

N. 0176

M Gazeta de matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXVI | Jul. 2015 | 4,20€

As Bolas da FIFA Não São Grande Coisa

EDUARDO MARQUES DE SÁ | CANTO DÉLFICO



Conversa com Ingrid Daubechies
GONÇALO MORAIS

Arquimedes e o Volume da Esfera
FÁTIMA VINAGRE

Gazeta de Matemática

TABELA DE PUBLICIDADE 2015

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1900

Nº de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

CONTACTOS

Tel.: 21 793 97 85

imprensa@spm.pt

ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)

Margem de corte: 4 mm

LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

					
	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.



32 OS “MODELOS DE OLIVIER” DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA



18 ARQUIMEDES E O VOLUME DA ESFERA



42 CONVERSA COM...
Ingrid Daubechies



24 O CONJUNTO DE TODOS OS CONJUNTOS NÃO EXISTE

- 02 EDITORIAL** | Adérito Araújo
- 03 ATRACTOR**
Triângulos Belos
- 07 RECREIO** | Jorge Nuno Silva
Pi Faraónico
artigo de capa
- 10 CANTO DÉLFICO** | Eduardo Marques de Sá
As Bolas da FIFA Não São Grande Coisa
- 15 NA LINHA DE FRENTE** | Fabio Chalub
Uma Epidemia de Humanos
- 18 ARQUIMEDES E O VOLUME DA ESFERA**
Fátima Vinagre
- 24 O CONJUNTO DE TODOS OS CONJUNTOS NÃO EXISTE**
Gilda Ferreira
- 30 APANHADOS NA REDE** | Óscar Felgueiras
Números de Bernoulli
- 32 OS “MODELOS DE OLIVIER” DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA**
Carlos Tenreiro
- 39 PERGUNTAS SIMPLES, RESPOSTAS SURPREENDENTES** | Manuel Silva e Pedro J. Freitas
Problemas Antigos Com Números Perfeitos
- 42 CONVERSA COM ...** | Gonçalo Morais
... Ingrid Daubechies
- 47 MATEMÁTICA E LITERATURA** | Nuno Camarinho
Contra a Angústia da Página em Branco
- 48 BARTOON** | Luis Afonso
- 49 NOTÍCIAS**
- 55 CARTAS DA DIREÇÃO** | Eugénio Rocha
Termine o Verão Numa Escola Cheia de Luz



ADÉRITO ARAÚJO
Universidade
de Coimbra
alma@mat.uc.pt

BOLAS DE FUTEBOL, ARQUIMEDES E ONDULETAS

Onde se fica a saber que uma truncatura um pouco mais funda do icosaedro truncado faz da Telstar uma bola melhor.

A FIFA anda nas bocas do mundo, infelizmente pelos piores motivos. Nos últimos meses, têm sido recorrentes as notícias que dão conta de sucessivos escândalos em torno do organismo que superintende o futebol mundial. Como resultado, tanto patrocinadores como parceiros institucionais – como é caso do Centro do Prémio Nobel da Paz – admitem cortar relações com a organização e, pior ainda, o prestígio de uma das mais apaixonantes modalidades desportivas sai fortemente abalado.

Não é intenção da *Gazeta* alargar o séquito de algozes da FIFA, mas a verdade é que esta rocambolesca novela vem provar que os seus dirigentes não são grande coisa. E nem é preciso ser matemático para entender a demonstração.

Mais subtil é a prova de que também a Telstar, famosa bola de futebol escolhida pela FIFA nas últimas décadas do século para as suas competições oficiais, padece do mesmo problema: também ela não é grande coisa. E é disso mesmo que Eduardo Marques de Sá fala no artigo da secção Canto Delfico. Com o rigor e a fluidez com que sempre nos habituou, o autor convida-nos a refletir sobre a rotundidade dos poliedros de Arquimedes e demonstra que é possível obter um icosaedro truncado mais rotundo que a Telstar.

A nossa viagem ao interior do número 176 da *Gazeta de Matemática* prossegue na companhia de Arquimedes. Num artigo com inegáveis potencialidades pedagógicas, Fátima Vinagre, professora na Escola Secundária da

Azambuja, ensina-nos a calcular o volume de uma esfera com recurso à lei da alavanca do famoso sábio grego.

E é ainda pela mão de Arquimedes que somos conduzidos à entrevista com Ingrid Daubechies. De facto, é no seu método de exaustão que assentam as ideias fundamentais que estão na génese das bases de Haar e da teoria das onduletas que tornaram famosa a nossa entrevistada. Nascida na Bélgica, Ingrid Daubechies, além de ter sido a primeira mulher a presidir à União Internacional de Matemática, foi também a primeira mulher com o título de professora catedrática em matemática na Universidade de Princeton. As suas contribuições revelaram-se fundamentais em diversas áreas da matemática, da ciência e da engenharia, tendo encontrado uso generalizado no desenvolvimento de sofisticados algoritmos de processamento de imagens e de compressão de dados.

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atrator, este é um espaço da responsabilidade do Atrator; relacionado com conteúdos interativos do seu site www.atrator.pt. Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para atrator@atrator.pt.

TRIÂNGULOS BELOS

Verificaremos como a propriedade de os três lados de um triângulo plano serem iguais resulta de uma combinação harmoniosa, e única, de lados e ângulos.

Um triângulo diz-se equilátero se os quocientes entre os comprimentos dos seus lados forem iguais a 1. Que triângulos do plano têm estes três quocientes racionais? Dado um triângulo no plano com lados de comprimentos a, b e c tais que existem números naturais p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 e q_3 que verificam $a/b = p_1/q_1, b/c = p_2/q_2$ e $a/c = p_3/q_3$ podemos reescalonar o triângulo e obter outro semelhante com lados racionais. Para isso, basta usar a homotetia $H_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x/c, y/c)$, que transforma o triângulo inicial num de lados $a' = (p_1 p_2)/(q_1 q_2), b' = p_2/q_2$ e $c' = 1$. Se, de seguida, aplicarmos a homotetia $H_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (q_1 q_2 x, q_1 q_2 y)$, obtemos um triângulo de lados inteiros.

Se o triângulo é retângulo, com a versão semelhante que acabámos de construir entramos no mundo vasto dos triângulos pitagóricos. A figura 1 ilustra um deles:

note-se que, além de os lados terem comprimentos inteiros, os três ângulos têm cossenos racionais, pois são $\pi/2, \arccos(3/5)$ e $\arccos(4/5)$.

Mas há muitas outras possibilidades. Veja-se, por exemplo, o triângulo escaleno de lados com comprimentos 5, 6 e 7: neste caso, os ângulos também têm cossenos racionais pois são $\arccos(1/5), \arccos(5/7)$ e $\arccos(19/35)$. Repare-se agora no outro triângulo da figura 2: os quocientes entre as amplitudes dos ângulos são racionais, mas nem todos os quocientes dos lados o são.

Se, todavia, juntarmos as condições

Q_1 : Os quocientes entre os comprimentos dos três lados são racionais.

Q_2 : Os quocientes entre as amplitudes dos três ângulos são racionais.

então ficamos reduzidos aos triângulos equiláteros.

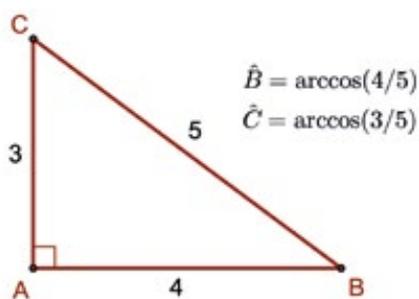


Figura 1

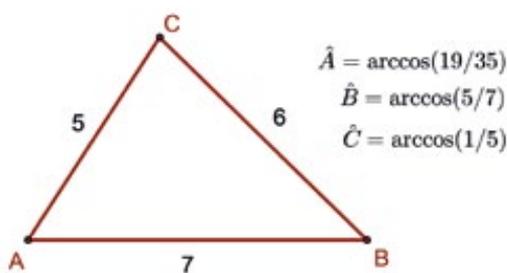
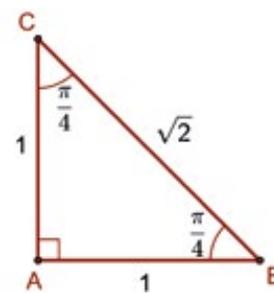


Figura 2



Obviamente, um triângulo equilátero satisfaz as duas hipóteses Q_1 e Q_2 , com a particularidade de os seis quocientes em causa serem iguais a 1. Vejamos que também é válida a implicação recíproca, ou seja:

\mathcal{P}_1 : Se, num triângulo, são racionais os quocientes entre os comprimentos dos três lados e entre as amplitudes dos três ângulos, então o triângulo é equilátero.

Seja \mathcal{T} um tal triângulo de lados a, b, c e ângulos $\angle A, \angle B, \angle C$. Reescalando-o, como se explicou anteriormente, podemos supor que a, b, c são racionais (ou mesmo inteiros). Além disso, podemos reescrever $\angle A = \pi \alpha_A, \angle B = \pi \alpha_B$ e $\angle C = \pi \alpha_C$ para uma escolha adequada de reais positivos $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C$. Acrescente-se que, pela hipótese Q_2 , existem racionais positivos s_1, s_2 e s_3 tais que $\angle A/\angle B = s_1, \angle B/\angle C = s_2$ e $\angle A/\angle C = s_3$. Logo, tem-se $\alpha_A = s_3 \alpha_C$ e $\alpha_B = s_2 \alpha_C$, e, como a soma dos ângulos de um triângulo plano é igual a π , deduzimos que $s_3 \alpha_C + s_2 \alpha_C + \alpha_C = 1$. Consequentemente, $\alpha_C = 1/(1 + s_2 + s_3) \in \mathbb{Q}$. Em resumo: Se os quocientes das amplitudes dos ângulos de um triângulo plano são racionais, então os ângulos são múltiplos racionais de π .

Neste momento é oportuno reunirmos o que já sabemos sobre \mathcal{T} :

1. É semelhante a um triângulo com lados racionais (consequência de Q_1).
2. Os seus ângulos são múltiplos racionais de π (consequência de Q_2).

Consequiremos obter mais informação sobre a forma de um tal triângulo se aliarmos as duas propriedades anteriores, o que pode ser feito através do Lei dos Cossenos. Sendo os lados a, b, c racionais, então

$$\cos(\angle A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos(\angle B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \text{ e}$$

$$\cos(\angle C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

são números racionais. Este é um dado muito bem-vindo, porque se conhecem todos os ângulos $\theta \in [0, \pi]$ que são múltiplos racionais de π e têm cosseno racional: θ é $0, \pi, \pi/2, \pi/3$ ou $2\pi/3$, cujos cossenos são, respetivamente, $\pm 1, 0$ e $\pm 1/2$. Com este resultado (pode ver-se uma prova em [2]), estamos em condições de estabelecer a caracterização que procurávamos para o triângulo \mathcal{T} . Realmente, \mathcal{T} tem de ser equilátero porque é semelhante a um triângulo com lados racionais, cujos ângulos estão em $]0, \pi[$ mas nenhum deles é $\pi/2$ (caso contrário,

um dos outros dois teria de ser menor ou igual a $\pi/4$ e o seu cosseno não teria um valor permitido) nem $2\pi/3$ (por razão idêntica); logo, os três ângulos são iguais a $\pi/3$.

Cada uma das propriedades \mathcal{P}_1 e

\mathcal{P}_2 : Se $\theta \in [0, \pi]$ é um múltiplo racional de π e tem cosseno racional, então $\theta \in \{0, \pi, \pi/2, \pi/3, 2\pi/3\}$.

pode ser deduzida a partir da outra.

Para provar, e uma vez que $\cos(\{0, \pi, \pi/2\}) = \{1, -1, 0\}$ e que $\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta)$, podemos restringir a análise a ângulos de $]0, \pi/2[$. Seja $\theta \in]0, \pi/2[$ um ângulo cuja amplitude é um múltiplo racional de π e tem cosseno racional. Construa-se o triângulo da figura 3, de lados $1, 1, 2\cos\theta$ e ângulos $\theta, \theta, \pi - 2\theta$. Observe-se que estes três ângulos são múltiplos racionais de π . Além disso, tendo em conta a hipótese de que $\cos\theta$ é um número racional, os quocientes dos comprimentos dos lados deste triângulo são racionais. Logo, podemos aplicar \mathcal{P}_1 e concluir que o triângulo é equilátero. E, portanto, $\theta = \pi/3$.

Note-se que, no que aqui ficou dito, fizemos uso de várias propriedades dos triângulos planos que não são válidas em geometrias não euclidianas, ainda que nelas um triângulo equilátero possa ser também equi-ângulo. Por exemplo, na esfera de raio $2/\pi$ podemos traçar o triângulo (pitagórico) de lados $1, 1, 2$ e ângulos $\pi/2, \pi/2, \pi$ (figura 4). E, nela, estão também: o triângulo com estes mesmos lados mas de ângulos $3\pi/2, 3\pi/2$ e π ; um triângulo equilátero cujos três lados se situam no equador e que tem os três ângulos iguais a π ; um triângulo pitagórico e equilátero de lado 1 e com os três ângulos iguais a $\pi/2$. (Podem construir-se imagens destes triângulos em [1]). Qual será a versão esférica da caracterização dos triângulos equiláteros planos?

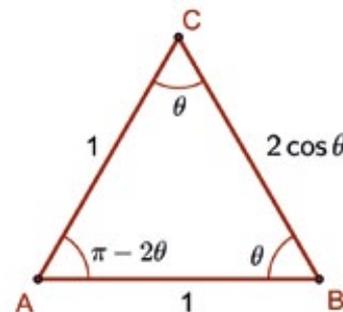


Figura 3

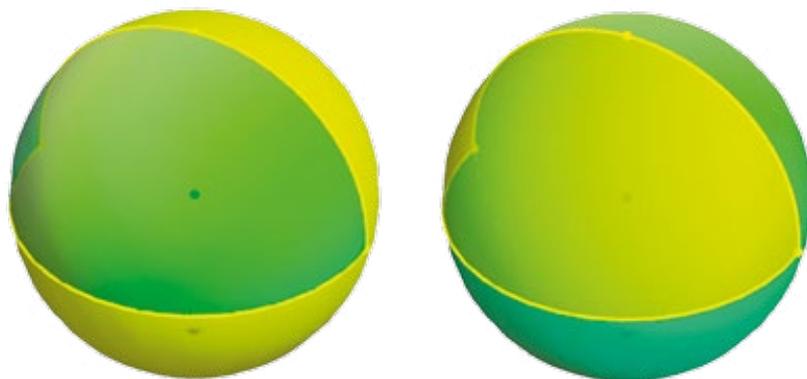


Figura 4

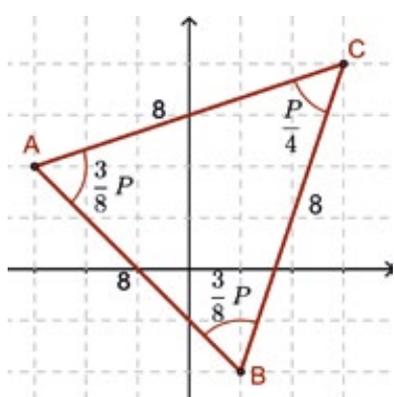


Figura 5

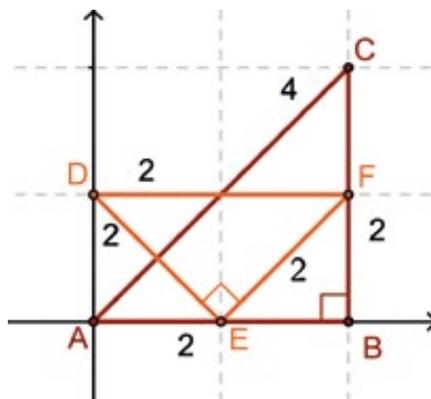


Figura 6

Seria também interessante analisar, na perspectiva anterior, as propriedades dos triângulos equiláteros planos quando optamos por outros modos de medir as distâncias em \mathbb{R}^2 . Considere-se, por exemplo, a geometria-do-táxi. Neste modo de medir comprimentos, uma circunferência tem a forma de um quadrado da geometria euclidiana com os lados fazendo 45° com os eixos coordenados; π é substituído por $P = 4$; e a soma dos ângulos de qualquer triângulo é P . Contudo, um triângulo equilátero pode não ser equiângulo. Observe-se, por exemplo, o triângulo da figura 5 cujos lados medem 8, dois dos ângulos têm amplitude $\frac{3}{8}P$ e o terceiro mede $\frac{P}{4}$.

E há outras diferenças. O Teorema de Pitágoras não

admite uma extensão a esta métrica, como mostram os triângulos DEF e EBF da figura 6, um de lados 1, 1, 2, ângulo retângulo em B e hipotenusa medindo 2, e outro que é equilátero, retângulo em E e cuja hipotenusa também mede 2. Adicionalmente, falham testes de semelhança que foram fundamentais no argumento anterior. Por exemplo, os triângulos ABC e DEF da figura 6 indicam que um triângulo nesta geometria não está univocamente determinado se forem conhecidos dois lados e o ângulo por eles formado.

Haverá algum critério, análogo ao que vimos no plano com a métrica euclidiana, para testar se um triângulo na geometria-do-táxi é equilátero? Para explorar esta questão, o leitor é convidado a utilizar o módulo

interativo em [2], que permite calcular rapidamente distâncias e ângulos nesta métrica. (Uma imagem dessa utilização consta da figura 7.)

REFERÊNCIAS

[1] <http://attractor.pt/mat/GeomEs/index.htm>

[2] http://www.attractor.pt/mat/triangulos_belos

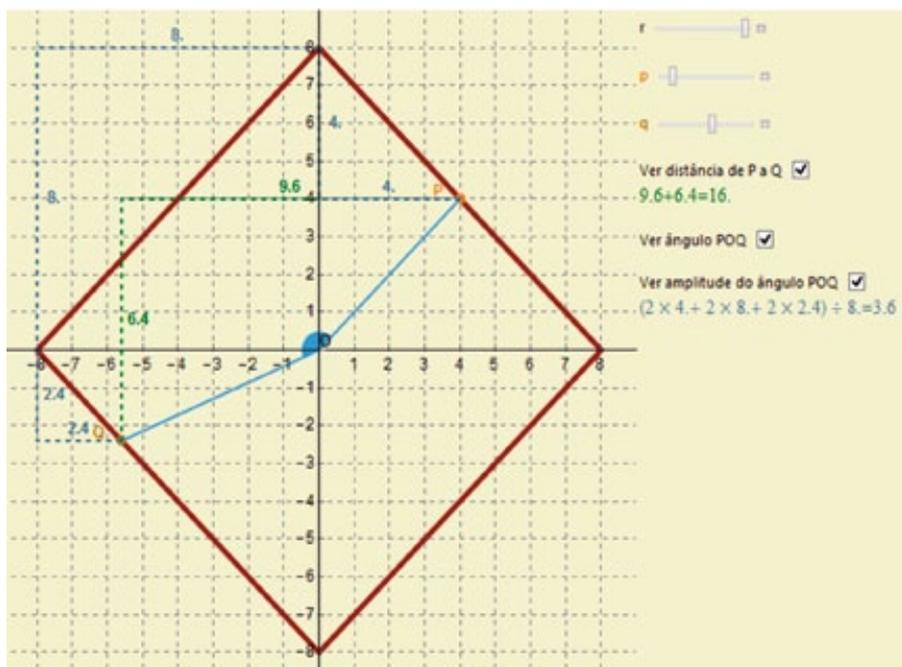


Figura 7

II FEIRA DA MATEMÁTICA

NO MUSEU NACIONAL DE HISTÓRIA NATURAL
E DA CIÊNCIA DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

23|24 OUTUBRO 2015

MARQUE NA AGENDA!

SEXTA-FEIRA | ESPECIAL ESCOLAS
SÁBADO | PÚBLICO GERAL

EXPOSIÇÕES

WORKSHOPS

JOGOS E DESAFIOS

DEMONSTRAÇÕES

CIRCO MATEMÁTICO

PALESTRAS





JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa

jnsilva@cal.berkeley.edu

PI FARAÓNICO

O Papiro de Rhind, obra incontornável no estudo da matemática na Antiguidade, dá-nos muitas razões para nos surpreendermos com as capacidades dos egípcios de há milénios. Escrito no século XVII a.C., sendo cópia de trabalho mais antigo, é essencialmente uma colecção de problemas e soluções. Hoje falaremos um pouco do Problema 50, que, em linguagem anacrónica, pode dizer-se tratar da quadratura do círculo.

A interpretação de texto tão antigo não pode ser sempre consensual. A lacónica escrita do escriba Ahmes não facilita a vida aos estudiosos. No caso do nosso problema 50, a questão parece ser a de obter um valor para a área de um círculo de diâmetro d .

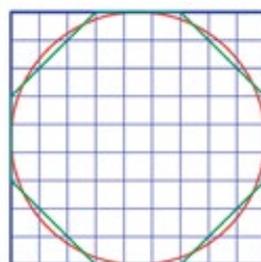
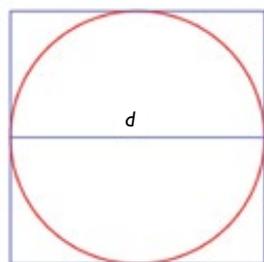
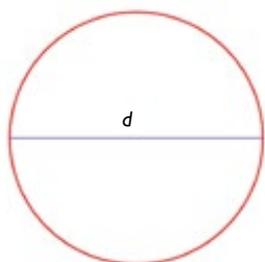
O procedimento descrito consiste em aproximar o círculo por um octógono, cuja área seja fácil de determinar.

Começemos por considerar um quadrado circunscrito à figura.

Vamos dividir cada lado em nove partes, cada uma de comprimento $d/9$. Conservando o terço central de cada lado e unindo as extremidades, obtemos um octógono, que, como o quadriculado da figura sugere, aproxima bem o círculo.

O quadriculado da ilustração permite determinar com facilidade a área do polígono. Se tomarmos para unidade o quadradinho de lado $d/9$, esta área será

$$81 - 4 \times \frac{3 \times 3}{2} = 63.$$



Ora, 63 é um número que ... é quase 64 e este é um quadrado perfeito: $64 = 8^2$. Tomemos então 64 como valor aproximado para a área do círculo!

Em linguagem corrida: a área de um círculo de diâmetro d é aproximadamente igual à de um quadrado de lado $(8/9)d$.

Usando o diâmetro original $d = 2r$, temos, para valor da área do círculo, A_{\bigcirc} ,

$$A_{\bigcirc} = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 r^2.$$

Como sabemos, a fórmula correta é $A_{\bigcirc} = \pi r^2$, pelo que a expressão deduzida do argumento de Ahmes corresponde a tomar

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.160493827 \dots$$

que difere do valor exato por menos de 0.02. Esta aproximação é notável em si e impressiona também pela facilidade

com que é obtida. Sugerimos ao leitor que tente obter outras aproximações usando métodos semelhantes a este, a ver se consegue melhorar este resultado ...

Suponhamos agora que se usava a mesma figura para aproximar o perímetro do círculo.

Tomando de novo como unidade $d/9$ e após uma aplicação do Teorema de Pitágoras, obtemos para o perímetro do octógono o valor

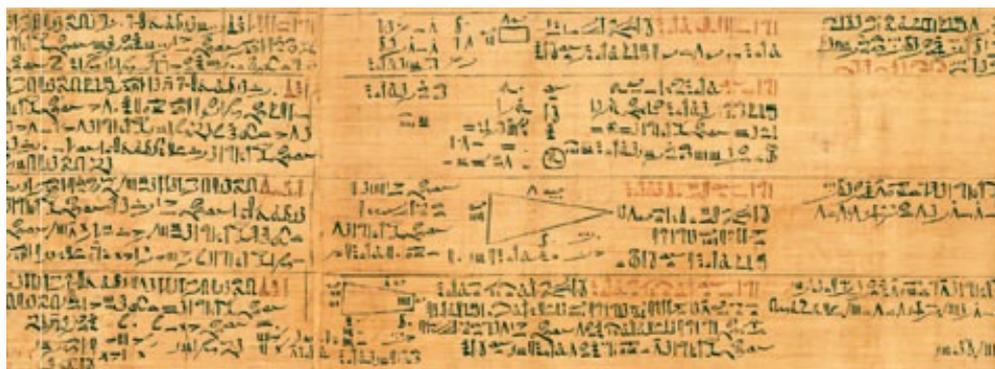
$$\frac{4}{3} (1 + \sqrt{2}) d.$$

Como o valor correto para o perímetro do círculo é $P_{\circ} = \pi d$, o valor aproximado baseado na aproximação pelo octógono corresponde a tomar

$$\pi = \frac{4}{3} (1 + \sqrt{2}) = 3.218951 \dots$$

que difere do valor exato por menos de 0.08.

É certo que os egípcios antigos não conheciam a bela estrutura da matemática de Euclides ou Arquimedes, mas, não esqueçamos, eles construíram as impressionantes Pirâmides, testemunhos perenes do seu engenho.



Papiro de Rhind

Já é sócio da SPM?

Conheça as vantagens e saiba como aderir em www.spm.pt ou através do número 217 939 785



Consulte também as condições para os sócios institucionais (Departamentos, Faculdades, ESES, Politécnicos, etc.)

CONFERÊNCIAS

- **100 ANOS DE ESPAÇO-TEMPO CURVO**
Carlos Herdeiro • Universidade de Aveiro
- **ANAMORFOSE E COR NA GEOMETRIA E NA ARTE**
António Araújo • Universidade Aberta
- **A MATEMÁTICA E A FÍSICA DA LUZ**
Carlos Fiolhais • Universidade de Coimbra
- **MALABARISMO, MATEMÁTICA E A UTILIDADE DAS COISAS INÚTEIS**
António Machiavelo • Universidade de Porto
- **GEOMETRIA E ÓPTICA NO TRABALHO DE FRANCISCO DE MELO (CA. 1490-1536)**
Henrique Leitão • Universidade de Lisboa
- **NOTAS SOBRE A GEOMETRIA BÁSICA QUE SE APRENDE QUANDO SE ENSINA**
Arsélio Martins • Aposentado, Escola Sec. José Estevão, Aveiro
- **PORTUGAL TEM TALENTO MATEMÁTICO? UM OLHAR SOBRE 35 ANOS DE OLIMPIADAS...**
Joana Teles • Universidade de Coimbra

- **AS POTÊNCIAS DE EXPOENTE RACIONAL NO NOVO PROGRAMA DE MATEMÁTICA A**
Filipe Oliveira • Univ. Nova de Lisboa

MINI-CURSOS

- **MODELOS MATEMÁTICOS EM NEUROCIÊNCIA**
Paulo Aguiar • Universidade de Porto
- **MATEMÁTICA APLICADA AO ESTUDO DA VISÃO**
Pedro Serranho • Universidade Aberta
- **APLICAÇÕES DE QUATERNIÕES À ÓPTICA**
Paula Cerejeiras • Universidade de Aveiro
- **OS PROJETOS GEOMETRIX E MATEAS**
Ana Breda e António Caetano • Universidade de Aveiro
- **ABORDAGEM INTEGRADA AO ESTUDO DO MELANOMA CUTÂNEO: DOS DESAFIOS DA MEDICINA ÀS SOLUÇÕES DA MATEMÁTICA**
Rui Pinto • Instituto de Telecomunicações

- **O TEOREMA DE YANNAKAKIS,**
João Gouveia • Universidade de Coimbra
- **OS NÚMEROS RACIONAIS NO 1.º CICLO**
Carlos Grosso • Centro de Formação da SPM
- **TALES, PITÁGORAS E EUCLIDES**
Luís Bernardino • Centro de Formação da SPM
- **PRIMITIVAS E INTEGRAIS NO NOVO PROGRAMA DO SECUNDÁRIO DE MATEMÁTICA A**
Patrícia Engrácia • Centro de Formação da SPM
- **PROGRAMA E METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A**
Paula Reis • Centro de Formação da SPM

ORGANIZADORES

Ana Breda (presidente) • Eugénio Rocha • Sílvio Gama •
Sandrina Santos • Rita Simões • Rui Duarte

MAIS INFORMAÇÃO

<http://spm-ev2015.weebly.com/>

2015 ESCOLA DE VERÃO SPM

Universidade
de Aveiro
2 - 5 setembro

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
75 ANOS



EDUARDO
MARQUES DE SÁ
Universidade
de Coimbra
emsa@mat.uc.pt

AS BOLAS DA FIFA NÃO SÃO GRANDE COISA

Trunquem um pouco mais fundo o icosaedro truncado e farão da Telstar uma bola melhor.



Negócio de bolas é assunto sério. Há laboratórios sofisticados inovando para melhor vender, e adivinham-se empresas de *marketing* com a missão de conceber ideias e ficções que a FIFA certifica. São exemplos a publicidade hiperbólica quadrienal e a caução 'científica' de inovações mal experimentadas. O caso da Jabulani, a bola do Mundial 2010, deu que falar; aos elogios dos vendedores – a mais perfeita de sempre, de aerodinâmica superlativa, nunca vista, etc. – opuseram-se os protestos de arqueiros, zagueiros e pontas-de-lança, que não a pouparam: horrorosa, dançarina, bola de supermercado. Houve mesmo quem lhe atirasse as culpas pelo fiasco do Mundial 2010: é que de entre todos os mundiais ele ocupa o penúltimo lugar na média de golos por jogo.

Mas o problema a tratar aqui é outro. Seria pouco razoável fabricar uma bola de futebol com quatro peças triangulares (de cabedal ou material sintético) cosidas de modo a formar um tetraedro. Depois de insuflado ar, a pressão arredondaria a bola de raiz tetraédrica, mas o jogo seria outro, mais imprevisível do que o rãguebi. O princípio lógico

é o de que quanto mais rotundo for o poliedro não inflado, mais rotunda e resistente será a bola depois de cheia.

A UEFA escolheu, nos anos 60 do século passado, o icosaedro truncado como modelo, com as faces pentagonais pintadas de negro, a que foi dado o *nom de guerre* Telstar, roubado a um então famoso satélite de telecomunicações. Anos depois, a Telstar venceu o concurso 'Miss Bola' para o Mundial do México-1970. Hoje, contas feitas, o arquimediano a preto e branco ou a cores por encomenda já leva mais de meio século de reinado.

Em 1981, J. M. Göthals e J. J. Seidel, num artigo justamente intitulado *The football*¹, mostraram que a bola podia ser melhorada. Os argumentos envolvem teoria dos invariantes, fórmulas de quadratura de Sobolev e órbitas do grupo icosaedral. A FIFA não se deixou convencer e, tanto quanto sabemos, a bola continuou a mesma.

O Canto Délfico espera ter mais sucesso junto das autoridades com uma abordagem bem mais modesta. Usando dois critérios elementares, distintos dos de 81, somos levados à mesma conclusão: a Telstar não está bem.

QUÃO ROTUNDA É UMA BOLA?

Expressões da linguagem quotidiana do género "este sólido é mais rotundo do que aquele" podem precisar-se por muitos métodos. Um dos mais simples começa por chamar *raio interno* de um sólido² ao maior dos raios das esferas nele contidas, e *raio externo* de um sólido ao menor dos raios das esferas que o contêm. Em seguida, define-se *esfericidade* do sólido como sendo a razão do raio interno pelo raio externo. Claro que

A esféricidade é um número positivo que não excede 1, sendo igual a 1 quando e só quando o sólido é uma esfera.

Outro critério de avaliação da rotundidade baseia-se no chamado quociente isoperimétrico (QI) de um sólido S , que se define por

$$36\pi \frac{V^2}{A^3},$$

onde V é o volume de S e A a área da sua superfície envolvente. Este quociente satisfaz uma propriedade elementar importante: qualquer homotético de S tem o mesmo QI que S . O factor 36π destina-se exclusivamente a obter 1 como quociente isoperimétrico das esferas.

O teorema isoperimétrico tridimensional pode enunciar-se assim:

O quociente isoperimétrico dum sólido é um número positivo que não excede 1, sendo igual a 1 quando e só quando o sólido é uma esfera.

Estamos perante um enunciado muito simples, com um lastro histórico notável e uma demonstração de elevado grau de dificuldade, em claro contraste com o gémeo trivial sobre a esféricidade.

Cada uma das funções, esféricidade e quociente isoperimétrico, permite comparar quaisquer sólidos quanto à sua rotundidade. Mas são critérios diferentes que podem, por isso, conduzir a conclusões díspares. Por exemplo, os cinco platónicos ficam assim ordenados, por ordem crescente dos seus quocientes isoperimétricos: tetraedro (.3023), cubo (.5236), octaedro (.6046), dodecaedro (.7547), icosaedro (.8288). Na corrida da esféricidade ganham o icosaedro e o dodecaedro, *ex-æquo* (.7947), o cubo e o octaedro ficam em terceiro lugar, *ex-æquo* (.5774), e o tetraedro em quinto (.3333), sozinho por não ter irmão dual.³

No caso dos poliedros arquimedianos, os dois critérios conduzem a ordenações algo diferentes; por exemplo, os quatro mais rotundos são os mesmos para os dois



Esfericidade à moda da FIFA

Na sua página digital das bolas, uma foto sugere o modo como avaliam a esféricidade: entalam a bola, sem a pressionar, entre duas placas planas paralelas e medem com grande rigor a distância entre os planos. Dizem repetir a medida para 45.000 posições da bola. O quociente do mínimo pelo máximo dessas distâncias é a esféricidade- F , da FIFA. Destaca o site que as bolas da classe FIFA PRO apresentam uma esféricidade- F de cerca de 98,5%.

Sugerimos que a bola oficial passe a ter a forma de castanha de revolução que a figura ilustra, com esféricidade- F inultrapassável.

Isoperimétrico O termo tem a sua raiz num problema bidimensional, famoso e muito antigo: *de entre as curvas planas simples fechadas com certo perímetro fixo, quais as que delimitam maior área?* O assunto foi desenvolvido na Grécia Antiga, datando desse período a intuição correcta de que as circunferências são a chave da questão. As referências remontam aos antigos pitagóricos, tendo sido, no entanto, o ateniense Zenodoro (séc. II a.C.) quem nos legou os resultados mais relevantes. Por testemunhos indirectos sabemos que ele provou teoremas isoperimétricos relativos a polígonos, como este: *de entre os polígonos fechados de perímetro fixo e um número fixo de vértices, os regulares são os que delimitam maior área.* Os *Elementos* de Euclides já continham a prova de que o quadrado tem a maior área de entre os rectângulos isoperimétricos.

Porém, só no terceiro quartel do séc. XIX, com K.Weierstrass à cabeça, surgiram as primeiras provas convincentes do famoso teorema isoperimétrico bidimensional.

¹Vejam-se os artigos [1] - [3].

²Para tornar as coisas mais simples, *sólido* significa conjunto convexo, fechado, limitado e com, pelo menos, um ponto interior.

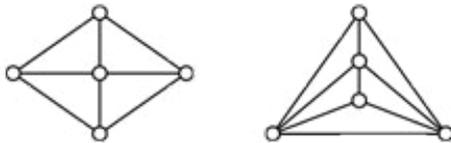
³Estes e outros números foram arredondados a quatro dígitos significativos.



Figura 1. Os quatro mais rotundos.

Zenodoro em 3D? De entre os poliedros com n vértices (ou faces) quais são os que otimizam o QI , ou outro critério de rotundidade? Cada valor de n origina problemas de dificuldade em geral elevada, nos quais, contrariamente ao caso 2D de Zenodoro, a regularidade não ajuda muito. Por exemplo, se n é ímpar, platônicos e arquimedianos ficam de fora, pois todos eles têm números pares de vértices e faces.

Para $n = 4$, o tetraedro regular é optimal, como o leitor interessado facilmente adivinha e comprova. Para cinco vértices, surge o problema de haver dois esqueletos (grafos de arestas) não isomorfos, os que a figura mostra, correspondentes à pirâmide quadrangular e à bipirâmide triangular.



Neste caso, os poliedros mais rotundos não são os mesmos para o QI e para a esfericidade, e não têm faces regulares. Saltando para o caso de oito vértices, o cubo tem menor QI e menor esfericidade do que o anti-prisma de base quadrada; mas a questão não fica resolvida só com isto, pois existem 257 esqueletos possíveis de poliedros com oito vértices; veja-se em [4] a sequência 1, 2, 7, 34, 257, 2606, 32.300,...

critérios mas por ordens distintas, como mostra a tabela seguinte, onde *esf.* e *QI* abreviam esfericidade e quociente isoperimétrico:

	<i>esf.</i>	<i>QI</i>
Rombicosidodecaedro	.9246	.9390
Dodecaedro roscado ⁴	.9189	.9470
Icosaedro truncado	.9150	.9032
Grande rombicosidodecaedro	.9049	.9136

A figura 1 mostra os quatro vencedores, fortes candidatos a bolas da FIFA, pintados a preceito. Como sabemos, há mais de meio século a UEFA seleccionou o icosaedro truncado como modelo das bolas de futebol. A escolha parece acertada, dadas a pouca formosura do Grande Rombi e a complexidade estrutural dos dois mais rotundos – imaginem, por exemplo, o que seria coser à mão 12 pentágonos e 80 pequenos triângulos de cabedal num total de 150 costuras!

TRUNQUEM MAIS FUNDO!

Imaginemos que a FIFA, num momento de lucidez, encomendava à *Gazeta* o desenho duma bola de futebol à moda antiga. A ideia mais imediata consiste em tomar um dos cinco platónicos e trancar-lhe os vértices quanto baste. Por motivos estéticos, dinâmicos e funcionais, a truncatura deve consistir na remoção de pequenas pirâmides regulares, uma por cada vértice e de modo igual para todos os vértices. Admitindo que o nosso platónico tem arestas de medida 1, chamamos *profundidade* da truncatura à medida t das arestas laterais das pirâmides removidas. A figura 2 mostra o mais rotundo dos platónicos – e, por isso, o melhor candidato à truncatura – truncado a diversas profundidades.

A questão matemática cuja solução oferecemos à FIFA é esta: escolhido um critério de rotundidade e um sólido platónico,

Que profundidade(s) de truncatura desse platónico otimiza(m) a rotundidade?

Mais precisamente, neste Canto Delfico resolvemos o caso do icosaedro truncado e convidamos o leitor a mandar à FIFA o tratamento dos outros quatro platónicos truncados.

O primeiro critério a considerar vai ser o de mais fácil tratamento, a esfericidade. Seja \mathcal{T}_t o icosaedro truncado

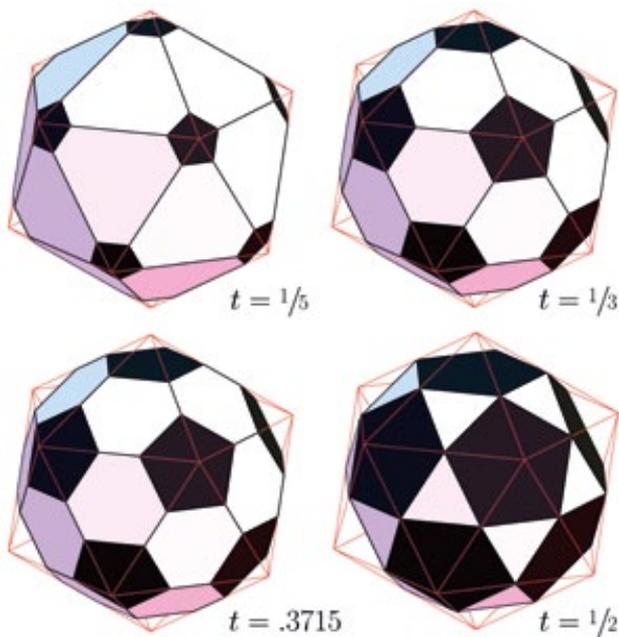


Figura 2. Truncaturas de um icosaedro.

à profundidade t ; denotem-se por $r(t)$ e $R(t)$ os raios interno e externo de \mathcal{I}_t . Por definição, a esfericidade de \mathcal{I}_t é

$$\epsilon(t) = \frac{r(t)}{R(t)}.$$

Note-se que t percorre o intervalo $[0, 1/2]$. Crescendo t , cada vértice de \mathcal{I}_t aproxima-se do centro de cada face triangular a que pertence, pelo que $R(t)$ é estritamente decrescente. O raio $r(t)$ é a menor das distâncias das faces hexagonais e pentagonais ao centro de \mathcal{I}_t ; portanto, $r(t)$ mantém-se constante para t num intervalo $[0, c]$, onde c é o número crítico para o qual todas as faces de \mathcal{I}_c são tangentes à esfera interna do icosaedro.

Para qualquer arquimediano, as faces mais próximas do centro são as de maior número de vértices. Por escolha da FIFA, a Telstar é arquimediana, com $1/3$ de profundidade de truncatura. Portanto, $c > 1/3$, o que prova, para o critério vigente, que

A Telstar não é boa bola, pois pode aumentar-se a esfericidade truncando o icosaedro um pouco mais fundo.

Não será difícil mostrar que o valor crítico de t é dado por

$$c = \frac{12\sqrt{5} - (\sqrt{54} + \sqrt{30})\sqrt{5} - \sqrt{5}}{12(\sqrt{5} - 1)},$$

com valor aproximado .3715. A Telstar crítica está repre-

sentada na figura 2; as suas faces hexagonais são irregulares, com arestas de dois comprimentos distintos, na razão de 1 para .6920. A prova da sua optimalidade e a determinação da esfericidade óptima exigem mergulhar as mãos em pormenores.

CONTAS

A determinação de uma fórmula para a esfericidade $\epsilon(t)$ requer alguns cálculos envolvendo a geometria do triângulo, do pentágono e do hexágono regulares, a indispensável percepção tridimensional e aplicações adequadas do teorema de Pitágoras. É complicado, aborrecido, mas elementar. A figura 3 mostra um corte do icosaedro (de arestas 1) em vias de ser truncado à profundidade t .

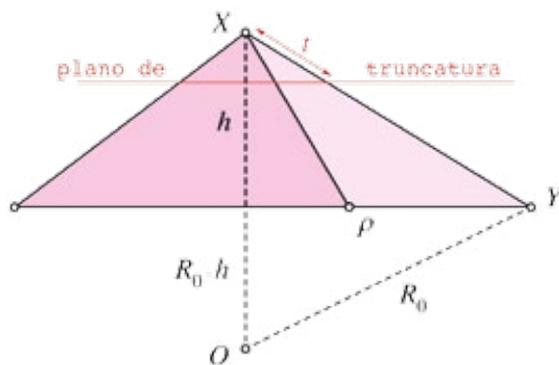


Figura 3. Corte do icosaedro.

Em destaque estão o centro O do icosaedro e dois dos seus vértices, X e Y . O polígono colorido representa a pirâmide pentagonal do icosaedro com vértice em X ; o plano da base está de topo, tal como o plano de truncatura, e a aresta $[X, Y]$ está no plano da figura. Interessa calcular o raio externo ρ da base da pirâmide, a sua altura h e o raio externo R_0 do icosaedro:

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{10}(5 + \sqrt{5})}$$

$$h = \sqrt{1 - \rho^2}$$

$$R_0 = \frac{1}{2h} = \sqrt{\frac{1}{8}(5 + \sqrt{5})}.$$

⁴ Tentativa de tradução do inglês *snub*. A "snubificação" de um poliedro consiste em tomar o invólucro convexo da configuração que se obtém por expansão, i.e., por translação radial das faces do poliedro, acompanhada de rotação planar de cada face em torno do seu centro.

Da figura 3 facilmente resulta que $R_0 - ht$ é a distância das faces pentagonais de \mathfrak{T}_t ao seu centro, e que o raio interno do icosaedro é

$$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{12}\sqrt{15}.$$

O raio externo $R(t)$ também se 'vê' em verdadeira grandeza na figura. De tudo isto resulta

$$r(t) = \min\{\Delta, R_0 - ht\}$$

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 - (1-t)t}.$$

O parâmetro crítico é a solução da equação $\Delta = R_0 - ht$; calculando e simplificando obtemos o valor de c acima anunciado. Para $t \geq c$, a esfericidade é

$$\epsilon(t) = \frac{R_0 - ht}{\sqrt{R_0^2 - (1-t)t}}$$

com numerador e denominador decrescentes. A identidade

$$2h \frac{R(t)^4}{R_0 - ht} \epsilon(t) \epsilon'(t) = (h^2 - 1)t,$$

válida para $t \geq c$, mostra que $\epsilon'(t) < 0$ e que $\epsilon(t)$ é decrescente no intervalo em estudo. Portanto, \mathfrak{T}_c é optimal. Pode determinar-se uma expressão exacta, com radicais, para a esfericidade óptima, pouco útil pela complexidade que se adivinha; o valor aproximado

$$\epsilon(c) \approx .9226$$

mostra que o icosaedro decentemente truncado produz uma bola de esfericidade superior à do dodecaedro roscado.

O QI DUM ICOSAEDRO TRUNCADO

Sejam V_0 e A_0 o volume do platónico que vai trunchar-se e a área da sua superfície limítrofe. Considera-se, em dado vértice X , a pirâmide P que é removida quando trunquemos X à profundidade $t=1$. Sejam v_p o volume de P e δ_p a diferença entre a sua área lateral e a da base. O volume e a área da superfície limítrofe do platónico truncado à profundidade t são dados por

$$V(t) = V_0 - nvpt^3 \quad \text{e} \quad A(t) = A_0 - n\delta pt^2,$$

onde n denota o número de vértices do platónico em causa. No caso do icosaedro, que está na berlinda, $n=12$ e P é a pirâmide da figura 3. (No caso do tetraedro, P é o tetraedro.) O quociente isoperimétrico do platónico truncado é, pois,

$$q(t) = \frac{V(t)^2}{A(t)^3}.$$

As identidades

$$A^6 \left(\frac{V^2}{A^3} \right)' = 2VV'A^3 - 2A^2A'V^2$$

$$= 6nVA^2t(\delta_p V - v_p A t)$$

$$= 6nVA^2t(\delta_p V_0 - v_p A_0 t)$$

mostram que o sinal da derivada de $q(t)$ é o sinal de $\delta_p V_0 - v_p A_0 t$. Portanto, a derivada de $q(t)$ anula-se para um só valor de t , nomeadamente

$$t_0 = \frac{\delta_p V_0}{v_p A_0},$$

$q'(t)$ é positiva para $t < t_0$ e negativa para $t > t_0$. Sendo assim, a truncatura de profundidade t_0 é a única que maximiza o quociente isoperimétrico. A surpresa é que t_0 é o parâmetro crítico c encontrado acima!

O icosaedro truncado vencedor do concurso da esfericidade é, também, o de maior QI.

Mais um desaire para a FIFA, que assim perde em três tabuleiros. O que importa ao matemático, criatura pouco sensível a estas vaidades e que desconfia de coincidências, é encontrar motivos da surpresa mais nobres do que as contas que a ela conduziram.

Ao Professor João Queiró agradeço os muitos aperfeiçoamentos do texto.

REFERÊNCIAS

- [1] J. M. Göthals e J. J. Seidel, "The Football", *Nieuw Arch. Wisk.* (3), 29(1981), pp. 50-58.
- [2] J. M. Goethals, J. J. Seidel, "Cubature formulae, polytopes and spherical designs", in C. Davis *et al.* (ed.s), *The Geometric Vein: The Coxeter Festschrift*, Springer-Verlag, New York, 1981, pp. 203-218.
- [3] R. Hardin e N. Sloane, "McLaren's improved snub cube and other new spherical designs in three dimensions", *Discrete Comput. Geom.*, 15(1996), pp. 429-441.
- [4] "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences", <https://oeis.org/>, sequência A000944, vista em 16-6-2015.

O autor escreve de acordo com a grafia antiga.



FABIO CHALUB
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

UMA EPIDEMIA DE HUMANOS

Uma característica fundamental da matemática é ser uma linguagem universal. Rapidamente podemos mudar o problema sem alterar em substância as técnicas utilizadas. Inspirados por um modelo da epidemiologia, uma equipa de dois antropólogos, um geólogo e um ecólogo modelou a expansão polinésia, um lento processo migratório entre ilhas e arquipélagos no Pacífico Sul. As conclusões não poderiam ser mais surpreendentes.

Talvez seja o lugar mais bonito do mundo. Uma vasta extensão de mares, pontuada por milhares de pequenas ilhas. Algumas, efetivamente, não tão pequenas (como o Hawaii), mas muitas de apenas alguns quilómetros quadrados, ocupadas há milhares de anos por um povo resiliente, habituado a sobreviver em condições duríssimas. Não houve europeu que, ao vê-los pela primeira vez não se tenha surpreendido com as suas incríveis capacidades de navegação.

Em pequenas canoas, usando como referência as estrelas, os ventos, as correntes, os locais de concentração de certas espécies animais, os polinésios eram capazes de viajar durante dias em simples canoas. Levavam com eles apenas alimentos não perecíveis (como o taro) e bens comercializáveis, estabelecendo desta forma relações comerciais duradouras entre ilhas que distam milhares de quilómetros entre si. Os povos dos mares do sul compensavam as dificuldades óbvias em se guiar em oceano aberto, com poucas referências imóveis, com uma longa e consistente tradição oral, em que os mais velhos ensinavam aos mais novos como chegar aos diversos pontos de interesse. Esta informação, inclusive, era considerada um segredo e não era passada livremente.

De qualquer forma, um dia foi necessário navegar sem acesso a esta informação. Isto deu-se durante o processo de colonização – que se acredita ter começado há cerca de 3000 anos, apesar de este número estar recheado de

incertezas – do ocidente para o oriente, chegando a sensivelmente todas as ilhas disponíveis cerca de 2000 anos depois. A tecnologia de construção de canoas para longas travessias estabilizou-se durante este período, como mostra o recente achado da Anaweka Waka. *Waka* significa canoa, enquanto Anaweka é uma referência ao sítio arqueológico onde foi encontrada, na Nova Zelândia. Esta data do período final da expansão polinésia e era tecnologicamente equivalente às canoas usadas aquando dos primeiros contactos com os europeus, cerca de 500 anos depois. Veja a figura 1 para um esquema da expansão austronésia (que inclui a região da Polinésia, como ocupação mais recente) e a figura 2, para o exemplo de transporte usado pelo polinésios durante milhares de anos.

A partir da análise da cultura, incluindo de forma muito importante uma análise das diversas línguas faladas na região, infere-se a existência de um processo migratório lento e constante (não de uma substituição de um povo por outro, em sucessivas vagas migratórias). Apesar de estas análises fornecerem uma razoável ideia da ordem de ocupação dos diversos arquipélagos e ilhas, não explicam quais os critérios usados pelos antigos para decidir o próximo ponto de ocupação. Como decidir para onde ir, se de uma ilha é impossível saber a localização da próxima?

É esta a questão que motiva o artigo [1], da autoria de dois antropólogos, um geólogo e um ecólogo. Para isto, inspiraram-se nos modelos matemáticos da epidemio-



Figura 1. Mapa da expansão dos povos austronésios, a partir da Ilha de Formosa (Taiwan), há cerca de 5000 anos. A Polinésia é a região mais à direita marcada no mapa. Fonte: Wikimedia Commons.

logia. Em particular, consideravam que os humanos são uma espécie de infecção incurável que pula de ilha para ilha segundo certos critérios. Desta forma, cada sítio do modelo pode estar no estado "Suscetível a colonização" ou "Colonizado", e dependendo de uma série de fatores, uma ilha colonizada pode infectar outra – como ocorre nas doenças incuráveis, em que a doença salta entre hospedeiros. Estes tipo de modelo é muito estudado e, portanto, apresentava várias facilidades para simulações computacionais e validação dos resultados numéricos quando comparado com dados arqueológicos.

A equação central para compreensão do modelo estabelece a probabilidade de uma certa ilha i ser *infectada* no tempo t :

$$\Pr(i, t) = 1 - \exp \left\{ -\Omega_S(i) - \sum_{j \in C(t)} (\Omega_G(j) + \kappa(i, j)) \right\},$$

onde $C(t)$ é o conjunto de ilhas colonizadas no instante t , $\Omega_S(i)$ quantifica todos os fatores que fazem a ilha i ser um local propício à colonização; $\Omega_G(j)$ sinaliza o

quanto os habitantes da ilha j querem *fugir* da mesma e finalmente $\kappa(i, j)$ é uma variável que relaciona as ilhas i e j (entre as quais, evidentemente, a distância). O aumento de cada uma destas variáveis implica no aumento da probabilidade de a ilha i vir a ser colonizada no próximo instante de tempo.

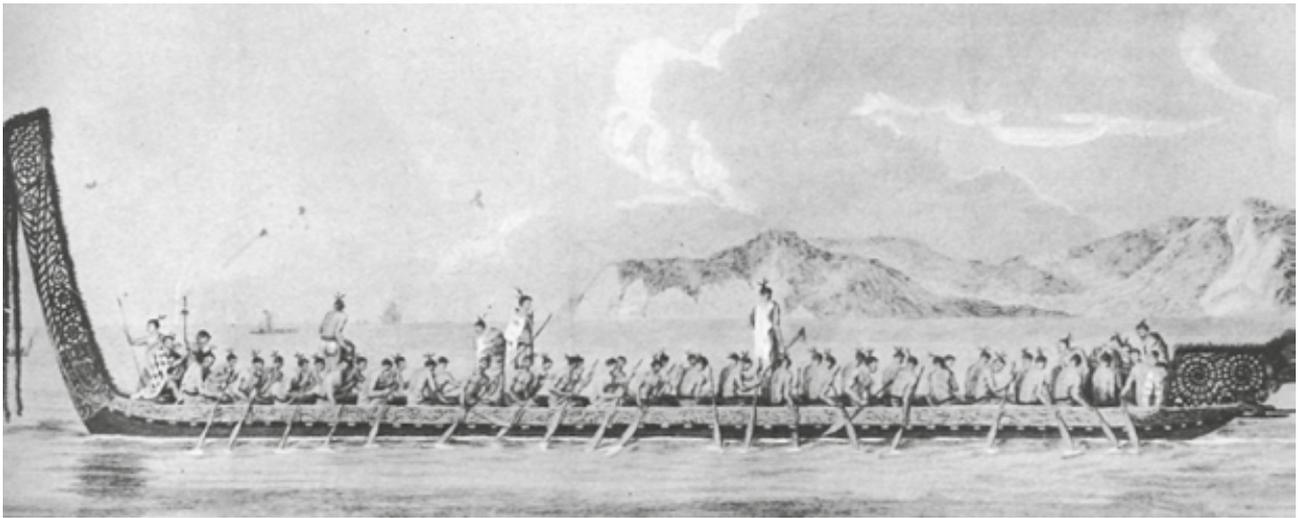
Desta forma, modelar matematicamente a dinâmica humana nesta parte do globo significa estabelecer expressões explícitas para cada um destes parâmetros; no entanto, a abordagem do artigo é diferente. A ideia é testar, contra os dados empíricos, as diversas hipóteses correntes no meio antropológico. Assim, para cada teoria em moda, escolhe-se um dos termos acima, com alguns parâmetros livres e tenta-se obter resultados aceitáveis – para quem conhece, uma abordagem típica dos "problemas inversos", em que sabemos a solução mas desconhecemos os detalhes do modelo.

A primeira possibilidade (que, na verdade, corresponde a duas hipóteses distintas) é considerar que a função \Pr definida acima depende apenas da distância ou do ângulo de marcação (a maior amplitude angular para, partindo de uma ilha em linha reta, ser capaz de avistar a ilha seguinte – isto depende, por exemplo, da elevação do objetivo, sendo distinta para uma vulcão ou um atol situados no mesmo local). Assim, consideraremos apenas o termo $\kappa(i, j)$, múltiplo das grandezas acima com um único parâmetro livre – exatamente a constante de proporcionalidade.

O segundo modelo estudado é similar do ponto de vista matemático, mas com uma diferença fulcral: pressupõe o que é chamado de "exploração segura". Este considera que o único termo não nulo é $\kappa(i, j)$, mas pressupõe a existência de uma direção privilegiada de migração, dada pelos ventos dominantes na região. Assim, há direções mais seguras e mais arriscadas para navegar rumo ao desconhecido. Como antes, aqui há apenas um parâmetro livre.

Uma terceira possibilidade é considerar que o ponto essencial para a compreensão dos modelos migratórios é estimar a capacidade da ilha de destino de receber novos migrantes; desta forma, o único termo não nulo é $\Omega_S(i)$. Explicitamente, considera-se o logaritmo da área disponível, a precipitação e a elevação, todos parâmetros fundamentais para uma produção agrícola que permita uma habitação perene. Estes coeficientes são colocados numa única fórmula, com dois parâmetros livres.

O último caso considerado pressupõe que o fator dominante na migração é a necessidade de fugir de onde se está. Desta forma, $\Omega_G(j)$ depende de dois fatores: a área útil da ilha – um evidente limitador do crescimento po-



pulacional – e o nível de organização hierárquica da sociedade local. Quanto maiores forem os níveis hierárquicos, maior será a probabilidade de uma subpopulação se sentir marginalizada e decidir emigrar. Por mais estranha que pareça esta hipótese, ela é – de acordo com os autores do artigo – bem sustentada na literatura antropológica. Novamente, temos dois parâmetros livres.

Agora, trata-se de realizar simulações na procura dos parâmetros que, em cada caso, mais aproximam os dados reais e que sejam robustos em relação à alteração da informação empírica – uma constante quando se estuda assuntos com tão poucos dados disponíveis, em que cada nova descoberta tem o potencial de mudar toda a nossa compreensão do assunto.

Ao fim e ao cabo, um dos modelos claramente se destaca em relação aos outros: os nativos sabiam – e bem! – o que estavam a fazer. Usavam não só a "exploração segura" como navegavam, na sua essência, contra os ventos. De facto, já dominavam as técnicas necessárias para tal tipo de navegação. O motivo pelo qual o faziam, conjeturam os autores, é incrivelmente simples: se a viagem não der em nada (ou seja, der em água), o retorno estava garantido. Só se deve navegar pelos ventos quando se tem uma razoável certeza de chegar a bom porto, pois o regresso torna-se essencialmente impossível.

Portanto, um mistério antigo pode começar a ser desvendado usando uma característica importante da modelação matemática: a capacidade de separar o essencial do acessório, o fulcro do detalhe. Os polinésios migraram de ilha em ilha, seguindo direções contrárias aos ventos dominantes em cada passo e assim conquistaram os mares do sul.

Figura 2: Exemplo de uma canoa Maori, a *waka*, tal como registado por um dos artistas da expedição de James Cook, o primeiro europeu moderno a contactar os polinésios. Fonte: New Zealand Electronic Text Collection, Universidade de Victoria, Nova Zelândia. <http://nzetc.victoria.ac.nz/etexts/Cen01-02Make/Cen01-02Make-P020a.jpg>.

REFERÊNCIAS

[1] Adrian V. Bell, Thomas E. Currie, Geoffrey Irwin, e Christopher Bradbury, "Driving Factors In The Colonization Of Oceania: Developing Island-Level Statistical Models To Test Competing Hypotheses". *American Antiquity* 80(2), 2015, pp. 397-407.



ARQUIMEDES E O VOLUME DA ESFERA

FÁTIMA VINAGRE

ESCOLA SECUNDÁRIA DA AZAMBUJA

mfatimavinagre@gmail.com

Arquimedes de Siracusa (287 a.C.– 212 a.C.) é muito provavelmente um dos maiores matemáticos de sempre. Tendo realizado os seus estudos em Alexandria, no Egito, capital do mundo helénico, manteve correspondência com matemáticos alexandrinos como Eratóstenes e Aristarco.

A sua vasta obra matemática não sofreu de grande divulgação, uma vez que o próprio Arquimedes contribuiu, em parte, para isso. Os seus trabalhos dedicados à quadratura do círculo e da parábola, ao estudo da espiral, ao volume da esfera e de outros corpos redondos, ao estudo do centro de gravidade e aos problemas da flutuação eram escritos na forma de breves tratados, dirigidos aos matemáticos da escola de Alexandria. O estilo elíptico, a densidade de referências internas e a dificuldade das demonstrações não favoreceram a difusão, mesmo entre os matemáticos, apesar da grande originalidade dos seus trabalhos.

Foi apenas em 1906 que o filósofo e historiador dinamarquês Johan Ludvig Heiberg (1854-1928) estudou um palimpsesto¹, o qual continha além de textos matemáticos de Arquimedes subjacentes a um texto religioso do século X, um texto grego, “Sobre os corpos flutuantes”. Mas foi entre os textos de Arquimedes que fez a sua maior descoberta, “O método sobre teoremas mecânicos”, atualmente conhecido por “O Método”, no qual Arquimedes apresentava a Eratóstenes, de Alexandria, o procedimento heurístico que empregava para obter as suas conclusões, que consistia na descrição de um “método mecânico” para investigar questões matemáticas, explicando várias das suas descobertas, entre as quais aquela que pode ser considerada uma das

maiores descobertas matemáticas de todos os tempos, a fórmula para calcular o volume de uma esfera.

Arquimedes sabia que o volume de cone é igual a um terço do volume de um cilindro com a mesma altura e a mesma base e que o volume de um cilindro é dado pelo produto da área de uma das suas bases pela sua altura, e apresentou uma dedução teórica da **lei da alavanca** na sua obra “Sobre o Equilíbrio dos Planos” ou “Sobre os Centros de Gravidade das Figuras Planas”, tendo-a engenhosamente aplicado na demonstração da fórmula de cálculo do volume de uma esfera.

Tenhamos, por base, o conceito de centro de gravidade de um corpo de Arquimedes:

“Dois pesos w_1 e w_2 nas extremidades de uma barra de peso desprezável e distantes x_1 e x_2 respetivamente de um ponto de apoio estão em equilíbrio se $w_1x_1 = w_2x_2$.”

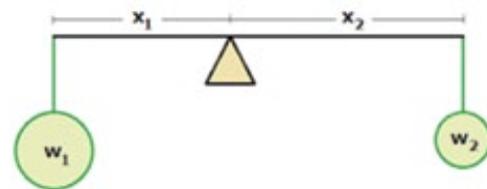


Figura 1: Ilustração do conceito de centro de gravidade de um corpo.

Segundo o geómetra, o centro de gravidade de qualquer corpo é um ponto, pertencente ao corpo ou localizado no espaço vazio, tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, o corpo assim sustentado permanece em repouso e preserva a sua posição original, sem se inclinar em nenhuma direção, qualquer que seja a sua orientação inicial em relação à Terra [1] e que todo o corpo, suspenso por qualquer ponto, assume um estado de equilíbrio quando o ponto de suspensão e o centro de gravidade do corpo estão ao longo de uma mesma linha vertical.²

Considere-se, ainda, o postulado 6 (no qual assenta a lei da alavanca) e os resultados teóricos tratados por Arquimedes na sua obra “Sobre o Equilíbrio dos Planos”, relevantes para o presente artigo:

¹Um pergaminho usado para nele se escrever várias vezes.

²Segundo Arquimedes afirma, no decorrer da demonstração da proposição 6, que comprovou o enunciado ao qual a autora se refere, num outro trabalho, hoje perdido.

Existem diversas formas de demonstrar como se calcula o volume de uma esfera em função do seu raio. Contudo, neste artigo, pretende-se fazê-lo com base na lei da alavanca de Arquimedes de Siracusa (287 a.C.– 212 a.C.).

Postulado 6: *Se grandezas se equilibram a certas distâncias³, então grandezas equivalentes⁴ a estas grandezas equilibrar-se-ão, por sua vez, nas mesmas distâncias.⁵ [1]*

Proposição 4: *Se duas grandezas iguais não possuem o mesmo centro de gravidade, o centro de gravidade da grandeza composta por estas [duas] grandezas estará no ponto médio do segmento de reta ligando os centros de gravidade das [duas] grandezas. [3]*

Proposições 6 e 7: *Se [duas] grandezas são comensuráveis [proposição 6] ou inmensuráveis [proposição 7], elas equilibrar-se-ão em distâncias inversamente proporcionais às grandezas. [3]*

Façamos, agora, algumas considerações acerca do que se entende por alavanca.

A alavanca consiste num corpo rígido, geralmente linear, capaz de girar ao redor de um eixo horizontal fixo em relação à Terra (o fulcro ou ponto de sustentação PS). O eixo de rotação é, em geral, ortogonal à alavanca, com os dois ficando usualmente no plano horizontal quando a alavanca está parada em relação à Terra.

É como se fosse uma balança, mas com a possibilidade de colocarmos pesos a distâncias diferentes do fulcro.

Chamamos braço da alavanca à distância horizontal, d , entre o ponto de apoio de um corpo sobre o travessão (ou haste da alavanca) e o plano vertical passando pelo fulcro. Para facilitar a linguagem, usaremos a expressão de distância entre o peso e o fulcro, mas em geral deve entender-se distância horizontal entre o ponto de atuação do peso na alavanca e o plano vertical passando pelo fulcro.

Quando falarmos de dois braços da alavanca, deve entender-se que estes estão em lados opostos do plano vertical que passa pelo fulcro.

Para se utilizar a lei da alavanca, pressupõe-se que a alavanca seja sensível, isto é, tenha liberdade de oscilação e de giro ao redor do fulcro; verifique as razões $\Delta P/PA$ (onde ΔP é a diferença entre os pesos que estão dos dois lados da alavanca e PA é o peso da alavanca) e d/h (onde h é a distância vertical entre o ponto de sustentação e centro de gravidade do travessão, e a distância d é o menor dos braços da alavanca).

Os dois lados do travessão da alavanca devem ter-lhes apostas diversas distâncias iguais em relação à vertical que passa pelo fulcro.

Mais, para que haja equilíbrio de dois corpos numa alavanca, apenas é relevante o seu peso e a sua distância ao fulcro.

A lei da alavanca determina, tal como Arquimedes expressou com a proposição 6 suprarreferida, que ao colocar-se um número N_A de corpos com o mesmo peso $P(P_A \equiv N_A P)$ atuando juntos num dos braços d_A de uma alavanca e um número N_B de corpos com o mesmo peso $P(P_B N_B P)$ atuando juntos no outro braço da alavanca d_B e soltando-a do repouso na horizontal, ela permanece parada na horizontal quando $d_B/d_A = P_A/P_B = N_A/N_B$.

Este princípio determina que ao se colocar N pesos P_1, P_2, \dots, P_N de um dos lados da alavanca suspensos, respetivamente, nas distâncias d_1, d_2, \dots, d_N do plano vertical que passa pelo fulcro e M pesos $P_{N+1}, P_{N+2}, \dots, P_{N+M}$ do outro lado da alavanca suspensos, respetivamente, nas distâncias $d_{N+1}, d_{N+2}, \dots, d_{N+M}$ do plano vertical que passa pelo fulcro e soltar-se do repouso a alavanca com esta na horizontal, a alavanca permanece em equilíbrio, verificando-se

$$\sum_{i=1}^N \frac{P_i d_i}{P_0 d_0} = \sum_{i=N+1}^{N+M} \frac{P_i d_i}{P_0 d_0}.$$

Para determinarmos algebricamente o centro de gravidade entre dois corpos, procedemos da seguinte forma:

Considere-se uma alavanca em equilíbrio estável⁶ na horizontal sem a colocação de outros corpos. Suponha-se que essa alavanca tem uma haste homogênea tal que quando o fulcro fica ao longo de um plano vertical que divide a haste em duas partes com o mesmo comprimento, a alavanca permanece em equilíbrio ao ser solta do repouso, parada na horizontal. O centro de gravidade do travessão está verticalmente abaixo do fulcro, ou do ponto de sustentação.

Sabemos que este equilíbrio mantém-se caso sejam colocados dois corpos A e B suspensos em lados opostos da alavanca, desde que se verifique $d_B/d_A = P_A/P_B$, onde d_A e d_B são as distâncias horizontais entre os pontos de suspensão de A e de B até ao plano vertical passando pelo fulcro, sendo P_A e P_B os pesos de A e de B , respetivamente. Isto significa que o centro de gravidade destes dois corpos também se encontra no plano vertical que passa pelo fulcro.

Tomemos um eixo horizontal, x , ao longo da haste da alavanca de comprimento L e com origem (escolhida de forma arbitrária) em $x = 0$.

Suponha-se que as extremidades da haste da alavanca estão localizadas em X_E e $X_D = X_E + L$, que colocamos os corpos A e B suspensos nas posições X_A e X_B do eixo X , respetivamente, e que a alavanca permanece em equilíbrio ao ser solta do repouso com os corpos A e B

atuando nestas posições, conforme se pode observar na figura seguinte.

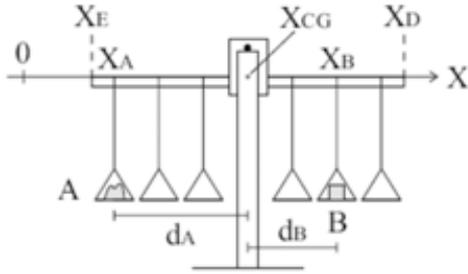


Figura 2: Encontrando a expressão algébrica para o centro de gravidade.

O centro de gravidade deste sistema tem de estar sobre o plano vertical que passa pelo fulcro quando $d_B/d_A = P_A/P_B$, uma vez que a alavanca permanece em equilíbrio.

Represente-se a localização do centro de gravidade dos corpos A e B por X_{CG} .

Então, $d_A = X_{CG}X_A$ e $d_B = X_BX_{CG}$.

Pela lei da alavanca, a posição X_{CG} do centro de gravidade deste sistema de dois corpos ao longo do eixo X é dada por:

$$\frac{X_B - X_{CG}}{X_{CG} - X_A} = \frac{P_A}{P_B},$$

ou seja,

$$X_{CG} = \frac{P_A}{P_T}X_A + \frac{P_B}{P_T}X_B,$$

onde $P_T = P_A + P_B$ é o peso total dos dois corpos.

Facilmente se observa que quando $P_A = P_B$, X_{CG} é o ponto médio entre X_A e X_B .

Feitas as considerações anteriores, estamos em condições de deduzir, utilizando a lei da alavanca de Arquimedes, a fórmula para calcular o volume de uma esfera de raio r .

Pretende-se colocar os sólidos a seguir descritos suspensos nas extremidades de uma alavanca, como mostra a figura 3.

Para tal, comecemos por considerar os três sólidos de revolução seguintes: uma esfera gerada pela rotação do seu círculo maior de raio r em torno do seu diâmetro, um cone de raio e altura iguais ao diâmetro da esfera e um cilindro de raio e altura iguais ao diâmetro da esfera cujo eixo coincide com o diâmetro da esfera, dispostos conforme a figura 4.

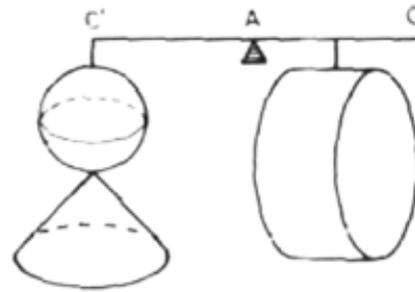


Figura 3: Alavanca com os sólidos suspensos e com fulcro em A.

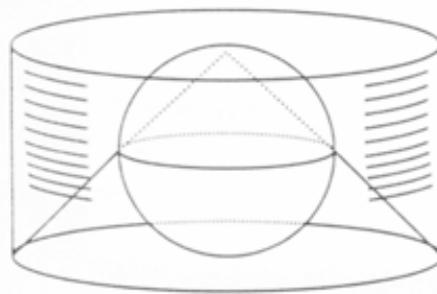


Figura 4: Posição dos sólidos.

Deixemos a cargo do leitor a justificação da importância da posição dos sólidos.

Tomemos o ponto de suspensão dos sólidos no vértice do cone. Então, os centros de gravidade dos três sólidos encontram-se numa mesma linha reta vertical.

Considere-se uma alavanca HC de braços HA e AC em equilíbrio sem os sólidos suspensos, cujo comprimento dos braços é $2r$ e com fulcro no ponto médio de HC

³ Entenda-se “grandezas a certas distâncias” como “grandezas cujos centros de gravidade estão às mesmas distâncias do fulcro.”

⁴ Entenda-se “grandezas equivalentes” como “grandezas com o mesmo peso.”

⁵ Este postuladum permitia a Arquimedes substituir um corpo A suspenso numa alavanca através do seu centro de gravidade localizado à distância horizontal d do plano vertical passando pelo fulcro, por outro corpo B conveniente que tivesse o mesmo peso que A, sem afetar o equilíbrio da alavanca, desde que o centro de gravidade deste corpo B também estivesse pendurado na alavanca à mesma distância horizontal d do plano vertical passando pelo fulcro.

⁶ Equilíbrio estável é quando qualquer perturbação na posição do corpo fizer com que o centro de gravidade suba em relação à sua posição anterior.

(para que o plano vertical que passa pelo fulcro divida ao meio o travessão da alavanca). Seja A o fulcro.

Comece-se por considerar que o fulcro se encontra no vértice do cone e, por comodidade, faça-se um corte transversal nos três sólidos passando pelo fulcro e suponha-se que os sólidos estão suspensos neste ponto de apoio⁷. Obtém-se a figura 5.

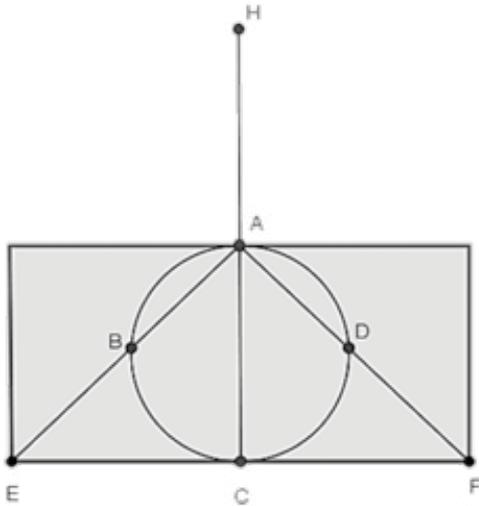


Figura 5: Seção transversal dos sólidos.

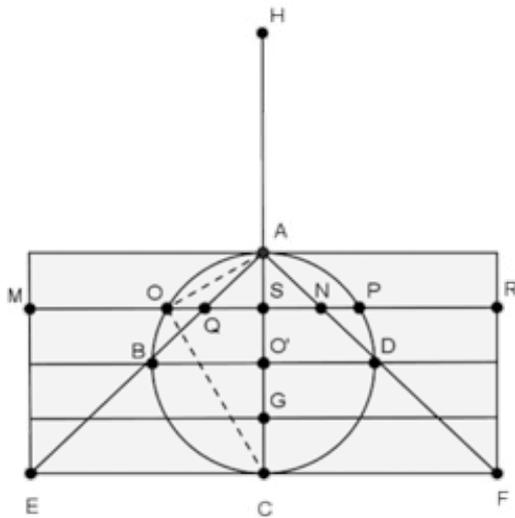


Figura 6: Designação de pontos da seção.

De seguida, através deste corte transversal, tentemos encontrar pontos de suspensão para os sólidos em ambos os braços da alavanca, que não perturbem o equilíbrio da mesma.

Para tal, façam-se três cortes nos sólidos segundo planos paralelos à base do cilindro, tais que o cilindro fique dividido em quatro partes iguais⁸. Tais planos cortam AC em quatro partes iguais.

Denominem-se por S , O' e G os pontos de interseção dos planos com o eixo de rotação do cilindro.

Centremo-nos, agora, na secção transversal dos sólidos.

Designem-se pelas letras O e P os pontos de interseção do círculo com a reta MR e Q e N os pontos de interseção da reta MR com o triângulo AEH , assinalados na figura 6 e considere-se o triângulo AOC .

Como

$$\begin{aligned} \frac{AS}{AC} &= \frac{AS}{AC} \cdot \frac{AC}{AC} = \\ &= \frac{AS \cdot AC}{AC^2} = \frac{AS \cdot (AS + SC)}{AC^2} = \frac{AS^2 + AS \cdot SC}{AC^2} \end{aligned}$$

e $AS \cdot SC = OS \cdot SP$, dado que AC e OP são cordas da circunferência que se intersectam em S , podemos afirmar que

$$\frac{AS}{AC} = \frac{AS^2 + OS \cdot SP}{AC^2} = \frac{AS^2 + OS^2}{AC^2}$$

e, portanto,

$$AS \cdot AC^2 = AC \cdot (AS^2 + OS^2). \quad (1)$$

Como, por construção, se sabe que $AH = AC = MS$, atendendo a que o triângulo AQS é isósceles (porque os ângulos $\angle QAS$ e $\angle AQS$ têm as mesmas amplitudes, são ambos de 45°), tem-se que $QS = AS$.

Consequentemente, a igualdade (1) é equivalente a

$$AS \cdot MS^2 = AH \cdot (QS^2 + OS^2),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{AS}{AH} &= \frac{QS^2 + OS^2}{MS^2} \Leftrightarrow \frac{AS}{AH} = \frac{\pi \cdot (QS^2 + OS^2)}{\pi \cdot MS^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{AS}{AH} = \frac{\pi \cdot QS^2 + \pi \cdot OS^2}{\pi \cdot MS^2}. \end{aligned}$$

Assim, como $\pi \cdot QS^2$, $\pi \cdot OS^2$ e $\pi \cdot MS^2$ representam as áreas dos círculos de raios QS , OS e MS , respetivamente, e como o equilíbrio de dois corpos se mantém, se as distâncias horizontais entre os pontos de suspensão destes forem inversamente proporcionais ao seu peso, podemos concluir que o equilíbrio da alavanca não é perturbado, se colocarmos os círculos de raios QS e OS suspensos na extremidade H da alavanca e o círculo de raio MS suspenso no ponto S pertencente ao outro braço da alavanca, ou seja, a uma distância horizontal do fulcro igual a $r/2$.

Tendo em conta que todos os resultados deduzidos através da secção transversal mantêm as mesmas propriedades se considerarmos S a variar de A até O' , tomemos o cilindro como união infinita dos círculos de raio igual a MS , o cone como união infinita dos círculos de raio igual a QS e a semiesfera como união infinita dos círculos de raio igual a OS , com S a variar de A até O' .⁹

Podemos concluir que o equilíbrio da alavanca não é perturbado se remontássemos os sólidos e os colocássemos suspensos no travessão da alavanca da seguinte forma: a semiesfera e o cone na extremidade H da alavanca e o cilindro no ponto de suspensão S situado no outro braço da alavanca.

Designem-se por V_S , V_C e V_i os volumes da semiesfera, do cone e do cilindro, respetivamente.

Como a alavanca se mantém equilibrada com a suspensão dos sólidos, verifica-se a relação $\frac{V_C + V_S}{V_i} = \frac{AS}{AH}$ ou seja,

$$\frac{V_C + V_S}{V_i} = \frac{r}{2} \cdot 2r \Leftrightarrow \frac{V_C + V_S}{V_i} = \frac{1}{4}. \quad (2)$$

Atendendo a que $V_C = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r$ e $V_i = (2r)^2 \pi r$, substituindo em (2), vem:

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r + V_S}{(2r)^2 \cdot \pi r} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \pi r^3 + V_S = \frac{(2r)^2 \cdot \pi r}{4}$$

$$\Leftrightarrow V_S = \pi r^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi r^3 \Leftrightarrow V_S = \frac{2}{3} \cdot \pi r^3.$$

Como o volume da esfera inicial é o dobro do volume desta semiesfera, podemos concluir que o volume da esfera inicial é $\frac{4}{3} \cdot \pi r^3$.

REFERÊNCIAS

[1] A. K. T. Assis. *Archimedes, the Center of Gravity, and the First Law of Mechanics*. Apeiron, Montreal, 2008.

[2] G. Ávila. "Arquimedes, a esfera e o cilindro", *Revista do Professor de Matemática* 10, 2010.

[3] Archimedes. *The Works of Archimedes*. Dover, New York, 2002. (Translated and edited in modern notation by T. L. Heath.)

[4] A.Silva. *Arquimedes e o volume da esfera*. Belo Horizonte, 2005.

SOBRE A AUTORA

Fátima Vinagre é professora de Matemática na Escola Secundária da Azambuja, licenciada em Matemática - Ramo Educacional, pela FCT-UNL, e mestre em Matemática - Grupos Cristalográficos Tridimensionais, pela Universidade de Aveiro. Exerceu funções de professora auxiliar de Álgebra Linear e Geometria Analítica e Análise Matemática I na FCT-UNL, foi responsável pela coordenação de Cursos de Especialização Tecnológica, presidente de um Conselho Técnico-Pedagógico, orientadora de estágios - profissionalização em serviço, avaliadora de pessoal docente e não docente, subdiretora e vice-presidente da Escola Secundária de Montejunto, entre outras funções.

⁷ Desta forma temos a garantia de que o sistema continua em equilíbrio.

⁸ O cilindro é dividido em partes iguais, para que tenham pesos iguais.

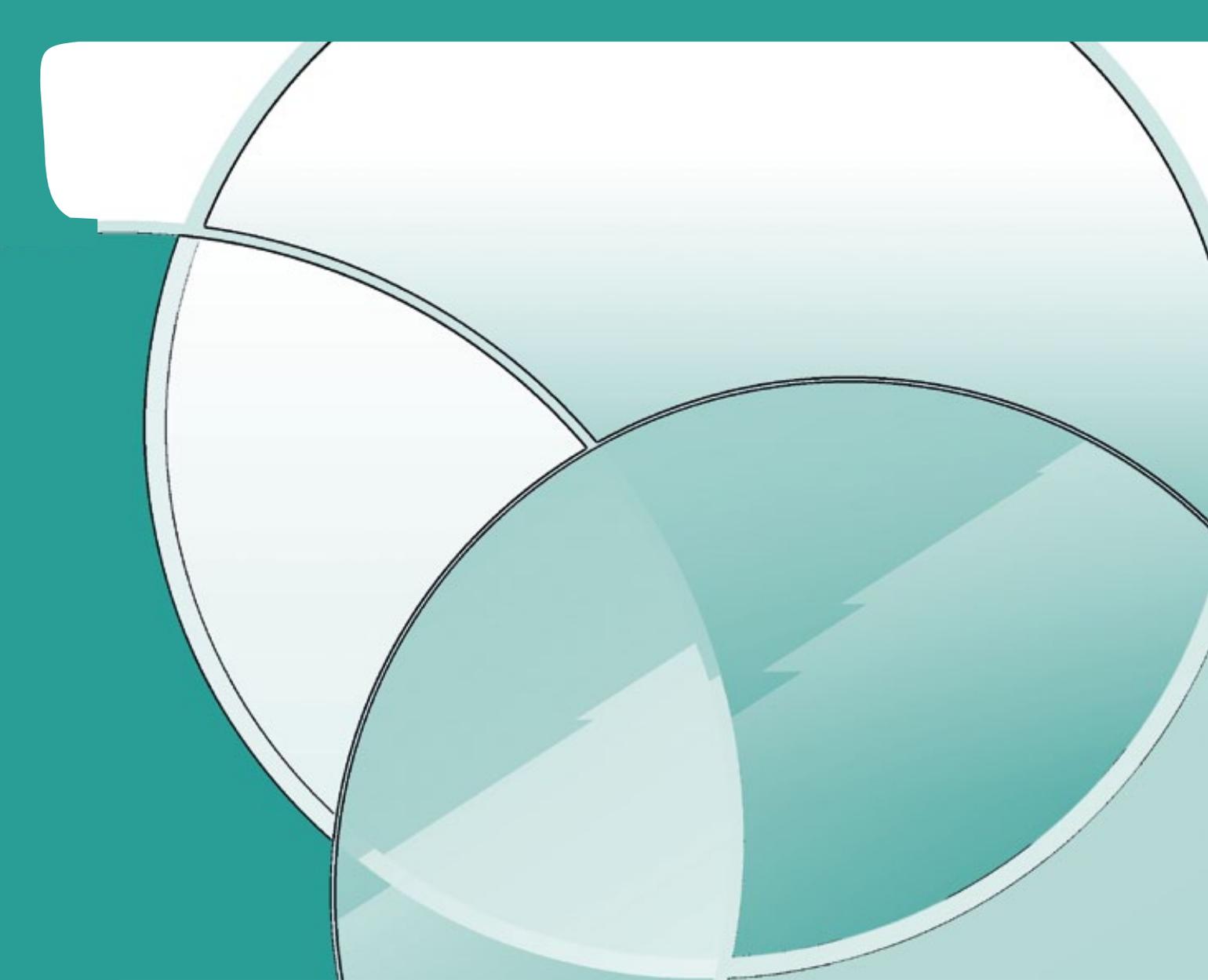
⁹ Tem em conta os procedimentos adotados por Arquimedes. [2].



Visite o site da
Gazeta de Matemática.

www.gazeta.spm.pt

Para aceder à área reservada a assinantes, solicite o seu código de subscrição através do e-mail gazeta@spm.pt



O CONJUNTO DE TODOS OS CONJUNTOS NÃO EXISTE

GILDA FERREIRA

UNIVERSIDADE DE LISBOA E UNIVERSIDADE LUSÓFONA DE HUMANIDADES E TECNOLOGIAS

gmferreira@fc.ul.pt

Com a reintrodução da Teoria dos Conjuntos no programa de matemática do 10.º ano de escolaridade e a referência ao paradoxo de Russell no caderno de apoio ao professor, pareceu-nos pertinente revisitarmos informalmente a temática “classe *versus* conjunto”. Pretendemos com este artigo motivar o conceito de classe própria e recordar brevemente a história dos paradoxos que estiveram na génese da Teoria Axiomática dos Conjuntos. Ilustrando que nem toda a coleção de objetos pode ser considerada um conjunto, encerramos o artigo mostrando que não existe o conjunto de todos os conjuntos.

1. CLASSE VERSUS CONJUNTO

Ao lermos o título desta secção “Classe *versus* Conjunto” talvez nos ocorram algumas das seguintes considerações/interrogações:

Todo o conjunto é uma classe.

Nem toda a classe é um conjunto, há classes próprias.

Existem classes que são “muito grandes” para serem conjuntos.

Consigo dar exemplos de classes que não são conjuntos?

Realmente entendo o porquê da distinção conjunto/classe própria?

Neste artigo convidamo-lo a refletir sobre as questões acima e a aprofundar a intuição sobre esta temática acompanhando-nos numa breve viagem pelo desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos, surgimento de obstáculos/ paradoxos e sua superação.

2. TEORIA INGÉNUA DOS CONJUNTOS

Quando se pensa em Teoria dos Conjuntos, há um matemático incontornável: Georg Cantor [1845-1918]. Basta pensarmos que a noção de infinito antes de Cantor era um tópico mais filosófico do que matemático. Foi Cantor quem pela primeira vez mostrou que há diferentes “tamanhos” de infinito, por exemplo, o infinito dos números reais é “maior” do que o infinito dos números naturais e este último tem o mesmo “tamanho” que o infinito dos números racionais (numerável). Perceber a importância das correspondências bijetivas na comparação de conjuntos infinitos, estender a aritmética dos números naturais a conjuntos infinitos (cardinais e ordinais), provar que a cardinalidade do conjunto das partes de A é sempre estritamente maior do que a cardinalidade de A (argumento de diagonalização) são exemplos do seu importante contributo na área. Cantor é justamente considerado o inventor da Teoria dos Conjuntos. A versão inicial desta teoria, atualmente conhecida como Teoria Ingénua dos Conjuntos (*Naive Set Theory*)¹ foi posteriormente desenvolvida (formalizada) pelo matemático alemão Gottlob Frege [1848-1925].

A motivação de Frege para apresentar uma formalização da Teoria (Ingénua) dos Conjuntos prendia-se com conseguir desta forma uma fundamentação para a matemática, nomeadamente a redução da aritmética à lógica. Contudo, os problemas não se fizeram esperar. Ainda antes da publicação do segundo volume que completaria a sua obra *Grundgesetze der Arithmetik*² [5] (traduzida para inglês em [1]), paradoxos, isto é contradições que derivavam nessa formalização, já eram conhecidos. Frege acrescenta um apêndice a esse segundo volume onde desabafa:

Um cientista dificilmente pode deparar-se com algo mais indesejável do que ver os fundamentos ruírem exatamente quando o seu trabalho está terminado. Fui colocado nesta posição por uma carta do Sr. Bertrand Russell, quando o trabalho já estava quase impresso.

Grundgesetze der Arithmetik, Vol. II., 1903.

¹A designação “Teoria Ingénua dos Conjuntos” é usada não apenas no contexto acima, a propósito das versões de Cantor/Frege, i.e. versões anteriores à atual Teoria Axiomática dos Conjuntos mas também pode referir-se à apresentação informal (no sentido de não axiomatizada) da moderna Teoria dos Conjuntos definida em linguagem natural, suficiente para grande parte do uso corrente da Teoria dos Conjuntos na prática matemática habitual.

²*Leis Básicas da Aritmética.*

Na origem do problema, usando terminologia moderna ao invés da notação adotada por Frege, está o facto de se permitir que:

dada uma propriedade $P(x)$ se forme o conjunto $\{x : P(x)\}$,

ou, dito de outra forma,

dada uma propriedade se forme o conjunto dos objetos que têm essa propriedade.

Caso não perceba como é que algo aparentemente tão inócuo pode trazer problemas, acompanhe-nos na secção seguinte.

3. SURGIMENTO DE PARADOXOS

A possibilidade de formar conjuntos por compreensão irrestrita, isto é, apresentando uma propriedade que os seus elementos, e apenas esses, possuam³, está na origem de uma variedade de antinomias (paradoxos) descobertas nos finais do século XIX, princípios do século XX.

Entre esses paradoxos, encontram-se:

Paradoxo de Burali-Forti (1897) $\{x : x \text{ é um ordinal}\}$

Paradoxo de Cantor (1897) $\{x : x \text{ é um cardinal}\}$ ⁴

Paradoxo de Russell (1901) $\{x : x \notin x\}$

em que assumir a existência dos conjuntos indicados gera contradições.

Os primeiros dois paradoxos requerem conhecimento sobre ordinais ou cardinais. Se o leitor não está familiarizado com estes conceitos, siga para a análise do paradoxo de Russell que, só envolvendo a noção de conjunto e de ser elemento de um conjunto, serve igualmente para ilustrar o risco de abrirmos a porta a contradições ao formarmos conjuntos partindo de certas propriedades.

Cesare Burali-Forti, matemático italiano assistente do bem conhecido Giuseppe Peano⁵, notou que, sendo o conjunto dos ordinais um conjunto bem ordenado também devia ele próprio ter um ordinal. Mas então este ordinal teria de ser *i)* maior do que qualquer ordinal no conjunto dos ordinais e *ii)* elemento do conjunto dos ordinais. Ora, a contradição é evidente: um objeto não pode ser simultaneamente elemento de um conjunto e maior do que todos os elementos desse conjunto, em particular, tal elemento teria de ser maior do que ele próprio.

Vejamos o paradoxo que provém de admitirmos que

existe o conjunto de todos os cardinais. Seja C tal conjunto. Mas, então, $\cup C$ é um cardinal maior do que ou igual a qualquer cardinal em C . Logo, $2^{\cup C}$ é um cardinal estritamente maior do que qualquer cardinal em C . Contradição, visto C conter todos os cardinais.

Se os anteriores paradoxos passaram ligeiramente despercebidos, o paradoxo de Russell, descoberto por Bertrand Russell mas também, independentemente, por Ernst Zermelo, teve enorme visibilidade à época e forte impacto nos esforços de fundamentação da matemática que se seguiram.

Suponhamos que existe $\{x : x \notin x\}$, isto é, existe o conjunto de todos os conjuntos que não são elemento de si próprios. Seja S tal conjunto. Ou bem que $S \in S$ ou $S \notin S$. Ora vejamos que em ambos os casos incorremos numa contradição. Se $S \in S$, pela forma como S está definido (qualquer seu elemento verifica a propriedade de não ser elemento dele próprio), concluímos que $S \notin S$, o que é absurdo. Se $S \notin S$, novamente pela definição de S , então S não verifica a propriedade de não ser elemento de si próprio, ou seja S é elemento de si próprio, i.e., $S \in S$. Absurdo.

Uma variante popular derivada do Paradoxo de Russell é o Paradoxo do Barbeiro⁶:

Uma cidade (digamos Sevilha) tem um único barbeiro. Esse barbeiro é do sexo masculino, é de Sevilha e reúne as duas condições seguintes:

- 1) Faz a barba a todos os homens de Sevilha que não fazem a barba a si próprios
- 2) Só faz a barba aos homens que não fazem a barba a si próprios.

Fará o barbeiro a barba a si próprio?

Se fizer a barba a si próprio, pela condição 2) não pode fazer a barba a si próprio. Se não fizer a barba a si próprio, pela condição 1) faz a barba a si próprio.

O Paradoxo de Russell foi comunicado pelo próprio Russell a Frege, numa carta de 1902 ([6], páginas 124-125).

Frege responde:

A sua descoberta de contradição causou-me a maior das surpresas e, quase diria, consternação, dado que abalou as bases sobre as quais pretendia construir a aritmética. [...] Mais grave [...] não apenas a fundamentação da minha aritmética mas a possibilidade da fundamentação da aritmética parece desaparecer.

Carta para Bertrand Russell, 1902 ([6], páginas 126-128).

A Teoria dos Conjuntos (mais concretamente, a Teoria

Ingénua dos Conjuntos) com pretensões de ser rocha firme onde edificar a matemática, dava origem a contradições. Dado que conjuntos estão na base de praticamente todos os ramos da matemática, muitos interrogavam-se sobre se as provas matemáticas seriam fiáveis. O clima de incerteza entre os matemáticos da época estava instalado. Se algo tão natural como definir um conjunto pela propriedade comum aos seus elementos e só a estes podia resultar em algo absurdo, como seria seguro avançar-se? Estaria a (fundamentação da) matemática ferida de morte?

4. CONTORNAR OS PARADOXOS: TEORIA AXIOMÁTICA DOS CONJUNTOS

Grandes desafios atraem grandes pensadores e, provavelmente como em nenhuma outra altura da história da matemática, eminentes matemáticos dedicaram-se a questões lógicas relacionadas com a fundamentação da matemática. Russell surge com a Teoria dos Tipos (versão simples e ramificada), posteriormente desenvolvida por Alonzo Church, David Hilbert apresenta o seu programa de fundamentação da matemática (que ficou conhecido como *Hilbert's program* [2]), mais tarde parcialmente inviabilizado por Kurt Gödel, Luitzen Brouwer desenvolve o intuicionismo, Zermelo propõe a primeira Teoria Axiomática dos Conjuntos, aperfeiçoada mais tarde por Abraham Fraenkel, dando origem à forma atualmente mais comum de fundamentação da matemática: a Teoria Axiomática dos Conjuntos ZFC (acrónimo para *Zermelo-Fraenkel set theory with the axiom of choice*).

É esta última estratégia de superação dos paradoxos, via Teoria Axiomática dos Conjuntos, que brevemente analizaremos nesta secção.

Com os paradoxos tornou-se evidente que há propriedades que não podem determinar conjuntos. Intuitivamente, a ideia era tentar limitar as condições a partir das quais se formam conjuntos de forma a eliminar os paradoxos, mas mantendo ainda assim todos os conjuntos necessários em matemática.

O princípio da compreensão irrestrita que, dada uma propriedade $P(x)$, assegurava a existência do conjunto $\{x : P(x)\}$ foi substituído pelo mais restritivo axioma da separação (também conhecido por compreensão restrita) que,

dada uma propriedade $P(x)$ ⁷ e um conjunto C assegura a existência do conjunto $\{x \in C : P(x)\}$,

isto é,

assegura a existência do conjunto cujos elementos são os elementos de C que satisfazem P .⁸

Conjuntos agora formados por compreensão são necessariamente subconjuntos doutros conjuntos já existentes. Limitando desta maneira a formação de conjuntos evitam-se os anteriores paradoxos⁹. Por exemplo, não mais se pode formar o conjunto $\{x : x \notin x\}$.¹⁰

Debruçamo-nos em particular sobre o axioma da separação pelo seu impacto em evitar os paradoxos da Secção 3, mas obviamente ZFC tem outros axiomas que nos indicam que conjuntos podem ser formados e que operações sobre conjuntos dão origem a conjuntos.

Note, por exemplo, que o novo axioma da compreensão (compreensão restrita) só constrói conjuntos se pelo menos um conjunto já tiver sido anteriormente formado. Em ZFC, o axioma do vazio e o axioma do infinito garantem respetivamente a existência do conjunto vazio e de um conjunto infinito. Sobre ZFC, sugerimos a leitura de [3], [4] ou [7]. Para uma exposição detalhada do desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos consulte [8].

³ Também conhecido como Princípio da Abstracção.

⁴ Há uma outra antinomia também conhecida por Paradoxo de Cantor, descoberta por Georg Cantor em 1899, que consiste na possibilidade de derivar uma contradição a partir do conjunto universal (conjunto de tudo), ou conjunto de todos os conjuntos. Reservamos as considerações sobre o conjunto de todos os conjuntos (que dá o título ao artigo) para a última secção.

⁵ Autor da axiomática *standard* para os números naturais, a *Aritmética de Peano*.

⁶ O paradoxo do barbeiro foi divulgado pelo próprio Russell para ilustrar que algo aparentemente inócuo pode ser logicamente impossível.

⁷ Formalmente, em ZFC, uma propriedade é dada por uma fórmula da linguagem de Teoria dos Conjuntos, isto é, a linguagem do Cálculo de Predicados com igualdade munida do símbolo relacional binário \in .

⁸ A designação de axioma da separação é justificado pelo facto de, a partir de um conjunto, se justificar a existência de dois outros, separando o primeiro no conjunto dos elementos que verificam a propriedade e no conjunto dos elementos que não verificam a propriedade (substituindo $P(x)$ por $\neg P(x)$).

⁹ Acredita-se que a Teoria Axiomática dos Conjuntos ZFC é consistente e, portanto, livre não apenas destes mas de quaisquer paradoxos. Contudo, pelos teoremas de incompletude de Gödel, sabemos que a consistência de ZFC não se pode provar em ZFC.

¹⁰ Note que, ainda que $P(x)$ possa, por exemplo, ser a propriedade $x \notin x$, o conjunto $\{x \in C : x \notin x\}$, que se forma por separação, não oferece problemas. O leitor pode pensar que é contra-intuitivo haver um conjunto que pertença a si próprio. Em ZFC, o axioma da fundação impede tal possibilidade e, portanto, $\{x \in C : x \notin x\}$ é simplesmente C .

5. O CONJUNTO DE TODOS OS CONJUNTOS NÃO EXISTE

Como vimos na secção 4, o argumento de Russell não produz nenhuma contradição em ZFC. Nesta secção iremos mostrar que pode ser usado para demonstrar um importante resultado nesta teoria: Não existe o conjunto de todos os conjuntos.

Teorema 1. *O conjunto de todos os conjuntos não existe.*

Demonstração. Suponhamos, com vista a absurdo, que existia U o conjunto de todos os conjuntos. Apliquemos o axioma da separação ao conjunto U (isto é, $C = U$) e à propriedade $x \notin x$ (isto é, $P(x) := x \notin x$). Garantiríamos desta forma a existência do conjunto de todos os conjuntos que não são elemento de si próprios, ou seja seríamos de novo conduzidos ao paradoxo de Russell. A contradição resulta do facto de termos suposto que existia o conjunto de todos os conjuntos. Provamos assim que tal conjunto não existe. \square

Chama-se classe a uma coleção de objetos definida por uma propriedade. Uma classe que não seja um conjunto diz-se uma classe própria.

A coleção de todos os conjuntos, que acabámos de verificar no Teorema 1 não é um conjunto, é uma classe própria (pense, em ZFC, na propriedade $x = x$ verificada por qualquer conjunto).

Outras classes próprias em Teoria dos Conjuntos¹¹ i.e., classes que não são conjuntos, são, por exemplo, a classe de todos os ordinais e a classe de todos os cardinais. Muitos outros exemplos de classes próprias haveria para dar. Só como curiosidade, aqui ficam alguns: a classe de todos os pares ordenados, a classe de todas as funções, a classe de todos os conjuntos singulares, a classe de todos os grupos, a classe de todos os espaços vetoriais. Para um estudo mais detalhado de alguns dos tópicos abordados neste artigo, incluindo conjuntos e classes, sugerimos a leitura de [9].

SOBRE A AUTORA

Gilda Ferreira é doutorada em Matemática, área de Álgebra, Lógica e Fundamentos, pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Detém atualmente uma bolsa de pós-doutoramento da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no Lasige (Laboratório de Sistemas Informáticos de Grande Escala) - Universidade de Lisboa. É membro do CMAFIO (Centro de Matemática, Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional).

REFERÊNCIAS

- [1] P. A. Ebert and M. Rossberg. *Gottlob Frege: Basic Laws of Arithmetic*. Oxford University Press, 2013.
- [2] F. Ferreira. “No Paraíso sem Convicção... Uma Explicação do Programa de Hilbert.” *Em Matemática e Cultura II*, Centro Nacional de Cultura e SPB Editores, organização de Furtado Coelho, páginas 87-121, 1995.
- [3] F. Ferreira. “Teoria dos Conjuntos: Uma Vista.” *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 38:29-47, 1998.
- [4] A. J. Franco de Oliveira. *Teoria de Conjuntos, Intuitiva e Axiomática (ZFC)*. Livraria Escolar Editora, 1982.
- [5] G. Frege. *Grundgesetze der Arithmetik*. Verlag Hermann Pohle, (Vol. I) 1893, (Vol. II) 1903.
- [6] J. Heijenoort. *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, 1967.
- [7] K. Hrbacek and T. Jech. *Introduction to Set Theory*. Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, 3rd edition, 1999.
- [8] A. Kanamori. “The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen”. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 2:1-71, 1996.
- [9] B. Sheppard. *The Logic of Infinity*. Cambridge University Press, 2014.

A autora agradece o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia (UID/MAT/04561/2013 e SFRH/BPD/93278/2013), dos centros LaSIGE – Laboratório de Sistemas Informáticos de Grande Escala e CMAFIO – Centro de Matemática, Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional da Universidade de Lisboa e do NIM – Núcleo de Investigação em Matemática da Universidade Lusófona.

¹¹ Note que ZFC não permite agir sobre classes próprias, ZFC só lida com conjuntos - as suas quantificações, $\forall x, \exists x$, devem ser lidas como *para todo o conjunto* x e *existe um conjunto* x respetivamente. Repare contudo que tal x varia sobre o universo de todos os conjuntos, isto é, sobre o que na metalinguagem chamamos classe própria. Há outras teorias de conjuntos que foram precisamente desenhadas para admitirem classes próprias, entre elas encontram-se, por exemplo, a NBG (von Neumann-Bernays-Gödel set theory) e a MK (Morse-Kelly set theory).



2015
MATEMÁTICA
em Vila Real

**Biblioteca Municipal
de Vila Real**
11 horas

*Sessões no âmbito das
Tardes de Matemática da SPM*

Mais informações:
Sociedade Portuguesa de Matemática
217 939 785
www.spm.pt

23 de maio

**PRIMEIRA DESCRIÇÃO:
A GÉNESE DA REVOLUÇÃO
COPERNICANA**

José Carlos Santos, Universidade do Porto



19 de setembro

**MAPAS E NAVEGAÇÃO:
UM OLHAR MATEMÁTICO**

Lurdes Figueiral, Esc. Artística Soares dos Reis
e Samuel Lopes, Universidade do Porto





ÓSCAR FELGUEIRAS
Universidade
do Porto
olfelgue@fc.up.pt

NÚMEROS DE BERNOULLI

Uma sequência de números criada para sintetizar somas finitas, mas que deu origem a uma ponte paradigmática com as somas infinitas, acabando por ocupar um lugar de destaque na matemática moderna.

Historicamente, os números de Bernoulli surgiram na obra póstuma *Ars Conjectandi*¹, em 1713, do suíço Jacob Bernoulli (1654-1705), na tentativa de descrever uma forma de calcular a soma de potências de inteiros consecutivos

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$$

para inteiros $n \geq 1$ e $k \geq 0$. Curiosamente e por coincidência, o japonês Takakazu Seki (1642-1708) também definiu os mesmos números de Bernoulli no seu livro póstumo *Katsuyo Sanpo*², em 1712. Tendo em conta as circunstâncias, este é um caso em que não haverá grandes dúvidas quanto à descoberta independente e quase simultânea de um mesmo conceito.

O interesse pela questão da determinação de fórmulas para somas de potências de inteiros consecutivos tem mais de dois milénios. Os pitagóricos no século VI a.C. já conheciam a fórmula quando $k = 1$,

$$S_1(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$

e Arquimedes (287 a.C.-212 a.C) tinha determinado a regra para $k = 2$,

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

No ano de 499, o indiano Aryabhata publicou no seu livro *Aryabhatiya*, sem qualquer prova ou justificação,

aquela que é a primeira fórmula explícita para o caso $k = 3$,

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Muitos outros matemáticos se dedicaram a este assunto, como pode ser consultado no artigo *online* de Janet Beery³, que contém informação histórica bastante detalhada relativa aos principais intervenientes e métodos seguidos⁴. Em particular sobre Pascal, que no seu *Traité du triangle arithmétique*⁵, em 1654, prova de forma simples, usando a expansão binomial, que,

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{i=1}^n ((i+1)^{k+1} - i^{k+1}) \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} i^j \\ = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} S_j(n),$$

permitindo obter a fórmula recursiva,

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \left((n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) \right),$$

$k \geq 1$ e mostrar indutivamente que $S_k(n)$ é um polinómio em n de grau $k+1$.

Bernoulli estuda estes polinómios e acaba por descobrir um padrão ao escrever os dez primeiros:

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\
S_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \\
S_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \\
S_7(n) &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \\
S_8(n) &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \\
S_9(n) &= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 \\
S_{10}(n) &= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n.
\end{aligned}$$

Ele observa que se pode exprimir $S_k(n)$ a partir da sequência de coeficientes de n em $S_k(n)$ e são estes os números de Bernoulli originais⁴. Esta sequência denota-se habitualmente por B_k cujos primeiros valores se apresentam na tabela 1. A fórmula por ele apresentada é a seguinte:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \sum_{i=2}^k \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{i} B_i n^{k+1-i}, \quad k \geq 1. \quad (1)$$

Na verdade, Bernoulli apenas destaca a sequência B_{2m} para $m \geq 1$, usando letras maiúsculas $A = 1/6, B = -1/30, C = 1/42, D = -1/30, \dots$ para denotar os seus elementos, dado que são os únicos não nulos

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

Tabela 1.

que ocorrem em (1). Ele determina os valores de B_k de forma recursiva a partir da equação obtida ao se substituir n por 1, ou seja,

$$1 = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^k \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{i} B_i, \quad k \geq 1. \quad (2)$$

Além disso, conclui, afirmando que com estas fórmulas descobriu (corretamente), em menos de um quarto de hora, que a soma das décimas potências dos mil primeiros números a partir da unidade é

$$91409924241424243424241924242500.$$

Note-se que as fórmulas (1) e (2) podem ser simplificadas, obtendo-se, respetivamente

$$S_k(n) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{i} B_i n^{k+1-i}, \quad k \geq 1$$

e

$$k+1 = \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} B_i, \quad k \geq 1.$$

Por seu lado, Seki apresenta estas mesmas fórmulas e define toda a sequência B_k para $k \geq 0$ ⁷.

Euler fornece uma prova completa da fórmula (1) para a soma de potências, na sua obra *Institutiones Calculi Differentialis*⁸ (1755), e batiza aí os números de Bernoulli. Adicionalmente, apresenta uma ligação fascinante destes números com séries infinitas, nomeadamente através da demonstração de uma das suas célebres fórmulas,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{2n}} = \frac{|B_{2n}| 2^{2n-1}}{(2n)!} \pi^{2n}.$$

Desde então, estes números tornaram-se uma presença incontornável em várias áreas da matemática, tais como a teoria dos números e a geometria diferencial. Basta dizer que em 2007 havia uma bibliografia sobre números de Bernoulli contabilizando perto de 3000 entradas⁹!

¹ A arte de conjecturar.

² Fundamentos da Arte do Cálculo.

³ <http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/sums-of-powers-of-positive-integers>.

⁴ Para mais pormenores, ver A. Knebel, R. Laubenbacher, J. Lodder, D. Pengelley, *Mathematical Masterpieces - Further Chronicles by the Explorers*, Springer, 2007.

⁵ Tratado do triângulo aritmético.

⁶ Existem atualmente muitos autores que definem $B_1 = -1/2$ devido

a assumirem que $S_k(n) = 0^k + 1^k + \dots + (n-1)^k$. Nesta convenção todos os restantes valores $B_k (k \neq 1)$ permanecem iguais e dão origem a fórmulas análogas. Ver <http://luschny.de/math/zeta/The-Bernoulli-Manifesto.html> para uma discussão interessante sobre o assunto.

⁷ Ver T. Arakawa, M. Kaneko, T. Ibukiyama, *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*, Springer, 2014, p. 3, onde também se encontra a prova da fórmula (1).

⁸ Fundamentos de cálculo diferencial.

⁹ <http://www.mscs.dal.ca/~dilcher/bernoulli.html>.



OS “MODELOS DE OLIVIER” DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

CARLOS TENREIRO

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

tenreiro@mat.uc.pt

No Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra podemos observar uma coleção de cinco modelos geométricos, montados sobre caixas ou suportes de madeira, em tudo análogos aos idealizados por Théodore Olivier (1793-1853) para expor alguns dos conteúdos da Geometria Descritiva. Neste texto, dedicado à história de tais modelos, damos conta, entre outros factos, de que os mesmos foram adquiridos, decorria o ano de 1872, para a aula de Geometria Descritiva da Faculdade pombalina de Matemática. A sua vetusta idade faz deste conjunto o mais antigo dos núcleos de modelos matemáticos de apoio ao ensino à guarda do

1. INTRODUÇÃO

Quando, em 1887, o Conselho da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra propõe ao Governo a criação, entre outros estabelecimentos anexos à faculdade, de um gabinete de geometria descritiva e desenho¹, teria, provavelmente, como objetivo primeiro o de enquadrar todo um acervo constituído por modelos, estampas e instrumentos diversos, que desde o final da década de 1850 se havia vindo a adquirir, primeiramente para a aula de Desenho anexa à Faculdade de Matemática, e depois, também, para a aula de Geometria Descritiva que seria criada na Faculdade de Matemática por carta de lei de 26.2.1861.²

Desse acervo fazia parte uma coleção de cinco modelos articulados construídos com fios de seda e braços metálicos montados sobre caixas ou suportes de madeira (figura 1), que hoje podemos encontrar no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, sucessor natural da Faculdade de Matemática instituída pelos Estatutos da Universidade de Coimbra de 1772³. Tais modelos são em tudo análogos aos modelos construídos, em meados do

século XIX, pela firma *Pixii, père et fils*, a partir dos desenhos e sob a orientação de Théodore Olivier (1793-1853), à época professor de Geometria Descritiva no *Conservatoire des Arts et Métiers* de Paris, e que surgem descritos no catálogo de 1851 das coleções desta instituição [1, p. 17-25].

Após a morte de Théodore Olivier, cópias dos modelos de Geometria Descritiva do *Conservatoire des Arts et Métiers* são adquiridas por diversas instituições de ensino superior. Tal seria o caso da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra que, em 1872, adquire o referido conjunto de modelos para a aula de Geometria Descritiva por iniciativa do lente da cadeira, Florêncio Mago Barreto Feio (1819-1891). Contrariamente às coleções mais vastas de modelos do mesmo tipo adquiridas, na década de 1860, para a Escola Politécnica de Lisboa e para o Instituto Industrial do Porto, a casas francesas especializadas no fabrico de instrumentos científicos, veremos neste texto, dedicado à história da aquisição dos modelos de Olivier da Universidade de Coimbra, que os mesmos são de fabrico nacional, tendo sido construídos na Oficina de Instrumentos de Precisão do Instituto Industrial e Comercial de Lisboa.

2. OS MODELOS DE THÉODORE OLIVIER

Enquanto professor e um dos fundadores da *École Polytechnique*, Gaspard Monge (1746-1818), matemático francês criador da Geometria Descritiva, foi o primeiro a fazer construir modelos com fios de seda para demonstrar alguns dos conteúdos desta disciplina, que, nas suas palavras, tem como um dos seus objetivos o “de representar com exatidão, através de desenhos que têm apenas duas dimensões, os objetos que têm três dimensões, e que são suscetíveis de definição rigorosa”.⁴ Em 1814, existiam ainda nas coleções da *École Polytechnique* dois desses modelos de grandes dimensões [1, p. 17].

¹ Projecto da reforma da Faculdade de Mathematica redigido pela comissão eleita em congregação de 29 de Dezembro de 1886. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1887. Este projeto de reforma acabaria por não ser posto em prática.

² Diário de Lisboa n.º 50, de 4.3.1861.

³ Estes modelos integram atualmente uma das exposições permanentes do Departamento de Matemática da UC (<http://www.uc.pt/ctuc/dmat/divulgacao/exposicoes>). Para os sítios de outras coleções de modelos de Olivier mencionadas neste texto, ver <http://www.mat.uc.pt/~tenreiro/GDOlivier/>.

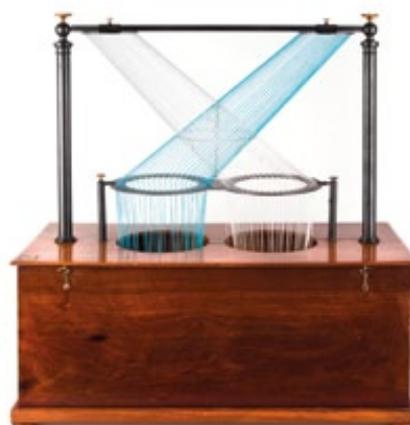
⁴ Monge, G. *Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles normales, l'an 3 de la République*. Paris: Baudouin, 1799, p.2.

Em 1830, por altura da criação da *École Centrale des Arts et Manufactures* de Paris, Théodore Olivier (1793-1853), um dos professores fundadores desta escola e antigo aluno da *École Polytechnique*, retoma a ideia de Monge, idealizando modelos em fios de seda que pudessem auxiliá-lo nas suas aulas de geometria [1, p. 17-18]. Contrariamente aos modelos estáticos de Monge, os modelos de Olivier possuem partes móveis, permitindo que toda uma família de superfícies seja por eles representada, pondo em evi-

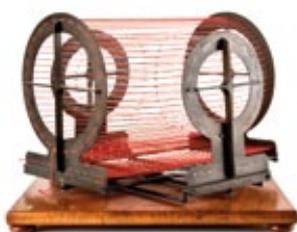
dência as transformações que permitem passar de uma superfície a outra, ou a forma como as superfícies regradas são geradas. Outros modelos permitem observar as curvas de interseção de duas superfícies regradas. Sendo uma superfície regradada aquela que pode ser obtida por reunião de retas, ditas geratrizes, são estas que são representadas pelos fios de seda dos modelos articulados de Olivier e que, no seu conjunto, nos dão uma representação tridimensional da superfície em causa. Em 1852, no



(a) Modelo e.1



(b) Modelo e.6



(c) Modelo e.3



(d) Modelo e.4



(e) Modelo e.5

Figura 1: Modelos de geometria descritiva de tipo “Olivier” da coleção do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, indicando-se os números de série que constam do catálogo de 1851 das coleções do *Conservatoire des Arts et Métiers*. Os modelos de Coimbra pertencem à sub-série relativa à interseção de superfícies regradas. Nos modelos e.1 e e.6 os fios de seda estão fixos apenas num dos elementos metálicos do modelo e passam livremente por pequenos orifícios existentes no segundo elemento metálico, permanecendo sob tensão pela ação de pesos dissimulados no interior da caixa de madeira. **(a)** Interseção de dois cones que têm um par

de planos tangentes em comum segundo um par de elipses; Altura do modelo: 64,5 cm. **(b)** Interseção de dois cones segundo duas elipses; Altura do modelo: 64,5 cm. **(c)** Interseção de dois cilindros, um deles perfurando completamente o outro, dando origem a duas curvas de interseção; Altura do modelo: 31 cm. **(d)** Interseção de dois cilindros com um plano tangente em comum, dando origem a uma curva de interseção com um ponto duplo; Altura do modelo: 31 cm. **(e)** Interseção de dois cilindros, nenhum deles perfurando completamente o outro, dando origem a uma curva de interseção sem pontos múltiplos; Altura do modelo: 35 cm.

prefácio que escreve para a segunda edição da primeira parte do seu *Cours de Géométrie Descriptive*, Olivier mostra-se convencido da utilidade dos seus modelos no ensino da Geometria Descritiva, permitindo aos alunos melhor compreender as propriedades geométricas das superfícies que estudavam: “É assim que começamos a compreender que, quando queremos falar aos alunos das propriedades de uma superfície, a primeira coisa a fazer é colocar sob os seus olhos o relevo dessa superfície, para que eles vejam distintamente aquilo de que queremos falar-lhes”.⁵

Um conjunto vasto de tais modelos foi construído pela firma Pixii, père et fils, fabricantes de instrumentos científicos de Paris, a partir dos desenhos de Théodore Olivier. O catálogo de 1851 das coleções do *Conservatoire des Arts et Métiers*, instituição na qual Théodore Olivier era, desde 1839, professor de Geometria Descritiva, inclui diversos modelos de Geometria Descritiva divididos por várias categorias (sobre os modelos e outros trabalhos de Olivier, ver também [4] e [5, p. 321-331]). Os modelos de Olivier haveriam de ser construídos por outros fabricantes de instrumentos científicos, como foi principalmente o caso de Fabre de Lagrange, que sucede aos Pixii na construção de instrumentos científicos. Na segunda metade da década de 1850, Fabre de Lagrange fornece à *Harvard University*, em Cambridge, Massachusetts⁶, e à *United States Military Academy*, em West Point, conjuntos de modelos semelhantes aos idealizados por Olivier [6, p. 78], e, em 1872, constrói, para o *South Kensington Museum*, atual *Science Museum* de Londres, uma coleção de 45 de tais modelos [7]. Será ainda à firma de Fabre de Lagrange que, no início da década de 1860, a Escola Politécnica de Lisboa encomendaria o conjunto de 20 modelos que faz hoje parte do acervo do Museu Nacional de História Natural e da Ciência da Universidade de Lisboa [2, p. 249]. Também a coleção de modelos de Geometria Descritiva à guarda do Museu do Instituto Superior de Engenharia do Porto, adquirida em 1868 à casa de instrumentos científicos *Secretan* de Paris, para o então Instituto Industrial do Porto, será constituída, por indicação expressa do diretor do Instituto, por modelos iguais aos existentes no *Conservatoire des Arts et Métiers* [2, p. 249].

Apesar de não possuírem qualquer identificação do seu construtor, os modelos de Coimbra, todos eles relativos à interseção de superfícies regradas, são análogos aos modelos do género existentes em Lisboa e no Porto, surgindo descritos no catálogo de 1851 das coleções do *Conservatoire des Arts et Métiers* de Paris, com os números de série e.1, e.3, e.4, e.5 e e.6 (ver figura 1).

3. OS “RELEVOS” DA AULA DE GEOMETRIA DESCRITIVA

Apesar de a Geometria Descritiva ser lecionada na Faculdade de Matemática desde o ano escolar de 1840-41, só no ano letivo de 1861-62 será dedicada ao seu estudo uma cadeira a que se deu o nome “Geometria Descritiva – aplicações à estereotomia, à perspectiva e à teoria das sombras”, de cuja leção seria encarregado o lente Florêncio Mago Barreto Feio (1819-1891)⁷.

Pouco depois de ter sido promovido a lente catedrático da nova cadeira, Barreto Feio solicita a requisição de materiais para a cadeira que iria começar a lecionar no ano escolar seguinte. A introdução na aula de Geometria Descritiva duma componente mais prática, que permitisse complementar as tradicionais preleções orais do professor com a execução, por parte dos alunos, das construções da Geometria Descritiva, será uma preocupação constante de Barreto Feio. Ainda no ano letivo de 1861-62, dando cumprimento a uma antiga portaria do Ministério do Reino de 1850, “que obrigava os estudantes do 4.º ano da Faculdade de Matemática, não só a fazerem um atlas das figuras de Geometria Descritiva relativas aos problemas para este fim designados pelo Conselho da Faculdade de Matemática, mas também a construírem sobre o papel, depois do exame e em ato sucessivo, uma figura de Geometria Descritiva tirada à sorte”, Barreto Feio dá parte ao conselho de que “tinha obrigado os seus discípulos a fazerem o atlas” e pergunta “se eles deviam também ser obrigados a fazer uma figura depois do exame”. Em resposta, o conselho resolveria não dar execução a esse ponto da portaria “atendendo a que não havia os instrumentos necessários”⁸.

Esta falta de instrumentos para dar um maior desenvolvimento à componente mais prática da cadeira fará com que, no final do primeiro ano em que a cadeira é lecionada

⁵ Olivier, T. *Cours de géométrie descriptive. Première partie: du point, de la droite et du plan*. Paris: Carilian-Goeury et V. Dalmont, 1852, p. X.

⁶ Quatro dos modelos desta coleção fazem parte da *Collection of Historical Scientific Instruments* da Universidade de Harvard.

⁷ Florêncio Mago Barreto Feio (1819-1891) matricula-se na Faculdade de Matemática no ano letivo de 1836-37 e aí recebe o grau de doutor em 24.10.1841. Habilitado como opositor por votação do Conselho da Faculdade em 7.6.1845, é nomeado lente substituto extraordinário em 1846 e lente substituto ordinário em 1853. Em 20.3.1861, é promovido a lente catedrático da cadeira de Geometria Descritiva, cadeira na qual se manterá até abandonar o magistério. Nomeado decano da faculdade em 27.11.1879, jubila-se pouco depois, em 12.2.1880.

⁸ UC, *Actas da Faculdade de Mathematica*, 1858-1866, fl. 129; sessão de 17.6.1862.

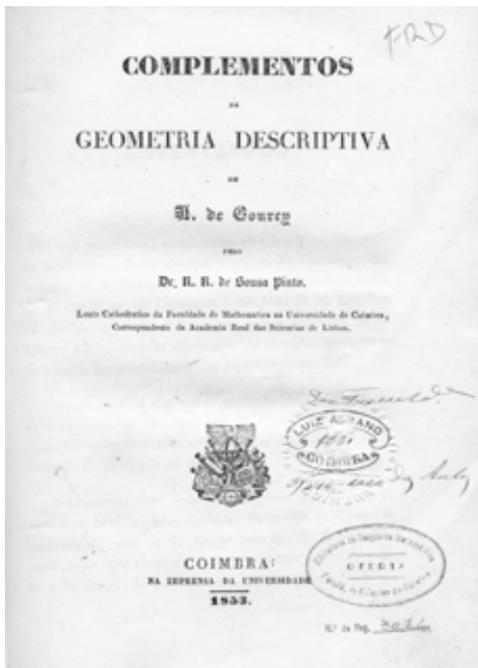
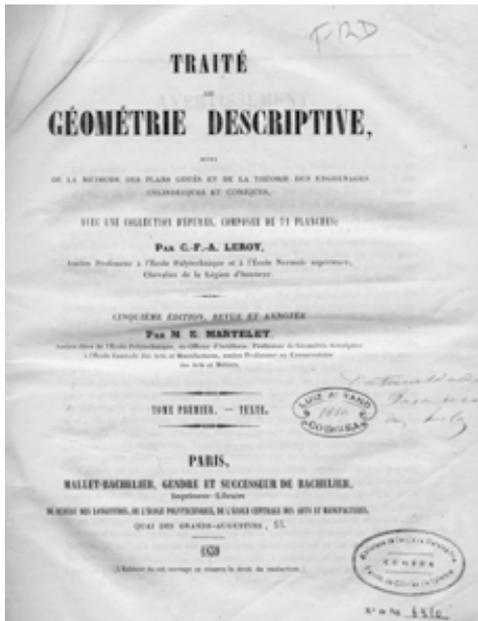


Figura 2: Compêndios adotados em 1861-62 para a cadeira de Geometria Descritiva: 5.^a edição do *Traité de géométrie descriptive* (Paris: Mallet-Bachelier, 1859), de Charles François Antoine Leroy (1780-1854), e *Complementos da geometria descriptiva* de M. de Fourcy (Coimbra: Imprensa da Universidade, 1853), de Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto (1811-1893) (UC, Biblioteca Matemática).

na Faculdade de Matemática, Barreto Feio reforça a proposta feita havia um ano. Além de estojos de compassos especiais para traçar secções cónicas, e outras curvas, e de uma coleção de relevos especiais, Barreto Feio solicita a aquisição de uma coleção de relevos de madeira e com fios tensos como os que possuía na altura a Escola Politécnica de Lisboa, com dimensões adequadas para serem apresentados na aula de Geometria Descritiva⁹.

Apesar de a proposta apresentada por Barreto Feio ter sido aprovada pelo Conselho da Faculdade de Matemática, que “resolveu que se pedissem ao Governo os objetos mencionados naquela proposta”, este não se compromete com a orientação dada por Barreto Feio ao ensino da Geometria Descritiva, fazendo notar que deveria “entender-se que, com semelhante resolução, a faculdade não queria de modo algum indicar o método, que deveria seguir-se no ensino da Geometria Descritiva.”¹⁰

Por razões não mencionadas nas atas da Faculdade de Matemática, mas a que poderá não ser alheia a ausência duma posição inequivocamente favorável por parte da faculdade à orientação dada por Barreto Feio ao ensino da Geometria Descritiva, os instrumentos por ele solicitados acabaram por não ser adquiridos. Será preciso esperar uma década, ao longo da qual Barreto Feio continuará a exigir dos seus alunos a execução de estampas e figuras do *Traité de géométrie descriptive* de Charles François Antoine Leroy (figura 2), para que, na congregação de 9 de março de 1871, Barreto Feio volte a solicitar do conselho a aquisição de materiais para a aula de Geometria Descritiva.

Após tantos e repetidos pedidos, são finalmente adquiridos os instrumentos solicitados por Barreto Feio. Com data de 24 de maio de 1871, encontramos, na documentação de despesa à guarda do Arquivo da Universidade de Coimbra, uma folha de despesa assinada por Barreto Feio confirmando a aquisição de um conjunto de instrumentos e modelos para a aula de Geometria Descritiva. Aí surge mencionado um instrumento idealizado por Théodore Olivier em 1829, constituído por um conjunto de fichas de diversos tamanhos e cores que permitia construir superfícies regradas, a que Olivier deu o nome de *omnibus*, bem como quatro modelos em relevo de superfícies enviesadas: parabolóide hiperbólico, cilindróide, quadrilátero enviesado e conóide de duas folhas (figura 3). Nenhum destes instrumentos didáticos chegou até nós. Ainda durante o ano de 1871, outras duas folhas de despesa dão conta da aquisição de mais instrumentos e modelos, que seguramente permitiram melhorar o ensino prático da aula de Geometria Descritiva.

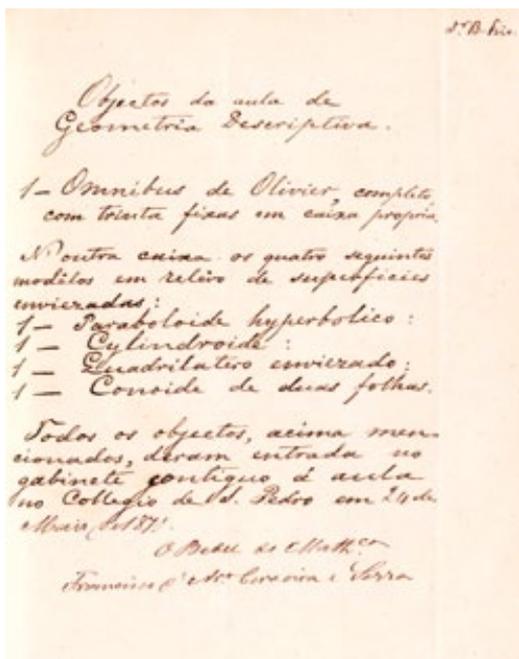


Figura 3: Lista dos objetos para o ensino prático da aula de Geometria Descritiva adquiridos por Barreto Feio em 22.5.1871 através da Farmácia Avelar, sita na Rua Augusta em Lisboa, no valor total de 16\$695 réis (UC, Arquivo da Universidade).

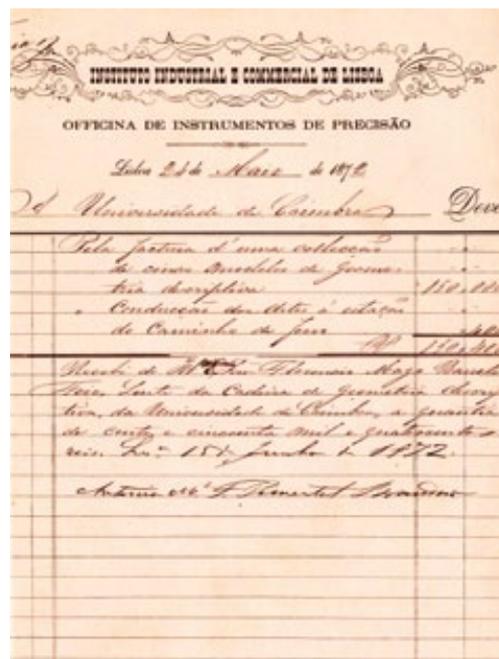


Figura 4: Fatura, datada de 24.5.1872, emitida pela Oficina de Instrumentos de Precisão do Instituto Industrial e Comercial de Lisboa, relativa a uma coleção de cinco modelos de Geometria Descritiva no valor de 150\$000 réis; a fatura é liquidada por Barreto Feio em 15.6.1872 (UC, Arquivo da Universidade).

Mais melhoramentos surgem mencionados na ata da congregação da Faculdade de Matemática de 12 de março de 1872. Aí, Barreto Feio propõe que fique registado em ata um agradecimento a Luís Porfírio da Mota Pegado (1831-1903), lente da cadeira de Geometria Descritiva da Escola Politécnica de Lisboa, “pela obsequiosa cooperação e bom serviço que se dignou prestar à Universidade, em relação aos melhoramentos realizados na aula de Geometria, no ensino prático da mesma aula.”⁹

A que melhoramentos resultantes da “cooperação e bom serviço” prestado por Mota Pegado se refere Barreto Feio? Uma folha de despesa que inclui uma fatura, datada de 24 de maio de 1872, emitida pela Oficina de Instrumentos de Precisão do Instituto Industrial e Comercial de Lisboa, relativa a uma coleção de cinco modelos de Geometria Descritiva, permite lançar alguma luz sobre o enigmático agradecimento (figura 4). Não tendo dúvida de que estes são os modelos de Olivier atualmente existentes no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, o agradecimento a Mota Pegado lançado nas atas das con-

gregações da Faculdade de Matemática poderá justificar-se por ele ter, provavelmente, promovido e acompanhado a construção dos cinco modelos de Coimbra junto da Oficina de Instrumentos de Precisão do Instituto Industrial e Comercial de Lisboa.

É assim que, no final do mês de maio de 1872 – ano em que a Universidade de Coimbra assinala o I Centenário da Reforma Pombalina, instituída pelos Estatutos de 1772 –, dão entrada no gabinete contíguo à aula de Geometria Descritiva os modelos de Olivier construídos na Oficina de Instrumentos de Precisão do Instituto Industrial e Comercial de Lisboa. De aspeto menos exuberante do que os seus congéneres da Escola Politécnica de Lisboa e do Instituto Industrial do Porto, o seu valor pedagógico não seria seguramente inferior ao destes. Barreto Feio tinha

⁹ Idem, fl. 132; sessão de 20.6.1862..

¹⁰ Idem, fl. 132v; sessão de 26.7.1862.

¹¹ UC, Actas da Faculdade de Mathematica, 1871-1886, fl. 11.

finalmente ao seu dispor modelos geométricos que poderiam auxiliá-lo nas aulas sobre interseções de superfícies regradadas, e que, de acordo com a opinião por ele tantas vezes expressa nas sessões do Conselho da Faculdade de Matemática, iriam contribuir para um maior desenvolvimento da componente mais prática da cadeira de que era lente proprietário.

4. CONCLUSÃO

Tal como acontecia na Europa e na América do Norte na segunda metade do século XIX, também as instituições portuguesas de ensino superior adquiriram “modelos de Olivier” para apoio ao ensino da Geometria Descritiva. Contrariamente às coleções de tais modelos adquiridas, na década de 1860, para a Escola Politécnica de Lisboa e para o Instituto Industrial do Porto, os modelos de Coimbra, adquiridos em 1872 para a aula de Geometria Descritiva da Faculdade de Matemática, são de fabrico nacional, tendo sido construídos na Oficina de Instrumentos de Precisão do Instituto Industrial e Comercial de Lisboa. Os seus mais de 140 anos de existência fazem deste conjunto o mais antigo dos núcleos de modelos matemáticos de apoio ao ensino que podemos hoje encontrar no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra¹²

CRÉDITOS FOTOGRÁFICOS

As fotografias incluídas na figura 1 são da autoria de Hugo Pinheiro com o apoio financeiro do projeto História da Ciência da Universidade de Coimbra – HC/0119/2009. A proveniência das restantes imagens é indicada na legenda das mesmas.

AGRADECIMENTOS

Ao Museu Nacional de História Natural e da Ciência da Universidade de Lisboa e ao Museu do Instituto Superior de Engenharia do Porto, nas pessoas de Marta Catarino Lourenço, Ana Mehnert Pascoal e Patrícia Carla Costa, agradecemos as informações preciosas que nos facultaram sobre as respetivas coleções de modelos de Geometria Descritiva. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Centro de Matemática da Universidade de Coimbra.

¹² Sobre os dois outros núcleos de modelos geométricos de apoio ao ensino existentes na Universidade de Coimbra, ver Simões, C. e Tenreiro, C., “O Gabinete de Geometria da Faculdade de Ciências e a sua coleção de modelos para o ensino”, In *História da Ciência na Universidade de Coimbra 1772-1933*, Carlos Fiolhais, Carlota Simões e Décio Martins (Eds), Imprensa da Universidade de Coimbra, 2013, p.193-207. Ver também os sítios <http://www.mat.uc.pt/~tenreiro/GGWiener/> e <http://www.mat.uc.pt/~tenreiro/GGSchilling/>.

BIBLIOGRAFIA E DOCUMENTAÇÃO

- [1] Conservatoire des Arts et Métiers. *Catalogue des collections*. Paris: Guiraudet et Jouaust, 1851.
- [2] Costa, P. C., Oliveira, J.C.B. “O museu do Instituto Superior de Engenharia do Porto: o ensino industrial e o saber fazer”. In *Coleções Científicas Luso-Brasileiras: Patrimônio a Ser Descoberto*. Organização: Marcus Granato e Marta C. Lourenço. Rio de Janeiro: MAST, 2010.
- [3] *Formas & Fórmulas*. Exposição no Museu Nacional de História Natural e da Ciência. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2012.
- [4] Hervé, J.M. “Théodore Olivier (1793-1853)”. In *Distinguished figures in mechanism and machine science. Their contributions and legacies. Part 1*, Marco Ceccarelli (Ed.), Springer, 2007, p.~295--318.
- [5] Sakarovitch, J. *Épures d'architecture: de la coupe des pierres à la géométrie descriptive. XVI-XIX^e siècles*. Basel: Birkhäuser, 1998.
- [6] Shell-Gellasch, A. “The Olivier string models at West Point”. *Rittenhouse: Journal of the American Scientific Instrument Enterprise*, 17 (2), 2003, p.~71--84.
- [7] South Kensington Museum. *A catalogue of a collection of models of ruled surfaces constructed by M. Fabre de Lagrange*. London: George E. Eyre and William Spottiswoode, 1872.
- [8] Universidade de Coimbra. Faculdade de Matemática. *Actas das congregações da Faculdade de Mathematica, 1773-1911*. Arquivo da Universidade de Coimbra.
- [9] Universidade de Coimbra. *Documentos de despesa dos diversos estabelecimentos da Universidade de Coimbra, 1834-1916*. Arquivo da Universidade de Coimbra.

SOBRE O AUTOR

Carlos Tenreiro é professor associado do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra (UC) e membro do grupo de Probabilidades e Estatística do Centro de Matemática da UC.

PROBLEMAS ANTIGOS COM NÚMEROS PERFEITOS

“Seis é um número perfeito em si mesmo, e não porque Deus criou o mundo em seis dias, na verdade o contrário é que é verdadeiro. Deus criou o mundo em seis dias porque este número é perfeito, e continuaria a ser perfeito, mesmo que o trabalho desses seis dias não existisse.”

Santo Agostinho (354-430) em “A Cidade de Deus”



PEDRO J. FREITAS
Universidade de
Lisboa

pedro@ptmat.fc.ul.pt



MANUEL SILVA
Universidade
Nova de Lisboa

mnas@fct.unl.pt

Hoje vamos falar de números deficientes, abundantes, perfeitos, e também de números amigos. A história que pretendemos contar começa há cerca de 2500 anos. Alguns problemas formulados nessa altura permanecem ainda hoje em aberto. Não parece existir nenhuma aplicação prática para o tipo de problemas aritméticos que iremos discutir. Qual terá sido a razão que levou à formulação inicial destes problemas? Será que devemos ainda ocupar-nos deste tipo de questões? Não é fácil decidir se um dado problema matemático é mais ou menos interessante do que outro.

O matemático Enrico Bombieri, especialista em Teoria de Números e único medalha Fields italiano, afirmou:

“Existem diversos problemas antigos em aritmética cujo interesse é praticamente nulo, por exemplo, a existência de números perfeitos ímpares, problemas envolvendo a iteração de funções numéricas, a existência de infinitos primos de Fermat $2^{2^n} + 1$, etc.”

Por outro lado, o matemático Carl Pomerance defende que os números perfeitos, números amigos e outros conceitos do mesmo tipo foram fundamentais no desenvolvimento da aritmética, tendo sido decisivos na visão moderna da Teoria de

Números. A Teoria de Números probabilística, por exemplo, foi inspirada nesses problemas antigos. Os problemas computacionais envolvidos na procura de números perfeitos exigiram o desenvolvimento dos testes de primalidade, e, mais geralmente, da teoria algorítmica dos números. Além disso, existem conexões surpreendentes de alguns destes problemas antigos com outros problemas aparentemente distantes. Por exemplo, uma equação diofantina exponencial, como a equação de Catalan $x^n + 1 = y^k$, está relacionada com a existência de números perfeitos ímpares.

Os pitagóricos, cuja escola surgiu no século V a.C., em Crotona, acreditavam que os números estavam na origem de todas as coisas. Talvez por isso considerassem interessante o facto de os números $6 = 1 + 2 + 3$ e $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ coincidirem com a soma dos seus divisores próprios. Estes números eram considerados perfeitos. Um outro facto envolvendo divisores que interessou à escola pitagórica foi a existência de pares de números de inteiros positivos, tais que cada um deles coincide com a soma dos divisores próprios do outro. Estes números dizem-se *amigos*. Por exemplo,

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$$

e

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$$

é o primeiro par de números amigos. Há quem veja uma referência a isto na oferta de 220 carneiros e 220 ovelhas de Jacó a Esaú, descrita no Génesis – o número 220 seria um símbolo dessa amizade pretendida.

1. FUNÇÕES ARITMÉTICAS MULTIPLICATIVAS

Num curso elementar de Teoria de Números é inevitável discutir as propriedades das seguintes três funções.

A primeira função $\tau(n)$ conta o número de divisores de n . Vamos considerar daqui para a frente que a decomposição em fatores primos de n é dada por

$$n = p_1^{n_1} \times \cdots \times p_k^{n_k}.$$

Para obter uma fórmula simples que permita calcular o número de divisores de n , basta observar que todo o fator primo p de um divisor d é também fator primo de n . Além disso, cada um dos fatores primos aparece em d com uma multiplicidade não superior à de n . Logo,

$$\tau(n) = (n_1 + 1) \times \cdots \times (n_k + 1).$$

A segunda é a função $\phi(n)$ de Euler, a qual para cada n conta os números naturais $1 \leq m < n$ que são coprimos com n .

Finalmente, a função $\sigma(n)$ é a soma dos divisores de n . A função $\sigma(n)$ foi considerada por Pitágoras, sendo por isso uma das mais antigas funções consideradas na história da matemática.

Podemos dividir os números naturais em três classes: os números deficientes, para quais $\sigma(n) < 2n$, os números abundantes, que satisfazem $\sigma(n) > 2n$, e os números perfeitos que verificam a igualdade: $\sigma(n) = 2n$.

Uma função aritmética $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se multiplicativa, se

$$f(mn) = f(m) \times f(n),$$

sempre que m e n são coprimos. As funções $\tau(n)$, $\phi(n)$ e $\sigma(n)$ são as três multiplicativas. Uma função multiplicativa fica completamente determinada pelos valores que toma nas potências de primos.

No caso da função $\phi(n)$, temos naturalmente que $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. Como consequência da propriedade multiplicativa, obtemos ainda:

$$\phi(n) = (p_1^{n_1} - p_1^{n_1-1}) \times \cdots \times (p_k^{n_k} - p_k^{n_k-1}).$$

Há também uma fórmula conhecida para a função $\sigma(n)$:

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \cdots + p_1^{n_1}) \times \cdots \times (1 + p_k + \cdots + p_k^{n_k}),$$

a qual resulta facilmente também da propriedade multiplicativa.

2. PROBLEMAS ANTIGOS, NOVOS E EM ABERTO

Recordamos aqui alguns resultados clássicos envolvendo os conceitos anteriores.

- Os primeiros números perfeitos são: 6, 28, 496, 8128.
- O primeiro número ímpar abundante é o 945.
- Euclides mostrou que se $2^n - 1$ é um número primo, então

$$N = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$$

é um número perfeito. Por exemplo, $6 = 2 \times 3$, $28 = 4 \times 7$, $496 = 16 \times 31$ e $8128 = 64 \times 127$.

- Sabemos que para $2^n - 1$ ser primo, o expoente n terá também de ser um número primo, embora isso não seja suficiente.

- Euler mostrou que se N é um número perfeito par, então N pode ser escrito na forma

$$N = 2^{n-1} \times (2^n - 1),$$

onde $2^n - 1$ é um número primo – ou seja, a fórmula de Euclides fornece todos os números perfeitos pares.

- O primeiro par de números amigos (220, 284) foi descoberto por Pitágoras (500 a.C.).

- Todos os múltiplos de números abundantes são abundantes. Analogamente, todos os divisores de um número deficiente são deficientes.

- Se n divide m , então

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq \frac{\sigma(m)}{m}.$$

A igualdade é verificada apenas se $n = m$.

- A função $f(n) = \sigma(n)/n$ toma valores arbitrariamente grandes. Isto é uma consequência de a série dos inversos dos primos ser divergente.

Alguns problemas relacionados com estes conceitos permanecem ainda hoje em aberto. Por exemplo, não se sabe se existem infinitos números perfeitos. Nem se existe algum número perfeito ímpar.

Podemos generalizar o conceito de números amigos. Seja $s(n) = \sigma(n) - n$ a função soma dos divisores próprios de n . Se n é um número perfeito, então $s(n) = n$. Os números perfeitos são pontos fixos de n . Os números amigos são ciclos de comprimento 2. Por exemplo, $s(220) = 284$ e $s(284) = 220$ fecha o ciclo. Podemos considerar iterações sucessivas de $s(n)$, obtendo o que se denomina órbitas. Por exemplo, $s(12) = 16$, $s(16) = 15$, $s(15) = 9$,

$s(9) = 4$, $s(4) = 3$, $s(3) = 1$, e $s(1) = 0$ é uma órbita de comprimento 7. Uma órbita pode terminar em zero como a anterior, pode terminar num número perfeito, ou num ciclo de comprimento $k \geq 2$. Dickson conjecturou em 1907 que não existiam órbitas de comprimento infinito, todas as sequências de iterações em $s(n)$ devem terminar. Esta conjectura permanece em aberto.

Será que existem mais números perfeitos, deficientes ou abundantes? Dado um conjunto $A \subset \mathbb{N}$, podemos

definir a sua *densidade* pelo limite do quociente entre o número de elementos de A inferiores ou iguais a n e o próprio n . No caso do conjunto dos números abundantes, Davenport mostrou que o limite da definição de densidade existia. E Felix Behrend mostrou que a densidade dos números abundantes estava entre 0.241 e 0.314. Sabemos que os números perfeitos mesmo no caso de serem infinitos têm densidade zero.



LOJA
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em www.spm.pt



GONÇALO MORAIS CONVERSA COM INGRID DAUBECHIES



GONÇALO MORAIS
Instituto Superior
Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

Quando falamos acerca de Ingrid Daubechies podemos falar sobre as suas contribuições fundamentais para a teoria das Wavelets, contribuições que permitem o tamanho reduzido das imagens no formato JPEG, cujo algoritmo de compressão usa esta ferramenta matemática, ou em transmissões televisivas de eventos desportivos. Poderíamos também falar dos prémios, demasiados para serem aqui elencados. Poderíamos falar de ter sido a primeira mulher com o título de *Full Professor* em Matemática da Universidade de Princeton. Poderíamos falar sobre falsificações de arte identificadas através dos seus algoritmos. Poderíamos falar do que é ser, de facto, uma estrela mesmo fora da comunidade matemática. Certamente, poderíamos falar sobre todas estas coisas. Poderíamos. Mas tudo isto já foi muitas vezes contado e escrito. Nesta entrevista procuramos a visão por detrás de todas elas.

O encontro com Ingrid Daubechies foi tudo menos uma coisa simples de acontecer. Em primeiro lugar, quando a contactei no sentido de termos esta entrevista, ela simpaticamente direccionou-me para a sua eficiente secretária. Nunca tal me tinha acontecido. A sua secretária encontrou uma janela de oportunidade no intervalo de uma conferência em que ambos iríamos participar. Na sua apresentação, falou sobre obras de arte falsificadas e de que modo as *wavelets* permitem a sua identificação. Ali, perante uma audiência entusiasmada, nenhuma fórmula ou equação matemática foi exibida. Só a força das ideias por detrás dos seus algoritmos. No final, conforme previamente estabelecido com a sua secretária, procurei-a para encontrarmos um local em que pudéssemos falar. A minha janela ia-se fechando, pois ao seu redor as pessoas avolumavam-se. Ela amavelmente falava com todos elas. Sem tempo. Quando a minha janela já

estava completamente fechada, pensei que o que me restava era despedir-me e esperar que o futuro nos desse uma nova oportunidade. Fiquei para último.

Quando ficámos a sós, pronto para o pedido de desculpas e o inevitável falhanço editorial, Daubechies sentou-se com um ar completamente exausta e disse-me:

— Gonçalo, — procurando o meu nome no dístico da conferência —, tenho apenas duas restrições. A primeira é que preciso de estar no Museu do Prado daqui a uma hora. A segunda é que apenas tenho dólares e preciso de encontrar uma caixa multibanco para levantar euros. Achas que, ainda assim, consegues fazer a tua entrevista?

No seu olhar havia vontade de falar. Havia vontade de estar à disposição das minhas perguntas, mesmo que isso lhe custasse o tempo do almoço e uma corrida muito apressada para o centro de Madrid. À nossa volta tínhamos uma



sala de congressos gigantesca, cheia de lugares vazios, onde o pessoal da manutenção se apressava para montar o próximo evento. As marteladas e o *sound check* eram a nossa paisagem audível. Daubechies perguntou-me preocupada, se toda aquela barulheira não iria perturbar a gravação da entrevista. Respondi-lhe que alguém, há uns anos, tinha criado uma coisa chamada *wavelets* e este tipo de filtros estava implementado nos aparelhos sofisticados de gravação de áudio. Ela riu-se e começámos a falar sobre coisas ao acaso. Quando a senti tranquila, liguei o gravador. Durante toda a conversa, a minha mulher ia pedindo que não nos desligassem as luzes, que não usassem os berbequins industriais perto do local em que estávamos sentados ou berrassem aos microfones só porque a maldita grua estava encalhada. No meio desta turbulência, Daubechies começou a falar sobre as coisas que a ocuparam em grande parte da sua carreira. E sempre com uma simplicidade especial.

GONÇALO Sendo uma das personagens principais no desenvolvimento e na aplicação das *wavelets* sente-se no centro de uma revolução científica?

DAUBECHIES Bem... sim, mas não por causa das *wavelets*. Se as *wavelets* foram o princípio de algo que continua a

eclodir, elas coincidiram com o momento em que expansões esparsas começaram a ser realmente úteis. Compreendemos desde então que a esparsidade é algo que pode enviesar-nos as observações. Não me refiro apenas à compressão. Existem muitos fenómenos em que, não se sabendo quais são os blocos fundamentais da informação que pretendemos estudar, muitas das medidas que obtemos podem dar resultados que não refletem a essência daquilo que foi registado. Atualmente, quando trabalhamos com imagens, os blocos essenciais da informação são razoavelmente compreendidos. Só agora começamos a tentar perceber quais serão esses mesmos blocos noutra qualquer tipo de informação. Existem muitos desenvolvimentos recentes e muito interessantes, mas ainda estamos a colecionar dados de vários lados para tentar compreender qual será o esquema geral de abordagem dos problemas.

A ideia geral é olharmos para uma quantidade enorme de informação intrinsecamente complexa e compreendê-la realmente. Quando digo compreender, quero dizer que conseguimos descobrir uma forma eficiente de pensar toda essa informação, percebendo o que se pretende retirar dela, sobretudo, o que nela está esparsamente contido. Perceber isto é algo que começamos agora a

conseguir fazer e com resultados interessantes. Vê, por exemplo, o caso da *machine learning* onde todos os métodos de que atualmente dispomos são um pouco *ad-hoc*, mas julgo que, num futuro próximo, irão originar todo um conjunto de novos ramos da matemática. De facto, é uma área excitante.

GONÇALO Por um lado, temos a Análise de Fourier clássica. Por outro lado, temos as *wavelets*. Acha que neste momento dispomos das ferramentas necessárias para estudar todo o espectro da Natureza?

DAUBECHIES [Risos] Nunca teremos as ferramentas necessárias para estudar todos os fenómenos naturais. Quando percebemos algo, existe sempre um novo conjunto de perguntas que aparece, cuja existência não podíamos antes formular ou sequer adivinhar. Por isso, não haverá nunca uma resposta definitiva sobre o que quer que seja.

GONÇALO Mas existe esta dualidade na Natureza que é certamente fascinante: frequência *versus* posição...

DAUBECHIES Absolutamente!

GONÇALO Sendo a sua formação básica em Física, seria possível ter chegado a estes resultados com uma formação tradicional em Matemática?

DAUBECHIES Talvez não. Julgo que o facto de ter vindo de Física ajudou-me a perseguir resposta iterativa, sempre moldável à realidade observável e não uma resposta definitiva sobre um determinado assunto. É difícil verbalizar isto. Mas fico muitas vezes surpreendida com o quão pouca Física alguns matemáticos sabem. [Risos]

GONÇALO Faz-nos parafrasear Vladimir Arnold, que dizia que um matemático que apenas sabe de matemática só conhece metade da sua ciência...

DAUBECHIES Sim! Sinto que isso tem muito de verdadeiro. Karen Uhlenbeck disse-me uma vez que existem triliões de equações de derivadas parciais, todas incrivelmente difíceis. Mas, sem se saber porquê, de todas essas, as que são realmente interessantes são as que vêm da Física.

GONÇALO Tenho dois exercícios para lhe propor. O primeiro é imaginar que vive em finais do século XIX ou no

início do século XX, sem computadores e sem toda a tecnologia atual. Qual acha que seria a sua área de estudo?

DAUBECHIES Sem computadores... há 100 anos... Acho que estaria a trabalhar em Análise. Esse foi o tempo em que se começou realmente a compreender todos os paradoxos que apareceram naturalmente do estudo de funções estranhas e conseguiu-se perceber o esquema geral do que se podia fazer em cada instante. Foi a altura em que se criou um esquema geral de raciocínio relativamente a este tipo de problemas. Mas, novamente, apesar de não se tratar de problemas físicos ou com inspiração em Física, as pessoas estavam a tentar perceber o que é que fazia sentido.

GONÇALO E nessa altura a distinção entre um matemático e um físico ainda não era muito clara...

DAUBECHIES Sim, não era nada clara. Em Física-Matemática, a área em que originalmente comecei a fazer investigação, na Europa, as pessoas estão tradicionalmente nos departamentos de Física, enquanto que nos Estados Unidos da América (EUA) estão sobretudo nos departamentos de Matemática. Isto mostra ainda que é uma área que está contida entre os dois campos. Quando me perguntavas há pouco se estes eram tempos excitantes para a matemática, julgo que é um tempo em que as pessoas estão abertas, existindo ligações muito claras e bem estabelecidas entre Matemática Pura e Aplicada, muito mais ligações e muito mais claras do que as que existiam há dez anos. Em Matemática Pura, existem pessoas que estão a fazer ligações entre áreas até agora aparentemente distantes. Basta olhar para a lista dos últimos premiados com a Medalha Fields, em que muitos deles usam técnicas de um determinado campo para resolver problemas de outro, ao invés de serem altamente especializados numa determinada técnica e resolverem problemas muito duros na área na qual tradicionalmente se aplica esse tipo de técnicas.

GONÇALO O segundo exercício é talvez um pouco mais complicado. Conseguir imaginar o que é que estudarás daqui a vinte ou trinta anos?

DAUBECHIES Isso é uma pergunta com uma resposta impossível. Primeiro, porque daqui a trinta anos teria noventa anos e não sei se ainda andarei por cá. [Risos]. Há tanta coisa para perceber e estudar... A Biologia está

num processo crescente de matematização e estamos a começar a criar um esquema geral para responder às questões que nela vão aparecendo. Estou em crer que isto levará à criação de novos ramos da matemática.

Por outro lado, estamos a tentar perceber de que forma se pode extrair informação da grande quantidade de dados que está atualmente disponível. Quero dizer, não se trata necessariamente em todos os casos, de grande quantidade de informação. Muitas vezes o que se pretende é encontrar uma estrutura simples que nos permita aproveitar toda a riqueza contida nos dados. Reconhecer estes padrões é algo que, em muitas situações, é extremamente complicado. Quando temos muitos dados não é imediatamente óbvio o que se deve aproveitar e o que se pode deitar fora. Conseguir isto terá um impacto estrondoso em muitas áreas, por exemplo, na Biologia e em Ciências Sociais.

GONÇALO E de que forma é que se pode preparar toda uma nova geração de matemáticos e cientistas para lidar com esta nova abordagem dos problemas?

DAUBECHIES Em primeiro lugar, existe um largo espectro de matemáticos. Haver pessoas que ficam dentro da-

quilo a que chamamos Matemática Pura é importante, ao mesmo tempo que é fundamental que todas as áreas tenham pontes e que comuniquem com outras áreas do conhecimento. Do ponto de vista individual, não terão de ser todos os matemáticos que terão de criar essas ligações, mas é fundamental que colaborem e comuniquem com pessoas que tenham essas ligações, quer com outras áreas de Matemática Pura quer com aplicações. E existir este largo espectro de matemáticos, e que eles falem uns com os outros é importante. Juntando a isto, o feedback das aplicações criará novas respostas teóricas. Esta iteração acho que é aquilo que será fundamental para abranger toda a interdisciplinaridade necessária.

GONÇALO Voltando um pouco às *wavelets*, é impressionante o campo de aplicações que estas têm atualmente...

DAUBECHIES Sim! O projeto em que estou envolvida com a colaboração do Museu do Prado, que pretende, entre outras coisas, encontrar métodos para determinar quando uma pintura é uma falsificação, é apenas um dos exemplos. Antes de começarmos a entrevista, estávamos a falar sobre eletrocardiogramas e é curioso que eu tive um aluno de doutoramento que, antes de se dou-



torar em Matemática Aplicada, era radiologista. Continua a ser ainda hoje muito interessante falar com ele. Em primeiro lugar, porque ele consegue de facto falar com os médicos, pois usam a mesma linguagem [Risos]...

GONÇALO E é habitual para si andar na rua e reparar numa aplicação quotidiana das *wavelets*?

DAUBECHIES É engraçado que me perguntes isso... Há uns anos, eu tive uma licença sabática e, para consolar o meu marido, comprámos um televisor de alta definição com um ecrã enorme para que ele pudesse ver os canais de desporto em toda a sua glória. Num dia em que ele estava a assistir a um jogo de futebol, nesse ecrã gigante, apercebi-me, de repente, de algo muito interessante. Quando uma imagem é comprimida, começam a aparecer artefactos na imagem, que resultam dessa compressão. Nesse jogo apercebi-me de que os artefactos que a imagem continha estavam ligados ao facto de a imagem estar a ser comprimida usando *wavelets*. A imagem dos jogadores era sempre preservada, estando sempre livre de artefactos, enquanto que, na imagem da relva, esses artefactos eram notórios. Nesse momento não sabia, mas soube mais tarde que, de facto, a ESPN comprime as imagens usando *wavelets*. Quando me apercebi disso exclamei: “Eles estão a usar *wavelets*!” O meu marido, que estava concentrado no jogo, perguntou-me como é que eu sabia. Respondi-lhe entusiasmada: “Olha para a relva!” Ele respondeu-me indignado: “Mas quem é que olha para a relva?” [Risos] Acho que este exemplo exprime bem a utilidade das *wavelets*. De facto, quem é que quer saber da imagem da relva num jogo de futebol?

GONÇALO A sua observação não foi um comentário de uma fã...

DAUBECHIES [Risos] Exatamente! Quem é que quer saber disso para alguma coisa num jogo de futebol?!

GONÇALO Bem! Parece que o nosso tempo terminou! Foi um enorme prazer falar consigo. Queria agradecer-lhe ter arranjado tempo na sua agenda apertada. Muito obrigado.

DAUBECHIES O prazer foi meu. Obrigada.



Arrumei o material. Procurámos com ela o multibanco mais próximo e um táxi que a levasse ao centro de Madrid. Percebíamos agora por que razão ela precisava de uma secretária que conjugasse permanentemente a sua agenda. As múltiplas atividades em que participava deixariam qualquer pessoa exausta. Ingrid Daubechies, ainda hoje, depois de uma carreira enorme, guarda um entusiasmo pueril pelas coisas que a cercam. O mesmo entusiasmo que a fez sentar-se e falar, numa conversa sem tempo e indiferente ao caos em que estávamos imersos. E sempre com uma simplicidade especial.



NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfc@ua.pt

CONTRA A ANGÚSTIA DA PÁGINA EM BRANCO

Da secura dos textos científicos para os delírios da ficção, as minhas estratégias para começar uma obra.

Quando visito escolas secundárias para falar dos meus livros, há uma pergunta que me fazem com alguma frequência: “A ciência está presente nas suas obras? De que forma?”

A resposta chega sempre após alguma hesitação – sim, não, mais ou menos. Não há na verdade grandes temas científicos que sejam explorados ao longo dos meus livros, pelo menos por enquanto, mas há qualquer coisa que transita do exercício científico para o literário.

Quem já escreveu uma tese de mestrado ou de doutoramento sabe que o mais sensato é começar pelo índice, dividindo o trabalho por partes, capítulos e subcapítulos. Fica-se assim com uma ideia dos conteúdos a apresentar, da sua organização e da extensão dos mesmos. Depois é “só” preencher os espaços.

A mesma estratégia é aplicada a artigos científicos (introdução, parte experimental, resultados, discussão, conclusão) e até aos inúmeros concursos e projetos em que um cientista vai participando ao longo da sua carreira.

Pois é exatamente esse método (com as devidas adaptações) que eu costumo utilizar na preparação dos meus livros. Uma vez definido o tema e uma ou várias histórias que quero tratar, tento encontrar uma estrutura (um esqueleto, se preferirem) que me ajude a dar coesão à narrativa, embora garantindo toda a liberdade própria da escrita literária.

Em *No Meu Peito Não Cabem Pássaros*, o meu primeiro

livro, existe um acontecimento central – a passagem de dois cometas pelo planeta Terra no ano de 1910, três personagens cujos capítulos se vão alternando e cinco partes que correspondem às dinâmicas internas das personagens – Exórdio, Confronto, Acerto, Assombro e Fecho.

No segundo livro, *Debaixo de Algum Céu*, defini um espaço físico – um prédio com sete apartamentos, e um intervalo temporal de oito dias, entre o Natal e o Ano Novo, e cada dia é um capítulo.

Em *Se Eu Fosse Chão*, o meu terceiro livro, que acaba de ser publicado, a ação passa-se inteiramente num hotel, cada conto é um quarto e cada piso do hotel corresponde a um ano diferente (1928, 1956 e 2015). O livro é o hotel e as personagens são os seus hóspedes e empregados.

Cada autor tem as suas estratégias e não há receitas que se possam emprestar com garantias de sucesso. Há quem comece sem qualquer estrutura pensada e faça livros maravilhosos, há quem tenha uma estrutura tão rígida que a história e as personagens acabam por ficar manietadas, sem qualquer espaço de manobra ou de crescimento.

Por enquanto vou aplicando o que aprendi enquanto cientista, mas, como qualquer cientista, também estou preparado para adaptar o método se os resultados começarem a falhar.



BARTOON

LUIS AFONSO



Publicado originalmente no jornal Público, em 01/06/2015. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

Adérito Araújo Universidade de Coimbra

EDITORES:

Daniel Pinto Universidade de Coimbra

Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:

António Machiavelo Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Arsélio Martins** Escola Secundária José Estevão, Aveiro • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Joana Latas** HBD - Tourism Investments, Departamento de Educação, São Tomé e Príncipe • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Marcelo Viana** IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

Sílvia Dias SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

Dossier – Comunicação e imagem

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Sílvia Dias SPM

PROPRIEDADE:

Sociedade Portuguesa de Matemática

Av. República 45, 3^o Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

TIRAGEM **1250 Exemplares**

ISSN **0373-2681** • ICS **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

ESCOLA DE VERÃO DA SPM 2015 COM OFERTA FORMATIVA



Entre os dias 2 e 5 de setembro, a Universidade de Aveiro abrirá as suas portas a professores de matemática dos ensinos básico e secundário, investigadores, estudantes e a todos aqueles que se interessam pela matemática e suas aplicações, para participarem na Escola de Verão da Sociedade Portuguesa de Matemática (EVSPM). As conferências da edição de 2015 da EVSPM serão de âmbito geral, promovendo a divulgação do conhecimento matemático, inscrevendo-se algumas delas na temática do Ano Internacional da Luz: “100 anos de espaço-tempo curvo” (Carlos Herdeiro, Universidade de Aveiro), “Anamorfose e cor na geometria e na arte” (António Araújo, Universidade Aberta), “A matemática e a física da luz” (Carlos Fiolhais, Universidade de Coimbra), “Malabarismo, matemática e a utilidade das coisas inúteis” (António Machiavelo, Universidade de Porto), “Geometria e ótica no trabalho de Francisco de Melo (ca. 1490-1536)” (Henrique Leitão, Universidade de Lisboa), “Notas sobre a geometria básica que se aprende quando se ensina” (Arsélio Martins), “Portugal tem talento matemático? Um olhar sobre 35 anos de Olimpíadas...” (Joana Teles, Universidade de Coimbra) e “As potências de expoente racional no novo programa de matemática” (Filipe Oliveira, Universidade Nova de Lisboa). Ao longo da EVSPM, será ainda ministrado um curso de formação para professores dos ensinos básico e secundário, creditado pelo Centro de Formação da SPM (ver caixa). As inscrições para a EVSPM podem ser efetuadas em <http://spm-ev2015.weebly.com/inscriccedilatildeo.html>.

O curso de formação destinado a professores dos ensinos básico e secundário terá a duração de 15 horas, conferindo aos formandos 0,6 créditos, mediante as seguintes opções: “Números racionais no 1.º ciclo”, para professores dos grupos 110 e 230 do ensino básico; “Tales, Pitágoras e Euclides”, para professores de matemática dos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico; e ainda “Primitivas e integrais no novo programa do secundário de matemática A” e “Programa e metas curriculares de matemática A”, ambos para professores de matemática do 3.º ciclo dos ensinos básico e secundário. Além da frequência de um destes minicursos (6 horas), os formandos terão de assistir obrigatoriamente às seis conferências (com duração de 1h30 cada) que decorrerão nos dias 3, 4 e 5 de setembro.

PORTUGAL NAS OLIMPIADAS INTERNACIONAIS E CPLP

Portugal tem motivos para comemorar os resultados obtidos nas Olimpíadas Internacionais de Matemática (OIM): foram três as medalhas de bronze conquistadas pelos portugueses Nuno Santos, Henrique Aguiar e Francisco Andrade, além de uma menção honrosa obtida por Henrique Santos. Participaram também nas OIM, que se realizaram em Chiang Mai, na Tailândia, entre 4 e 16 de julho, Bruno Carvalho e Henrique Navas. Entretanto, seguirão para Cabo Verde, onde decorrerão as Olimpíadas de Matemática da CPLP, entre 19 e 25 de julho, David Teixeira, Duarte Nascimento, Maria Matilde Silva e Pedro Fernandes. A participação de Portugal nas competições internacionais é organizada pela SPM, e a preparação dos alunos é assegurada pelo Projeto Delfos, do Departamento de Matemática da UC. As Olimpíadas são apoiadas pelo Ministério da Educação e Ciência, pela Ciência Viva, pelo Novo Banco, pela Fundação Calouste Gulbenkian e pela Pathena.



INSCRIÇÕES ABERTAS PARA CIEMELP 2015

Estão abertas as inscrições para a primeira Conferência Internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa, que decorrerá em Coimbra, entre 28 e 31 de outubro. O CiEMeLP 2015 – As Múltiplas Formas de Fazer e Comunicar a Cultura Matemática em Língua Portuguesa – terá lugar no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra (UC) e no Museu da Ciência da UC. Esta conferência, que promove um intercâmbio na área da matemática dos países lusófonos, tem já confirmados como conferencistas plenários: Eduardo Colli (Universidade de São Paulo, Brasil), Irene M. Cazorla (Universidade Estadual de Santa Cruz, Brasil), Marcos Cherinda (Universidade Pedagógica, Maputo, Moçambique), José Francisco Rodrigues (Universidade de Lisboa, Portugal), Henrique Leitão (Universidade de Lisboa, Portugal) e João Pedro Ponte (Universidade de Lisboa, Portugal). Na sessão especial dedicada à obra de Paulus Gerdes (1953-2014), o conferencista principal será Ubiratan D'Ambrosio (professor emérito da Universidade Estadual de Campinas, Brasil), e a sessão dedicada a José Sebastião e Silva (1914-1972) será dirigida por Anabela Teixeira (Ludus, Portugal). Até dia 31 de julho, podem ser submetidos trabalhos sob a forma de pósteres ou integrados nos seguintes grupos de discussão: “Matemática, cultura e sociedade”; “Relações entre a atividade matemática na escola, na universidade e em outras práticas sociais”; “A comunicação matemática na escola e fora dela”; “Formação de professores que ensinam matemática na educação básica e secundária” e “Usos de tecnologias no ensino e na comunicação da matemática”. Mais detalhes sobre a submissão de trabalhos podem ser consultados na página oficial do encontro, em <http://www.mat.uc.pt/~emelp>. Neste endereço podem ser efetuadas também as inscrições, com valor reduzido até dia 5 de setembro.

PROBLEMAS SINGULARES - WORKSHOP EM LAGOS

O 5.º *Workshop* Internacional sobre Análise e Aproximação Numérica de Problemas Singulares (IWANASP, sigla em inglês) tem data marcada para os dias 22, 23 e 24 de outubro, em Lagos. A cidade algarvia será o ponto de encontro para matemáticos que lidam com problemas singulares (equações cujas soluções têm comportamento irregular) em diferentes domínios, como a biomedicina, a engenharia, as finanças, os seguros, entre outros. Os tópicos a discutir incluem a modelação matemática de fenómenos físicos envolvendo singularidades; a solução numérica de problemas de valores de fronteira singulares para equações diferenciais; a integração numérica de funções singulares e os métodos computacionais para equações integrais com núcleos singulares. O 1.º IWANASP teve lugar no Instituto Superior Técnico, em Lisboa, em 2004, e a edição anterior (2011) foi organizada pela Universidade de Chester, no Reino Unido. As inscrições para o 5.º IWANASP estão abertas em <http://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~tdiogo/IWANASP015/index.html>. O valor da inscrição sofrerá um agravamento a partir de 1 de agosto.

FEIRA DA MATEMÁTICA REGRESSA AO MUSEU

A Feira da Matemática está de volta ao Museu Nacional de História Natural e da Ciência da Universidade de Lisboa (MUHNAC), que nos dias 23 e 24 de outubro acolherá a segunda edição desta iniciativa. Exposições, *workshops*, jogos e desafios, demonstrações, apresentações do Circo Matemático e palestras são algumas das atividades em que os visitantes poderão participar ao longo de dois dias; o primeiro será dedicado às escolas, sendo o segundo, sábado, aberto ao público em geral. A Feira da Matemática é uma iniciativa conjunta do MUHNAC, da SPM, da Associação de Professores de Matemática, da Ludus, e da Matemática do Planeta Terra, que tem como principal objetivo a divulgação das ciências matemáticas junto da sociedade.

LUÍS NUNES VICENTE RECEBE PRÉMIO LAGRANGE

Luís Nunes Vicente, professor catedrático no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra (UC), foi galardoado com o Prémio Lagrange, pela síntese inovadora de técnicas matemáticas relacionadas com algoritmos que tem desenvolvido. O prémio, uma iniciativa conjunta da SIAM (Sociedade de Matemática Aplicada e Industrial) e da MOS (Sociedade de Otimização Matemática), foi atribuído pelo livro *Introduction to Derivative-Free Optimization*, publicado em 2009 por Nunes Vicente e dois coautores, Andrew R. Conn (IBM Research) e Katya Scheinberg (Universidade de Lehigh). Segundo comunicado da UC, Nunes Vicente, Conn e Scheinberg têm procurado, no âmbito da Otimização Sem Derivadas, “desenvolver e analisar algoritmos inovadores para a solução de problemas de otimização onde é escassa, ou de ordem baixa, a informação disponível sobre as funções envolvidas. Este tipo de problemas surge frequentemente aquando do desenvolvimento de protótipos em engenharia e ciências aplicadas, onde as funções a otimizar resultam de simulações computacionais. A monografia premiada é uma síntese inovadora das técnicas matemáticas subjacentes à análise destes algoritmos”. O Prémio Lagrange 2015 foi entregue na cerimónia de abertura do XXII Simpósio Internacional de Programação Matemática, em Pittsburgh, EUA, perante mil e quinhentos congressistas. Este galardão é atribuído de três em três anos, desde 2003, a “trabalhos fora de série na área da Otimização Contínua, que se distingam pela sua qualidade matemática e originalidade”.



Foto: Universidade de Coimbra

LITERACIA FINANCEIRA PARA JOVENS EM DEBATE

Capacitar os mais jovens para a gestão das suas finanças de um modo sustentável. Foi este o mote para a conferência “Literacia Financeira e Inclusão Social de Jovens – Os números também se leem”, moderada por António Peres Metelo, e que reuniu no passado dia 2 de julho, em Lisboa, representantes da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), da Epis - Empresários pela Inclusão Social, do Instituto do Emprego e Formação Profissional e do Novo Banco, promotor do evento. A conferência centrou-se na partilha de visões e de experiências dos organismos envolvidos nesta iniciativa, consoante os seus âmbitos de atuação, bem como de jovens abrangidos por programas de inclusão social através do ensino. O campo da matemática foi abordado por Fernando Pestana da Costa, presidente da SPM, que referiu estudos recentes que apontam para o reforço desta disciplina nas escolas como uma das chaves mais importantes para a promoção da literacia financeira entre as crianças e jovens. Na sua intervenção, o presidente da SPM identificou ainda as Olimpíadas de Matemática como um exemplo paradigmático de como é possível atrair os mais jovens para esta disciplina, estimulando o seu interesse pelo raciocínio matemático, e de como estas promovem a inserção social de jovens, integrando-os em ambientes intelectualmente desafiantes, através do apoio que a SPM providencia aos mais talentosos, independentemente das suas condições socioeconómicas e do seu local de residência

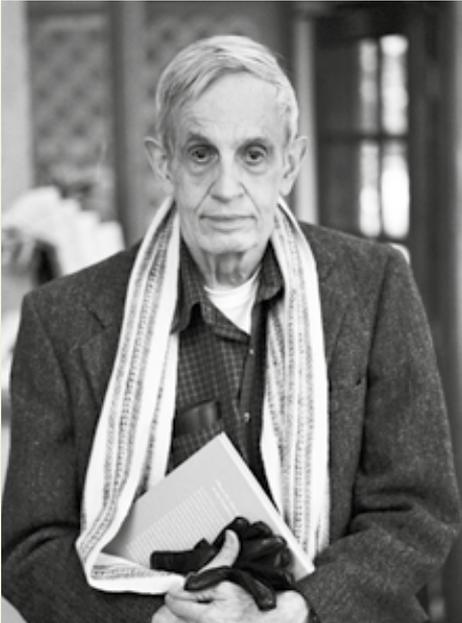


EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY COMEMORA 25 ANOS

O Instituto Henri Poincaré, em Paris, foi o local escolhido para a celebração dos 25 anos da European Mathematical Society, criada em 1990, em Mandralin, na Polónia. Para assinalar este aniversário será organizado, no dia 22 de outubro, um evento denominado “Challenges for the next 25 years”, com palestras dedicadas a diferentes tópicos matemáticos, e uma mesa redonda para a discussão de desafios específicos para as ciências matemáticas.

ESTUDO SOBRE A PRODUÇÃO CIENTÍFICA NO ENSINO SUPERIOR

A Direção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência apresentou os resultados de um estudo bibliométrico sobre a produção científica dos docentes de Instituições de Ensino Superior (IES) portuguesas, nas áreas da matemática e da física. Estes docentes participaram, simultaneamente, enquanto investigadores, na avaliação de unidades de investigação científica da FCT de 2013/2014. O estudo bibliométrico agora apresentado mostra os resultados de cada instituição de ensino superior de acordo com vários indicadores, como o impacto agregado da instituição na área científica; o impacto médio por docente ou por publicação; o número total de publicações e a percentagem de publicações realizadas em colaboração internacional; a homogeneidade/heterogeneidade do grupo de docentes de cada IES em termos de impacto; e a percentagem dos docentes doutorados da instituição, a tempo inteiro, que se apresentaram à avaliação FCT, entre outros. Este estudo pode ser consultado em <http://www.dgeec.mec.pt/np4/521.html>.



O ADEUS A UMA “MENTE BRILHANTE”

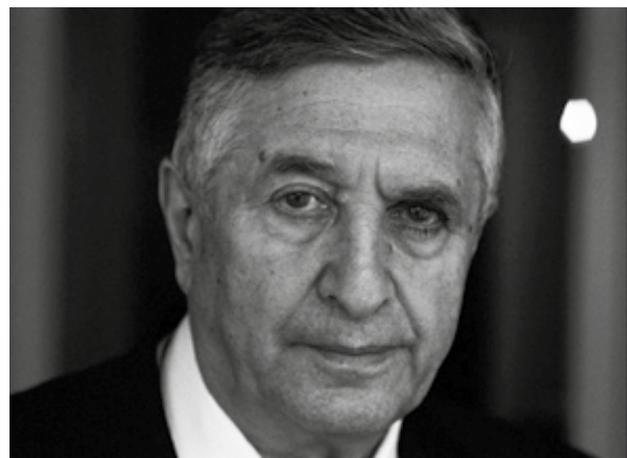
John Nash morreu no dia 23 de maio, aos 86 anos de idade. Prémio Nobel da Economia em 1994, Nash havia sido recentemente distinguido com o Prémio Abel, um dos galardões mais importantes da matemática, pelos seus importantes contributos no campo da teoria das equações diferenciais parciais não-lineares. John F. Nash Jr. nasceu em 1928 nos Estados Unidos, e doutorou-se em 1950 pela Universidade de Princeton, onde fez carreira, a par com o MIT. Embora os resultados obtidos por John Nash, em 1950, no campo das equações diferenciais parciais e da geometria diferencial sejam considerados pelos seus pares o seu trabalho mais profundo, é pela investigação desenvolvida no âmbito da teoria dos jogos que Nash é mais conhecido, e que, em última análise, lhe valeu o Prémio Nobel da Economia em 1994. A vida de John Nash foi retratada no cinema, em 2001, no filme “Uma Mente Brilhante”. Nash faleceu na sequência de um acidente de viação em Nova Jérсия, Estados Unidos.

PRÉMIO ABEL NO 7.º CONGRESSO EUROPEU DE MATEMÁTICA

Pela primeira vez na história do Congresso Europeu de Matemática (ECM), um vencedor do Prémio Abel apresentará uma palestra perante as centenas de participantes deste encontro, que, na sua sétima edição, decorrerá em Berlim, de 18 a 22 de julho de 2016. Yakov G. Sinai (Princeton University, EUA, e Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences, Rússia), considerado pela Academia Norueguesa de Ciências e Letras um dos mais influentes matemáticos do século XX, foi galardoado com o Prémio Abel em 2014 e marcará agora presença no 7.º ECM. Além da Abel Lecture, o congresso apresentará também a Hirzebruch Lecture, em honra do primeiro presidente da European Mathematical Society, uma palestra aberta ao público e ainda uma palestra dirigida aos estudantes do ensino secundário, a Next Generation Outreach Lecture. Os nomes dos oradores convidados e das sessões plenárias já foram divulgados e podem ser consultados na página oficial do congresso, em <http://www.7ecm.de>. O 7.º ECM terá lugar na Technische Universität Berlin, onde, durante quatro dias, se reunirão matemáticos de toda a Europa para discutir os principais desenvolvimentos na área da matemática. Este encontro é uma iniciativa da European Mathematical Society e realiza-se de quatro em quatro anos.



Technische Universität Berlin



Yakov G. Sinai, Prémio Abel em 2014

ENCONTRO INTERNACIONAL NO PORTO JUNTOU MAIS DE MIL MATEMÁTICOS

Foram mais de mil os matemáticos que, entre 10 e 13 de junho, se reuniram na Universidade do Porto para quatro dias de intenso debate sobre os desenvolvimentos da investigação em matemática, no primeiro encontro organizado em conjunto pelas sociedades americana, europeia e portuguesa de matemática. No dia 10 de junho realizou-se, no Seminário de Vilar, a cerimónia de abertura do encontro, encabeçada por Georgia Benkart, representante da American Mathematical Society (AMS), por Pavel Exner, presidente da European Mathematical Society (EMS), por Fernando Pestana da Costa, presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), por José Manuel Ferreira, vice-reitor da Universidade do Porto, e por Nuno Crato, ministro da Educação e Ciência. O Dia de Portugal ficou também marcado pela palestra de Marcus du Sautoy (University of Oxford, Reino Unido), conhecido pelo seu importante trabalho na popularização da matemática, tendo recebido em 2009 o Prémio Michael Faraday da Royal Society of London pela excelência na comunicação de ciência no Reino Unido. A vibrante apresentação de "The Secret Mathematicians" decorreu na Casa da Música e foi acompanhada de excertos musicais interpretados

pela Orquestra Clássica da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Investigadores com trabalho reconhecido à escala global compuseram o painel de oradores convidados deste encontro, nomeadamente os portugueses Rui Loja Fernandes (University of Illinois, EUA), Irene Fonseca (Carnegie Mellon University, EUA), presidente da maior sociedade internacional de matemática aplicada e industrial (SIAM, sigla em inglês) e André Neves (Imperial College London, Reino Unido), distinguido em 2011 pelo Conselho Europeu de Investigação com uma Starting Grant. Marcelo Viana (Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Brasil), presidente da Sociedade Brasileira de Matemática, Sylvia Serfaty (Université Pierre et Marie Curie Paris 6, França), *EMS Distinguished Speaker*, Annette Huber (Albert-Ludwigs-Universität, Alemanha), Mikhail Khovanov (Columbia University, EUA) e Gigliola Staffilani (MIT, EUA) completam a lista de conferencistas convidados do AMS-EMS-SPM International Meeting. Todos os anos, a AMS realiza com uma sociedade anfitriã de outro país um encontro conjunto que reúne matemáticos de ambas as comunidades científicas. Em 2015, a parceria estendeu-se às congéneres portuguesa e europeia.



TERMINE O VERÃO NUMA ESCOLA CHEIA DE LUZ

De 2 a 5 de setembro, irá realizar-se a Escola de Verão da SPM, com um programa composto por um Curso de Formação de Professores dos ensinos básico e secundário, oito conferências plenárias e vários minicursos, que evidenciam a importância da matemática na física, nas neurociências, na dermatologia e na oftalmologia, entre outras áreas. Haverá também uma oficina onde os participantes poderão explorar técnicas para criar hologramas 3D, desenhados à mão ou por gravação *laser*. Acham que devem perder esta oportunidade de participar?

Os fenómenos da Natureza tendem a ser ótimos, num sentido preciso, como minimizar a energia total do sistema, seguir o caminho mais curto, ou maximizar a entropia. Um raio de luz não é diferente... Saberá o leitor o que a luz minimiza? Curiosamente, a luz não segue o caminho mais curto, mas o que leva menos tempo a percorrer (princípio de Fermat). Dois requisitos aparentemente iguais, pois, em geral, a reta é o caminho mais curto e o mais rápido entre dois pontos, mas tal é falso em certas condições. É o caso quando a luz atravessa duas substâncias diferentes, *e.g.*, ar e água. Nesta situação, temos a conhecida lei de Snell, que afirma que, quando os senos dos ângulos entre os raios e o vetor normal à superfície de interface são proporcionais às velocidades de propagação, a luz viaja no menor tempo possível, e tal genericamente não é uma reta. Além das diversas aplicações relevantes deste princípio, *e.g.*, nas comunicações em fibra ótica, que utiliza na sua internet em casa, também nos permite fazer aquelas fotos engraçadas em que a cabeça fora de água parece estar separada do corpo deformado dentro de água. Um fenómeno semelhante, onde o caminho mais rápido não é a reta, acontece quando a força gravítica está envolvida, nomeadamente, no conhecido problema da Braquistócrona, cuja solução é a curva denominada cicloide. Este problema consiste em encontrar a trajetória de uma par-

tícula que, sujeita a um campo gravítico constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois pontos no menor tempo possível.

Neste ano de 2015, a luz e a força gravítica têm um certo destaque. A ONU [1] apoia a celebração de duas temáticas que se objetivam em iniciativas globais intituladas Ano Internacional da Luz e das Tecnologias Baseadas na Luz [2] e Ano Internacional dos Solos [3]. Tais iniciativas pretendem, de forma genérica, alertar e divulgar, entre o público em geral, a importância destas temáticas na sociedade. Curiosamente, também se celebra os 100 anos da Teoria Geral da Relatividade, desenvolvida por Albert Einstein, em 1915, na qual se mostra que a luz está no centro de toda a estrutura espaço-tempo, tendo profunda importância na física e na cosmologia. Atualmente, a teoria geral da relatividade é classificada como um assunto clássico, no entanto, a sua ideia central não deixa de surpreender e, de certo modo, ser difícil de assimilar, *i.e.*, a ideia de que o espaço e o tempo estão (matematicamente) interligados, são dinâmicos e fortemente influenciados pela presença de matéria. A sua relevância para a Humanidade é evidente, pois a teoria geral da relatividade é, de forma breve, uma teoria que explica todos os fenómenos gravitacionais conhecidos, *e.g.*, a maçã a cair, as órbitas dos planetas, e galáxias em fuga. Neste último século, a sua

validade nunca foi posta em causa pelos inúmeros testes realizados. Mais uma vez, a matemática é uma ferramenta fundamental na representação e no estudo destas teorias. A Escola de Verão de 2015, dinamizada pela SPM de dois em dois anos, pretende divulgar estes e outros assuntos relacionados, de uma forma agradável, compreensível e acessível a todos.

A Escola de Verão (EV2015) [4], que se realiza de 2 a 5 de setembro, em Aveiro, tem por objetivo divulgar novos meios de descoberta da cultura e do conhecimento matemático, com especial ênfase na interação entre a matemática e as áreas e aplicações ligadas à luz, assim como dar formação específica em certas áreas da matemática. A EV2015 destina-se a professores do 1.º ciclo do ensino básico, a professores de matemática do 2.º e 3.º ciclos dos ensinos básico e secundário, a professores universitários, estudantes e a todos os que gostam de matemática e com ela trabalham. O evento está organizado em conferências plenárias, de âmbito geral, promovendo a divulgação do conhecimento matemático; em mini-cursos, centrados em temáticas específicas da matemática e sua aplicação a outras áreas como as neurociências, dermatologia, oftalmologia, entre outras; oficinas, por exemplo, sobre holografia; e num Curso de Formação para Professores (CFP) de 15h e 0,6 créditos, creditado pelo Conselho Científico-Pedagógico de Formação Contínua, que se intitula “A Matemática e o Ensino da Matemática (Escola de Verão 2015)”, composto por um minicurso de 6h, repartido entre sexta-feira e sábado, e seis conferências plenárias (6 x 1h30), que decorrem na quinta, na sexta e no sábado. Os interessados no CFP podem escolher o seu minicurso entre as seguintes temáticas: “Números racionais no 1.º ci-

clo”, “Tales, Pitágoras e Euclides”, “Primitivas e integrais no novo programa do secundário de matemática A” e “Programa e metas curriculares de matemática A”. As plenárias mais ligadas ao CFP são “Malabarismo, matemática e a utilidade das coisas inúteis” pelo A. Machiavelo, “Notas sobre a geometria básica que se aprende quando se ensina” pelo A. Martins, “Portugal tem talento matemático? Um olhar sobre 35 anos de Olimpíadas...” pela J. Teles, e “As potências de expoente racional no novo programa de matemática A” pelo F. Oliveira. Além disso, com a intenção de falar de matemática e as suas relações com a luz e a relatividade, no programa da EV2015 integram plenárias como “100 anos de espaço-tempo curvo”, por C. Herdeiro, “Anamorfose e cor na geometria e na arte”, por A. Araújo, “Geometria e ótica no trabalho de Francisco de Melo (ca. 1490-1536)”, por H. Leitão, e “A matemática e a física da luz”, pelo reconhecido investigador Carlos Fiolhais.

Entre todos os tipos de luz possíveis, os organizadores da EV2015 esperam que os participantes concluam o evento com aquele brilho especial nos olhos, que reflete, não só, ter-se discutido as temáticas de maior interesse e gravidade no atual contexto educativo, mas também demonstra que o evento foi proveitoso em termos científicos e interpessoais.

SITES

- [1] <http://www.un.org/en/sections/observances/international-years/index.html>
- [2] <http://www.light2015.org/>
- [3] <http://www.fao.org/soils-2015/>
- [4] <http://spm-ev2015.weebly.com/>



Exposições (ma)temáticas da SPM.

Disponíveis para exibição nas escolas,
bibliotecas ou instituições similares*.

Mais Informações em
www.spm.pt/exposicoes

*A requisição das exposições tem custos de manutenção.

M Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: gazeta@spm.pt.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2015

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para imprensa@spm.pt

VISITE O SITE DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

www.spm.pt

E O DA GAZETA DE MATEMÁTICA

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

NOVIDADE!

Matemática Planeta Terra

