir o mundo da matemática industrial pelos jovens matemáticos portugueses. Exemplo disso é a realização das semanas ibéricas de modelação (*Iberian Modelling Weeks*) em conjunto com a Rede Española Matemática-Industria (math-in) [4]. Enquanto os ESGI, dada a complexidade dos problemas e ritmos de trabalho, são dirigidos a investigadores séniores, as *modelling weeks* assentam em desafios também reais, mas mais indicados para o principal público alvo, ou seja, os estudantes de 2.º e 3.º ciclo do ensino superior. Estes eventos pretendem dotar aqueles jovens matemáticos de competências adicionais a nível da modelação matemática, com aplicações diretas em problemas industriais, promovendo simultaneamente a sua integração junto da comunidade ibérica de Matemática Industrial com vantagens por demais evidentes. A primeira edição da *Iberian Modelling Week* decorreu em Coimbra, em 2014, seguindo-se a segunda em Santiago de Compostela, em 2015. À edição de 2016, que decorreu em abril no Porto, sucederá a edição de 2017 que decorrerá em Espanha, com organização local a cargo de um dos membros da *math-in*. O histórico das várias edições pode ser visto em [3].

REFERÊNCIAS

[1] ECMI: European Consortium for Mathematics in Industry. *http://www.ecmi-indmath.org.*

[2] EU-MATHS-IN: European Service Network of Mathematics for Industry and Innovation. h*ttp://www.eu-maths-in.eu/EUMATHSIN/.*

[3] III Iberian Modelling Week. *http://www.fc.up.pt/mat/3imw/*

[4] MATH-IN: Red Española de Matemática – Industria. *http://math-in.net.*

[5] Mathematics in Industry Information Service. *http://miis.maths.ox.ac.uk/.*

[6] MI-NET: Mathematics for industry network. *https://mi-network.org.*

[7] P T-MATHS-IN: Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação. *http://www.spm.pt/pt-maths-in.*

[8] M. Cruz, I.C. Lopes I.; A. Moura e E. Costa e Silva. *A mathematical model for supermarket order picking*. In Capasso V. Nicosia G. Romano V. Russo, G., editor, *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2012*, ECMI book subseries of Mathematics in Industry, Taormina, Itália, 9 a 13 junho 2014. Springer. Proceedings of the 8th European Conference on Mathematics for Industry.

[9] M. Cruz. "The 86th European Study Group with Industry." *Bulletin of the International Center for Mathematics*, 32:13 14, 2012.

[10] P. Freitas. European Study Groups with Industry in Portugal: importing a forty year old concept. *Bulletin of the International Center for Mathematics*, 25:7 9, 2008.

[11] P. Freitas. European Study Groups with Industry at 40 years. *SIAM News*, 42(2), 2009.

[12] Le-Duc T. Koster, R e K. J. Roodbergen. Design and control of warehouse order picking: a literature review. European Journal of Operational Research, 182 (2): 481 501, 2007

[13]P. Toth e D. Vigo. The vehicle routing problem. Monographs on Discrte Mathematics Applications, 2002. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[14] J. P. Van den Berg. A literature survey on planning and control of warehousing systems. IIE Transactions, 31(8): 751-762, 1999

SOBRE AS AUTORAS

Eliana Costa e Silva é doutorada em Engenharia na área de Automação e Robótica, mestre em Matemática e Aplicações à Mecânica e licenciada em Matemática, pela Universidade do Minho. Actualmente é docente no Politécnico do Porto, membro integrado do Centro de Inovação e Investigação em Ciências Empresariais e Sistemas de Informação (CIICESI) da ESTG/P.Porto e colaboradora do Centro ALGORTMI da Universidade do Minho.

Isabel Lopes é doutorada em Engenharia Industrial - Investigação Operacional pela Universidade do Minho, mestre e licenciada em Matemática pela Universidade do Porto. Actualmente é docente no ISCAP do Politécnico do Porto, vice-presidente da APDIO e membro integrado do LEMA - Laboratório de Engenharia Matemática.

Aldina Correia é doutorada em Ciências Matemáticas pela Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), mestre em Matemática Aplicada pela Universidade do Porto, licenciada em Matemática pela UTAD. Actualmente é docente na ESTG do Politécnico do Porto, coordenadora do mestrado em Métodos de Apoio à Decisão Empresarial e membro efectivo do CIICESI da ESTG/P.Porto.

Fabio Chalub
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

MATÉRIA ATRAI MATÉRIA... E A ANTIMATÉRIA?

A Lei da Gravidade de Newton afirma que duas partículas se atraem, sobre a linha que as une, com uma força proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância. Mas o que é que aconteceria se tivéssemos partículas de massa negativa? Será possível que tenhamos por aí partículas que se repelem? Será a antimatéria uma candidata a sentir a força *antigravitacional*? Uma nova pesquisa lança luz nestes antigos mistérios.

Matéria atrai matéria. É por isso que a Terra gira em torno do Sol. Na verdade, é por isso que a própria Terra existe: sem esta propriedade universal, o universo não passaria de um conjunto de grãos de poeira distribuído de forma aproximadamente uniforme. Foi Newton quem primeiro colocou a atração entre dois objetos em bases matemáticas sólidas: duas partículas atraem-se com uma força proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Veja a figura 1. É interessante notar que a constante de proporcionalidade, chamada constante de Gravitação Universal, G, é independente dos objetos envolvidos. Ou seja, a força com que duas bolas de 1 kg de ouro se atraem é a mesma de duas esferas de igual massa, mas feitas de madeira, ou mesmo se fosse uma de madeira e outra de ouro.

Isto, no entanto, é parte da história. Por um lado, a força gravitacional é proporcional à massa; por outro lado, o seu efeito, a alteração do estado de movimento a que chamamos *aceleração*, é inversamente proporcional à massa. Esta é a segunda lei de Newton ("força é igual a massa vezes aceleração"). Estes dois fenómenos cancelam-se, e a massa de um objeto é afinal irrelevante para entender o seu movimento sob efeito único da gravidade.

É isto o que havia percebido Galileu alguns anos antes, ao notar que objetos de diferentes massas caíam

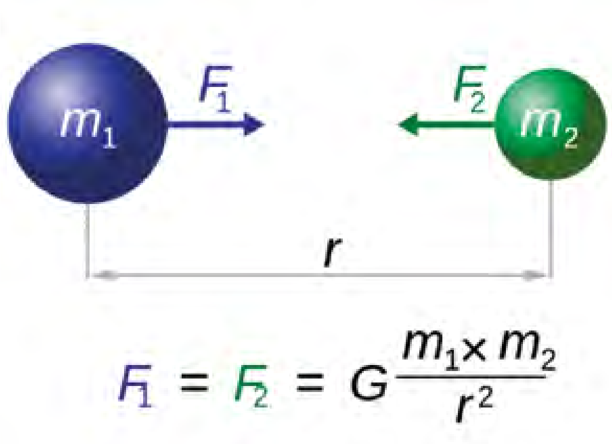


Figura 1. A Lei da Gravitação de Newton: duas partículas de massas m_1 e m_2 positivas atraem-se de acordo com a expressão da figura. **Fonte: Wikimedia commons.**

livremente a partir do repouso sempre com a mesma velocidade. Não só objetos feitos do mesmo material mas com massas distintas empatavam a corrida gravítica, como também objetos de materiais distintos corriam emparelhados. Este fenómeno intrigou cientistas ao longo dos séculos, sendo Newton provavelmente o primeiro a perceber que a massa não mede apenas o quanto um objeto resiste a ter seu estado de movimento alterado (a chamada *inércia*) mas também mede a capacidade de um corpo atrair tudo o que está em seu redor.

Para entender melhor esta questão, vamos supor que a massa que entra na formulação da segunda lei de Newton, m, não é a mesma que aparece da Lei da Gravitação Universal, a que chamaremos de massa gravítica m_g. Assim, para calcular a aceleração a de um objeto com massas inercial e gravítica m e m_g, respetivamente, em queda livre, a distância r de uma partícula fixa de massa gravitacional m_g, temos de resolver

$$G\frac{M_g m_g}{r^2} = ma \ ,$$

e portanto

$$a = G\frac{M_g}{r^2}\frac{m_g}{m} \ .$$

Desta forma podemos testar experimentalmente se as massas inerciais e gravitacionais são idênticas medindo as suas acelerações em queda livre. Supondo todos os objetos no mesmo sítio (ou seja, o mesmo valor de r), a identidade $m_g = m$ leva a acelerações que não dependem do objeto. Isto sabemos ser verdade (pelo menos aproximadamente) desde, pelo menos, Galileu. Muitos outros experimentos foram feitos com resultados semelhantes.

No entanto, não é difícil ver que esta ideia não está devidamente entranhada na mente das pessoas, mesmo de cientistas profissionais. Pense num hipotético objeto de massa negativa e largue-o no ar. Ele sobe ou desce? A maioria das pessoas, pela minha experiência, diz que "sobe". Falso: se, neste caso, a força da gravidade aponta para cima, também a aceleração deve ser na direção oposta da força, resultando num movimento tal e qual o da matéria "normal". De alguma forma, ao dizer que o corpo de massa negativa deve subir sob ação da gravidade, a nossa intuição diz-nos que apenas um dos termos da equação acima mudou de sinal. Por outras palavras, teríamos massa gravitacional negativa com massa inercial positiva (ou o contrário), o que mostra o quão pouco intuitiva é a ideia de que estas são duas faces da mesma moeda.

Fica ainda a questão fundamental sobre o que aconteceria com um objeto de massa zero, como a luz. Por um lado, ao não ter massa, não deve interagir gravitacionalmente; por outro, seria uma estranha exceção, já que mesmo objetos de massa muito ténue (positiva ou negativa!) são atraídos da mesma forma. De facto, a primeira vez que se vislumbrou o conceito de buraco negro, um objeto tão massivo que nem a luz lhe escapa, foi em 1783, por obra de John Mitchel. A ideia não foi genericamente aceite, pois, como sabem os mais jovens estudantes, não podemos *cortar* zeros de ambos os lados da equação.

A situação muda, e muito, com o advento da já centenária Teoria Geral da Relatividade, de Albert Einstein. Esta mostra que a identidade entre os dois tipos de massas não é uma simples coincidência do nosso universo, mas uma propriedade central de tudo aquilo que conhecemos. Para Einstein, não há observadores privilegiados, não há referenciais melhores do que outros. Devemos todos descrever as mesmas leis da física. Assim, um astronauta que flutua no espaço sideral e outro em queda livre sob ação da gravidade devem ter descrições consistentes das suas realidades. Se as massas inerciais e gravitacionais fossem distintas, enquanto o primeiro experimentador veria todos os objetos a acompanhá-lo no seu movimento em linha reta com velocidade constante cosmos afora, o segundo veria movimentos relativos, com alguns objetos caindo mais rapidamente e outros mais lentamente. Desta forma, estes dois referenciais não seriam equivalentes, e as leis da física dependeriam do referencial. A equivalência entre todos os referenciais é conhecida como *princípio de equivalência*.

Em física, o árbitro último é a experiência. Portanto, devemos sempre continuar a verificar as previsões experimentais no laboratório. A Teoria Geral da Relatividade é extremamente bem estabelecida no seu domínio próprio, dos objetos com muita massa. Mas tem pouco a dizer quando estamos no domínio da física de altas energias (partículas) em que a Mecânica Quântica dá as cartas. Desta forma, a investigação em [1] analisou a razão entre as massas inerciais e gravitacionais tanto para a matéria quanto para a anti matéria. Apesar de sermos capazes de isolar muitas partículas elementares, o campo gravitacional por estas gerado é tão fraco que nunca fora possível mostrar se a antimatéria é atraída ou repelida pela matéria. Até então, tudo o que sabíamos era que $-65 < {}^{m_g}/_{m} < 110$, não permitindo eliminar o estranho efeito conhecido como "antigravidade".

Com as novas técnicas introduzidas pelo jovem físico russo Tigran Kalaydzhyan, nascido em 1987 na União Soviética, foi possível melhorar tanto as estimativas para o elétrão como para o positrão para $0.96 < {}^{m_g}/_{m} < 1.04$ usando dados do *Large Electron–Positron Collider (LEP)*, um famoso acelerador de partículas do Centro Europeu de Investigação Nuclear. Veja a figura 2. Considerando as correções devido ao campo gravitacional gerado pelo super aglomerado local de galáxias, uma imensa estrutura de aproximadamente 500 milhões de anos luz de diâmetro, a estimativa obtida foi de $1 - 4 \times 10^{-7} < {}^{m_g}/_{m} < 1 + 2 \times 10^{-7}$, tanto para o elétrão

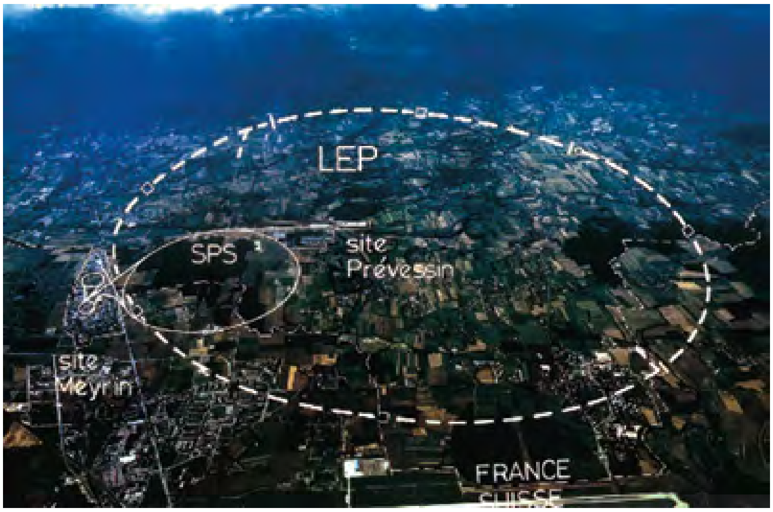


Figura 2. Grande colisor de eletrões e positrões, na fronteira franco-suíça. Numa direção, atiram-se eletrões a velocidades altíssimas; na direção contrária, voam suas antipartículas, os positrões. Do resultado das suas colisões, estudam-se as suas propriedades – e também as propriedades de outros constituintes da matéria. **Fonte:** ***http://scienceblogs.com/startswithabang/files/2011/05/lep-birdsview.gif***

Figura 3. Galileu Galilei (1564-1642), Isaac Newton (1643-1727) e Albert Einstein (1879-1955): três das mentes mais brilhantes da humanidade que se sentiram intrigadas e atraídas pela estranha identidade entre a massa inercial e a gravitacional. **Retratos em domínio público.**

como para sua antipartícula, o positrão. Desta forma, a identidade verificada por Galileu, que intrigou Newton e inspirou Einstein, foi demonstrada em domínios que estes nem suspeitavam existir (figura 3).

REFERÊNCIAS

[1] Tigran Kalaydzhyan, "Gravitational mass of relativistic matter and antimatter", *Physics Letters B*, Volume 751, 17 December 2015, Pages 29-33, ISSN 0370-2693, *http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2015.10.014*.

ÓSCAR FELGUEIRAS
Universidade
do Porto
olfelgue@fc.up.pt

O PROBLEMA DE MONTY HALL

Um concurso televisivo iniciado nos anos 60 inspirou um problema que ficou conhecido pelo nome do seu apresentador, Monty Hall. Mais do que a profundidade da questão matemática em si, este problema é revelador da dificuldade que o ser humano tem em ajuizar de forma correta uma situação envolvendo probabilidades.

Foi nos anos 90 que o problema de Monty Hall ganhou notoriedade ao aparecer na *Parade*, a revista de maior circulação nos EUA, com mais de 35 milhões de exemplares semanais. Numa coluna de perguntas e respostas, Marilyn vos Savant, famosa por ter surgido no Guinness Book, em 1985, como detentora do título de pessoa com o maior QI obtido num teste de inteligência, escrevia sobre vários assuntos. Um título algo controverso e que perdurou até 1989, altura em que deixou de ser atribuído, devido à sua elevada subjetividade. No entanto, Marilyn vos Savant soube aproveitar a publicidade gerada e graças a isso foi convidada pela *Parade*. Em 1990, houve um leitor que lhe propôs o seguinte problema:

Suponha que num concurso televisivo é dada ao concorrente a escolha de uma de três portas. Atrás de uma porta está um carro, atrás das outras, cabras. O concorrente escolhe uma porta, digamos a número 1, e o apresentador, que sabe o que está por detrás das portas, abre uma outra porta, digamos a número 3, que tem uma cabra. Ele pergunta ao concorrente se prefere escolher a porta número 2. Será que o concorrente tem alguma vantagem em alterar a sua escolha de portas?

Marilyn vos Savant respondeu a esta questão de forma bastante concisa dizendo que, de facto, valia a pena alterar a escolha de portas. A porta 1 tem uma probabilidade de $1/3$ de ter o carro ao passo que a porta 2 tem uma probabilidade de $2/3$. Como forma de visualizar melhor a situação, acrescentou que se existisse um milhão de portas, o concorrente escolhesse a porta 1 e o apresentador abrisse todas as outras portas menos a porta número 777777, então provavelmente a escolha seria fácil. De facto, a probabilidade de a porta 1 ser a correta seria de $1/1000000$ ao passo que a da porta 777777 seria de $999999/1000000$.

No entanto, após a publicação da sua resposta ao problema, Marilyn vos Savant recebeu milhares de cartas de leitores, a grande maioria dos quais (cerca de 90%) a discordarem do seu raciocínio. Muitas destas cartas eram provenientes de doutorados de várias áreas, nomeadamente matemáticos. A reação mais comum dos leitores que lhe escreveram era acharem que a probabilidade de ganhar o carro era de $1/2$ em ambas as portas. Certamente que se alguém entrasse no concurso apenas no momento de decidir a troca de portas sem conhecer o processo que levou à eliminação de uma das portas, então haveria igual probabilidade de ambas as portas esconderem o carro. Contudo, a informação adicional sobre a forma como foi eliminada a porta pelo apresentador é essencial, dado que não é feita aleatoriamente. Uma forma simples de analisar a questão é verificar o que acontece quando o concorrente escolhe a porta 1, nos três casos possíveis para a localização do carro, de acordo com a seguinte tabela:

Porta 1	Porta 2	Porta 3	Mudar de porta	Manter a porta
Carro	Cabra	Cabra	Cabra	Carro
Cabra	Carro	Cabra	Carro	Cabra
Cabra	Cabra	Carro	Carro	Cabra

Daqui decorre que o concorrente, ao mudar de porta, só perderá caso a porta escolhida inicialmente seja aquela onde está o carro, isto é, apenas numa das três possibilidades. A página de Marilyn vos Savant[1] contém mais detalhes sobre a polémica, nomeadamente alguns exemplos de cartas por ela recebidas. Existem várias páginas na Internet onde se encontram simulações do problema em questão, tais como nas abaixo indicadas[2,3].

Não deixa de ser curioso que o problema de Monty Hall tenha sido originalmente colocado por Steve Selvin em 1975[4], acompanhado por uma solução correta. Já na altura ele recebeu várias reações negativas à sua solução, pelo que voltou a abordar o assunto no número seguinte[5], apresentando uma resolução envolvendo probabilidades condicionadas. Eventualmente devido ao carácter científico da revista onde foi publicado, este problema não obteve logo uma atenção comparável à dada a Marilyn vos Savant. Ainda assim, o próprio Monty Hall escreveu a Steve Selvin, em resposta a uma carta deste, esclarecendo que as regras do seu concurso não eram bem as do problema. Além disso, concordava que se o concorrente pudesse mudar, então a probabilidade de a porta escolhida conter o prémio seria a mesma que no início. A carta de Monty Hall pode ser encontrada na página oficial do concurso por ele apresentado, *Let's Make A Deal*[6], o qual continua hoje em dia a ser exibido, apesar de iniciado em 1963 e com algumas interrupções ao longo do tempo.

Buscando a origem do que é essencial no problema de Monty Hall, é justo referir que, em 1959, Martin Gardner[7] publicou um problema que lhe é equivalente, tendo também recebido uma enchente de cartas de leitores a favor e contra a sua resposta. O problema era o seguinte:

Três condenados, A, B e C, estão presos em celas separadas e um deles, escolhido de forma aleatória, vai ser amnistiado. O guarda da cadeia sabe qual o prisioneiro que vai ser amnistiado mas não pode revelá-lo. O prisioneiro A, sabendo disto, pede ao guarda que lhe diga qual será um dos outros a não ser amnistiado. No caso de os outros dois serem condenados, o guarda deve atirar uma moeda ao ar de modo a escolher o nome de um deles. Para manter o procedimento em sigilo, o guarda só dirá o nome do prisioneiro não amnistiado no dia seguinte. O guarda vai para casa, pensa no assunto e, como lhe parece que não estará a alterar as hipóteses de absolvição de A, decide revelar que B não foi amnistiado. O prisioneiro A fica todo contente por achar que a sua probabilidade de sair da cadeia aumentou de 1/3 para 1/2. Além disso, A consegue comunicar com C, o qual também fica convencido de que a sua probabilidade de sair da cadeia aumentou de 1/3 para 1/2. Será que os prisioneiros estão corretos?

Martin Gardner mostrou que os prisioneiros estão enganados e que a probabilidade de A ser amnistiado é de 1/3 ao passo que a de C é de 2/3. Talvez esta resposta agora não surpreenda o leitor.

O problema de Monty Hall já foi tema do programa televisivo *Isto é Matemática*, apresentado por Rogério Martins[8], no qual é exposta a situação de uma forma bem-humorada. É um problema que, apesar de aparentemente simples, engana muita gente. O conceituado matemático Paul Erdös, por exemplo, teve conhecimento dele em 1995 e, apesar de lhe ter sido mostrada a prova de que havia vantagem em mudar, teve grande relutância em ficar convencido. A sua primeira reação foi: "Não, isso é impossível, não devia fazer nenhuma diferença (escolher uma porta ou outra)"[9].

[1] *http://marilynvossavant.com/game-show-problem/*

[2] *http://www.shodor.org/interactivate/activities/SimpleMontyHall/*

[3] *http://math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html*

[4] Selvin, S. "A problem in probability (letter to the editor)", *Am. Statist.* 29 67, 1975, disponível em *www.jstor.org/stable/2683689*

[5] Selvin, S. "On the Monty Hall problem (letter to the editor)", *Am. Statist.* 29 134, 1975

[6] *http://www.letsmakeadeal.com/problem.htm*

[7] Gardner, M. "Mathematical Games: Problems involving questions of probability and ambiguity", *Scientific American*, 201 (4), 174–182, 1959

[8] *http://www.youtube.com/watch?v=K0zrUomGGHY&t=409s*

[9] Vazsonyi, A. "Which Door Has the Cadillac?", *Decision Line*, December/January 1999 17-19.

SOLUÇÕES GEOMÉTRICAS DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Fátima Vinagre

Escola Secundária da Azambuja

mfatimavinagre@gmail.com

INTRODUÇÃO

A técnica que iremos tratar consiste num método geométrico de determinação das soluções de equações algébricas a uma incógnita, usado por Lill na sua publicação de *Nouvelles Annales de Mathematiques*, Série 2, Vol. 6, 1867, pág. 359, particularizado para equações quadráticas a uma incógnita.

Para aplicar este método necessitamos apenas de usar papel milimétrico, um esquadro e um compasso ou um qualquer programa informático de geometria dinâmica.

Ao que se conhece, foram poucos os autores a descrever esta técnica, o que é surpreendente, dada a sua aparente simplicidade, tendo sido inicialmente descrita para equações quadráticas com soluções reais.

Existem rumores de que o método era conhecido em certas regiões de França e de que alguns professores de matemática elementar e do ensino secundário o deram a conhecer aos seus alunos.

Pretende-se que com este método o leitor tenha ao seu dispor uma técnica de visualização das soluções de qualquer equação quadrática em função da variação dos coeficientes da respetiva equação algébrica.

SOLUÇÕES GEOMÉTRICAS DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Considere-se a família de equações algébricas do segundo grau a uma incógnita, na sua forma canónica,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

com a, b e c coeficientes reais, sendo não nulo.

Este artigo tem como objetivo apresentar um caso particular do método de Lill que determina as soluções geométricas de uma equação algébrica, nomeadamente para determinar as soluções geométricas de uma equação quadrática, usando um esquadro e um compasso.

Como se sabe, as soluções deste tipo de equações são dadas algebricamente por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Comece-se por expressar os coeficientes a, b e c através de segmentos de reta, formando uma linha poligonal aberta em que segmentos de reta consecutivos são perpendiculares entre si. [1] Designemos esta linha poligonal por caminho.

Construa-se o caminho da seguinte forma:

De um ponto O, tomado arbitrariamente, constrói-se um segmento de reta OA com comprimento igual a $|a|$ e considera-se este segmento de reta como a unidade de comprimento.

Perpendicularmente a AO, desenha-se um segmento de reta AB com comprimento igual a $|b|$, ficando B à esquerda de A, se b for positivo, e B à direita de A, caso b tenha sinal contrário.

Por fim, perpendicularmente ao segmento de reta AB, desenha-se um segmento de reta BC com comprimento igual a $|c|$, ficando C abaixo de B, se c for positivo, e C acima de B, se c for negativo.

O caminho construído tem extremidades em O e C, os segmentos de reta consecutivos que o constituem formam entre si ângulos retos e são em número igual ao número de termos que tem uma equação quadrática.

De seguida, construam-se, se possível, outros caminhos que liguem O a C, mas agora com menos um segmento de reta do que o caminho inicial e designem-se estes por caminhos reduzidos. Os segmentos de reta que os constituem devem ser perpendiculares.

Se existirem tais caminhos reduzidos, estes existem no máximo em número igual ao grau da equação, ou seja 2, cuja demonstração deixamos a cargo do leitor.

Assim, se pudermos ir do ponto O ao ponto C, fazendo um ou dois outros caminhos $OA'C$ e $OA''C$, com menos um segmento de reta do que o caminho inicial, em que A' e A'' pertencem a AB do caminho inicial (ou a uma reta que contém AB), então o comprimento de AA' e AA'' são os valores absolutos das raízes (ou soluções) reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Repare-se que, construindo um caminho inicial $OABC$ conforme descrito anteriormente e considerando o segmento de reta[1] que une os pontos O e C, é possível construir uma circunferência de diâmetro com compri-

[1] Tal segmento de reta existe sempre, uma vez que $a \neq 0$.

mento igual a $\overline{OC}$ e centro no ponto médio do segmento de reta OC.

Considere-se a reta r perpendicular ao segmento de reta OA que passa no ponto A.

Então, a circunferência ou não interseta a reta r ou interseta-a em um ou dois pontos.

Se a circunferência não interseta a reta r, então não é possível construir um caminho reduzido e, portanto, a equação não tem raízes reais.

Se a circunferência interseta a reta r em um ou dois pontos, então é possível construir um ou dois caminhos, respetivamente, fazendo uso de conhecimentos básicos de geometria euclidiana no plano.

Vejamos o que acontece quando a circunferência interseta a reta em apenas um ponto (figura 1). Seja A' esse ponto.

Como a circunferência tem diâmetro OC e A' é o ponto de tangência da circunferência com a reta r, então ou A' coincide com A, ou A' é distinto de A.

Se A' coincide com A, então $\overline{AA'} = 0$ e, portanto, zero é o valor absoluto da raiz real de uma equação do 2.º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, uma vez que quando A' coincide com A, necessariamente $b = c = 0$ e, consequentemente, a equação tem apenas uma raiz real, sendo esta igual a zero.

Se A' é distinto de A, então considera-se o caminho reduzido $OA'C$ [2].

Note-se que neste caso, ou os pontos O e C estão abaixo da reta r, ou estão ambos acima desta.

Considere-se que os pontos O e C estão abaixo da

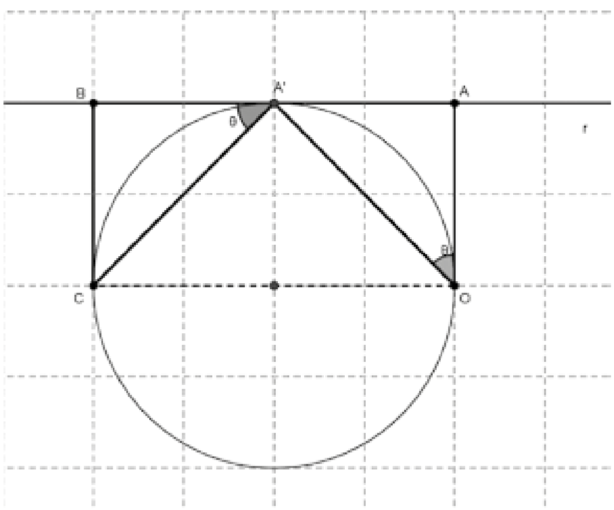


Figura 1.

reta r. Então, $a, c \in \mathbb{R}^+$.

Tome-se, sem perda de generalidade, $b \in \mathbb{R}^+$.

Como a reta r é tangente à circunferência no ponto A' e o seu diâmetro é OC, o ponto A' está entre os pontos A e B.

Considerando, no caminho inicial, o comprimento $\overline{OA} = |a| = a$ como unidade de comprimento (u.c.), $\overline{AB} = |b| \cdot \overline{OA} = ba$ e $\overline{BC} = |c| \cdot \overline{OA} = ca$, isto é, $\overline{AB} = b$ (u.c.) e $\overline{BC} = c$ (u.c.).

Suponha-se que o comprimento $\overline{AA'}$ é x unidades de comprimento e $x < b$.

Como xa é o comprimento do segmento de reta AA', necessariamente $xa \in \mathbb{R}^+$.

Seja $x = -x_1$ com $x_1 \in \mathbb{R}^-$.

Então, podemos afirmar que $\overline{AA'} = x_1 a$ e que

$$\overline{A'B} = \overline{AB} - \overline{AA'} = AB - (-x_1 a) = ba + x_1 a.$$

Seja θ a amplitude do ângulo $\angle AOA'$.

Então, a amplitude do ângulo $\angle CA'B$ é θ.

Considerando o triângulo retângulo $[OAA']$, podemos afirmar que

$$\tan\theta = \frac{-ax_1}{a} = -x_1. \tag{1}$$

Por outro lado, considerando o triângulo retângulo $[A'BC]$, tem-se

$$\tan\theta = \frac{ca}{ba + x_1 a} = \frac{c}{b + x_1}. \tag{2}$$

Logo, pelas equações (1) e (2) vem

$$\begin{aligned} -x_1 &= \frac{c}{b + x_1} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{-c}{b + x_1} \\ \Leftrightarrow bx_1 + x_1^2 &= -c \\ \Leftrightarrow x_1^2 + bx_1 + c &= 0. \end{aligned}$$

Concluindo-se que $x_1 \in \mathbb{R}^-$ é uma raiz real de uma equação do 2.º grau, sendo $|x_1|$ o comprimento do segmento de reta AA' tomando como unidade de comprimento $\overline{OA} = |a|$.

De modo análogo, demonstra-se que quando os pontos O e C estão acima da reta $r, a, c \in \mathbb{R}^+$ é uma raiz real de uma equação do 2.º grau, sendo $|x_1|$ o comprimento do segmento de reta AA' tomando como unidade de comprimento $\overline{OA} = |a|$.

Quando a circunferência interseta a reta r em dois pontos A' e A'', estes dão origem a dois caminhos reduzidos, $OA'C$ e $OA''C$ e aplicando um procedimento idêntico ao efetuado anteriormente, verifica-se que os comprimentos de AA' e AA'' são os valores absolutos das raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$, tomando como unidade de comprimento o segmento de reta AO.

Atendendo ao que foi referido anteriormente, podemos afirmar, quanto ao sinal das raízes da equação, que estas são positivas se os pontos A' e A'' estão à direita de OA (variando de O a A), e são negativas se estes pontos se encontram à esquerda de OA.

Vejamos um exemplo para clarificar o que se acabou de afirmar.

Considere-se a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ cujos coeficientes são $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.

Então, construindo os caminhos conforme o procedimento anterior, vem a figura 2.

Pelo que as soluções reais da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são $x = 2$ ou $x = 3$.

Vejamos outro exemplo, confrontando com a representação gráfica da função respetiva.

Considere-se a equação $x^2 + 3x + 2 = 0$ cujos coeficientes são números positivos.

O caminho inicial encontra-se representado a negrito na figura 3.

Atendendo a que, de modo geral, qualquer equação algébrica pode ser dividida pelo seu coeficiente do termo de maior grau, em particular, numa equação quadrática do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, se dividirmos ambos os membros pelo coeficiente do termo de maior grau, vem, sem perda de generalidade, que

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

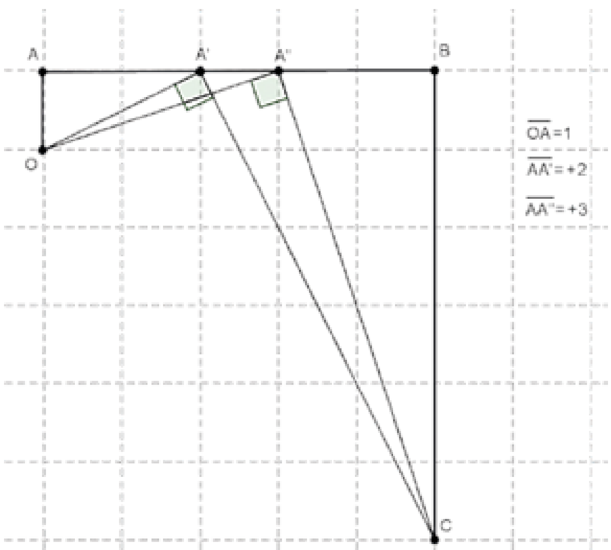


Figura 2.

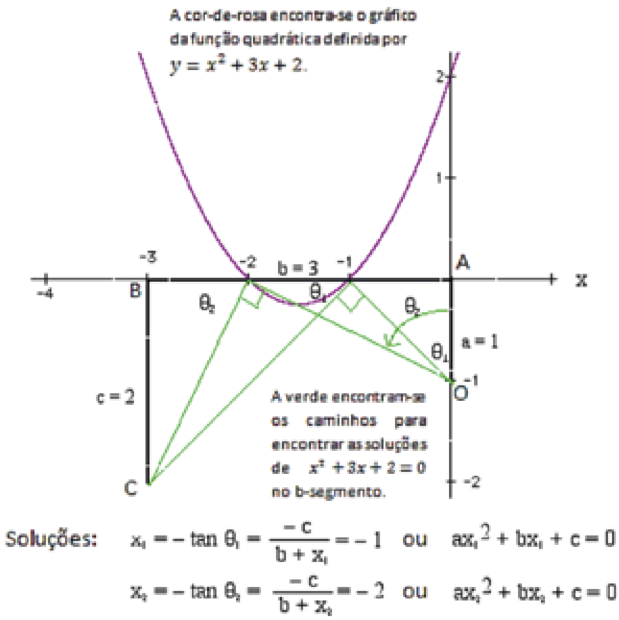


Figura 3.

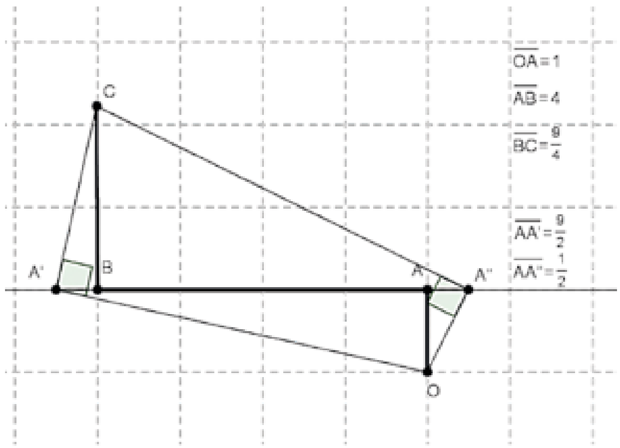


Figura 4.

Assim, convencionando que o segmento de reta respeitante ao coeficiente do termo de maior grau, OA, é desenhado verticalmente, no sentido de baixo para cima, com comprimento 1 e em que A coincide com a origem do eixo horizontal onde se encontram as soluções da equação e que a partir desta origem se desenha o segmento de reta, AB, horizontalmente, com comprimento igual a $|b/a|$,

[2] $OA'C$ é um caminho reduzido tendo em conta que os pontos O, A' e C formam um triângulo retângulo em A', dado que está inscrito numa circunferência de diâmetro OC e A' é um ponto da circunferência.

no sentido da direita para a esquerda quando b/a é positivo e no sentido contrário no caso de b/a ser negativo e por fim, desenha-se, a partir B, o segmento de reta vertical, BC, no sentido de cima para baixo, quando c/a é positivo e no sentido contrário quando c/a é negativo, com comprimento igual a $|c/a|$.

Note-se que se apenas o coeficiente c for negativo ou os coeficientes b e c forem ambos negativos, então o caminho reduzido não irá intersetar diretamente o segmento de reta AB, mas sim a reta que o contém.

Desenhando todos os caminhos reduzidos que intersetam o segmento de reta AB ou a reta que o contém, obtêm-se as várias soluções reais da equação.

Vejamos um exemplo em que apenas c é negativo.

Considere-se a equação

$$x^2 + 4x - \frac{9}{4} = 0$$

e a sua representação geométrica (figura 4). Como A' está à esquerda de OA e $\overline{AA'} = 9/2$, então uma das raízes reais da equação $x^2 + 4x - 9/4 = 0$ é $-9/2$.

Como A″ está à direita de OA e $\overline{AA''} = 1/2$, então a outra raiz real da equação $x^2 + 4x - 9/4 = 0$ é $1/2$.

Efetivamente, numa equação quadrática a uma incógnita facilmente se determinam os caminhos reduzidos e, consequentemente, as suas soluções reais, caso existam, bastando para tal desenhar uma circunferência com centro no ponto médio do segmento de reta OC e considerar os caminhos reduzidos formados pelos catetos dos triângulos retângulos com vértices nos pontos O e C e nos pontos de interseção da circunferência com o segmento de reta AB ou a reta que o contém, sendo esses pontos de interseção as soluções reais da equação quadrática.

Para ilustrar o que se acabou de referir, observe a figura 5.

Para facilitar a interpretação, considere-se AB contido no eixo das abcissas e OA contido no eixo das ordenadas.

Se a circunferência não intersetar o segmento AB nem a reta que o contém, então a equação quadrática não tem soluções reais.

Vejamos como se deve proceder para determinarmos as soluções imaginárias.

Constrói-se um caminho inicial de modo análogo ao referido anteriormente.

De seguida, translada-se o segmento de reta OA para o ponto B (ponto de interseção de BC com AB) de modo a não o sobrepor com o segmento de reta BC e designe-se por $O'C$ o segmento de reta resultante, com comprimento $(c + a)$, e desenha-se a circunferência com centro no ponto médio do segmento de reta $O'C$ e que passa nos pontos O' e C.

Considera-se o segmento de reta formado pelos pontos de interseção da circunferência com o segmento de reta AB ou a reta que o contém.

De seguida, constrói-se uma nova circunferência com centro no ponto médio deste segmento de reta e diâmetro igual ao mesmo.

Esta última circunferência interseta o segmento de

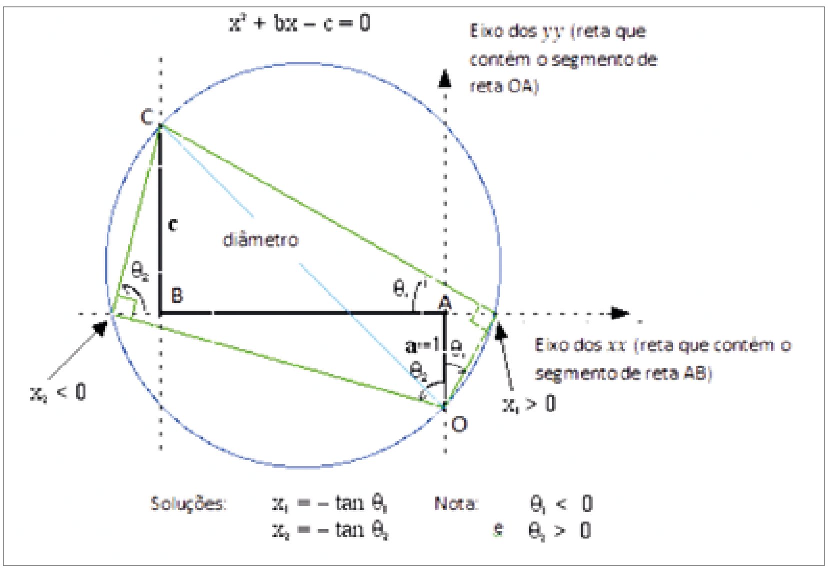


Figura 5.

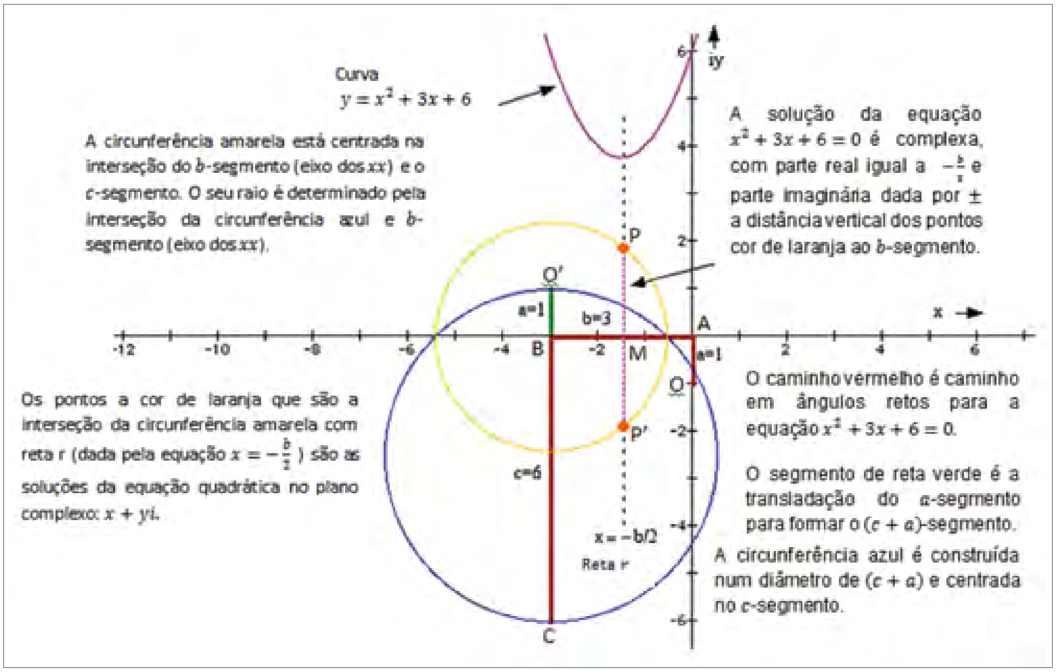


Figura 6.

reta BC num ponto e uma reta r, perpendicular ao segmento de reta AB e que interseta AB no seu ponto médio M, em dois pontos. Sejam estes pontos P e P'.

O valor da parte imaginária da solução para a equação é então dado pela distância vertical, ao longo da reta r, entre AB e os pontos P e P'.

Quanto à parte real das soluções da equação, estas têm parte real com valor absoluto igual ao comprimento de AM e o sinal negativo, se M está à esquerda de OA, e positivo, se M está à direita de OA.

Para terminar, ilustre-se o método de determinação das soluções imaginárias através da figura 6.

Um olhar rápido pela figura acima permite-nos ainda afirmar que a parte imaginária da solução complexa é igual à raiz quadrada da distância vertical entre o ponto mínimo da curva e o eixo dos xx, o que é uma outra forma de visualizar a solução complexa da equação.

As demonstrações de que as construções realizadas são válidas são efetuadas com base na aplicação de teoremas simples de geometria plana que deixamos a cargo do leitor.

REFERÊNCIAS

[1] Lill, E., *Nouvelles Annales de Mathematiques*, Série 2, Vol. 6, 1867, pág. 359

SOBRE A AUTORA

Fátima Vinagre é é professora de Matemática na Escola Secundária da Azambuja, licenciada em Matemática - Ramo Educacional, pela FCT-UNL, e mestre em Matemática – Grupos Cristalográficos Tridimensionais, pela Universidade de Aveiro. Exerceu funções de professora auxiliar de Álgebra Linear e Geometria Analítica e Análise Matemática I na FCT-UNL, foi responsável pela coordenação de Cursos de Especialização Tecnológica, presidente de um Conselho Técnico-Pedagógico, orientadora de estágios – profissionalização em serviço, avaliadora de pessoal docente e não docente, subdiretora e vice-presidente da Escola Secundária de Montejunto, entre outras funções.


PEDRO J. FREITAS
Universidade de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

MANUEL SILVA
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

PRIMOS QUE EVITAM DÍGITOS

O matemático inglês James Maynard mostrou recentemente que existem infinitos números primos que na sua expansão decimal evitam um dígito à escolha. Existem, por exemplo, infinitos primos que evitam o dígito 7!

1. INTRODUÇÃO

Os números primos são os inteiros positivos que têm exatamente dois divisores. Sabemos da importância do estudo dos primos, a qual resulta em parte do facto de todo o número natural poder ser escrito, de modo único, como produto de fatores primos. Euclides demonstrou que os números primos nunca se esgotam, existem primos tão grandes como se queira, ou seja, o conjunto dos números primos é infinito. A noção de número primo é tão natural que deve sido descoberta ainda antes do período clássico grego.

Até ao século XVII pouco ou nada se acrescentou ao estudo dos números primos. Pierre de Fermat, Carl Friedrich Gauss, Pafnuty Chebyshev e Bernhard Riemann fizeram do estudo dos números primos um problema central da matemática. Em particular, a distribuição dos números primos está relacionada com uma famosa conjetura de Riemann sobre a localização dos zeros de uma certa função zeta.

Nos últimos anos têm surgido diversos resultados novos sobre a estrutura dos números primos. Podemos afirmar que esta é uma época áurea para os números primos! Claro que temos de começar por formular as questões mais simples e avançar passo a passo. A maioria dos problemas permanece naturalmente ainda sem resposta, o comportamento selvagem dos números primos resiste teimosamente às nossas tentativas de domesticação.

2. PRIMOS COM PROPRIEDADES ESTRANHAS

Recordemos que uma capicua, ou número palíndromo, é um número inteiro que coincide com o seu reverso, i.e., pode ser lido da mesma forma da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. A noção de palíndromo depende naturalmente da base em que escrevemos o número, para simplificar a discussão vamos considerar quase sempre a base 10. Haverá alguma relação entre capicuas e números primos? A maioria dos números primos não é certamente uma capicua, do mesmo modo que, a maioria das capicuas nao é número primo. Podemos mesmo afirmar que todas as capicuas com um número par de dígitos são múltiplos de 11. A procura restringe-se às capicuas com um número ímpar de dígitos. Ser um número primo e ser uma capicua são dois conceitos completamente distintos e sem qualquer relação aparente.

Se eu decidir gostar muito de números primos e de capicuas, então gostaria certamente de encontrar capicuas que fossem também números primos. A lista dos números primos que são simultaneamente capicuas começa assim:

2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353,
373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929...

Será que existem infinitos números primos palíndromos na base 10? E na base 2? O nosso conhecimento atual não nos permite ainda responder a estas questões. Podemos duvidar do interesse em saber se existem números primos que satisfazem estas, ou outras, estranhas propriedades. O objetivo central é sempre perceber um pouco mais da subtil estrutura subjacente aos números primos, da qual sabemos ainda tão pouco. Para saber é preciso fazer perguntas, por mais inúteis que estas possam parecer inicialmente.

Existem números primos com outras propriedades igualmente estranhas. Por exemplo, existem primos cuja expansão decimal contém apenas uns 11 e 1111111111111111111 (19 dígitos) são exemplos de números primos contendo apenas o dígito 1. Para produzir um número primo deste tipo, devemos usar o dígito 1 exatamente: 2, 19, 23, 317, 1031, 49081, 86453, 109297 ou 270343 vezes (*https://oeis.org/A004023*). Esta lista está certamente incompleta e ninguém sabe se a sequência é infinita. Sabemos apenas que o número de dígitos tem de ser ele próprio um número primo. Caso contrário, encontramos facilmente pelo menos, um fator próprio, por exemplo: $111111111 = 1001001 \times 111$. Mais uma vez, não parecem existir ferramentas adequadas para abordar este tipo de problema, que também pode ser formulado numa base qualquer diferente da base 10.

Em vez de repetir sempre o mesmo dígito, talvez seja possível, em alternativa, excluir um determinado dígito na expansão decimal dos números primos. O matemático inglês James Maynard mostrou recentemente que existem infinitos números primos que na sua expansão decimal evitam um dígito à escolha. Existem, por exemplo, infinitos primos que evitam o dígito 7! Um resultado fantástico para quem não gosta do dígito 7 e adora números primos. James Maynard tem apenas 29 anos e tem colecionado prémios nos últimos anos: SASTRA Ramanujan (2014), Whitehead (2015) e European Mathematical Society (2016).

O resultado anterior aparece num *preprint* intitulado *Primes with restricted digits* que apareceu em abril deste ano e que tem a extensão de 44 páginas. A descrição de como podem tantos primos evitar um certo dígito envolve diversas ferramentas, é uma combinação do método do círculo de Hardy-Littlewoood, do crivo de Harman (variante moderna do crivo de Eratóstenes), resultados de Geometria dos Números, técnicas de Análise de Fourier e ainda a comparação com um processo de Markov! O equivalente a uma verdadeira prova de decatlo matemático, com a dificuldade extra de todas estas técnicas terem de se ajustar entre si.

O teorema demonstrado por Maynard é bastante mais geral do que o enunciado anteriormente. Na verdade, o resultado é válido para outras bases diferentes da base 10. Podemos também excluir dois ou mais dígitos, em vez de apenas um, desde que a base considerada seja suficientemente grande. Do ponto de vista matemático, não existe nada de especialmente interessante na base 10. Fica certamente mais divertido enunciar o resultado para a representação decimal que usamos habitualmente.

Existem outros exemplos de problemas famosos em Teoria dos Números nos quais se pretende mostrar a existência de um número infinito de primos em conjuntos pouco densos. Aqui é importante saber que existem conjuntos infinitos mais gordos e mais magros. Por exemplo, os seguintes quatro conjuntos são progressivamente mais densos: as potências de 2, os quadrados perfeitos, os números primos e o conjunto dos múltiplos de 13. Isto quer dizer que num dado intervalo $[1, n]$, a partir de certo valor de n existem, por exemplo, mais primos do que quadrados perfeitos. A probabilidade de encontrar um número primo é (muito) maior do que a de encontrar um quadrado perfeito. Podemos dizer que os números primos constituem um conjunto mais denso do que os quadrados perfeitos. De modo mais preciso, existem assintoticamente

$$\frac{n}{\ln(n)}$$

primos entre os primeiros n naturais e apenas $\sqrt{n}$ quadrados perfeitos.

Johann Dirichlet demonstrou em 1837 que existiam infinitos números primos em qualquer progressão aritmética infinita: $\{an + b : n \in \mathbb{N}\}$, com a e b primos entre si. Habitualmente, nos resultados onde se demonstra a existência de um número infinito de primos em conjuntos fixados, esses conjuntos são densos ou possuem algum tipo de estrutura aditiva ou multiplicativa. As progressões aritméticas possuem estrutura aditiva e os números primos possuem estrutura multiplicativa. O conjunto dos números inteiros que evitam algum dígito é um exemplo de um conjunto esparso (pouco denso) e sem nenhum dos dois tipos de estrutura aritmética referida. A importância do resultado mais recente de Maynard reside em ter sido obtido neste contexto adverso e novo. Certamente outros resultados acerca da estrutura dos números primos irão seguir-se a este num futuro próximo.

Mas será que existem assim tão poucos números que evitam o dígito 7? Se escolhermos um número natural ao acaso, digamos com 100 dígitos, ele irá com forte probabilidade conter o dígito 7 na sua expansão decimal, certo? Não é, por isso, difícil provar que o conjunto dos números que contêm algum 7 é muito mais denso do que o conjunto dos inteiros que evitam o dígito 7. O resultado de Maynard é interessante porque mostra a existência de infinitos primos num conjunto pouco denso.

A estrutura subjacente aos números primos, embora sejam um conjunto muito fácil de definir, permanece em grande medida misteriosa. O estudo dos números primos tem importância simultaneamente teoria e prática. Sabemos que os métodos de encriptação normalmente usados na Internet dependem da dificuldade em encontrar os fatores primos de um número (grande) dado. A utilidade dos números primos ficaria comprometida se alguém descobrisse um método simples para fatorizar um número natural.

Por vezes parece que os números primos se comportam de um modo aleatório ou imprevisível. Se observarmos os restos da divisão por 3 dos números na sequência de primos:

$$5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,$$

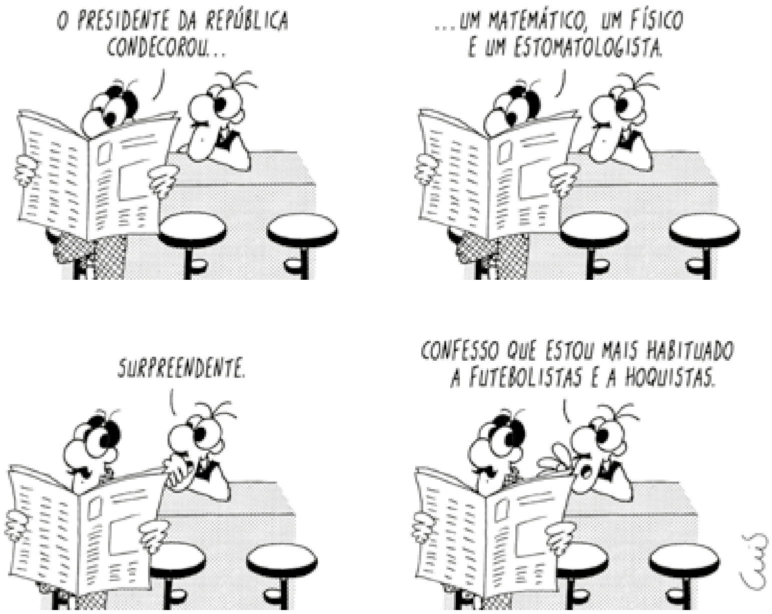
iremos obter dois valores possíveis, 1 ou 2, sendo que estes valores parecem ter sido obtidos através do lançamento de uma moeda ao ar. Esta imprevisibilidade dos números primos está certamente relacionada com o seu poder de encriptação. Um outro problema famoso de um conjunto de inteiros com eventualmente infinitos números primos é o conjunto $A = \{n^2 + 1 : n \in \mathbb{N}\}$. O conjunto dos quadrados perfeitos não pode obviamente conter nenhum número primo. Mas o que é que acontece se considerarmos o conjunto dos inteiros obtidos, a partir dos quadrados perfeitos, por translação de uma unidade? Não parece neste caso existir nenhuma obstrução para que alguns dos elementos do conjunto A possam ser números primos. Se acreditarmos que os primos se comportam de modo aleatório, devemos talvez apostar na existência de infinitos números primos da forma $n^2 + 1$. Será necessário conhecer um pouco mais da estrutura dos números primos para atacar este e outros problemas do mesmo tipo.

REFERÊNCIAS

[1] J. Maynard, *Primes with restricted digits* arXiv:1604.01041.

BARTOON

LUIS AFONSO



Publicado originalmente no jornal Público, em 31/07/2016. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Adérito Araújo Universidade de Coimbra

EDITORES:
Daniel Pinto Universidade de Coimbra
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:
António Machiavelo Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Arsélio Martins** Escola Secundária José Estevão, Aveiro • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Joana Latas** HBD - Tourism Investments, Departamento de Educação, São Tomé e Príncipe • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Marcelo Viana** IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM • **Sílvia Dias** SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

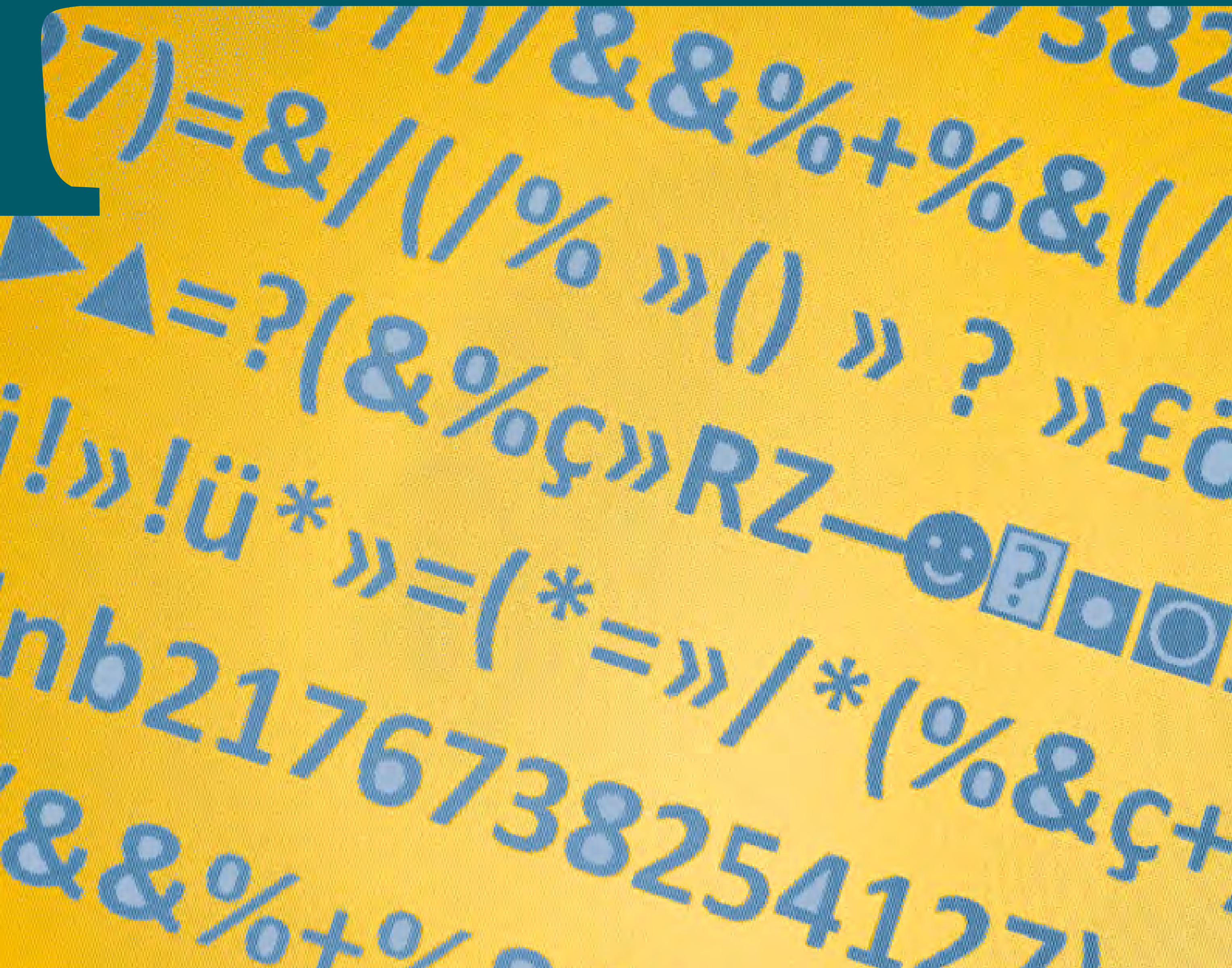
IMPRESSÃO:
Fid'algo – Print Graphic Design

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Sílvia Dias SPM

PROPRIEDADE:
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

TIRAGEM **1250 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ICS **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**



A IDENTIDADE TROPICAL $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

BEITES, P. D.[a] E NICOLÁS, A. P.[b]

[a] UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR E CENTRO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES
[b] UNIVERSIDAD DE VALLADOLID E INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

pbeites@ubi.pt[a] e alejandro.pinera@uva.es[b]

Mais vezes do que o desejável ocorre um erro: $(x+y)^2 = x^2 + y^2$. Mas será sempre um erro? Veremos que não! Mas, no rigor da matemática, há que saber o contexto em que se trabalha... Nomeadamente na Álgebra Tropical, área com aplicações na Criptografia, é uma identidade!

1. UM CONVITE TROPICAL

A surpresa do título culmina numa identidade que contraria, no contexto dos números reais, um conhecido caso notável. O despoletar dessa surpresa é assegurado pelo adjetivo tropical – alusão a uma homenagem de matemáticos franceses, fruto da sua visão do Brasil, ao colega brasileiro Imre Simon. Este foi pioneiro na aplicação do semianel tropical $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$, estrutura algébrica também conhecida pela designação min-mais, à Teoria da Otimização, [5, 9].

Tal surpresa, que poderia ser considerada uma provocação, é bem conseguida pela associação do símbolo + à adição usual de números reais e, por conseguinte, da expressão $(x+y)^2$ ao chamado quadrado da soma dado por $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Por este motivo, é habitual utilizar outro símbolo, como $\oplus$, para a adição no semianel $\oplus$ $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Considerando a referida notação, a identidade tropical que contribui para o título escrever-se-ia assim na forma $(x \oplus y)^2 = x^2 \oplus y^2$.

O semianel tropical também marca presença na Ciência da Computação Teórica, destacando-se em aplicações a problemas de tipo Burnside em Teoria de Grupos e de Semigrupos, bem como a problemas de decidibilidade em Teoria de Linguagem Formal, [6]. Salientamos ainda a aplicação do mencionado semianel à Criptografia, a qual exploramos na secção 2. Em particular, destacamos as vantagens da utilização da Álgebra Tropical, com $\oplus$ e $\odot$, como suporte de esquemas criptográficos designados por tropicais.

Tópicos não diretamente criptográficos encontram-se em [9], introdução elementar que aborda aritmética, polinómios, curvas, filogenética e espaços lineares. Um maior grau de profundidade é alcançado em [5], que inclui as demonstrações do Teorema Fundamental da Geometria Algébrica Tropical e do Teorema de Estrutura para variedades tropicais. Na secção 3 focamo-nos numa vertente da Aritmética Tropical que se prende com o erro $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ designado por *freshman's dream* para $x, y \in \mathbb{R}$, [4].

Outras designações associadas a este erro, na Didática da Matemática, são *linear misconception* e *illusion of linearity*, [1, 2]. O mesmo pode surgir por raciocínio indutivo, numa tentativa de estender a linearidade presente em certas situações a outras que dela carecem. Apesar de o raciocínio indutivo ser usado pelos matemáticos, uma conjetura tem de ser testada e demonstrada se for verdadeira. Mas, contrariamente aos matemáticos, a monitorização meta-discursiva não é uma prática generalizada entre alunos, [1].

2. CRIPTOGRAFIA TROPICAL

O semianel min-mais $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ é por vezes denotado, seguindo a referida designação, por $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \min, +)$. Salienta-se assim que as operações de adição tropical e de multiplicação tropical são definidas, essencialmente e respetivamente, como o mínimo e a adição usual de números reais:

$$x \oplus y := \begin{cases} \min\{x, y\}, & \text{se } x, y \in \mathbb{R} \\ x & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } y = \infty \\ y & \text{se } x = \infty \text{ e } y \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{se } x = y = \infty \end{cases}$$

$$x \odot y := \begin{cases} x + y & \text{se } x, y \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{se } x = \infty \text{ ou } y = \infty \end{cases}$$

Por exemplo, tem-se $3 \oplus 5 = 3$, $3 \odot 5 = 8$, $3 \oplus \infty = 3$ e $\infty \odot 5 = \infty$.

No que se segue, tentamos perceber a utilidade de $\oplus$ e $\odot$ na Criptografia, por esta razão dita tropical. De um modo geral, a Criptografia trata de encontrar técnicas que permitam a transmissão de informação através de um canal, usualmente a Internet, preservando a sua integridade e a sua confidencialidade. Quanto ao número de chaves, há três tipos de Criptografia: simétrica ou de chave privada (uma chave); assimétrica ou de chave pública (duas chaves); funções de Hash (num certo sentido, nenhuma chave).

No tipo de Criptografia adjetivada de assimétrica, os protocolos utilizados estão baseados no uso de duas chaves: uma pública e uma privada. A chave pública é utilizada pelo emissor para cifrar (ou encriptar) a mensagem que se pretende transmitir, é difundida pelo recetor e pode ser conhecida por qualquer pessoa. Contrariamente, a chave privada é apenas conhecida pelo recetor e será utilizada por este para decifrar (ou desencriptar) a mensagem recebida.

Os protocolos de Criptografia assimétrica, como o de Stickel em [10], podem ser utilizados para partilhar uma informação secreta, como, por exemplo, uma chave privada. O mencionado esquema criptográfico foi adaptado em [3] para proteger, recorrendo às operações tropicais $\oplus$ e $\odot$, o processo perante ataques de tipo algébrico. Com efeito, como detalhamos subsequentemente, os protocolos mostraram-se vulneráveis a ataques no domínio da Álgebra Linear com a adição e a multiplicação usuais de números reais, [3].

Suponhamos que os interlocutores A e B querem partilhar uma chave privada. Para isso, começam por escolher duas matrizes invertíveis com entradas em $\mathbb{R}$, públicas, a e b tais que $ab \neq ba$. Posteriormente, o interlocutor A gera aleatoriamente dois números naturais n e m e envia a B a palavra $u = a^n b^m$. De forma similar, B gera r e $s \in \mathbb{N}$ e envia a A a palavra $v = a^r b^s$. Neste ponto, A só deve calcular $K_A = a^n v b^m = a^{n+r} b^{m+s}$ enquanto B calcula $K_B = a^r u b^s = a^{n+r} b^{m+s}$ para os dois terem a mesma chave $K = K_A = K_B$.

Infelizmente, se um adversário que conhece a palavra u quer recuperar a chave K, então não precisa de encontrar os expoentes n, m, r e s. De facto, basta encontrar duas matrizes x e y tais que $xa = ax$, $yb = by$ e $xu = y$, [3]. Estas condições traduzem-se num sistema linear com $3k^2$ equações e $2k^2$ incógnitas, onde k denota a ordem das matrizes a e b, que neste caso pode ser resolvido de forma eficiente com um computador. A vulnerabilidade a este tipo de ataques algébricos pode evitar-se com modificações, como em [3].

A adaptação mais relevante consiste em substituir as matrizes a e b por dois elementos da álgebra tropical das matrizes $k \times k$ sobre $\mathbb{Z}$, em geral não invertíveis, tais que $a \otimes b \neq b \otimes a$, onde $\otimes$ denota a multiplicação usual de matrizes com a multiplicação e adição usuais de reais substituídas pelas respetivas versões tropicais. No contexto tropical, a equação $xy = u$ com u conhecido e x, y desconhecidos, não se traduz num sistema de equações lineares devido à não invertibilidade das matrizes. Além disso, $xa = ax$ e $yb = by$ determinam um sistema de equações lineares cuja resolução envolve uma maior complexidade computacional, possivelmente não polinomial.

Em suma, os esquemas criptográficos tropicais em [3] apresentam duas grandes vantagens:

- menor vulnerabilidade dos esquemas a ataques por, em geral, a resolução de sistemas de equações lineares ser computacionalmente impraticável;
- maior eficiência dos esquemas por não se fazerem multiplicações de números, uma vez que a multiplicação tropical é a adição usual.

3. A VERSÃO TROPICAL DO CLÁSSICO

Como conjunto, o semianel tropical $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ é apenas o conjunto dos números reais reunido com o conjunto formado pelo elemento ∞ que representa o infinito, no qual foram redefinidas as operações aritméticas básicas de adição e de multiplicação de números reais. Muitas propriedades familiares da Aritmética permanecem válidas em contexto tropical. Por exemplo, a multiplicação tropical é comutativa.

Note-se ainda que a estrutura algébrica de semianel de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, munido das operações internas $\oplus$ e $\odot$, é conferida pelas propriedades:

- comutatividade de $\oplus$
  para quaisquer $x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $x \oplus y = y \oplus x$;
- associatividade de $\oplus$
  para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,
  $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;
- associatividade de $\odot$
  para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,
  $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$;
- distributividade de $\odot$ em relação a $\oplus$
  para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,
  $x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z$ e
  $(x \oplus y) \odot z = x \odot z \oplus y \odot z$;
- existência de elemento neutro de $\oplus$,
  existe $u \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que, para qualquer
  $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $u \oplus x = x = x \oplus u$.

Por outras palavras, trata-se de uma estrutura algébrica similar à de anel mas sem a exigência de cada elemento ter um oposto aditivo. Relativamente à última propriedade, ∞ é o elemento neutro da adição tropical. No que se refere à distributividade, note-se a dispensa habitual de parêntesis à direita desde que se respeite a ordem de prioridade usual das operações, ou seja, as multiplicações tropicais devem ser efetuadas antes das adições tropicais.

No que se segue, apresentamos a versão tropical do clássico quadrado da soma. Concretamente, demonstramos dois resultados relativos ao *freshman's dream*, o qual é tropicalmente estabelecido no Teorema 3.1. No Teorema 3.3 mostramos que uma extensão do *freshman's dream* se torna realidade em contexto tropical. O caso particular $n = 2$ permite obter o Teorema 3.1 como corolário do Teorema 3.3.

Teorema 3.1. *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$, $(x \oplus y)^2 = x^2 \oplus y^2$.

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, quaisquer. Tem-se

$$\begin{aligned}(x \oplus y)^2 &= (x \oplus y) \odot (x \oplus y)\\ &= x \odot x \oplus x \odot y \oplus y \odot x \oplus y \odot y\\ &= x \odot x \oplus (x \odot y \oplus x \odot y) \oplus y \odot y\\ &= x \odot x \oplus x \odot y \oplus y \odot y\\ &= \min\{2x, x+y, 2y\}\\ &= \min\{2x, 2y\}\\ &= x \odot x \oplus y \odot y\\ &= x^2 \oplus y^2,\end{aligned}$$

onde a antepenúltima igualdade é consequência de, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \geq y \vee y \geq x \Leftrightarrow x + y \geq 2y \vee x + y \geq 2x. \qquad \square$$

Lema 3.2. *Para quaisquer* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$n \min\{x, y\} = \min\{nx, ny\}.$$

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in \mathbb{R}$, quaisquer. Então $x = y$ ou $x < y$ ou $x > y$. No primeiro caso, a igualdade no enunciado é claramente válida. Se $x < y$ então $nx < ny$, pelo que $n \min\{x, y\} = nx$ e $\min\{nx, ny\} = nx$. Quanto ao terceiro caso, o raciocínio é análogo ao do caso precedente. $\square$

Teorema 3.3. *Para quaisquer* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n.$$

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in \mathbb{R}$, quaisquer. O resultado é óbvio para $n = 1$. Suponha-se assim que $n \geq 2$. Nomeadamente tendo em conta o lema precedente, tem-se

$$\begin{aligned}(x \oplus y)^n &= (x \oplus y) \odot \ldots \odot (x \oplus y)\\ &= (x \oplus y) + \ldots + (x \oplus y)\\ &= n(x \oplus y)\\ &= n \min\{x, y\}\\ &= \min\{nx, ny\}\\ &= nx \oplus ny\\ &= (x + \ldots + x) \oplus (y + \ldots + y)\\ &= x \odot \ldots \odot x \oplus y \odot \ldots \odot y\\ &= x^n \oplus y^n.\end{aligned} \qquad \square$$

4. REFERÊNCIAS

[1] Bagni, G. (2000) "'Simple' Rules and General Rules in Some High School Students' Mistakes", *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21 (2), 124–138.

[2] de Bock, D., van Dooren, W., Janssens, D., Verschaffel, L. (2007) *The Illusion of Linearity*, New York: Springer.

[3] Grigoriev, D., Shpilrain, V. (2014) "Tropical Cryptography", *Communications in Algebra*, 42 (6), 2624–2632.

[4] Hungerford, T. W. (1974) *Algebra*, New York: Springer.

[5] Maclagan, D., Sturmfels, B. (2015) *Introduction to Tropical Geometry*, Providence: American Mathematical Society.

[6] Pin, J.-E. (1998) "Tropical Semirings", In J. Gunawardena (Ed.), *Idempotency* (pp. 50–69), Cambridge: Cambridge University Press.

[7] Simon, I. (1978) "Limited Subsets of a Free Monoid", In *Proceedings of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (pp. 143–150), Washington: IEEE Computer Society.

[8] Simon, I. (1988) "Recognizable Sets with Multiplicities in the Tropical Semiring", In Chytil, M. P., Koubek, V., Janiga, L. (Eds.), *Mathematical Foundations of Computer Science* (pp. 107–120), Berlin: Springer.

[9] Speyer, D., Sturmfels, B. (2009) "Tropical Mathematics", *Mathematics Magazine*, 82 (3), 163–173.

[10] Stickel, E. (2005) "A New Method for Exchanging Secret Keys", In He, X., Hintz, T., Piccardi, M., Wu, Q., Huang, M., Tien, D. (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference on Information, Technology and Applications* (pp. 426–430), Los Alamitos: IEEE Computer Society.

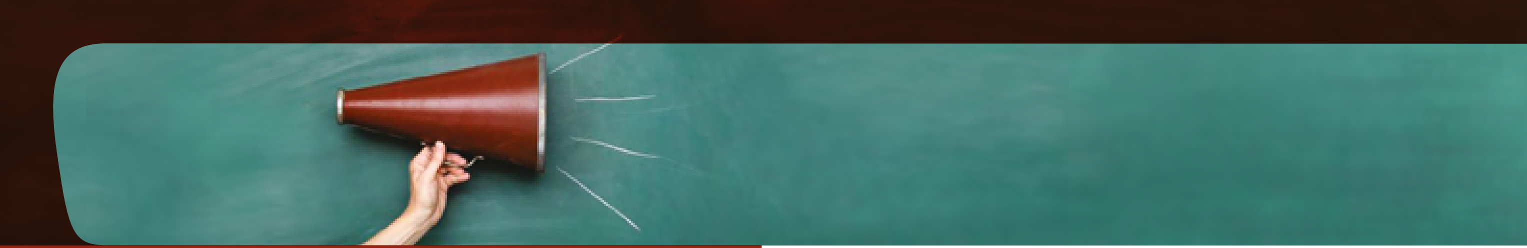
AGRADECIMENTOS

Beites, P. D. e Nicolás, A. P. agradecem o apoio do Ministerio de Economía y Competitividad (España), projeto MTM2013-45588-C3-1-P. Beites, P. D. agradece ainda ao Governo Português através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Portugal), projeto PEst-OE/MAT/UI0212/2015 do CMA–UBI.

SOBRE OS AUTORES

Patrícia Damas Beites é professora auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior. Os seus principais interesses de investigação prendem-se com tópicos de Álgebra, em particular Não Associativa, e de Didática da Matemática.

Alejandro Piñera Nicolás é professor associado na Universidad de Valladolid (Espanha). Os seus interesses de investigação centram-se na Teoria de Códigos Detetores e Corretores de Erros, na Álgebra Não Associativa e na Teoria de Carateres de Grupos Finitos.



GONÇALO MORAIS
Instituto Superior
Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM

CÉDRIC VILLANI

Matemático francês, doutorado pela École Normale Supérieure de Paris, sob orientação de Pierre Louis Lions, tem contribuições fundamentais em diversas áreas da Matemática das quais podemos destacar a Teoria Cinética dos Gases, Problema do Transporte Óptimo e a Geometria Riemanniana métrica. O seu trabalho foi agraciado com diversas distinções das quais destacamos naturalmente a Medalha Fields em 2010. É actualmente diretor do Instituto Henri Poincaré e tem uma intensa actividade de divulgador. Nesta conversa, para lá dos temas matemáticos, ainda tivemos tempo de nos debruçarmos no seu empenho no fortalecimento da construção europeia.

GONÇALO Em primeiro lugar, gostava de agradecer a sua disponibilidade para me conceder esta entrevista. Foi, de facto, difícil encontrarmos um buraco no seu horário apertado...

VILLANI É sempre um prazer falar sobre matemática.

GONÇALO Podemos talvez começar pelo início... Descobriu a matemática na sua infância ou mais tarde?

VILLANI Toda a gente me pergunta o que me terá levado a ser matemático. Para ser franco, eu nunca decidi verdadeiramente ser matemático. Na escola, desde pequeno que gostava de matemática e fui seguindo, fui seguindo, até chegar ao fim.

GONÇALO Foi o caminho lógico a seguir. E se não fosse matemático, consegue imaginar-se a fazer outra coisa qualquer?

VILLANI Quando era muito pequeno desejava ser paleontologista, descobrir fósseis de dinossauro e todas as coisas daí decorrentes. Não me arrependo de não ter seguido esse caminho. Ser paleontologista é algo muito difícil, é um trabalho muito duro. Ser matemático, de certa forma, é mais fácil.

GONÇALO Talvez os paleontologistas não pensem exatamente da mesma maneira...

VILLANI Possivelmente...

GONÇALO Quando preparava esta entrevista, li algumas das coisas que escreveu, percebi que existe na forma como escreve um esforço para contextualizar historicamente uma descoberta. Esse é um aspeto não muito comum nos livros de matemática.

VILLANI Pela minha experiência, existem apenas duas coisas de que as pessoas de todas as idades gostam realmente: histórias e jogos. Assim, o essencial da comunicação para pessoas que não são especialistas num determinado assunto são histórias e jogos. É natural que me centre em narrar a história dos matemáticos, a histórias das ideias, dos projetos ambiciosos e por aí fora.

GONÇALO Como é que descreve o seu trabalho dentro do mundo matemático?

VILLANI Eu considero-me essencialmente um analista, o que não deixa de ser um pouco irónico, visto que aos 15 anos eu estava maravilhado pela Geometria. Depois pelos 18, 19, 20 anos Álgebra seria o meu ponto mais forte. Aos 21 comecei a fazer o meu doutoramento em Análise, mais precisamente em Física-Matemática. Deste modo, até relativamente tarde foi impossível prever o que seria a minha carreira em matemática. Estas coisas são imprevisíveis. Temos de deixar as coisas acontecer. Tudo depende do sítio onde estamos e das pessoas que encontramos, do que ouvimos e do que queremos fazer, depende de imensos fatores.

GONÇALO Provém de uma linhagem distinta de matemáticos...

VILLANI Eu tenho quatro referências essenciais enquanto matemático. Pierre-Louis Lion que foi o meu orientador da tese de doutoramento, especialista em Equações às Derivadas Parciais (EDPs) e Análise Matemática. A minha segunda referência foi Yann Brenier, o meu tutor na École Normale Supérieure, também especialista em EDPs e Análise Matemática, mas com um estilo distinto do estilo de Lions. A terceira é um probabilista, Michel Ledoux. A quarta referência é o Eric Carlen, que está agora em Rutgers mas que na altura estava em Atlanta. Os diferentes estilos de cada um destes matemáticos acho que podem ser reconhecidos no meu trabalho.

GONÇALO E enquadra esse estilo na tradição da escola matemática francesa ou acha que pode ser enquadrado num âmbito mais internacional?

VILLANI O assunto ao qual eu me dedico preferencialmente, a Teoria Cinética dos Gases, é um tema em que, a par com os italianos, os franceses são muito fortes. Houve um tempo em que também nos Estados Unidos havia uma escola muito forte neste assunto, mas isso de alguma forma esmoreceu. Mas fiz toda a minha formação em França, pelo que inevitavelmente faço parte dessa cultura e sou de alguma forma seguidor dessa tradição. Eu fui aluno na École Normale Supérieure de Paris, que juntamente com a Universidade de Princeton, é o local do mundo com mais ex-alunos premiados com a Medalha Fields. Sem dúvida que terá de se notar o peso da tradição num sistema tão forte. Uma das razões pelas quais nunca tive de escolher ser matemático prende-se com o facto de ser aluno desse sistema, sistema esse que está desenhado para que os melhores alunos de matemática sejam conduzidos ao longo do percurso.

GONÇALO Temos de falar de Boltzmann, uma das suas referências fundamentais, alvo de muita incompreensão pelas suas ideias no século XIX...

VILLANI Bem, na verdade, julga-se hoje que a falta de aceitação das suas ideias e a sua tragédia pessoal foi de alguma maneira exagerada. Temos, em primeiro lugar, de referir que ele teria sido uma personagem com uma personalidade complicada. Ele desistiu de posições importantes sem explicação aparente, viveu bastante atormentado os últimos tempos da sua vida e o próprio suicídio é algo que carece ainda hoje de explicação. Tinha uma personalidade intensa. Existe uma história de um debate entre Boltzmann e um outro matemático que eu não consigo precisar, mas julgo que foi o Ostwald, em que o seu oponente, para recuperar do mesmo, teve de passar vários dias de cama. Isto mostra claramente que Boltzmann era forte e acérrimo defensor das suas ideias. Segundo Sommerfeld, que na altura era um jovem cientista, Boltzmann ganhou a contenda. Estes aspetos da personalidade de Boltzmann são, de alguma maneira, ignorados. O seu trabalho influenciou Einstein e outros grandes cientistas e ele gozava certamente do apoio das gerações mais novas. Parece-me natural concluir que a sua influência foi mais notória do que é habitualmente considerado.

GONÇALO Hoje Boltzmann aparece por todo o lado. Umas das coisas mais interessantes que tive oportunidade de ler nos seus escritos é a referência a Kantorovich. Acha que é possível desenvolver uma espécie de Física-Estatística em Economia?

VILLANI É possível! A prova está lá. Na verdade um dos conceitos fundamentais por detrás do meu trabalho é o conceito de entropia. Já existia o conceito antes de Bolt-

zmann mas era uma ferramenta essencialmente prática em Termodinâmica quando queríamos construir motores e coisas parecidas. Boltzmann atribui à entropia um significado matemático. Desde então, a entropia passou a ser uma ferramenta essencial em matemática, em Teoria da Comunicação de Shannon, na teoria das EDPs, etc.

No meu trabalho, a entropia acabou por ocupar um papel central de tal modo que posso dizer que, nos primeiros dez anos em que fiz investigação em matemática, o conceito de entropia era o que havia de comum em todos os meus artigos. Depois desse período isso deixou de ser verdade. Uma das contribuições fundamentais do meu trabalho, em conjunto com outras pessoas, foi a conjugação da entropia de Boltzmann, do seu significado matemático, com a teoria do Transporte Ótimo de Kantorovich. Isso permitiu reinterpretar alguns resultados em Geometria não-Euclidiana. Estes resultados mudaram a perspetiva que tínhamos acerca do assunto. Este é um dos aspetos mais interessantes da matemática: o facto de uma determinada ferramente aparecer num determinado contexto e mais tarde ser reutilizada num outro contexto. Por outro lado, o trabalho de Kantorovich tinha como aplicação a resolução de problemas em Economia, pelo que posso responder afirmativamente à sua questão. Existem todo o tipo de implicações entre Física-Estística, Geometria e Economia.

GONÇALO Um outro artigo seu que li falava da importância do conceito da curvatura de Ricci. Podia falar-nos um pouco da forma como chegou a esse assunto e por que razão este conceito ocupa hoje um lugar central no desenvolvimento da matemática?

VILLANI O conceito da curvatura de Ricci foi criado no início do século XX e mede o afastamento do nosso modelo, o quão diferente a geometria em que estamos a trabalhar é do mundo euclidiano. A forma mais simples de caracterizar a curvatura de Ricci talvez seja a seguinte: quando a curvatura de Ricci é positiva e olhamos para uma fonte de luz, sobrestimamos a superfície dessa fonte de luz. Tornou-se um conceito famoso devido a duas aplicações importantes. Em primeiro lugar é o tipo de curvatura usado por Einstein e Grossmann na Teoria da Relatividade Geral e trata-se da forma de exprimir a distorção do Espaço-Tempo em função da distribuição da massa. Num universo sem massa, a curvatura de Ricci é nula.

Outra aplicação fundamental é através do chamado fluxo de Ricci, usado por Gregory Pearlman para demonstrar a então chamada conjetura de Poincaré. Se tivermos uma determinada geometria e uma determinada curvatura, existe um processo de deformação da métrica riemanianna até esta ficar uniforme ao longo do espaço. A forma correta de expressar isto é através de uma equação de Difusão. Podemos então pensar sobre a forma como poderemos usar os conceitos de entropia e de transporte ótimo para redefinir o conceito de fluxo de Ricci. Imaginemos que temos um processo que nos dá a distribuição de matéria desde uma configuração inicial até uma configuração final de forma a consumir o mínimo de energia cinética. Eu chamo-lhe o *problema do gás mandrião*. Ao longo do processo, vamos observando a evolução da entropia. Quando o gás está muito concentrado, a entropia é baixa, quando está muito disperso, a entropia é alta. A concavidade da curva que nos dá a evolução da entropia garante-nos que a curvatura de Ricci é não-negativa. Podemos então observar os limites para a curvatura de Ricci olhando para a variação da entropia nestes processos de energia mínima. Isto levou a que fosse possível resolver problemas importantes em Geometria e em Transporte Ótimo.

Ouvi pela primeira vez falar de curvatura de Ricci em 1998, quando estava a defender a minha tese de doutoramento e um dos elementos do júri, porque tinha estado a trabalhar em coisas relacionadas com entropia e equação de Boltzmann, disse-me que devia olhar para problemas de difusão relacionados com a curvatura de Ricci e falou-me de um teorema demonstrado em Teoria das Probabilidades, em que se mostra que se a probabilidade estiver entre certos limites, então são verificadas uma série de desigualdades. Naquela altura não tive a coragem de admitir que não fazia a mínima ideia do que era a curvatura de Ricci. Passados uns seis anos, estava entre aqueles que propunham uma nova caracterização da curvatura de Ricci. Esta é uma das histórias em que se demonstra de que forma somos moldados pelo ambiente que nos rodeia.

GONÇALO E depois aconteceu a Medalha Fields. Li a propósito disso um pequeno texto seu em que coloca em perspetiva os vencedores deste prémio perante a comunidade. Neste, refere numa certa passagem as caras de terror dos premiados quando se encontram face a face com a restante comunidade. Um texto de uma beleza extraordinária. É de facto aterrador ser famoso e aplaudido pelas multidões?

VILLANI Há coisas piores certamente. Mas temos, de facto, de enfrentar as pessoas e assumir que sim, ganhámos este prémio. Mas existe em nós um sentimento contraditório. Por um lado, sentimo-nos orgulhosos, mas no fundo sentimos que não merecemos tal distinção. Sabe, existem pessoas que estão de facto no topo das coisas, são pessoas especiais. Essas pessoas são muito raras.

GONÇALO Está a pensar em...

VILLANI Terry Tao, por exemplo. Toda a gente sabia que ele ia ganhar a Medalha Fields. Artur Ávila é outro exemplo. Nós, os que restamos, somos um pouco fruto do acaso e resultado de algum tipo de competição que existe entre nós.

GONÇALO Mas foi verdadeiramente uma surpresa para si ganhar a Medalha Fields?

VILLANI Atribuía a mim próprio à volta de quarenta por cento de hipótese de ganhar. Tinha boas hipóteses, mas só isso. O trabalho que poderia contribuir de forma mais determinante para a minha vitória tinha sido publicado apenas um ano antes do Congresso. E também isso foi de alguma forma resultado da sorte e da persistência, pois estive muitas vezes quase a desistir do problema em questão. Mas, na verdade, havia sempre qualquer coisa que me fazia voltar ao trabalho.

GONÇALO E quando trabalhava na solução desses problemas, conseguia imaginar que entre as consequências possíveis podia estar um prémio como este?

VILLANI Em certos momentos, sim. Mas, por outro lado, a verdade é que a única forma de podermos resolver um problema deste tipo é focarmo-nos unicamente nesse objetivo. Existem então alturas em que estamos a pensar no mesmo problema durante doze horas por dia e ele torna-se verdadeiramente uma parte de nós próprios. Esta capacidade de nos tornarmos obcessivos relativamente a um problema julgo que é a característica principal que nos permite fazer investigação em matemática e em ciência no geral.

GONÇALO E o que é que mudou depois disso?

VILLANI Penso que mudou tudo. O meu horário tornou-se infernal, lecionei uma quantidade impressionante de cursos, seminários e conferências, consegui angariar mais de vinte cinco milhões de euros para o meu instituto, para fazer investigação, comecei a participar em programas europeus de investigação, fundei um museu de ciência, escrevi vários livros, um dos quais teve recentemente uma edição portuguesa. Esse livro vendeu mais de cem mil cópias e foi traduzido em doze línguas. Participei em dúzias de programas televisivos...

GONÇALO E dorme?

VILLANI Durmo de tempos a tempos. Às vezes estou tão exausto que penso que vou morrer. Paralelamente, faço parte de um grupo político que defende o federalismo europeu...

GONÇALO Europa Nova...

VILLANI Precisamente...

GONÇALO Podia descrever-nos qual a sua participação nesse movimento?

VILLANI Direi qual a minha participação mas primeiro, e mais importante para que fique muito claro, noventa e cinco por cento de todas estas atividades não foram algo que eu tivesse decidido fazer mas sim algo que eu aceitei fazer. Muitas pessoas vieram ao meu encontro propondo-me ser diretor disto, membro daquilo... Não aceito tudo se não já estaria morto neste momento! Esta foi a visibilidade que eu recebi fruto da Medalha Fields e eu aceito todas estas atividades porque aceito a responsabilidade perante a comunidade de ter sido agraciado com tal prémio.

Acerca da Europa. O que eu acho mais importante na construção política europeia é que a Europa consiga ser uma construção política forte e que, desta forma, consiga resistir às pressões que vêm de fora e que levem à destruição do nosso nível de vida e que faça com que a Europa possa ter uma palavra a dizer em relação às grandes questões internacionais. Nenhum país europeu isoladamente consegue fazer frente aos Estados Unidos ou à China.

GONÇALO E por que razão pensa que o federalismo é a resposta para essas questões?

VILLANI Porque na união económica não existe esta força. Foi feito já um caminho, mas não o caminho suficiente. Neste momento estamos a viver a desagregação da Europa com o aparecimento dos movimentos nacionalistas.

GONÇALO Nos textos da Europa Nova defende-se que o federalismo é o caminho para que haja uma Europa mais democrática.

VILLANI Uma das coisas que defendemos é a eleição de um presidente europeu. Poucos são os cidadãos que conseguem nomear um presidente de algum dos Órgãos europeus. Uma das razões é porque existe um presidente do conselho e um presidente da comissão. O presidente da comissão resulta da nomeação por parte dos partidos que obtiveram a maioria. Mas o mais importante é que essa eleição e a posterior nomeação não resultam de qualquer debate público. As eleições em democracia não servem apenas para eleger mas também para debater. Por esta razão, grande parte das pessoas não votam porque não se sentem envolvidas nas questões europeias. O resultado de tudo isto é o desastre que estamos a viver. Acho que todos temos a responsabilidade de fazer algo que mude isto e na Europa Nova temos a convicção de que existe uma cultura, uma perspetiva de vida que nos une enquanto europeus muito para lá do nível económico.

GONÇALO Duas questões antes de terminarmos. Em primeiro lugar, gostaria de o ouvir acerca da convicção que Hayek tinha na defesa do federalismo, em que, por um lado, possibilitava a participação de todos mas que, por outro lado, impossibilitava que o sistema mudasse de uma forma drástica.

VILLANI Julgo que existem muitas formas diferentes de federalismo. O federalismo dos Estados Unidos é facilmente reconhecido, mas não estamos habituados a olhar para o Brasil e para a China como sistemas federais, pois vêmo-los como sistemas perfeitamente integrados. O federalismo também depende do orçamento comum. Por exemplo, o orçamento federal americano é muito mais forte do que o europeu. A palavra-chave por detrás do federalismo é a coordenação, que é algo muito diferente do conceito de unificação. Isto significa que se preserva a identidade das partes, reforçando o comum através do compromisso. Isso, de alguma maneira, vai de encontro ao que estava a referir, visto que é muito mais fácil acordarmos em relação ao que não queremos do que em relação ao que desejamos em conjunto. Dessa forma, as mudanças radicais são de alguma maneira impossibilitadas.

GONÇALO A última questão relacionada com matemática prende-se com a dura crítica feita por Vladimir Arnold ao movimento de Bourbaki e, de certa forma, à escola francesa. Qual é a sua reação a essa crítica?

VILLANI Também aqui eu penso que um debate público sobre a forma como se faz matemática é salutar. É estimulante e cria momentos engraçados quando discutimos assuntos que de alguma forma não são tão sérios. É bom que haja essas opiniões fortes acerca da matemática. Neste caso em particular, julgo que Arnold estava ao mesmo tempo certo e errado. Estava certo quando defendia que não há apenas uma forma de fazer matemática e que o sonho de Bourbaki de unificar a matemática tornou-se com o tempo uma ideia algo desatualizada, levando a que muitas outras coisas interessantes que se fizeram em matemática não tivessem o destaque que mereciam.

Estava errado quando não reconhecia que Bourbaki foi importante na história da matemática, marcando importantes avanços em certos campos e convenções, sendo importante para o estruturalismo nesses tempos. Por outro lado, Bourbaki não impediu que os livros de Arnold tivessem uma influência fundamental em muitas gerações de matemáticos franceses. A diferença de estilos e o debate que isso acarreta não constituem certamente um problema, antes pelo contrário, são algo fundamental.

GONÇALO Resta-me apenas agradecer-lhe por este tempo dentro do seu escasso tempo...

VILLANI Hum, hum...

AS DUAS CULTURAS

Um homem de Cultura deverá ter tantos conhecimentos de Ciência como os que tem de Literatura?

NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

Existe um texto famoso de C.P. Snow, cientista e romancista inglês, que fala das "Duas Culturas", sendo estas a cultura humanística e a científica, que, em 1059, quando o texto foi apresentado, começavam a definir-se como culturas distintas e até antagónicas.

Nesse texto clarividente e premonitório, C.P. Snow afirmava que, em sociedade, era perfeitamente aceitável que alguém não conhecesse a segunda lei da termodinâmica, mas que o mesmo indivíduo seria ostracizado se ousasse dizer que nunca tinha lido uma obra de Shakespeare.

Ora, na opinião do autor, as duas deveriam integrar a bagagem mínima de um Homem de cultura, e não haveria por que privilegiar uma em detrimento da outra.

Tenho amigos cientistas e amigos escritores, e não me atrevo a fazer o mesmo exercício. Não sei quantos romancistas entendem verdadeiramente o conceito de entropia (tantas vezes mal aplicado) ou quantos cientistas terão lido Shakespeare, ou Proust, ou Tolstoi. Mas conheço muitos homens da ciência que são grandes leitores e alguns homens de letras que se interessam pela ciência.

Na minha opinião existe uma assimetria que dificulta o exercício, afinal todos os cientistas falam a língua dos romances (na pior das hipóteses através de traduções), mas poucos escritores terão a matemática ou a física necessária para apreciarem a teoria da relatividade ou a mecânica quântica.

Nas melhores universidades americanas ou inglesas exige-se aos alunos que conheçam a *Odisseia* e o *Mercador de Veneza*, mas também os trabalhos de Darwin, Karl Marx ou Freud. Ninguém fica a perder, independentemente de as suas ambições serem políticas, científicas ou artísticas. O mundo está cada vez mais complexo e não ganhamos nada em arrumá-lo em gavetas.

À laia de conclusão, vem-me à memória uma frase de Isaac Asimov, escritor e professor de bioquímica: "O aspeto mais triste da vida atual é que a ciência adquire conhecimento de forma mais rápida do que a sociedade adquire sabedoria."

É esse o grande desafio que temos pela frente, o de chegarmos a uma sociedade que possa integrar e discutir os avanços tecnológicos sem esquecer a História e a cultura de que somos feitos.

ESTREOU NOVA **TEMPORADA DO "ISTO É MATEMÁTICA!"**

O programa "Isto é Matemática" iniciou no passado mês de novembro a emissão da 11.ª temporada. A forma simples, divertida e cativante de apresentar a matemática ao público tem contribuído decisivamente para a desmistificação da disciplina. O "Isto é Matemática" é promovido pela Sociedade Portuguesa de Matemática, com o apoio da Fundação Vodafone Portugal, e transmitido na SIC Notícias aos sábados pelas 7h50, com repetição ao domingo às 11h45 e segunda-feira às 9h45. Apresentado pelo matemático Rogério Martins, o "Isto é Matemática" tem sido usado nas salas de aula como material didático. Visite o canal do "Isto é Matemática"no Youtube.

CICLO DE **CONFERÊNCIAS "ALMADA NEGREIROS E A MATEMÁTICA"**

A Biblioteca da FCT-Nova iniciou no dia 29 de outubro um ciclo de seis palestras intitulado "Almada Negreiros e a Matemática". Muitos dos trabalhos de Almada Negreiros contêm resultados de estudos geométricos e algébricos que ocuparam uma parte substancial da sua vida e que sem uma explicação aprofundada poderão parecer inacessíveis. Começando com um enquadramento da obra de Almada Negreiros no Modernismo Português, neste ciclo analisar-se-á a génese deste caminho para a abstração que passa pela idealização de construções geométricas inéditas, pela tapeçaria *O Número* e que culmina com o painel *Começar,* exposto no átrio da Fundação Calouste Gulbenkian. Toda a informação e detalhes deste ciclo de palestras poderão ser consultados em: *http://eventos.fct.unl.pt/almadanegreiros-matematica.*

SPM ATRIBUI **BOLSA DE INVESTIGAÇÃO** NO ÂMBITO DO PROJETO **"MEMÓRIA DA SPM"**

A documentação inédita gerada nos primeiros anos de atividade da Sociedade Portuguesa de Matemática (1940-1948) será agora estudada através do projeto "Memória da SPM". Este projeto, financiado pela Fundação Calouste Gulbenkian e com orientação científica de Jaime Carvalho e Silva (FCTUC) e Anabela Teixeira (MUHNAC-UL), arrancou no passado dia 1 de dezembro. A SPM, mediante concurso com a referência SPM-MUHNAC/BI/FCG143170/2016, atribuiu uma bolsa de investigação a Tiago Robalo. Durante os próximos meses, ele terá a cargo a descrição e a digitalização da documentação, pesquisa histórica, participação na elaboração de textos científicos, organização de uma exposição e de um catálogo e produção de conteúdos para um portal dedicado na *web.*

OPORTUNIDADES DE **CARREIRA**

A Sociedade Portuguesa de Matemática tem agora no seu *site* uma área dedicada a Oportunidades de Carreira. Aqui estarão divulgadas bolsas, vagas para professor e ofertas de trabalho de empresas privadas, sempre que estiverem relacionadas com matemática. Caso deseje divulgar alguma iniciativa da sua universidade ou empresa que possa enquadrar-se em Oportunidades de Carreira, escreva para imprensa@spm.pt.

PAGAMENTO POR REFERÊNCIA **MULTIBANCO** DA **QUOTA ANUAL** DA **SPM**

A partir de 2017, a Sociedade Portuguesa de Matemática disponibiliza aos sócios uma nova forma de pagamento da quota anual através de referência multibanco. Cada sócio terá disponível uma referência de pagamento na sua área reservada.

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

PORTUGAL VOLTOU A **CONQUISTAR OURO** NAS **OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA DA CPLP**

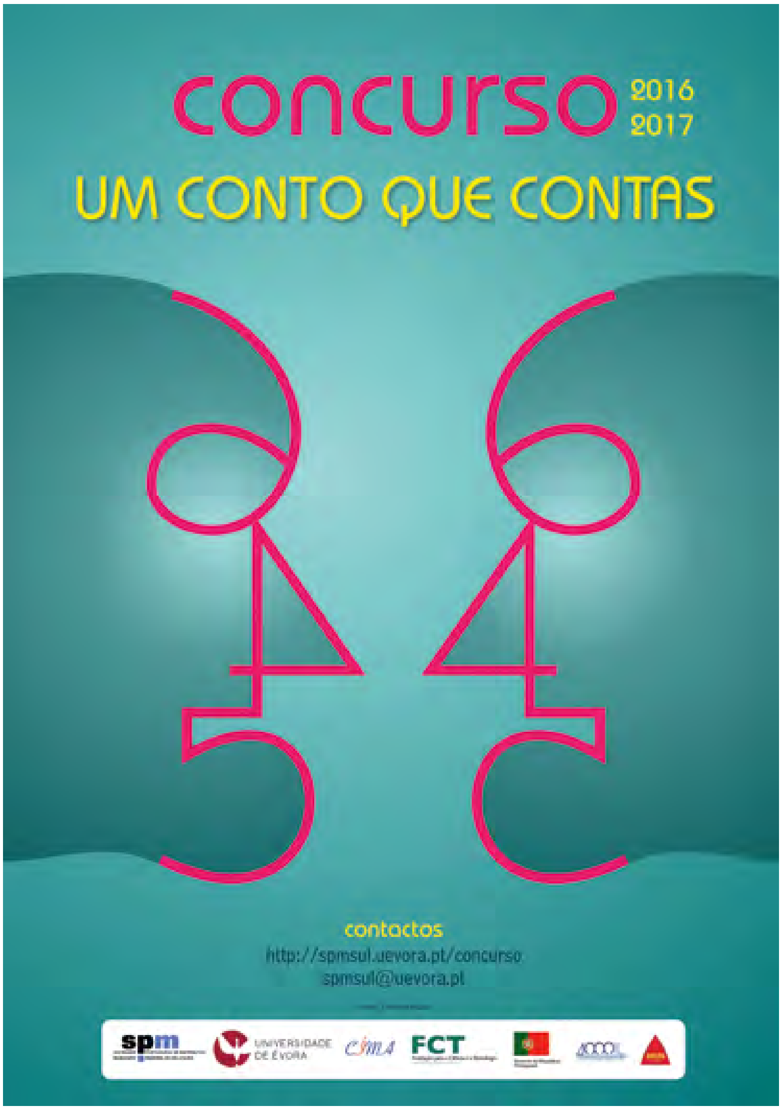
Portugal teve a melhor classificação de sempre e posicionou-se no primeiro lugar da tabela nas VI Olimpíadas de Matemática da Comunidade de Países de Língua Portuguesa (OMCPLP), com 121 pontos, ultrapassando o Brasil em casa, com uma medalha de ouro e três de prata. A competição, que chegou ao fim no dia 10 de outubro, aconteceu na cidade de Maracanaú, muito perto de Fortaleza. Kevin Pucci, da Escola de Dr. Júlio Martins, em Chaves conquistou a Medalha de Ouro. João Morais (Escola Secundária c/ 3.ºCiclo do Ensino Básico de Mirandela), João Camarneiro (Colégio D. José I) e Maria Madrugo (Escola Secundária c/ 3.º Ciclo do Ensino Básico do Restelo) são os responsáveis pelas três medalhas de prata. A sétima edição das OMCPLP vai ter lugar em Portugal, sendo a segunda vez que o nosso país acolhe o evento. A participação portuguesa nas olimpíadas é organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática e a seleção e a preparação dos alunos está a cargo do Projeto Delfos, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. O Ministério da Educação, o Novo Banco, a Ciência Viva, a Fundação Calouste Gulbenkian e a Pathena apoiam esta iniciativa.

PROJETO DELFOS FAZ **15 ANOS**

Foi no dia 5 de dezembro de 2001 que os professores Alexander Kovačec, Amílcar Branquinho e Eduardo Marques de Sá, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, decidiram criar o Projeto Delfos. Passaram-se 15 anos e o Projeto Delfos está de parabéns. O Delfos nasceu com a missão de preparar as equipas portuguesas para as competições internacionais de matemática, é por isso uma escola de matemática para estudantes do ensino não superior com excecional talento para a disciplina. Uma escola que funciona de modo informal, movida pelo gosto na resolução de problemas. O Projeto Delfos procura estudantes dos 10 aos 18 anos de idade. Para ingressar no Delfos, um estudante do 9.º ao 12.º. ano de escolaridade deve enviar uma candidatura para delfos@mat.uc.pt e passar por um processo de seleção. Para os mais novos, do 5.º ao 8.º ano, existem épocas específicas de candidatura. Aproximadamente uma vez por mês, o Delfos organiza um estágio durante um fim de semana, onde os estudantes assistem a aulas, participam em sessões de problemas, integram uma equipa numa competição de matemática e realizam um teste de avaliação.

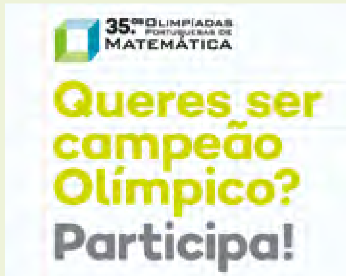
O CONCURSO **"UM CONTO QUE CONTAS"** DE REGRESSO

Estão abertas, até ao dia 10 de fevereiro de 2017, as inscrições para o concurso "Um conto que contas", que consiste na escrita e na ilustração de um conto que envolva conteúdos matemáticos. A competição tem como principais objetivos fomentar hábitos de leitura e de escrita nos alunos, assim como promover a articulação entre diversas áreas do saber, desenvolver as capacidades de expressão e comunicação e estimular a imaginação. A participação é aberta a todos os jovens que frequentem escolas públicas e privadas, desde o 1.º ao 12.º ano de escolaridade. Ver mais informações em *http://www.spmsul.uevora.pt/concurso.htm* Este concurso é da responsabilidade de uma comissão organizadora em colaboração com a Delegação Regional do Sul e Ilhas da Sociedade Portuguesa de Matemática, com o apoio da Universidade de Évora, do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, da Associação de Matemática Interactiva e Lúdica – AMIL e da Delta Cafés.



SPM COMEMORA **76 ANOS** DIA **12 DE DEZEMBRO**

A Sociedade Portuguesa de Matemática celebra o seu 76.º aniversário no dia 12 de dezembro, segunda-feira, e convida todos os sócios a participar no almoço comemorativo que está a organizar. Este encontro realizar-se-á em Lisboa, no Restaurante Avenida Café (na Avenida da República, n.º 51 C, muito perto da sede), às 13 horas, e terá um custo de 15 euros.



ABERTAS AS **INSCRIÇÕES** PARA AS **MINI-OLIMPÍADAS**

Estão abertas até ao dia 18 de janeiro as inscrições para as Mini-Olimpíadas, a categoria das Olimpíadas Portuguesas de Matemática dedicada aos alunos mais jovens, dos 3.º e 4.º anos do ensino básico. Os problemas propostos fazem, sobretudo, apelo à capacidade de raciocínio e à imaginação do aluno. A prova única desta categoria realizar-se-á no dia 25 de janeiro. Todas as escolas interessadas deverão fazer a sua inscrição em *http://mopm.mat.uc.pt/MOPM.* O concurso consiste numa única prova que se realizará em cada escola participante, no dia 25 de janeiro de 2017.

Jorge Buescu
Presidente da SPM
jsbuescu@fc.ul.pt

SINAIS PREOCUPANTES NA EDUCAÇÃO

A Sociedade Portuguesa de Matemática tem como missão o desenvolvimento da matemática em Portugal. Dentro das três vertentes principais da sua atividade – Investigação, Ensino e Divulgação – a Educação assume, quer pela sua importância intrínseca quer pelo seu impacto social, um papel de especial relevância.

É, pois, com elevado sentido de responsabilidade que a SPM tem vindo, ano após ano, a estabelecer protocolos de colaboração com o Ministério da Educação e a manifestar a sua total disponibilidade para alargar a cooperação a outras áreas identificadas como necessárias para a melhoria do ensino da matemática. A SPM tem tido uma relação de grande lealdade e colaboração com o Ministério, quer identificando problemas prioritários para a melhoria do ensino quer em tarefas concretas tão importantes como a auditoria aos exames nacionais de matemática, a certificação de manuais escolares e a participação ativa em questões de definição ou gestão curricular.

O exemplo mais recente desta colaboração partiu de um convite, em março de 2016, do atual Ministério da Educação (ME), e mais concretamente do Secretário de Estado da Educação (SEE), Prof. João Costa. Assumindo a necessidade de proceder a uma "flexibilização curricular sem alterar programas e metas" (sic), convidou a SPM a integrar dois grupos de trabalho sobre os programas de matemática dos ensinos Básico e Secundário, os quais integravam também elementos da APM, do ME, e professores convidados pelo ME e não filiados em qualquer das organizações. O objetivo seria o de responder às dúvidas e aos problemas reportados por professores ao ME e fazer propostas de gestão e flexibilização curricular que, "sem alterar os programas nem as metas curriculares" – pois, segundo o próprio SEE, não faria sequer sentido fazê-lo antes de os mesmos completarem um ciclo de funcionamento e consequente avaliação –, facilitassem a sua implementação nesta fase de transição.

O resultado do intenso trabalho desenvolvido por estes grupos entre abril e final de julho de 2016 foi divulgado publicamente pelo ME a 24 de agosto e está disponível em *http://www.dge.mec.pt/noticias/metas-curriculares/matematica-e-matematica-orientacoes-de-gestao-curricular-para-o-programa*. Foi o que se poderia esperar de uma discussão intelectualmente honesta, balizada por pressupostos claros: os atuais programas e metas foram mantidos sem alterações significativas, mas foram feitas muitas sugestões práticas que permitiram dar resposta às naturais dificuldades sentidas por alguns professores nesta fase de implementação.

Na sequência do sucesso deste grupo de trabalho, foi a SPM convidada em setembro, de novo pelo SEE, a integrar novos grupos de trabalho análogos para o ano letivo 2016/17, com representantes da APM e da DGE. A SPM, naturalmente, aceitou o convite, indicando os nomes dos seus representantes.

No entanto, este grupo de trabalho nunca chegou a reunir-se. Foi com a maior estupefação que a SPM foi surpreendida através da comunicação social, no início do mês de outubro, com a notícia de que "O Ministério da Educação pretende aplicar, já a partir do próximo ano letivo, "currículos essenciais" das diferentes disciplinas nos 1.º, 5.º e 7.º anos de escolaridade" e de que o Sr. Secretário de Estado "confirmou ainda ter pedido às associações de várias áreas disciplinares, com as quais esteve ontem reunido, que apresentem à tutela "um desenho" daquele que consideram o currículo essencial de cada uma das suas áreas. As primeiras propostas deverão chegar ao Ministério já no início de 2017" (DN, h*ttp://www.dn.pt/portugal/interior/curriculos-do-1o-5o-e-7o-ano--resumidos-ao-essencial-ja-em-2017-5436771.html*).

Numa primeira fase, acreditámos constituir um lapso, em face do convite anterior já efetuado, a não convocação das sociedades científicas para a discussão desta reestruturação dos *curricula* escolares. A SPM contactou formalmente o SEE, a 12 de outubro, solicitando uma audiência com carácter de urgência para esclarecer a situação.

A resposta do SEE, datada de 20 de outubro, foi muito clara: a exclusão das sociedades científicas desta discussão foi deliberada. Passando a citar:

> "O trabalho em curso é um trabalho integrado, relacionando todas as disciplinas. Exactamente por ser um trabalho centrado na gestão curricular, foi minha opção convocar as associações profissionais e não as sociedades científicas. As associações serão instadas a fazer as parcerias e auscultações que forem consideradas relevantes no decorrer deste trabalho."

Neste esforço de "gestão curricular" promovido pelo ME, o SEE decidiu, pois, não convocar as sociedades científicas mas apenas as associações de professores. A justificação foi a de que não se trataria de alterar programas e metas mas "apenas" geri-los. Contudo, o SEE afirmou que o trabalho tem como objetivo "emagrecer" os *curricula* num resultado, o que poderá significar um corte, ou facultatividade, de até 25% da matéria lecionada, e que o seu resultado começará a ser aplicado em 2017/18 nos anos iniciais do Ensino Básico (1.º, 5.º e 7.º). Ora, uma alteração desta dimensão nos conteúdos a ensinar é uma efetiva revisão curricular, que só para efeitos de retórica oficial poderia considerar-se mera "gestão". Pela calendarização conhecida, as primeiras versões desta revisão são esperadas ainda durante o mês de novembro, o processo deverá estar concluído em janeiro de 2017.

A exclusão da SPM deste diálogo é extremamente perigosa. Não é concebível uma reflexão séria sobre o ensino de uma ciência afastando deliberadamente os seus profissionais, aqueles que simultaneamente a ensinam, a investigam, a aplicam profissionalmente e têm dela uma visão de conjunto. O argumento é caricato no caso da matemática, em que praticamente 100% dos sócios da SPM são, de facto, professores da disciplina nos vários níveis de ensino.

A 11 de novembro, as sociedades científicas (SPM, SPQ, SPF e SPFil) contactaram formalmente o Ministro da Educação e o Presidente da Comissão de Educação e Ciência da AR, expondo o assunto e solicitando reunião urgente. De nenhum houve resposta. Curiosamente, no mesmo dia de receção desta carta, a DGE convocou para os grupos de trabalho a SPF e a SPQ… mas não a SPM, numa atitude incompreensível.

Paralelamente a todo este processo, o Ministério da Educação decidiu não proceder este ano à certificação de manuais escolares de matemática. A SPM está extremamente preocupada com esta situação. O eventual lançamento para o mercado de manuais escolares não certificados constituir, além de incumprimento da legislação em vigor, um grave retrocesso de mais de uma década na política de promoção da qualidade dos recursos educativos. No caso da matemática seria particularmente nocivo, uma vez que no presente ano estão a ser preparados, para entrarem em funcionamento no ano de 2017/18, manuais relativos aos novos programas de 6.º ano e de 12.º ano. Este último é crítico para o futuro de muitas dezenas de milhares de estudantes, pois determina o acesso ao Ensino Superior.

Curricula escolares revistos com grande precipitação e sem discussão científica. Manuais escolares sem controlo de qualidade através de certificação. Duas razões para a SPM encarar com grande apreensão o futuro próximo do ensino da matemática em Portugal: não só fica instalado o caos no sistema a curto prazo como estas medidas podem assinalar, a médio prazo, o início de uma perigosa deriva facilitista na Educação.

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2017

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S.Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3º esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*

VISITE A LOJA SPM EM *WWW.SPM.PT*

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR