

N. 0173

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXV | Jul. 2014 | 4,20€

∞ LONGITUDE ACT - 300 ANOS ∞

Longitude - os Instrumentos

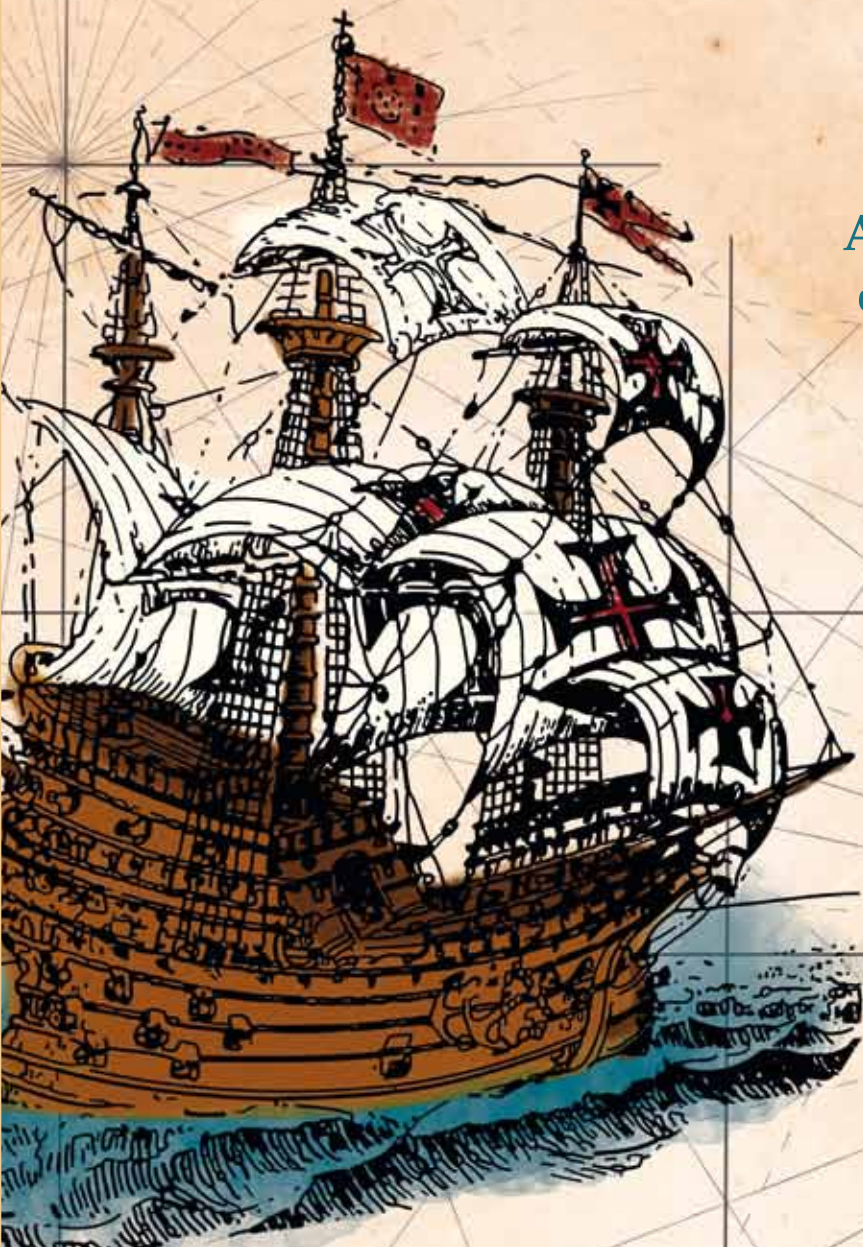
ANTÓNIO COSTA CANAS

Longitude: Uma Longa e Fascinante História

FERNANDO B. FIGUEIREDO

A Tautócrona, a Evoluta e o Relógio de Pêndulo de Huygens

HELENA MENA MATOSE
TERESA CARRAPA



2014

ENCONTRO
NACIONAL

SOCIEDADE
PORTUGUESA
DE MATEMÁTICA

14, 15 E 16 DE JULHO
Universidade Nova de Lisboa
Campus da Caparica

SESSÕES TEMÁTICAS

- ▷ **Álgebra e Combinatória**
- ▷ **Análise e Equações com Derivadas Parciais**
- ▷ **Ensino da Matemática**
- ▷ **Geometria e Topologia**
- ▷ **História da Matemática**
- ▷ **Lógica e Computação**
- ▷ **Matemática nas Ciências e Tecnologia**
- ▷ **Otimização/Investigação Operacional**
- ▷ **Probabilidades e Estatística**
- ▷ **Sessão para estudantes de doutoramento**
- ▷ **Sistemas Dinâmicos**



Inclui ação de formação acreditada para professores de Matemática (15 horas, 0,6 créditos)

<http://eventos.fct.unl.pt/profnova2014>

COMISSÃO CIENTÍFICA

Domingos Cardoso (UA)

Fernando Costa (UAb)

Filipe Oliveira (UNL)

João Queiró (UC)

Jorge Buescu (UL)

Peter Gothen (UP)

COMISSÃO ORGANIZADORA

António Malheiro (UNL)

Cecília Perdigão (UNL)

Fátima Rodrigues (UNL)

João Nuno Martins (UNL)

Magda Rebelo (UNL)

Maria do Céu Soares (UNL)

Paula Amaral (UNL)

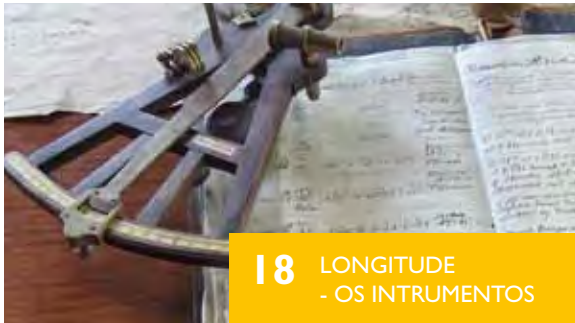
Paula Rodrigues (UNL)

MAIS INFORMAÇÕES

<http://enspm14.spm.pt>

enspm14@campus.fct.unl.pt





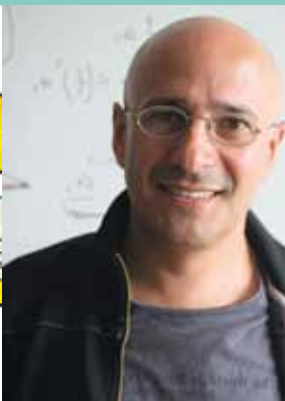
18 LONGITUDE
- OS INSTRUMENTOS



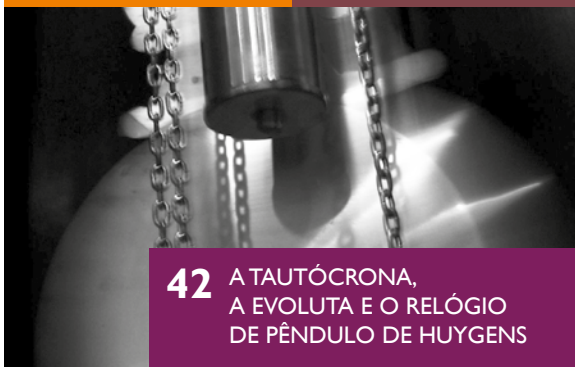
26 LONGITUDE - UMA
LONGA E FASCINANTE
HISTÓRIA



10 CANTO DÉLFICO
O Jogo de Biggs



50 CONVERSA COM...
Rogério Martins



42 A TAUTÓCRONA,
A EVOLUTA E O RELÓGIO
DE PÊNULO DE HUYGENS

- 02 EDITORIAL** | Adérito Araújo
- 03 ATRACTOR**
Rumos Magnéticos - Atrações Polares
- 08 RECREIO** | Jorge Nuno Silva
Magia (e Batota) Matemática
- 10 CANTO DÉLFICO** | Jorge Neves
O Jogo de Biggs
- 14 NA LINHA DE FRENTE** | Fabio Chalub
O Ano da Virada de Turing
artigo de capa
- 18 LONGITUDE - OS INSTRUMENTOS**
António Costa Canas
- 26 LONGITUDE - UMA LONGA
E FASCINANTE HISTÓRIA**
Fernando B. Figueiredo
- 37 APANHADOS NA REDE** | José Carlos Santos
A Forma dos Números
- 39 PERGUNTAS SIMPLES, RESPOSTAS
SURPREENDENTES** | Manuel Silva e Pedro J. Freitas
Grupos Finitos Simples
- 41 BARTOON** | Luis Afonso
- 42 A TAUTÓCRONA, A EVOLUTA
E O RELÓGIO DE PÊNULO DE HUYGENS**
Teresa Mena Matos e Teresa Carrapa
- 49 MATEMÁTICA E LITERATURA** | Nuno Carmaneiro
Umberto Eco e a Longitude
- 50 CONVERSA COM ...** | Gonçalo Morais
... Rogério Martins
- 56 NOTÍCIAS**
- 63 CARTAS DA DIREÇÃO** | Miguel Abreu
Breve balanço de seis anos na direção da SPM



ADÉRITO ARAÚJO
Universidade
de Coimbra
alma@mat.uc.pt

O INSPIRADOR PROBLEMA DAS LONGITUDES

“O problema das longitudes terá sido o problema tecnológico mais importante de todos os tempos, não somente pelo seu impacto económico como, também, pelo tempo que resistiu à solução.”¹

Dedicamos este número da Gazeta ao problema das longitudes, numa altura em que se comemora o tricentésimo aniversário do *Longitude Act*, votado pelo parlamento Britânico a 8 julho de 1714, que instituiu um avultado prémio monetário para quem fosse capaz de criar um método para a determinação da longitude no mar com um erro máximo de meio grau. O prémio britânico não foi o único, nem sequer o primeiro, a ser instituído para este problema. No entanto, foi o único a ser atribuído e daí o seu valor simbólico.

A importância do problema das longitudes foi de tal ordem que o esforço conducente à sua resolução marcou, de forma indelével, toda a ciência moderna. Muitos foram os cientistas e os técnicos que se deixaram envolver pela riqueza e pela complexidade do problema, como se pode comprovar ao longo das páginas desta edição da Gazeta, graças ao generoso contributo de especialistas de diferentes áreas do saber e da cultura. E se múltiplas são as abordagens, comum é a conclusão que poderemos retirar da sua leitura: este foi dos desafios mais abrangentes da história da humanidade e Portugal esteve sempre na vanguarda da sua discussão.

Mais do que valorizar a questão do prémio, o que pretendemos assinalar na comemoração desta efeméride é a importância do envolvimento de toda a comunidade científica e da população em geral na discussão e na resolução dos grandes problemas que se colocam à humanidade. E se entre os séculos XV e XVIII a determinação exata da longitude era o problema óbvio, hoje a complexidade é maior e os desafios mais variados. Talvez por isso, numa versão contemporânea do Prémio

Longitude, o governo britânico, patrocinado parcialmente pela Nesta, fundação não-governamental para a inovação no Reino Unido, tenha decidido colocar à votação do público o desafio a premiar. A decisão foi conhecida a 25 de junho e ficámos a saber que o prémio de 10 milhões de libras vai ser atribuído a quem desenvolver um dispositivo que ajude a diagnosticar infeções, prevenindo o aumento da resistência aos antibióticos.

De forma mais discreta, a comunidade matemática já tinha dado mostras de que pretendia unir esforços na tentativa de enfrentar os grandes desafios à escala global. No ano passado, sob a égide da UNESCO, foi lançada a iniciativa Ano Internacional da Matemática do Planeta Terra com vista a incentivar a investigação fundamental e a sensibilizar o público em geral para as questões relacionadas com nosso planeta. Mas como as sinuosidades dos grandes desafios não se compadecem com a rigidez do calendário, a comunidade internacional decidiu manter ativo o projeto, chamando-lhe agora apenas Matemática do Planeta Terra.

A matemática lusófona, que se revelou tão ativa em 2013, propôs este ano a criação do Espaço Matemático em Língua Portuguesa no ICMI (International Commission on Mathematical Instruction). Tem agora a oportunidade de poder dar uma expressão mais sólida à colaboração entre as diferentes instituições e, quem sabe, até poder ganhar o novo Prémio Longitude 2014.

¹ A.S. Alves, “As Longitudes e o Nascimento da Ciência Moderna”, *Helios*, julho de 2000 (ver: http://www.mat.uc.pt/~helios/Mestre/Julho00/H41_long.htm).

RUMOS MAGNÉTICOS – ATRAÇÕES POLARES

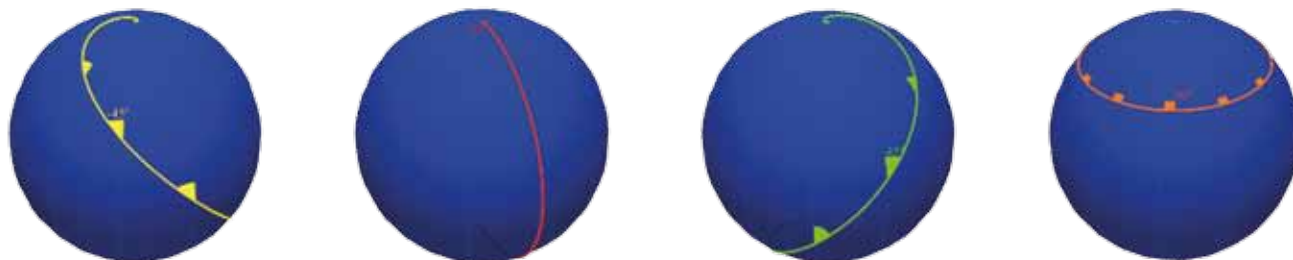
Imagine o leitor que está em alto mar, numa viagem marítima de Portugal ao Brasil, sendo responsável pelo rumo da embarcação. Que rota deverá tomar e como zelar para a seguir?

A resposta a esta questão depende dos meios e instrumentos de navegação disponíveis, e pode mesmo argumentar-se que a melhor rota a tomar é a que com maior facilidade e precisão puder ser seguida. Desde o século XV, pelo menos, que se sabe que, recorrendo a uma bússola, é possível seguir um rumo fazendo um ângulo constante com os meridianos de longitude.¹ Este método de navegação segundo um rumo de ângulo constante com a agulha da bússola está ainda na base da navegação atual [7]. Em [1] o leitor poderá experimentar alguns rumos de ângulo constante entre dois pontos à escolha na superfície esférica e tentar encontrar um ângulo que permita ir de um ponto ao outro por um rumo deste tipo.

Como é que são as rotas de ângulo constante se supusermos que a Terra é esférica? Uma rota de ângulo constante α

(ângulo orientado, sendo 90° o sentido Este e -90° o sentido Oeste) com os meridianos de longitude (que são semicírculos máximos com extremidades nos polos) é uma curva esférica que pode ser prolongada a uma curva satisfazendo ainda a propriedade de fazer um ângulo constante com os meridianos e tal que: (i) o prolongamento é um paralelo de latitude (isto é, um círculo esférico com centro no(s) polo(s)), no caso de α ser reto; (ii) caso contrário, o prolongamento tem como extremidades os polos, embora não possamos considerar que os polos pertencem à curva uma vez que, nestes pontos, não está definido o ângulo com os meridianos.

¹Esta afirmação é, todavia, imprecisa, já que uma bússola aponta para o polo magnético e não para o polo geográfico; este problema será retomado no final do artigo.



▲ Figura 1: Loxodrómicas de ângulos -45° , 0° , 45° e 90° , respetivamente.

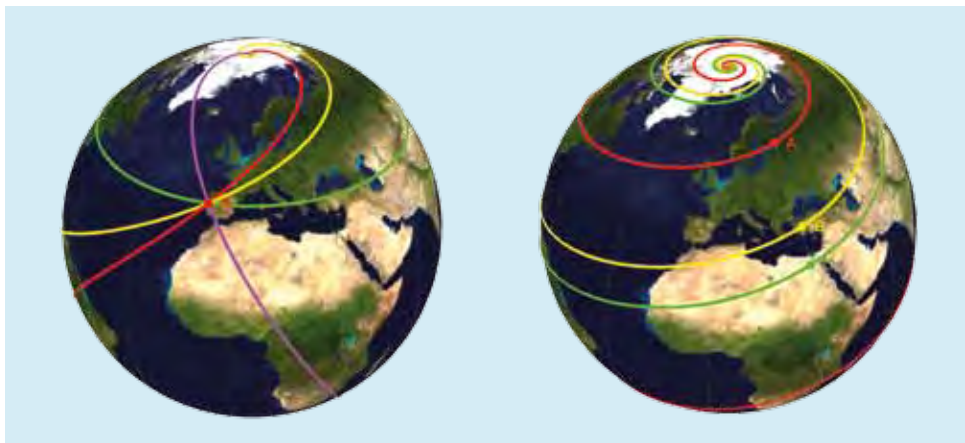


Figura 2: À esquerda: Loxodrómicas passando em A de ângulos 45° , 60° , 90° e -30° . À direita: e de ângulo 75° , passando em A, B e C.

Uma curva com estas características diz-se *curva de rumo* ou *loxodrómica*, de que a figura 1 mostra alguns exemplos. Estas curvas foram estudadas pela primeira vez no *Tratado sobre Certas Dúvidas da Navegação*, de 1537, da autoria do matemático português Pedro Nunes (1502-1578). Em [2], o leitor poderá construir loxodrómicas para várias escolhas do ângulo e passando por um ponto previamente fixado; em [3], poderá gerar loxodrómicas com um ângulo fixado mas passando por pontos distintos (figura 2).

Voltando à interrogação inicial, podemos agora afirmar que nos basta determinar o ângulo que a rota deverá fazer com os meridianos entre os pontos de partida e de chegada e, com o auxílio de uma bússola, manobrar o leme de forma a manter esse ângulo constante durante o percurso. Colocam-se, porém, outras perguntas:

Q1. Como determinar um ângulo nas condições requeridas?

Q2. Haverá um único ângulo possível?

Q3. Uma loxodrómica é a curva de menor comprimento na esfera entre dois dos seus pontos?

Começemos pela primeira questão e por observar que, se um dos pontos for um polo, então existe um meridiano (que é uma loxodrómica de ângulo zero) que contém os dois pontos. Caso contrário, se nenhum dos dois pontos for um polo, para determinar uma loxodrómica passando por ambos basta conceber uma projeção conforme (isto é, uma função que preserva ângulos) da esfera (exceto os polos) no plano que envie loxodrómicas em retas. De facto, com um tal mapa, para encontrar uma loxodrómica passando pelos

dois pontos, marcamos os dois pontos no mapa, traçamos o segmento de reta que os une e tomamos o ângulo que este segmento faz com os meridianos. Um tal mapa existe desde 1569, tendo sido construído pelo cartógrafo flamengo Gerard Mercator (1512-1594).²

No *mapa de Mercator*, os meridianos são projetados em retas paralelas verticais de espaçamento uniforme, enquanto os paralelos são enviados em retas horizontais, perpendiculares às primeiras e de espaçamento crescente do equador para os polos. Desse modo, compensa-se a distorção da projeção cilíndrica de Arquimedes, que preserva áreas mas não ângulos. Em [10] pode ler-se a primeira construção matemática rigorosa da *projeção de Mercator* e também um método heurístico para visualizar esta aplicação: imagine uma esfera como um balão, e este inscrito num cilindro que lhe é tangente no equador; ao encher-se de ar, o balão expande e os pontos da sua superfície vão aderindo às paredes do cilindro; este cilindro é depois cortado ao longo de um meridiano, e assim se obtém o mapa (figura 3). Em [4], o leitor poderá escolher um ponto da esfera, seguir a construção descrita acima e inferir que a imagem da projeção de Mercator é uma banda de largura finita mas com altura ilimitada inferior e superiormente. Por isso, na prática, num mapa de Mercator estão apenas projetados os pontos da esfera com latitudes entre $-L^\circ$ e L° , onde $L < 90^\circ$.

Quanto à terceira pergunta, recordemos que numa esfera a curva que minimiza a distância entre dois pontos distintos é um arco de círculo máximo. A resposta a Q3 é, pois, positiva se a loxodrómica for um meridiano (loxodrómica

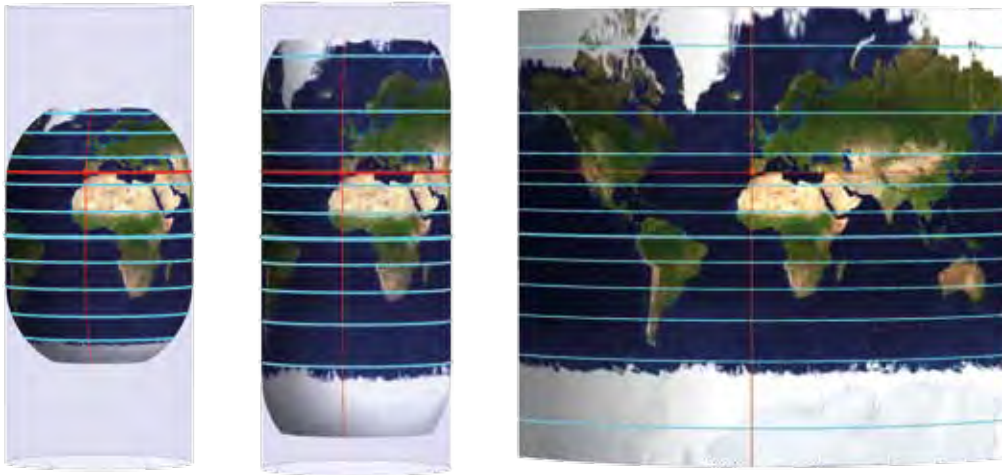


Figura 3: Construção do mapa de Mercator.

de ângulo 0°) ou o círculo do equador. Nos restantes casos a loxodrômica não contém nenhum arco de círculo máximo e, portanto, não minimiza a distância entre os seus pontos (figura 4).

A resposta à segunda pergunta é negativa se existirem duas loxodrômicas intersecando-se em dois pontos distintos. Pode mostrar-se [1] que, salvo os casos em que a loxodrômica é um meridiano ($\alpha = 0^\circ$) ou um paralelo ($\alpha = \pm 90^\circ$), a curva é uma espiral em torno dos polos (embora tenha comprimento finito) e, portanto, interseca cada meridiano uma infinidade de vezes (figura 5). Assim, fixado um meridiano e dois dos seus pontos comuns à loxodrômica em espiral, obtemos um exemplo em que há dois ângulos distintos que servem para determinar a rota.

Podemos acrescentar que, dados dois pontos a latitudes distintas (e que não sejam os polos), há uma infinidade de loxodrômicas que passam nesses pontos. Para melhor entender esta afirmação, note-se primeiro que os pontos nas extremidades Oeste e Este do mapa de Mercator e à mesma latitude correspondem ao mesmo ponto do cilindro, e portanto ao mesmo ponto da esfera. Assim, uma loxodrômica de ângulo $\alpha \neq 0^\circ, \pm 90^\circ$ é projetada numa curva em forma de hélice no cilindro; quando este se corta para construir o mapa de Mercator, a curva é enviada num sistema de segmentos de reta paralelos e equidistantes, entre uma extremidade do mapa e a outra. Reciprocamente, se agora



Figura 4: A vermelho é apresentada uma loxodrômica, cujo traço tem a forma de espiral. A azul assinala-se o caminho mais curto na esfera entre dois pontos da loxodrômica.

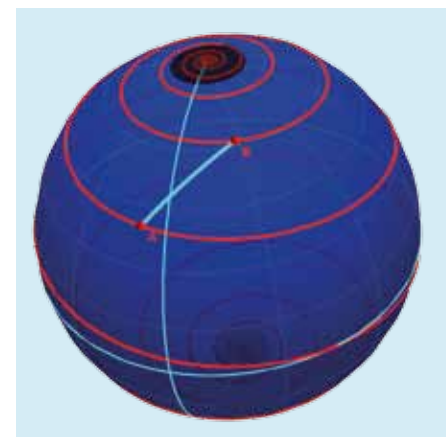


Figura 5: Loxodrômica com $\alpha = -84^\circ$ a vermelho e meridiano a azul.

² Sugere-se a consulta de [9, 8] e das referências indicadas nestes artigos para saber mais sobre a possível influência do trabalho de Pedro Nunes na conceção deste mapa.

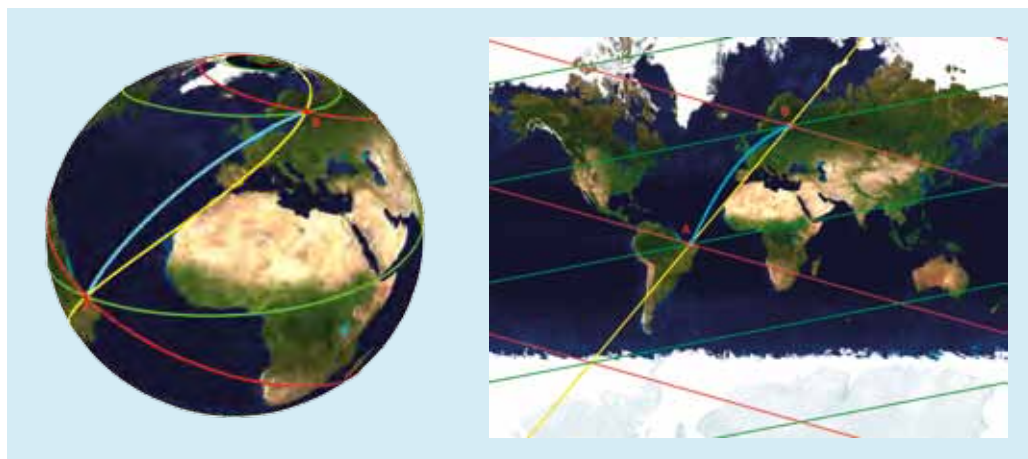


Figura 6: À esquerda: três loxodrómicas entre A e B (vermelho, verde e amarelo) e o caminho mais curto entre os dois pontos (azul). À direita: projeção de Mercator dessas curvas.

considerarmos dois pontos no mapa de Mercator a latitudes distintas, cada sistema de segmentos paralelos (não horizontais nem verticais) nas condições descritas acima e contendo os pontos dados, corresponde na esfera a uma loxodrômica entre os pontos. Como há uma infinidade de sistemas de segmentos de reta nestas condições, há uma infinidade de loxodrómicas que contêm os pontos dados (figura 6). Em [5], pode escolher dois pontos na esfera, variar o número de loxodrómicas que passam por eles e avaliar a diferença aproximada entre o comprimento dos arcos de loxodrômica que unem os pontos e o correspondente comprimento do arco de círculo máximo que realiza a distância entre eles na esfera. A figura 6 ilustra um tal exemplo.

Para terminar, voltemos à questão da natureza da bússola. Existem atualmente bússolas que indicam os polos geográficos, mas a bússola mais comum é a bússola magnética, que aponta os polos magnéticos. Era certamente este o tipo de bússola usado na navegação do século XV e dos séculos seguintes. Ora, os dois tipos de polos são distintos. Assim, se o instrumento de navegação a usar for uma bússola (magnética) e quisermos seguir um rumo entre dois pontos fixados fazendo um ângulo constante com a agulha da bússola, as linhas de referência a tomar não são os meridianos de longitude mas os *meridianos magnéticos*, ou seja, os semi-círculos máximos com extremidades nos polos magnéticos, que supomos serem antípodas (figura 7). Denominaremos a curva análoga à loxodrômica mas com a propriedade de fazer um ângulo constante com os meridianos magnéticos

por *loxodrômica magnética*. Sendo esta a curva que interessa à navegação por bússola, o ângulo que devemos conhecer é aquele entre uma loxodrômica magnética que passe pelos pontos a considerar e os meridianos magnéticos. Este ângulo pode ser obtido por uma *projeção de Mercator magnética* na qual a esfera é tangente ao cilindro envolvente no *equador magnético*, que é a interseção da esfera com o plano que passa no seu centro e é perpendicular ao eixo definido pelos polos magnéticos. Em [6] é possível variar a localização dos polos magnéticos e comparar loxodrómicas com loxodrómicas magnéticas.

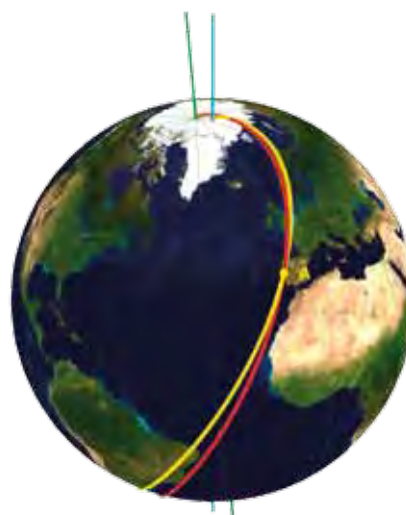


Figura 7: Curvas loxodrômica (amarelo) e loxodrômica magnética (vermelho); eixo e meridianos magnéticos (verde) e eixo geográfico (azul).

REFERÊNCIAS

- [1] <http://www.atractor.pt/mat/loxodromica/>
- [2] http://www.atractor.pt/mat/loxodromica/1ponto_curvas
- [3] http://www.atractor.pt/mat/loxodromica/1angulo_curvas
- [4] http://www.atractor.pt/mat/loxodromica/mercator_definicao
- [5] http://www.atractor.pt/mat/loxodromica/mercator_loxodromica
- [6] http://www.atractor.pt/mat/loxodromica/loxodromica_magnetica
- [7] B. Kreutz, "Mediterranean Contributions to the Medieval Mariner's Compass", *Technology and Culture*, 14, N. 3, (1973), 367--383.
- [8] J.F. Queiró, "Proposta Cartográfica de Pedro Nunes em 1566", *Suplemento do Boletim da SPM* 65 (2011), 23--25.
- [9] W.G.L. Randles, "Pedro Nunes e a Descoberta da Curva Loxodrómica", *Gazeta de Matemática* 143 (2002), 90--97.
- [10] E. Wright, *Certain Errors in Navigation*, Valentine Sims, London, 1599.



LOJA
spm

Consulte o catálogo e faça a sua
encomenda online em www.spm.pt



JORGE NUNO SILVA
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

MAGIA (E BATOTA) MATEMÁTICA

O Princípio de Gilbreath, popularizado por Martin Gardner na comunidade matemática, consiste em retirar efeitos surpreendentes, e pouco intuitivos, de uma preparação simples do baralho de cartas. Em 2001 Simon Aronson aplicou o mesmo resultado à criação de um jogo de azar, em que a “sorte” está do lado de quem sabe a matemática envolvida!

O mágico baralha as 52 cartas à frente da audiência. Depois, retira e exhibe as cartas duas a duas. Cada par é composto por uma carta de cada cor. Como é possível!? Todos viram o mágico baralhar as cartas!...

O que se passa é que a preparação de Gilbreath consiste em começar com um baralho com as cartas alternando as cores. Ao baralhar (uma só vez!) as duas partes a misturar devem ter as cartas inferiores de cores diferentes. Isto basta para que cada par de cartas, a partir do topo, tenha uma carta de cada cor.

O baralhar estraga a alternância das cores, na maioria dos casos, mas não retira toda a estrutura do arranjo inicial.

O resultado descoberto por Norman Gilbreath nos anos 80 permite efetuar muitos truques de cartas matemáticos de belo efeito. Funcionam sempre, porque se baseiam num teorema, como todos os bons truques.

Além de várias generalizações interessantes, a prova do Princípio de Gilbreath é um belo exercício de aplicação do Método de Indução Matemática.



Figura 1: A preparação associada ao Princípio de Gilbreath.

Consideremos agora o seguinte jogo entre três jogadores, Esquerdo, Centro e Direito. Os jogadores apostam uma quantia, digamos um euro cada. Cada jogada consiste em retirar três cartas do cimo do baralho, dando a primeira ao Esquerdo, a segunda ao Centro e a terceira ao Direito. As cartas são reveladas e, se tiverem a mesma cor, há empate e passa-se à ronda seguinte. Caso contrário, haverá duas cartas de uma cor e uma de outra. Quem tiver a carta de cor diferente das outras ganha os três euros. As jogadas sucedem-se até esgotar o baralho. Quem tem maior probabilidade de sair a ganhar?

Aparentemente, os três jogadores estão em igualdade de circunstâncias. Mas se se garantir que o baralho foi sujeito à preparação de Gilbreath, já não é assim...



Figura 2: O jogador Centro ganhará mais vezes do que qualquer outro, se o jogo se prolongar...



Exposições (ma)temáticas da SPM.

Disponíveis para exibição nas escolas,
bibliotecas ou instituições similares*.

Mais Informações em
www.spm.pt/exposicoes

*A requisição das exposições tem custos de manutenção.



JORGE NEVES
Universidade de
Coimbra
neves@mat.uc.pt

O JOGO DE BIGGS

Este Canto Délfico tem mote um divertido jogo solitário. O título é reminiscente da metáfora usada por Norman Biggs em [2] para descrever um jogo de fichas sobre um grafo com contornos semelhantes ao nosso. A análise que vamos fazer tem raízes profundas na teoria dos sistemas lineares sobre curvas algébricas e segue de perto o artigo de Baker e Norine, [1]; todavia, a nossa abordagem será totalmente elementar.

O tabuleiro do jogo de Biggs tem a estrutura de um grafo conexo arbitrário, como aquele que mostramos a seguir. Nos vértices do grafo há fichas brancas e pretas que o jogador manipula partindo de uma configuração inicial. Pensemos em cada vértice como tendo um certo número inteiro de euros. Cada ficha corresponde em valor absoluto a um euro: um euro *positivo* se a ficha for branca e *negativo* se a ficha for preta. Uma jogada consiste em escolher um vértice e transferir um euro para cada um dos seus vizinhos ou, inversamente, transferir para o vértice escolhido um euro de cada um dos seus vizinhos. Se no decorrer do jogo uma ficha branca encontrar uma preta no mesmo vértice, o jogador pode retirá-las do tabuleiro.

Por exemplo, na figura 1, o vértice v_4 pode transferir um euro para cada um dos seus três vizinhos. Após essa jogada, os vértices v_2 e v_3 ficam com um euro, o vértice v_5 com dois euros e v_4 fica a zero. Alternativamente, podemos obrigar o vértice v_5 a transferir um euro para os seus vizinhos. Os vértices v_2 e v_3 ficariam com um euro, v_4 com quatro euros, v_6 com zero euros e v_5 com menos três euros. Seria então necessário fornecer ao tabuleiro duas novas fichas brancas e duas novas fichas pretas; de que supomos haver um *stock* infinito. Se tivéssemos escolhido v_6 e fizéssemos o seu único vizinho dar-lhe

um euro, v_5 e v_6 ficariam ambos a zero e o jogador recolheria do tabuleiro a ficha branca e a ficha preta no vértice v_6 .

Diremos que um vértice está em *dívida* se ele tiver em caixa uma quantia negativa de euros. O objetivo do jogo é chegar a uma configuração em que **nenhum** vértice esteja em dívida, partindo da configuração inicial dada. É possível jogar com

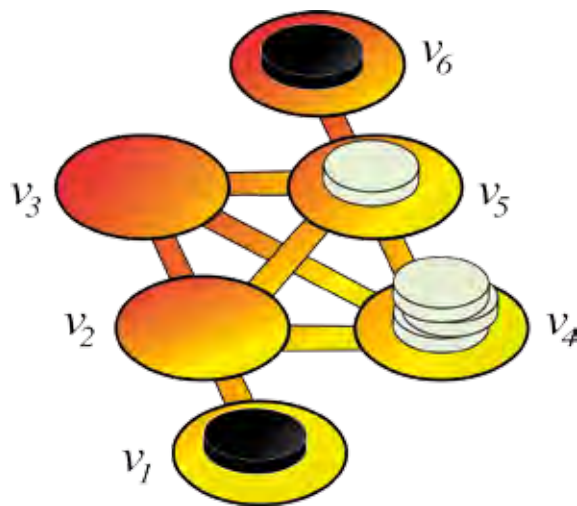


Figura 1: O tabuleiro do jogo

lápiz e papel, mas, se tiver consigo um jogo de damas, desenhe o grafo em tamanho grande numa folha de papel e use as damas como fichas, vale a pena.

NOTAÇÃO

Para falar da matemática do jogo de Biggs é preciso uma boa notação. Uma configuração pode ser representada por uma soma formal de múltiplos inteiros dos vértices do grafo. O coeficiente de um vértice está para o número de euros que ele tem. Por exemplo, a configuração na figura 1 é dada por $u = -v_1 + 3v_4 + v_5 - v_6$. Vejamos como esta notação pode facilitar o registo das jogadas feitas. Suponhamos que na configuração u obrigamos v_4 a dar um euro a cada um dos seus vizinhos. A configuração resultante é então $u - 3v_4 + v_2 + v_3 + v_5 = -v_1 + v_2 + v_3 + 2v_5 - v_6$.

O jogo de Biggs com configuração inicial u tem solução $v_3 + v_5$. Bastam três jogadas: v_6 pede um euro a v_5 ; v_1 pede um euro a v_2 e a v_4 dá um euro a cada um dos seus vizinhos. Na nossa notação:

$$u + (v_6 - v_5) + (v_1 - v_2) + (-3v_4 + v_2 + v_3 + v_5).$$

É claro que $v_3 + v_6$ também é solução.

Experimente o jogo de Biggs com a configuração inicial $v = -2v_2 + v_3 + 3v_4 + v_5 - v_6$, ilustrada na figura 2.

JOGADAS MÚLTIPLAS

Seja S um subconjunto do conjunto dos vértices do grafo. O que é que acontece se cada um dos elementos de S der um euro aos seus vizinhos? No final, cada dois vértices desse conjunto ligados por uma aresta terão trocado entre si um euro e, logo, o saldo entre esses dois vértices será nulo. Para todos os efeitos, ao fim de todas as trocas, é como se cada vértice de S desse um euro apenas aos seus vizinhos que estiverem fora de S .

Por exemplo, se $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ no jogo de Biggs ilustrado na figura 2, no final v_1 não transfere moeda pois não tem vizinhos fora de S e cada um dos vértices v_2, v_3 e v_4 transfere um euro para v_5 , que é o seu único vizinho fora de S , a configuração final é $-3v_2 + 2v_4 + 4v_5 - v_6$.

Analogamente, se cada um dos vértices de S pedisse um euro a cada um dos seus vizinhos, no final é como se apenas aqueles vizinhos que estão fora de S tivessem contribuído. É fácil ver que a configuração final não depende da ordem pela qual os vértices de S transferem moeda.

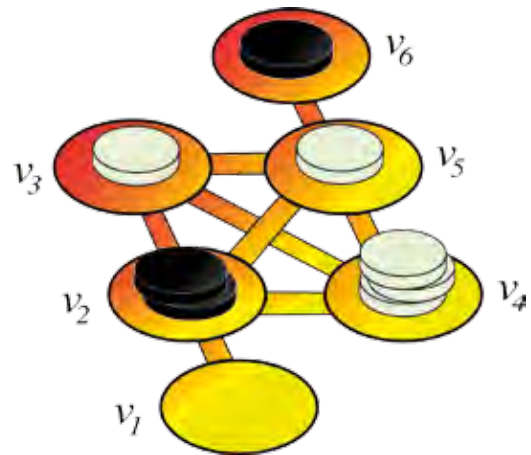


Figura 2: $v = -2v_2 + v_3 + 3v_4 + v_5 - v_6$.

Este tipo de jogada, que corresponde a uma sequência de jogadas elementares, pode ser usada para encurtar o tempo de jogo. E não é o único tipo de jogada múltipla; podemos obrigar um vértice a dar $k > 1$ euros a cada um dos seus vizinhos, etc.

CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Diremos que duas configurações w_1 e w_2 são equivalentes se for possível passar de w_1 para w_2 através de um número finito de jogadas. O conjunto das configurações equivalentes a uma dada configuração w designa-se por classe de equivalência de w . Não é difícil mostrar que cada classe de equivalência é um conjunto infinito. A classe de equivalência de uma configuração no jogo de Biggs nada mais é do que o conjunto de todas as configurações que é possível obter a partir da configuração inicial. Uma forma mais conceptual de dizer que é possível resolver o quebra-cabeças de Biggs com uma dada configuração inicial é dizer que na correspondente classe de equivalência existe uma configuração sem vértices em dívida.

Ora, há configurações em cuja classe de equivalência jamais encontrará uma configuração sem vértices em dívida. Nalguns casos existe uma forma simples de o demonstrar; basta que o grau da configuração, que, por definição, é a soma dos coeficientes dos vértices, seja um inteiro negativo. É assim pois todas as configurações numa classe de equivalência têm igual grau. Isto é transparente usando a notação para uma jogada elementar que demos anteriormente.

CONFIGURAÇÕES REDUZIDAS

O grau de v , a configuração inicial do jogo de Biggs que lhe propus, não é negativo, mas como já deve ter percebido esse jogo é impossível... Não há, na infinita classe de equivalência de v , uma única configuração sem vértices em dívida. Como prová-lo? Isso é o que veremos de seguida.

Fixemos um vértice, v_i . Diremos que uma configuração é reduzida em v_i se:

- (A) todo o vértice distinto de v_i não se encontrar em dívida e se
- (B) sempre que um subconjunto dos vértices \mathcal{S} , a que não pertença v_i , der um euro a cada um dos seus vizinhos então um dos vértices de \mathcal{S} entra em dívida.

Por exemplo, $w = 2v_5 - 3v_6$ não é reduzida em v_6 pois (B) não se verifica: os vértices do conjunto $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ podem dar sem que nenhum deles no final fique em dívida. Se a correspondente jogada for feita, obtém-se $v_5 - 2v_6$ que é reduzida em v_6 . Notemos entretanto que $v_5 - 2v_6$ já não é reduzida em v_5 , pois (A) não se verifica.

Dada uma configuração, é possível obter uma configuração equivalente, reduzida em v_i , em dois tempos. Num primeiro passo, às custas de v_i , livramos todos os restantes vértices de dívida; com isto consegue-se que (A) seja satisfeita. No segundo passo corre-se iterativamente uma ordenação $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots$ dos subconjuntos dos vértices do grafo que não contém v_i . Sempre que seja possível que os vértices de \mathcal{S}_i deem um euro aos seus vizinhos sem que no final um deles entre em dívida, essa jogada é concretizada e regressa-se ao início da lista. Quando percorrermos a lista do início ao fim sem poder fazer uma única jogada, é porque a condição (B) é satisfeita, ou seja, é porque a configuração encontrada é reduzida em v_i .

Voltemos à configuração v , que era a configuração inicial do jogo de Biggs proposto, e calculemos a sua configuração reduzida em v_1 . Seguindo o protocolo v_1 , deverá emprestar indiscriminadamente até que exista suficiente moeda a circular entre v_2, \dots, v_6 que salde todas as dívidas. Podemos começar por obrigar v_1 a dar dois euros ao seu único vizinho, v_2 , e de seguida, fazer com que v_6 receba um euro do seu único vizinho, v_5 . O resultado é $-2v_1 + v_3 + 3v_4$, que ainda não é reduzida em v_1 . No segundo tempo do processo de redução temos de fixar uma ordem para os subconjuntos de

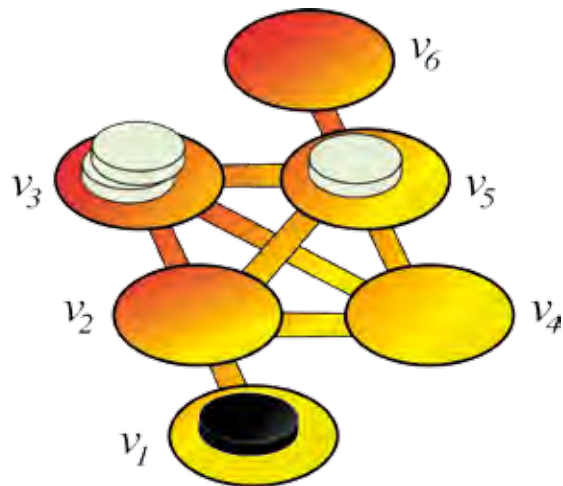


Figura 3: Configuração reduzida em v_1 .

$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Escolhemos uma que comece assim:

$$\{v_4\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_6\}, \dots$$

Veremos que não importa o que vem a seguir. Começamos com o vértice v_4 , que dá um euro aos seus vizinhos. Regressando ao início, v_4 está a zero e já não pode dar. O próximo é o conjunto $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ que está em condições de dar. Fazemos a correspondente jogada e regressamos ao início da lista. Desta vez nem $\{v_4\}$ nem $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ podem dar mas $\{v_6\}$ pode e fá-lo. A figura 3 ilustra o resultado.

Mostremos que no próximo *ritornello* do método nenhum subconjunto não-vazio de vértices de $\{v_2, \dots, v_6\}$ está em condições de dar. Suponhamos, com vista a um absurdo, que \mathcal{S} é um tal subconjunto arbitrário de $\{v_2, \dots, v_6\}$. Como v_2 está ligado a v_1 e não tem um euro em caixa para lhe dar, ele não pode pertencer a \mathcal{S} . Sendo assim, v_4 também não pode pertencer a \mathcal{S} . De seguida são, sucessivamente, v_5, v_3 e v_6 que não podem pertencer a \mathcal{S} , ou seja conclui-se que \mathcal{S} é vazio: absurdo!

Em conclusão, $-v_1 + 2v_3 + v_5$, que é equivalente a v , é reduzida em v_1 .

UNICIDADE

Veremos que a noção de configuração reduzida joga um papel fundamental na análise de resolubilidade de um jogo de Biggs. Nessa análise, é crucial saber que em cada classe de equivalência há apenas uma configuração reduzida em v_i . Não é difícil demonstrar que assim é.

Começemos por tirar o máximo proveito da nossa notação. Suponhamos que um vértice qualquer v_k dá aos seus vizinhos $\alpha_k > 0$ euros. Denotemos os seus vizinhos por $v_{l_1^k}, \dots, v_{l_r^k}$. A configuração que resulta dessa jogada obtém-se adicionando

$$\alpha_k(-r_k v_k + v_{l_1^k} + \dots + v_{l_r^k})$$

à configuração de partida. (Na jogada inversa, em vez de somar, subtraímos.) Sejam então w_1 e w_2 duas configurações. Suponhamos que ambas são reduzidas em v_i e que w_2 se obtém a partir de w_1 através de um número finito de jogadas (por outras palavras, w_1 e w_2 são equivalentes). Então, w_2 obtém-se de w_1 somando um certo número de expressões como a anterior. Podemos dizer que existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$w_2 = w_1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k (r_k v_k - v_{l_1^k} - \dots - v_{l_r^k}),$$

onde n é o número total dos vértices do grafo. Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$, então isso quer dizer que w_2 se obtém de w_1 obrigando todos os vértices a dar a mesma quantia a cada um dos seus vizinhos (caso o valor de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ seja positivo) ou a receber a mesma quantia de cada um dos seus vizinhos (caso o valor seja negativo). Mas isso em nada altera a configuração w_1 , por outras palavras, $w_2 = w_1$, que é o que queremos mostrar. Podemos então supor, com vista a um absurdo, que há pelo menos dois inteiros distintos entre $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Seja \mathcal{S} o conjunto dos vértices para os quais o correspondente coeficiente α_k é o máximo do conjunto $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Trocando w_1 com w_2 , podemos supor que o vértice v_i não pertence a \mathcal{S} . Ora para cada $v_k \in \mathcal{S}$, denotando por $\beta_k, \gamma_k \geq 0$ os seus coeficientes em w_1 e w_2 , respetivamente, tem-se

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \beta_k + \alpha_k r_k - \alpha_{l_1^k} - \dots - \alpha_{l_r^k} \iff \\ \gamma_k &= \beta_k + (\alpha_k - \alpha_{l_1^k}) + \dots + (\alpha_k - \alpha_{l_r^k}). \end{aligned}$$

Como $(\alpha_k - \alpha_{l_1^k}) + \dots + (\alpha_k - \alpha_{l_r^k})$ é maior ou igual ao número de vizinhos que v_k tem fora de \mathcal{S} , e isto se verifica para qualquer $v_k \in \mathcal{S}$, deduz-se que se em w_2 todos os vértices do conjunto \mathcal{S} derem, nenhum deles contrai dívida, o que é um absurdo. Note que a hipótese de que ambas w_1 e w_2 são reduzidas em v_i é necessária devido à (eventual) troca que referimos anteriormente.

RESOLUBILIDADE

Para o jogo de Biggs as consequências da unicidade não poderiam ser melhores. Suponhamos que o jogo tem solução. Seja

v_i um vértice arbitrário do grafo e calculemos a reduzida em v_i da solução. Como a condição (A) é automaticamente satisfeita, saltamos o primeiro passo da redução. Por outro lado, o segundo passo da redução não induz dívidas a nenhum vértice. Isto quer dizer que a reduzida da solução tem de ser ela mesma uma solução do quebra-cabeças. Como, graças à unicidade, a reduzida da solução coincide com a reduzida da configuração inicial, deduz-se que um jogo de Biggs é resolúvel se e só se a reduzida da configuração inicial em qualquer vértice v_i for uma solução. No jogo que lhe propus, a reduzida de v em v_1 é $-v_1 + 2v_3 + v_5$, que não é uma solução.

JOGUE PELO SEGURO

Parece que não há prazer garantido para quem quiser criar os seus próprios jogos partindo de configurações arbitrárias. Se, num jogo que não parece melhorar de jogada para jogada, quiser provar que ele é impossível então poderá ter de enumerar uma lista de todos os subconjuntos de um conjunto de vértices do grafo, o que não é lá muito prático. No entanto, saiba que se o grau da configuração inicial for suficientemente grande, o jogo de Biggs é sempre possível! Isto é o que Baker e Norine demonstram em [1]. Basta que ele seja maior ou igual ao primeiro número de Betti do grafo. Isto é, basta que o grau da configuração inicial seja maior ou igual ao número de arestas menos o número de vértices mais um, $g = |E_G| - |V_G| + 1$. Volte atrás e calcule este invariante para o nosso grafo. O grau de u e v está mesmo àquem...

BIBLIOGRAFIA

- [1] Mathew Baker e Serguei Norine, "Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph", *Advances in Mathematics*, **215** (2007), 766--788.
- [2] Biggs, N. L. "Chip-firing and the critical group of a graph", *J. Algebraic Combin.* **9** (1999), n.º. 1, 25--45.

¹Biggs chamou a v_i o governo – já que este (o nosso não) tem o poder de emitir mais moeda quando a economia entra em crise.



FABIO CHALUB
Universidade Nova
de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

O ANO DA VIRADA DE TURING

Foi herói de guerra ao descodificar, para os ingleses, os códigos secretos nazis. No entanto, na década de 50, após ser condenado pelo crime de homossexualismo, foi forçado a cumprir um estrito tratamento hormonal. Acabou por se suicidar pouco tempo depois. Em 2014, a rainha Isabel II concedeu-lhe o perdão. No entanto, é possível que o matemático britânico Alan Turing ficasse mais feliz por neste mesmo ano uma das suas previsões matemáticas ter ganho comprovação experimental: a teoria da morfogénese.

Em 1952, o matemático britânico Alan Turing publicou aquele que é certamente um dos mais importantes artigos científicos do século XX: "As bases químicas da morfogénese". Neste trabalho, propunha um mecanismo para estudar como células inicialmente idênticas conseguem diferenciar-se. Este é um problema central, pois é a sucessiva divisão e especialização de uma única célula estaminal que permite formar todos os diversos tecidos do corpo humano (e dos outros seres vivos, claro), colocando cada pequena cé-

lula na sua posição correta. Veja a figura 1 para um exemplo de formação de padrões na pele de certos animais.

Turing utilizou um conceito já bem estabelecido na sua própria época: o de *morfogene*. Um morfogene é uma molécula que em certas concentrações é capaz de desencadear respostas celulares específicas.

O ponto crítico para perceber este processo é compreender o processo difusivo destas moléculas. Na difusão mais usual, aquela que ocorre quando colocamos uma gota de tin-



Figura 1: As listras da zebra (esquerda) ou as manchas do leopardo (direita) explicitam as questões centrais da morfogénese: como é que células inicialmente idênticas podem diferenciar-se de forma organizada, criando os diversos padrões que encontramos na Natureza. Num nível ainda mais extremo, queremos compreender como é que uma única célula estaminal é capaz de formar toda a diversidade de estruturas presentes num ser vivo. **Fonte:** Wikimedia Commons.

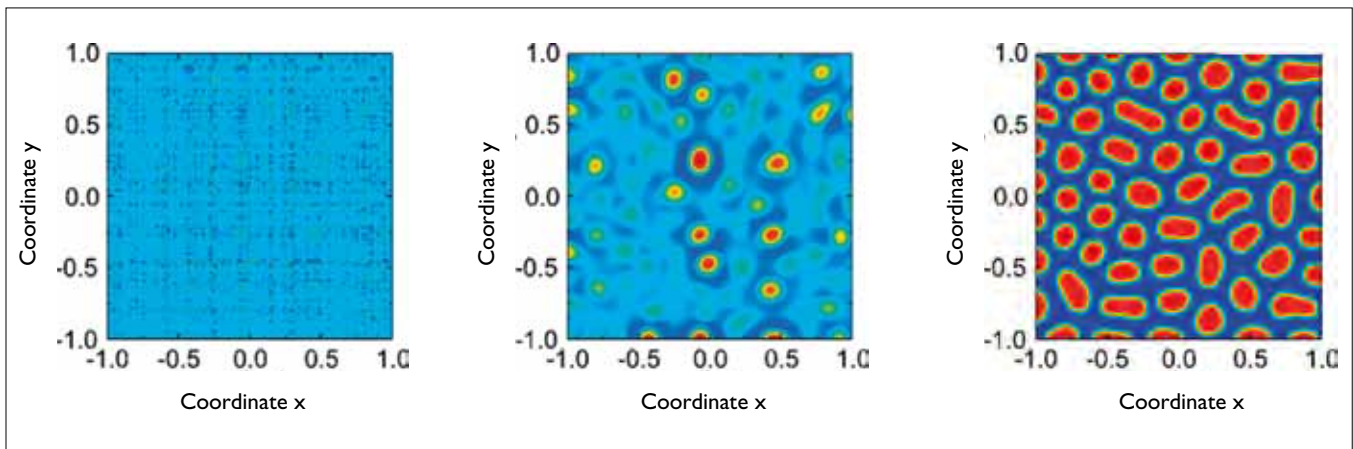


Figura 2: Exemplo da formação de padrões tal como predita por Turing: a *instabilidade gerada por difusão*. À esquerda vemos um sistema quase homogêneo (instante $t=0$), que para tempos intermédios já tem claras formações diferenciadas em cada ponto (imagem do meio). Em tempos posteriores (direita), vemos claramente um dos vários padrões possíveis para os sistemas de equações estudados. Na posse destes exemplos, Turing predisse que a morfogênese poderia ser explicada pelos mesmos modelos matemáticos. **Fonte:Wikimedia Commons.**

ta azul num balde de água, o tempo faz com que a coloração se torne cada vez mais homogênea. De uma forte coloração num único ponto, o sistema evolui para uma pálida coloração azulada uniformemente distribuída. O passo genial de Turing foi a criação do conceito de *instabilidade gerada por difusão*: a ideia de que duas (ou mais) substâncias difundindo de forma aleatória e reagindo entre si podem formar padrões como os da figura 2. Ou seja, ao invés de a difusão ser um processo homogeneizador, esta cria instabilidades que fazem com que as concentrações dos vários químicos aumentem ou decresçam de formas distintas dependendo do local e do momento exato em que estamos a olhar. Curiosamente, cada uma das várias substâncias, isoladamente, se difunde de forma regular; o fenómeno só ocorre quando as juntamos.

A ideia matemática é incrivelmente simples, dado o seu poder contraintuitivo. Vamos agora ficar um pouco mais técnicos. O leitor que se sentir desconfortável com equações diferenciais pode saltar os próximos parágrafos sem maiores problemas. Considere o sistema de equações diferenciais $x' = -\epsilon y$, $y' = x$. O sistema pode ser escrito de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Com um pouco de contas, não é difícil ver que $x^2 + \epsilon y^2$ é uma constante, e portanto condições iniciais próximas do ponto de equilíbrio $(0,0)$ não se afastam em demasia da origem. O mesmo é verdade para o sistema dado pela matriz

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix}$. No entanto, se somarmos as duas matrizes, encontramos $\begin{pmatrix} 0 & 1-\epsilon \\ 1-\epsilon & 0 \end{pmatrix}$, de forma que um dos valores próprios é necessariamente positivo e, portanto, soluções inicialmente próximas da origem se afastam arbitrariamente.¹

Mexendo um pouco nestas matrizes, podemos obter duas matrizes com valores próprios estritamente negativos (e, portanto, a origem atrai o sistema) tal que a matriz resultante da soma tenha um valor próprio positivo (e, portanto, o comportamento oposto quando temos uma solução perto da origem).

Turing usou a ideia acima para estudar sistemas de reação-difusão: equações que envolvem um termo de reação química (criação e eliminação das substâncias cujas quantidades são chamadas de x e y) e difusão (uma certa operação matemática precisa, cujo efeito é tornar a distribuição espacial de cada substância mais e mais homogênea, à medida que o tempo passa). Ao considerar apenas as perturbações próximas dos valores de equilíbrio (por uma técnica conhecida como *linearização*), pôde usar a análise de Fourier, procedimento que garante a existência de certas soluções especiais que podem ser obtidas de forma muito simples. Quando temos apenas a substância x , o estado de equilíbrio é estável; o mesmo ocorre quando temos apenas y – no entanto, quando ambas estão presentes, aparecem insta-

¹Este exemplo foi baseado num texto de J. Rauch; ver <http://www.math.lsa.umich.edu/~rauch/256/turingexample.pdf>.

bilidades, fazendo com que uma ou outra substância cresça rapidamente.

Os padrões gerados têm sido pensado como a origem (a nível embriológico), por exemplo, das listas das zebras.

No entanto, uma demonstração em laboratório desta ideia sempre foi mais resistente do que poderia parecer. O motivo central é que as técnicas matemáticas usadas por Turing pressupõem um substrato (onde o fenómeno ocorre) contínuo (que matematicamente é o plano dos pares de números reais). Assim, a teoria fez muito mais sucesso entre químicos, que veem reações ocorrerem com os diversos reagentes diluídos num certo solvente, do que entre os biólogos, para os quais as discontinuidades são naturais. Para estes, não podemos pensar na morfogénese celular a partir apenas de um único processo difusivo, como se passar de uma célula para outra fosse a mesma coisa do que se difundir no interior de cada uma delas.

É aí que entra a investigação [1], que uniu um matemático a uma equipa de físicos, todos nos EUA. A ideia foi replicar a existência das discontinuidades típicas do tecido biológico a partir da compartimentalização do substrato. Foram criadas "células" dispostas numa rede hexagonal. Cada uma destas continha certas substâncias químicas (basicamente, ácido malónico) e eram isoladas umas das outras por um substrato oleoso. Coloca-se, então, ácido bromoso (HBrO_2) numa das células, onde ele inicia uma reação química e onde a concentração de cada substância aumenta e diminui periodicamente, com muitas oscilações – cerca de 100 – antes de se atingir um equilíbrio. Estas reações são conhecidas pelo nome genérico de reações de Belousov–Zhabotinsky (BZ), o principal exemplo de sistemas químicos oscilatórios. Lentamente, o HBrO_2 se difunde através do óleo, iniciando a mesma reação BZ nas células adjacentes.

Assim, é a reação entre o ácido malónico e o bromato resultante da decomposição do ácido bromoso que é modelada por um sistema como o vislumbrado por Turing. No entanto, de forma contrária a todos os experimentos anteriores, tal ocorre num substrato descontínuo, onde a reação somente pode ocorrer em certos locais específicos. Estudando onde a reação BZ ocorre, os autores do trabalho [1] encontraram cinco dos seis padrões antevistos e mais um não previsto. A este último forneceram uma nova explicação e atribuíram a omissão de Turing ao facto de este ter estudado apenas as perturbações lineares do equilíbrio. Veja a figura 3.

O processo descrito é, evidentemente, um processo muito mais próximo da química do que da biologia. O primeiro motivo é que esta não apenas é mais fácil de controlar experimentalmente, mas também permite uma comparação quantitativa entre os resultados do laboratório e o que se pode obter da teoria de Turing. Afinal, todos os parâmetros podem ser medidos com grande precisão e todas as células são inicialmente idênticas. Nada disto seria verdade se tivéssemos um tecido biológico como substrato. Ao comparar os resultados numéricos, encontraram um incrível grau de acerto entre as previsões com mais de 60 anos feitas pelo matemático inglês caído em desgraça e os valores medidos.

Na opinião do leitor, qual dos eventos de 2014 daria maior satisfação ao britânico?

BIBLIOGRAFIA

[1] Nathan Tompkins, Ning Li, Camille Girabawe, Michael Heymann, G. Bard Ermentrout, Irving R. Epstein, e Seth Fraden. "Testing Turing's theory of morphogenesis in chemical cells". *Published online before print March 10, 2014, doi: 10.1073/pnas.1322005111 PNAS March 10, 2014*

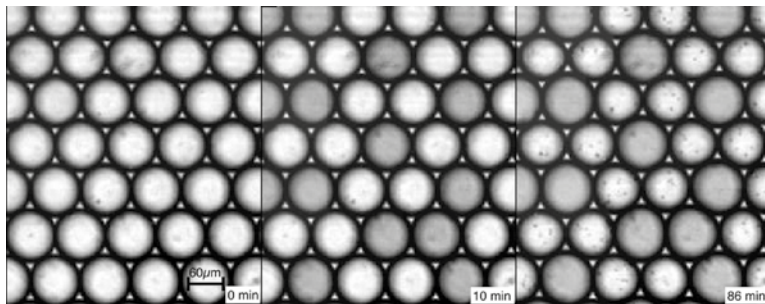


Figura 3: As células estão organizadas numa rede hexagonal, onde, em cada uma ocorre (ou não) um reação química do tipo BZ, indicada pela coloração mais clara ou escura. Veja como o padrão surge com o tempo e se mantém estável. Os vídeos dos experimentos estão disponíveis em <http://fraden.brandeis.edu/publications/publications.html>. Figura gentilmente cedida por Seth Fraden (Universidade de Brandeis, EUA) e pelos demais coautores de [1].



Visite o site da
Gazeta de Matemática.

www.gazeta.spm.pt

Para aceder à área reservada a assinantes, solicite o seu código de subscrição através do e-mail gazeta@spm.pt



Longitude – os Instrumentos

ANTÓNIO COSTA CANAS

MUSEU DE MARINHA

costacanas@gmail.com

1. INTRODUÇÃO – O PROBLEMA DA LONGITUDE

Celebramos em 2014 o terceiro centenário do *Longitude Act*, assinado pela rainha Ana de Inglaterra que instituiu um prémio de 20.000 libras, destinado a recompensar quem encontrasse um processo que permitisse determinar a longitude no mar, com um erro inferior a meio grau. Para avaliar as propostas foi criado o *Board of Longitude*, que se manteve em funções até 1828. Este prémio surgiu como consequência do naufrágio de uma esquadra inglesa em 1707. A imprensa da época deu especial destaque ao assunto e em 1713 dois matemáticos afirmaram que o desastre ocorrera por desconhecimento da longitude. Esta pressão da opinião pública levou à promulgação deste diploma.

Não era a primeira vez que se oferecia uma recompensa a quem resolvesse este problema. No século XVI foi prometido um prémio pelo rei de Espanha¹. No século XVII teriam surgido propostas de prémios nos Estados Gerais (Holanda), em Veneza e em França.

Estas recompensas atraíram inúmeras propostas de solução. Não podemos aqui mencionar todas. Apresentaremos apenas algumas das mais curiosas. Muitas delas eram completamente disparatadas, embora nalguns casos tivessem acérrimos defensores. Uma consistia na utilização do “Pó da Simpatia”. Este é o tema central do romance de Umberto Eco, *A Ilha do Dia Antes*². Este método baseava-se no efeito à distância que se conseguia com o “Pó da Simpatia”. Um navio levava a bordo um cão que fora ferido com uma lâ-

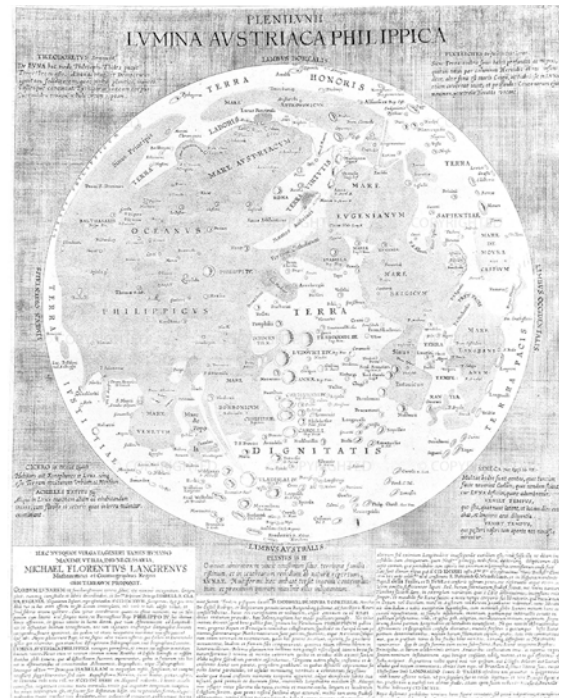


Figura 1: Mapa lunar de Van Langren.

mina que tocara neste pó. Todas as noites, à meia-noite, em Londres aqueciam a lâmina e o cão começaria a ganir, com dores. A bordo conseguiam assim saber que horas eram em Londres.

Outras soluções apesar de não servirem para o propósito, acabaram por trazer contributos indiretos para o conhecimento científico. O cosmógrafo flamengo Van Langren (Langrenius na versão latina do seu nome) (1598-1675) sugeriu que se usasse o “aspeto” da Lua para este efeito. Como a Lua passa, em cerca de duas semanas, de Lua Nova para Lua Cheia e vice-versa, poderia usar-se a dimensão da parte visível da Lua como uma forma de conhecer o tempo. Para tal era necessário que a superfície da Lua estivesse completamente mapeada. Embora não fosse possível, com esta proposta, medir o tempo com rigor suficiente para conhecer a longitude, ela serviu para que Van Langren elaborasse o primeiro mapa lunar, representado na figura 1, que dedicou ao seu patrono, Filipe IV (1605-1665) de Espanha.

“Se a *Daphne*, tal como a *Amarilli*, fora enviada à procura do *punto fijo*, então o *Intruso* era perigoso. Roberto agora sabia da surda luta entre Estados da Europa para se apoderarem daquele segredo.”

Umberto Eco, *A Ilha do Dia Antes*

¹ As opiniões dos estudiosos divergem quanto à data da primeira oferta de prémio. Alguns autores afirmam que foi em 1567 que Filipe II (1527–1598) fez esta oferta. Praticamente todos mencionam o ano de 1598. Alguns consideram que neste ano foi confirmado o prémio anteriormente proposto, enquanto outros defendem que foi então pela primeira vez instituído.

² Na nossa opinião a melhor obra de ficção sobre o tema da longitude. Embora seja um romance, a obra explica detalhadamente, com bastante rigor histórico, muitas das propostas para resolver este problema da náutica. Esta solução de usar o “Pó da Simpatia” foi realmente sugerida.

As ofertas de recompensas acima referidas são prova do enorme interesse em resolver esta questão. Mas, afinal, por que motivo este problema é de resolução tão complexa? É sabido que a latitude se determinava no mar, usando métodos astronómicos, pelo menos desde o século XV. Tal é possível porque a contagem das latitudes faz-se entre o equador e os polos. Cada um dos polos terrestres se projeta num *ponto fixo* da esfera celeste, em torno do qual todas as estrelas rodam. É a existência deste ponto fixo que permite que a latitude seja determinada com muita facilidade, realizando simples operações aritméticas.

Para a longitude a situação é completamente diferente. Esse ponto fixo não existe. Os meridianos convergem todos nos polos, não existindo nenhuma “razão natural” que torne um meridiano preferencial em relação a qualquer outro³. A “estratégia” a seguir para resolver este problema tinha de ser diferente. A maior parte dos processos sugeridos baseia-se no facto de ser possível determinar a longitude de uma forma indireta, através da medição de um intervalo de tempo.

Importa esclarecer que a longitude é um conceito espacial. E na mecânica clássica – não relativista – espaço e tempo são dimensões independentes. No entanto, podemos conhecer, indiretamente, o valor de uma determinada dimensão espacial medindo um intervalo de tempo. Processos deste género são bastante comuns. Por exemplo, um radar fornece a distância a um determinado objeto, medindo o tempo que uma onda rádio demora a percorrer um percurso. Basta conhecer a velocidade de propagação da onda. Ou seja, podemos relacionar o espaço com o tempo se tivermos um fenómeno com movimento associado e soubermos a velocidade a que esse movimento se realiza. E nós sabemos que a Terra completa uma rotação em vinte e quatro horas. Esta relação entre longitude e tempo está patente na palavra que define os pontos de igual longitude: meridiano. Etimologicamente deriva da expressão latina *meridiânus*, relativo ao meio-dia. Isto porque o Sol passa pelo meridiano de qualquer lugar, quando é meio-dia nesse local.

Claro que é possível conhecer diretamente as coordenadas de um local, a partir de um outro local de coordenadas conhecidas, usando triangulação. Contudo, nem sempre é possível usar estes métodos diretos, sendo então necessário recorrer aos indiretos, como acima descrito. Nesse caso, é necessário ter um processo para conhecer a hora do local onde o navegador se encontra, e um outro para determinar a hora do meridiano-

-origem. A maior dificuldade estava no conhecimento desta última hora. Uma possibilidade seria acertar um relógio no meridiano-origem, “conservando” a bordo essa hora. Outra hipótese seria observar um determinado fenómeno que fosse visível no mesmo instante em diferentes locais. Os fenómenos que podem ser observados simultaneamente em locais afastados entre si são os fenómenos astronómicos.

Neste texto serão analisadas três alternativas que foram sugeridas para resolver o problema. Não explicaremos em grande detalhe os processos, uma vez que preferimos realçar os instrumentos associados a cada um dos métodos. A primeira proposta baseia-se num pressuposto errado. No entanto, decidimos abordá-la porque passam este ano cinco séculos desde que foi sugerida pela primeira vez. Mas, acima de tudo, decidimos explicar este processo porque, apesar de se saber desde muito cedo que era um método errado, o mesmo continuou a ter defensores durante séculos.

As secções seguintes serão dedicadas aos dois processos que tiveram realmente utilização prática no mar: as distâncias lunares e o cronómetro. O primeiro é um exemplo da utilização de um fenómeno visível simultaneamente em diversos locais, enquanto o outro consiste em “conservar” a bordo a hora do meridiano-origem. Importa referir que existiram outros processos que permitiam conhecer a hora com rigor, nomeadamente recorrendo à observação de eclipses. No entanto, os eclipses da Lua ocorrem tão raramente que o seu uso não era prático. No início do século XVII, Galileu (1564-1642) sugeriu o uso dos eclipses dos satélites de Júpiter para o mesmo efeito. Embora muito mais frequentes do que os da Lua, o seu uso não era possível no mar. Contudo, foram muito úteis em terra firme, especialmente depois de Cassini (1625-1712) ter elaborado tabelas rigorosas de efemérides dos satélites.

2. LONGITUDE PELA DECLINAÇÃO DA AGULHA

No longo título do *Tratado da Agulha de Marear* de João de Lisboa (c. 1526) aparece a referência ao ano de 1514, logo evocamos o quinto centenário. Nesse texto é sugerido que existe uma relação direta entre a longitude e a variação da declinação da bússola, ou agulha de marear na linguagem dos marinheiros. Embora nalguns locais a declinação varie de um modo mais ou menos proporcional à longitude, esta relação não existe. Tal foi comprovado por D. João de Castro (c. 1500-1548), na sua viagem de 1538 para a Índia.



Figura 2: Carta de linhas isogónicas do Atlântico.

Apesar de se ter demonstrado que o método estava errado, o mesmo continuou a ter diversos seguidores. Alguns autores sugeriram uma variante que consistia em conhecer a posição pelo cruzamento de paralelos de latitude com as linhas, irregulares, de igual declinação, as isogónicas. Esta última variante foi defendida pelo padre Cristóvão Borri (1583-1632), no Colégio de Santo Antão, em Lisboa, ou por Edmond Halley (1656-1742). Este último fez levantamentos da variação das isogónicas e publicou a carta que mostramos na figura 2.

Vale a pena referir ainda que, apesar de a declinação magnética não ser proporcional à longitude, o conhecimento daquela poderia ajudar o piloto a manter-se safo de perigos. Bastaria para tal que conhecesse o valor da declinação nas proximidades de um determinado baio existente em alto-mar. Por esse motivo, a determinação da declinação mag-

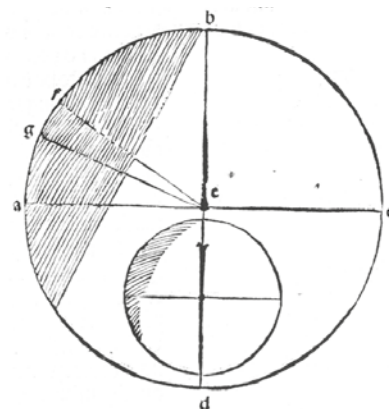


Figura 3: Instrumento de sombras de Pedro Nunes.



Figura 4: Agulha de marcar portuguesa.

nética era uma prática corrente a bordo. Foram sugeridos diversos métodos de cálculo do seu valor, tendo igualmente sido propostos diversos instrumentos, ou adaptações dos existentes para esse efeito. A título de exemplo, apresenta-se na figura 3 um instrumento sugerido por Pedro Nunes, e na figura 4 uma “agulha de marcar portuguesa”, que não é mais do que uma agulha de marear, adaptada para observar a direção do Sol no seu nascimento ou no seu ocaso. A partir do valor observado, calculava-se a declinação magnética, recorrendo a uma tabela de amplitudes⁴.

³ A escolha do meridiano de Greenwich é puramente convencional. No passado usaram-se outros meridianos de referência.

⁴ A amplitude ortiva, ou occídua, é o ângulo entre a direção Este, ou Oeste, no nascimento, ou ocaso, do Sol. É função da data e da latitude do observador.

3. MÉTODO DAS DISTÂNCIAS LUNARES

No ano de 1514 foi publicado um outro texto relacionado com a longitude. O padre Johann Werner (1468-1522), de Nuremberga, publicou *In Hoc Opere Haec Continentur Nova Translatio Primi Libri Geographicae Cl Ptolomaei*. Nesta obra, o autor sugere a determinação da longitude por meio da observação do ângulo entre a Lua e uma estrela. Por esse motivo, o método ficou conhecido como método das distâncias lunares.

A Lua tem um movimento de translação em torno da Terra, com a duração de cerca de um mês. Por esse motivo, descreve um movimento aparente na esfera celeste, com a mesma duração. Tal tem como consequência que a posição da Lua em relação aos restantes astros varie rapidamente. Num determinado instante, o ângulo verdadeiro entre a Lua e um outro astro – a distância lunar – será igual nos diferentes lugares em que seja observado. Se observarmos a distância lunar num qualquer lugar da superfície terrestre, poderemos igualmente conhecer a respetiva hora local, por processos astronómicos. Por outro lado, se tivermos, para um meridiano de referência, uma tabela com valores de distâncias lunares e respetivas horas, sabemos a que horas, desse meridiano de referência, ocorreu a mesma distância lunar que observámos. Comparando essas duas horas locais, podemos conhecer a longitude do lugar onde estamos.

Werner sugeriu o uso da balestilha para medir a distância lunar, como podemos ver na figura 5. Na época não existia outro instrumento que permitisse medir ângulos entre astros. A balestilha era um dos instrumentos usados para determinar a latitude. Esta última era calculada desde finais do século XV, observando a Polar ou o Sol com astrolábio, quadrante ou balestilha. Estes instrumentos tinham geralmente escalas cuja divisão mínima era o grau. Os pilotos experientes conseguiam geralmente leituras da ordem de meio grau ou mesmo de um terço de grau, interpolando entre dois valores sucessivos. Para o caso do Sol, usavam ainda tabelas com os valores da respetiva declinação, fornecida em graus e minutos. Tendo o valor da altura do astro e a declinação, necessitavam apenas de efetuar uma operação de soma ou subtração para calcular a latitude. Nestas condições seria comum um erro da ordem de meio grau, o que implicava um erro de cerca de 30 milhas náuticas na latitude.

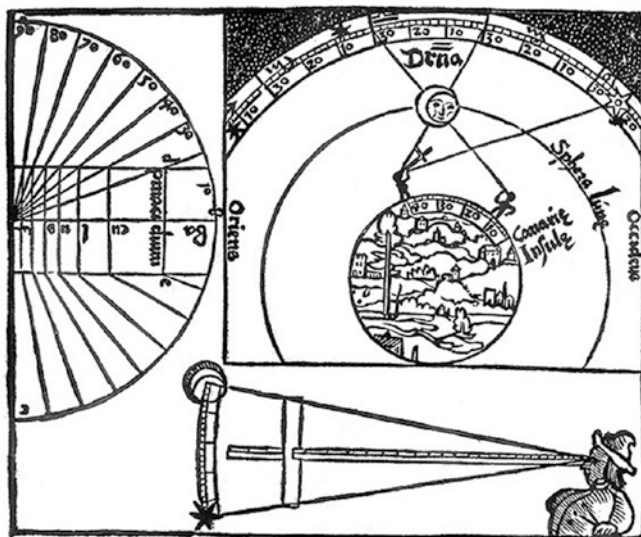


Figura 5: Uso da balestilha para medir distâncias lunares.



Figura 6: Octante do século XVIII.

Para a longitude, pelas distâncias lunares, a situação é completamente diferente. Suponhamos que a Lua demora 30 dias a completar uma translação em torno da Terra⁵. Nestas circunstâncias percorre cerca de 12 graus por dia, em relação a qualquer outro astro. Tal implica que numa hora a variação deste ângulo é da ordem de meio grau, ou seja, 30 minutos de arco. Daqui se conclui que um erro de um minuto no ângulo entre a Lua e outro astro, implica um erro de dois minutos em tempo. Ou seja, se medirmos ângulos com erros semelhantes aos cometidos na determinação da latitude, da ordem de meio grau, podemos ter erros de cerca de uma hora, no cálculo do tempo. Um erro de uma hora é igual a 15 graus de longitude, que equivale a 900 milhas no equador. Bem diferente das 30 milhas na latitude!

A limitação da balestilha foi ultrapassada com os instrumentos de dupla reflexão. O primeiro destes instrumentos a ser construído foi o octante, em 1731. Curiosamente a sua “invenção” ocorreu simultaneamente em Inglaterra, por John Hadley (1682-1744); e em Filadélfia, nos EUA, por Thomas Godfrey (1704-1749), que naquele mesmo ano apresentaram propostas semelhantes para um mesmo instrumento, sem que tivessem conhecimento um do outro. O termo octante significa que se trata de um instrumento cujo sector corresponde a um oitavo de círculo, ou seja 45 graus, como podemos verificar na figura 6. Por outro lado, a expressão dupla reflexão significa que são utilizados dois espelhos, sendo que o seu funcionamento se baseia na segunda lei da reflexão. Por este motivo, cada grau da escala do instrumento corresponde na realidade a um ângulo de dois graus. Logo, com um octante consegue-se medir ângulos até 90 graus, o que era suficiente para determinar a altura dos astros. Contudo, para aplicação do método das distâncias lunares era necessário medir, algumas vezes, ângulos superiores a 90 graus. Em 1757, o inglês John Bird (1709 - 1776) concebeu o sextante, com o qual se podiam medir ângulos até 120 graus.

Além do rigor nas observações, o método das distâncias lunares implicava também valores bastante rigorosos das efemérides dos astros. A criação de grandes observatórios astronómicos, como o de Paris, em 1667; e o de Greenwich, em 1675, permitiram a recolha sistemática de dados necessários aos cálculos das efemérides. Por outro lado, a mecânica celeste conheceu desenvolvimentos significativos após a publicação dos textos de Isaac Newton (1642-1727). Graças a estes avanços foi

possível a publicação de tabelas com valores muito rigorosos de efemérides dos astros. Para o caso da Lua merece especial destaque Tobias Mayer (1723-1762), que calculou coordenadas deste astro com precisão de um minuto. Por esse motivo recebeu 3.000 libras do *Board of Longitude*. O valor foi pago à sua viúva, pois Mayer falecera entretanto.

O método das distâncias lunares apresentava ainda um outro inconveniente: a complexidade dos cálculos para obter o valor da distância lunar no meridiano de referência, a partir das efemérides dos astros. Era necessário realizar cálculos de trigonometria esférica, com elevada precisão. Estes cálculos eram bastante morosos e não estavam ao alcance dos pilotos. A solução para este problema passou pelo cálculo prévio de tabelas com valores das distâncias lunares para um meridiano de referência. Nasceu assim, em 1767, o *Nautical Almanac*, do qual mostramos uma página na figura 7.

[48]		A P R I L 1767.											
		Distances of ☾'s Center from ☉, and from Stars west of her											
SARCS	Stars Names.	12 Hours.			15 Hours.			18 Hours.			21 Hours.		
		°	'	''	°	'	''	°	'	''	°	'	''
1	The Sun.	40.	59.	11	42.	51.	44	44.	9.	51	45.	44.	55
2		53.	52.	7	55.	42.	24	56.	39.	16	58.	7.	45
3		65.	39.	18	67.	8.	27	68.	57.	14	70.	5.	59
4		77.	22.	39	73.	48.	58	80.	15.	1	81.	40.	46
5		88.	45.	20	90.	9.	27	91.	33.	21	92.	55.	0
6		99.	52.	61	101.	14.	34	102.	36.	52	103.	59.	1
7		110.	47.	42	112.	9.	6	113.	30.	25	114.	51.	41
6	Aldebaran	50.	36.	10	52.	4.	5	53.	31.	57	54.	53.	44
7		62.	17.	43	63.	45.	10	65.	12.	34	66.	39.	47
8	Pollux.	31.	25.	48	32.	53.	11	34.	20.	40	35.	43.	12
9		43.	7.	5	44.	35.	4	46.	3.	8	47.	31.	15
10	Regulus.	17.	51.	57	19.	20.	36	20.	49.	23	22.	18.	27
11		29.	45.	30	31.	15.	26	32.	45.	26	34.	15.	35
12		41.	48.	49	43.	19.	55	44.	54.	10	46.	22.	39
13		54.	2.	11	55.	34.	36	57.	7.	12	58.	39.	59
14	66.	26.	28	68.	0.	18	69.	34.	20	71.	8.	33	
15	Spica ♀	25.	4.	34	26.	39.	23	28.	14.	26	29.	49.	44
16		37.	49.	37	39.	26.	14	41.	3.	5	42.	40.	8
17		50.	48.	40	52.	26.	59	54.	5.	31	55.	44.	15
18	64.	1.	2	65.	41.	3	67.	21.	18	69.	1.	48	
19	Antares.	31.	37.	14	33.	19.	7	35.	1.	13	36.	43.	32
20		45.	18.	29	47.	2.	10	48.	46.	5	50.	30.	12
21		59.	14.	6	60.	59.	31	62.	45.	11	64.	31.	2
22	73.	23.	37	75.	10.	43	76.	58.	2	78.	45.	31	
23	Capricorni.	33.	17.	26	35.	4.	38	36.	52.	4	38.	39.	45
24		47.	41.	9	49.	29.	33	51.	18.	44	53.	7.	40
25	Aquil.	65.	57.	35	67.	29.	54	69.	2.	36	70.	35.	39
26		78.	24.	51	79.	59.	6	81.	33.	29	83.	7.	45

Figura 7: Uma página do *Nautical Almanac* de 1767.

⁵ Na realidade, a Lua completa essa translação num período ligeiramente mais curto. Nesta explicação faremos uma série de aproximações, pois o nosso objetivo é apresentar apenas a ordem de grandeza dos valores envolvidos.

4. CRONÓMETRO

Vimos que o método das distâncias lunares apresentava uma série de limitações que só foram ultrapassadas no século XVIII. A palavra-chave é precisão: dos instrumentos, das efemérides e dos cálculos para obter resultados aceitáveis. A bordo era necessário um cuidado especial na obtenção das alturas e nos cálculos. O *Nautical Almanac* veio simplificar o processo de cálculo. No entanto, o processo poderia tornar-se bastante mais simples caso fosse possível conhecer a bordo a hora do meridiano de referência sem ser necessário recorrer a observações astronômicas para esse efeito.

Poucos anos depois da proposta de Werner, foi sugerido um outro método para determinação da longitude no mar, usando um relógio. A maior parte dos historiadores de ciência atribui esta proposta a Gemma Frisius (1508-1555), datando a mesma de 1530. No entanto, a mesma foi sugerida seis anos antes, por Fernando Colombo (1488-1539) na Junta de Badajoz-Elvas, que se reuniu para procurar esclarecer a questão das Molucas⁶. Esta proposta de Fernando Colombo é ignorada por muitos historiadores porque uma parte significativa dos estudos sobre a longitude é produzido (e lido!) por estudiosos que não conseguem ler português nem castelhano.

Em termos práticos, este processo é muito mais simples. A ideia é dispor de um relógio rigoroso, que seria acertado pela hora do meridiano de referência, “conservando”

assim essa hora. Quando o navegador quisesse conhecer a sua longitude, teria apenas de determinar a hora local, para o meridiano em que se encontrasse⁷ e comparar essa hora local com a hora do cronómetro, que marcava a hora do meridiano de referência.

Se em termos de procedimentos este processo é bastante mais simples do que o das distâncias lunares, a aplicação prática de ambos ocorreu praticamente em simultâneo. Tal aconteceu porque foi necessário ultrapassar inúmeras limitações técnicas no campo da relojoaria. Quando o processo foi sugerido, no século XVI, os relógios existentes eram essencialmente dos seguintes tipos: de Sol, ampulhetas (de areia ou de água) e mecânicos (de pesos). Os primeiros não serviam para este processo, pois marcam sempre a hora do meridiano em que se encontram, e além disso não são suficientemente rigorosos. Quanto aos restantes tipos, não possibilitavam geralmente a medição do tempo com rigor da ordem dos segundos. Por outro lado, a contagem do tempo decorria muitas vezes de uma forma irregular, especialmente nos relógios mecânicos. Apesar disso, alguns dos autores que defenderam este processo, sugeriram o uso de ampulhetas, sendo que alguns preferiam as de areia e outros as de água.

Na segunda metade do século XVII Christiaan Huygens (1629-1695) desenvolveu o relógio de pêndulo. Este permitia medições bastante rigorosas de tempo. Tinha, no entanto, o grande inconveniente de não servir para ser usado nos navios, pois o seu funcionamento é bastante sensível ao balanço. Entretanto, a relojoaria conheceu diversos desenvolvimentos e, chegados ao século XVIII, tornou-se possível a construção de relógios muito rigorosos.

Carpinteiro de profissão, John Harrison (1693-1776), dedicou quase toda a sua vida à construção de relógios que permitissem determinar a longitude com o rigor exigido no *Longitude Act*, de 1714. A sua primeira inovação conhecida no campo da relojoaria ocorreu por volta de 1713. Os seus primeiros relógios eram constituídos essencialmente por peças de madeira, e funcionavam bastante bem. Começou a construir cronómetros em 1727, ano em que elaborou os primeiros desenhos do H1. Os relógios que construiu são conhecidos por: H1, H2, H3, H4 e H5. A letra é a inicial do seu apelido e o número indica a ordem de construção. Em 18 de novembro de 1761, Harrison iniciou a primeira viagem de Inglaterra até à Jamaica, para testar o H4 (figura 8). Em 1764,



Figura 8: Cronómetro H4.

foi feita outra viagem, até Barbados. Nesta, o H4 foi acompanhado por William Harrison (1728-1815), filho de John. Ao fim de 46 dias de viagem o cronómetro tinha um erro de cerca de 39 segundos. Este valor estava bem dentro dos limites definidos pelo *Longitude Act*. Depois de Harrison ter construído o H1, o *Board of Longitude* foi financiando os seus trabalhos. Em junho de 1737 recebeu um primeiro apoio de 250 libras. O último valor que recebeu, 8.750 libras, foi pago em 19 de junho de 1773, depois de Harrison ter construído o H5, semelhante ao H4. No total, Harrison recebeu 23.065 libras.

5. EPÍLOGO

Apenas umas pequenas notas finais. Evocámos três centenários. Um deles é o centenário de um texto no qual é proposto um método errado de determinar a longitude. Apesar de errado, teve defensores durante séculos, e evoluiu para uma versão – a de Borri/Halley – que permitia conhecer a posição com algum rigor.

Um outro centenário é aquele que motivou este número da *Gazeta de Matemática*, o do *Longitude Act*. Como consequência deste diploma, e do prémio oferecido, foi possível encontrar a solução para o problema. Ou melhor, as soluções: cronómetro e distâncias lunares. Curiosamente, um destes métodos foi proposto pela primeira vez em 1514, sendo esse o terceiro centenário evocado. As duas soluções mencionadas foram desenvolvidas mais ou menos em simultâneo. Algumas inovações foram aproveitadas em ambos os métodos, como foi o caso dos instrumentos de dupla reflexão, ou das ferramentas matemáticas que possibilitaram cálculos mais rigorosos. O processo não foi pacífico. Formaram-se dois “partidos” na comunidade científica, defendendo um ou o outro processo. A obra *Longitude*, de Dava Sobel, procura retratar essa realidade.

Nos primeiros tempos, cada um dos métodos apresentava algumas limitações significativas. No caso do cronómetro era o seu preço que tornava proibitiva a utilização massiva destes instrumentos. Quanto ao método das distâncias lunares, o principal problema residia na complexidade dos cálculos, nomeadamente o cálculo da distância da Lua ao outro astro escolhido, a partir das respetivas efemérides. Essa limitação maior foi ultrapassada com a publicação do *Nautical Almanac*, que continha tabelas com valores de distâncias lunares calculadas para o meridiano de Greenwi-

ch. Com esta publicação, o processo de cálculo foi bastante simplificado, mas mesmo assim continuou a ser muito mais complexo do que os resultados obtidos com o cronómetro. Além disso, as distâncias lunares implicavam um cuidado acrescido na medição dos ângulos, pois qualquer pequeno erro tinha implicações enormes. Assim que os cronómetros se vulgarizaram, as distâncias lunares foram sendo abandonadas. Passaram a servir para determinar o “ponto ao contrário”, ou seja, para verificar o funcionamento dos cronómetros. Quando o navegador chegava a um lugar cuja longitude conhecia com rigor, usava a distância lunar para saber a hora em Greenwich e assim confirmar o erro do cronómetro. No início do século XX passaram a ser difundidos sinais horários via rádio, e o *Nautical Almanac* deixou de publicar as tabelas de distâncias lunares.

“Disse: quanto à longitude é coisa assaz árdua que poucas pessoas entendem, exceto as que sabem abster-se do sono para observar a conjunção da Lua e dos planetas. E disse: é para a determinação das longitudes que muitas vezes sacrifiquei o sono e encurtei a minha vida de dez anos...”

Umberto Eco, *A Ilha do Dia Antes*

SOBRE O AUTOR

António Costa Canas é oficial de Marinha. Membro do Centro de Investigação Naval e do Centro Interuniversitário de História das Ciências e Tecnologia. Áreas de interesse: História da Marinha Portuguesa e História da Ciência Náutica



Longitude

Uma Longa e Fascinante História

FERNANDO B. FIGUEIREDO
OGAUC/CGUC
bandeira@mat.uc.pt

A determinação com precisão da longitude no mar foi até aos finais do século XVIII um dos maiores problemas técnico-científicos, e considerado por muitos verdadeiramente sem solução. Na realidade a questão da longitude estava muito para além de um grande problema náutico. Era uma questão de poder político e comercial, de domínio dos mares e da terra. Por isso, ao longo da História vários foram os Governos que lançaram prémios para a sua solução. Este ano comemoram-se 300 anos do mais célebre de todos - o *Longitude Act* inglês.

Em 22 de outubro de 1707, no meio de uma forte tempestade, mais de 2000 homens da frota naval britânica comandada por Sir Cloudesley Shovell (1650-1707) perderam a vida quando os seus navios embateram nas pequenas ilhas Scilly, ao largo da costa inglesa. Pelos cálculos, a frota encontrava-se não muito longe da costa francesa, ao largo de Ushant. Assim, navegando na direção nordeste, entrariam no Canal da Mancha e com segurança atingiriam a Grã-Bretanha. Infelizmente, os cálculos estavam errados! A frota encontrava-se, isso sim, já na vizinhança das ilhas Scilly. Este trágico desastre naval deveu-se à grande dificuldade que naqueles tempos os pilotos tinham em determinar com precisão a localização dos seus navios, principalmente a longitude. Na verdade, os marinheiros tinham algumas técnicas que lhes permitiam estimar as suas posições, porém eram de pouca fiabilidade. No caso do grande desastre de 1707, Shovell tinha errado a posição da frota em cerca de 90 milhas (mais de 1,5 graus norte e 1 grau oeste).

A determinação com precisão da longitude no mar foi até aos finais do século XVIII um dos maiores problemas científicos, e considerado por muitos verdadeiramente sem solução.

Mesmo em terra, apesar de a questão ser mais simples, muitos dos mapas apresentavam ainda nesta altura enormes erros e imprecisões. Por exemplo, o astrónomo e explorador francês Jean-Baptiste Chappe d'Auteroche (1722-1769), na sua viagem à Baixa Califórnia, em 1769, descobriu nos mapas daquela região erros de mais de 5 graus nos valores da longitude.

Na realidade, a questão da longitude estava muito para além de um grande problema científico ou náutico. Era uma questão de poder político e comercial, de domínio dos mares e da terra. Por esse motivo, desde o século XVI, quando as grandes aventuras marítimas e o descobrimento de novas terras se tornam empresas globais, foram vários os reis e Governos que instituíram prémios para a sua resolução. O prémio mais antigo foi proposto pela corte espanhola em 1598, porém há autores que defendem que esta já tinha atribuído um outro em 1567.

O maior de todos foi estabelecido em 1714 pelo Governo inglês como resposta a uma petição apresentada ao Parlamento por “Capitães dos Navios de Sua Majestade, Mercadores de Londres e Comandantes da Marinha Mercante”, que parcialmente foi justificada pela grande tragédia nas ilhas Scilly. Um prémio recomendado por Isaac Newton (1643-1727), de 20.000 libras, para quem solucionasse o problema da determinação da longitude no mar com uma precisão inferior a meio grau (o prémio subdividia-se em duas outras parcelas, de 10.000 libras para precisão inferior a 1 grau e de 15.000 libras para precisão inferior a 2/3 graus).

O *Longitude Act* – assim ficou conhecida a lei que instaurou o prémio e criou o *Board of Longitude*, a comissão científica responsável pela avaliação das eventuais propostas – faz este ano 300 anos e comemora-se em julho próximo, em Londres, no Observatório de Greenwich, com uma conferência internacional e várias exposições.

A LONGITUDE

Para se localizar um lugar na superfície da Terra, basta conhecer a sua latitude e a sua longitude (em rigor, necessitava-se ainda da cota).

A latitude é o ângulo ao centro da Terra (supondo-a esférica) entre um ponto do equador terrestre (círculo máximo que serve de referência) e outro ponto situado num determinado paralelo. Também pode ser definida como o ângulo

entre a vertical do lugar (i.e., a direção do fio-de-prumo) e o plano do equador (a latitude geográfica varia entre 0° e 90° norte e 0° e 90° sul). Desde os tempos antigos, a determinação desta coordenada não oferecia grandes dificuldades, sendo determinada facilmente no hemisfério norte pela altura da Estrela Polar (era por isso também apelidada de altura do Polo). Além da altura da Polar, também se pode determinar a latitude de um lugar pela altura do Sol ao meio-dia na sua passagem meridiana.

Já a longitude se define como o arco do equador compreendido entre dois meridianos (círculos máximos que passam pelos polos da Terra), o de referência (que a partir de 1884 passou a ser o meridiano de Greenwich) e o do lugar. Esta diferença angular pode ser facilmente relacionada com uma diferença de tempo, visto a Terra dar uma volta sobre si mesma em 24 horas. Assim, por exemplo, dois observadores que registem uma diferença horária na passagem do Sol pelo zênite do respetivo meridiano de uma hora têm entre si uma diferença de longitude de 15° ($360^\circ/24\text{h}=15^\circ/\text{h}$). Esta coordenada varia entre 0° e 180° este e 0° e 180° oeste.

Na prática, a determinação da longitude prende-se com a questão de determinar a diferença horária entre dois locais. Problema que hoje facilmente se consegue resolver com um simples relógio de pulso, mas que até finais do século XVIII foi um dos maiores problemas técnico-científicos da história da humanidade. Na impossibilidade de um relógio preciso, a observação de um evento astronómico que possa ser

observado diretamente (ou predito) em dois locais é uma solução.

O primeiro a estabelecer a necessidade de duas coordenadas para especificar a posição de um lugar na superfície da Terra foi Dicaearchus de Messina (350-290 a. C.), a quem se deve a primeira medição de um meridiano. Eratóstenes (273-192 a. C.), no seu *Geografia* (apenas se conhece a sua existência por comentadores posteriores), estabelece no seu mapa mundo – *oikumène* – uma série de linhas paralelas intervaladas a espaços iguais. Hiparco (190-120 a. C.) é o primeiro a estabelecer métodos trigonométricos para a determinação das coordenadas geográficas e terá sido também o primeiro a idealizar o uso dos eclipses lunares para a determinação da longitude. Já na nossa era destacam-se os trabalhos de Ptolomeu (85-165) que no seu *Geografia* fornece as latitudes e longitudes de mais de 8000 locais, fixando para isso um meridiano de referência que passava pela Ilha do Ferro, nas Canárias.

É a partir da altura em que os navegadores portugueses e espanhóis começam a se aventurar por mares nunca antes navegados que o problema das longitudes se torna uma questão premente. Até ao início do século XVII, o método dos eclipses da Lua sugerido por Hiparco, apesar das sérias desvantagens que apresentava – a sua raridade e a dificuldade em definir o momento exato da sua ocorrência (ainda mais complicado se observado a bordo de um barco) –, seria o principal método para a determinação das longitudes.

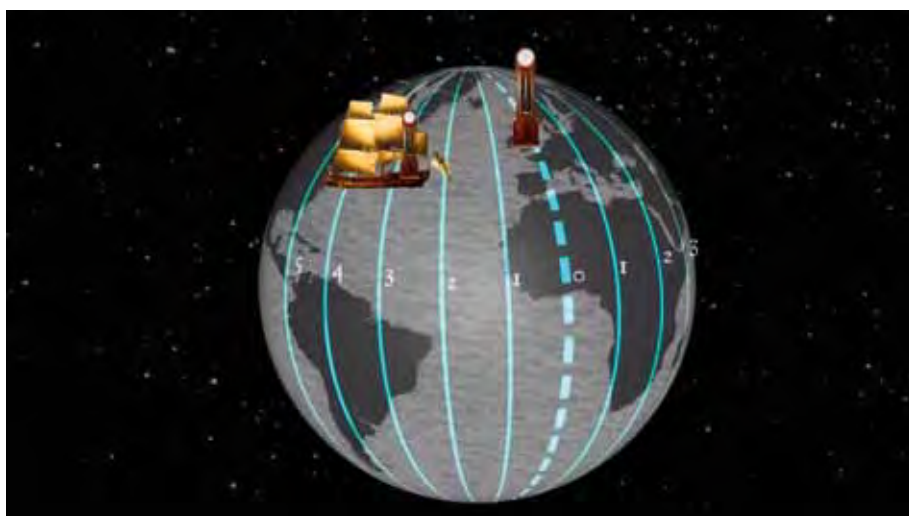


Figura 1: A longitude é uma diferença horária.

Muitos são os métodos, uns mais ou menos engenhosos e outros completamente absurdos, que vão sendo propostos. Abordagens astronômicas sérias começam a ser sugeridas, destacando-se métodos baseados nos eclipses dos satélites de Júpiter e baseados no movimento da Lua, ditos métodos lunares: observação da passagem da Lua pelo meridiano do lugar; observação da distância da Lua ao meridiano do lugar; observação das alturas da Lua; observações das distâncias da Lua ao Sol, às estrelas e aos planetas. Este último, o método das distâncias lunares, tornar-se-ia a chave para a determinação da longitude no mar, e o método dos eclipses dos satélites de Júpiter, para a determinação da longitude em terra.

A grande dificuldade estava então em saber, com precisão, a hora em que estes acontecimentos se dariam (observariam) no meridiano de referência, e no século XVIII os desenvolvimentos surpreendentes da mecânica celeste irão permitir aos astrónomos e matemáticos elaborar tabelas astronômicas com as posições dos corpos celestes capazes de enfrentar esta questão com uma precisão nunca antes conseguida.

SATÉLITES DE JÚPITER

A ideia de usar os eclipses dos satélites de Júpiter deve-se a Galileu (1564-1642). Foi na noite de 7 de janeiro de 1610 que Galileu viu, através do seu telescópio, três pequenas ‘estrelinhas’ muito próximas de Júpiter. Depois de várias noites de observação, convence-se de que aqueles pontinhos luminosos, que entretanto passariam a quatro, não são estrelas mas sim satélites à volta do planeta. Muitíssimo mais frequentes do que os da Lua, e também por ser mais fácil o cálculo dos instantes dos seus inícios, será nos satélites de Júpiter que Galileu vê uma séria possibilidade para a resolução do problema das longitudes. Em 1613, chega mesmo a propor, em vão, os seus préstimos para a resolução do problema das longitudes a Filipe III de Espanha (Filipe II de Portugal), comprometendo-se a fornecer tabelas de previsão dos eclipses e telescópios. Contudo, o seu uso tinha um grande problema: a quase impossibilidade das suas observações a bordo de um navio, sempre a oscilar no mar. Era difícil encontrar e manter os satélites no pequeno campo de visão dos telescópios da altura. Porém, se no mar o seu uso estava por isso praticamente impossibilitado, já em terra firme tornar-se-ia um método extremamente versátil e preciso.

O uso dos eclipses dos satélites de Júpiter para a determinação da longitude irá ser adotado com tal sucesso que revolucionará a cartografia. Em 1666, a Académie Royale des Sciences de Paris inicia um programa para cartografar França usando precisamente este método. Para tal, a precisão das tabelas com as posições relativas de Júpiter e dos seus quatro satélites construídas e publicadas por Giovanni Domenico Cassini, Cassini I (1625-1712), em 1668, foram essenciais. No século XVIII as principais Efemérides publicavam tabelas muito precisas das posições, ao longo de cada mês, dos satélites de Júpiter, e apelava-se aos marinheiros para que usassem o método para determinar as coordenadas geográficas das terras onde eventualmente aportassem.

MOVIMENTO DA LUA

Terá sido o alemão Johann Werner (1468-1522), em 1514, ao apresentar uma maneira de determinar a distância da Lua a uma estrela, usando a balestilha, o primeiro a sugerir as distâncias lunares para a determinação das longitudes. Esta técnica será depois desenvolvida por Peter Apian (1495-1552) e Gemma Frisius (1508-1555).

Um século mais tarde, em 1633, Jean-Baptiste Morin (1583-1656) apresentará ao Cardeal de Richelieu (1585-1642), ministro de Luís XIII (1601-1643), um método para a determinação das longitudes no mar. Este consistia em observar, simultaneamente, a altura da Lua e a altura das estrelas, bem como as distâncias da Lua a essas mesmas estrelas, e depois compará-las com dados fornecidos por tabelas astronômicas para um certo meridiano de referência e, assim, pela diferença horária, determinar a diferença de longitudes do lugar. Porém, são muitos os problemas que na altura se levantam para pôr em prática a ideia, levando a comissão criada por Richelieu a não lhe dar o devido crédito. Só no século XVIII os problemas levantados ao método de Morin – a falta de tabelas lunares com precisão suficiente, a falta de catálogos estelares fiáveis e a pouca precisão dos instrumentos de observação – serão finalmente ultrapassados.

No plano teórico, a resposta vem com o surpreendente desenvolvimento da teoria da gravitação de Isaac Newton (1643-1727), levado a cabo por matemáticos e astrónomos como Leonard Euler (1707-1783), Jean le Rond d’Alembert (1717-1783), Nicolas Louis de Lacaille (1713-1762), Alexis Claude de Clairaut (1713-1765) e Tobias Mayer (1723-1762)



Figura 2: Sextante.

da chamada ‘Teórica da Lua’ (assim era designado na altura o problema dos três corpos, Sol-Terra-Lua), possibilitando a elaboração de tabelas lunares e solares muito fiáveis.

Em 1766, o português José Monteiro da Rocha (1734-1819) escrevia a este propósito: «*Nestes últimos tempos tem chegado a perfeição do cálculo ao ponto que se podia desejar [...]. As Tábuas Lunares de Mayer, calculadas sobre os princípios de Euler; e as Tábuas de Clairaut, calculadas sobre a mesma teórica, raríssimas vezes passam alguma coisa de um minuto de diferença nos lugares calculados da Lua, comparados com as mais exatas observações, nos pontos da trajetória lunar, em que está sujeito a mais irregularidade o seu movimento*» – note-se que cerca de um século antes as melhores tabelas, as Rudolfinas (1627) de Kepler (1571-1630), apresentavam erros da ordem dos 12 a 15 minutos de arco.

No plano técnico, a construção de lentes de muito boa qualidade e de espelhos com muito bons índices de reflexão, bem como a construção e o aperfeiçoamento das escalas de medição, permitem medidas com precisões nunca antes atingidas. Num período de cerca de 250 anos, as medições astronómicas passariam de precisões da ordem dos 10 minutos de arco, nos tempos de Copérnico (1473-1543), para precisões, na segunda década do século XIX, de 0,1 segundos de arco.

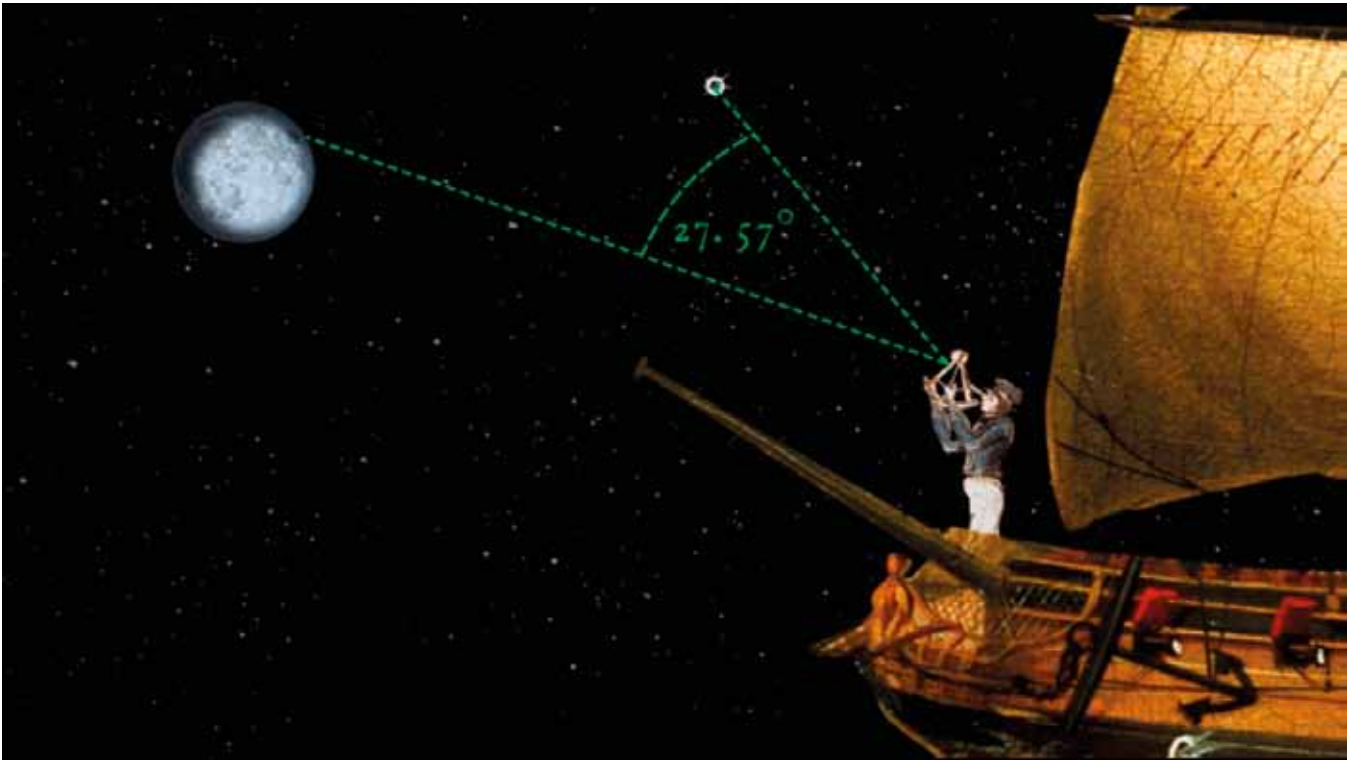
Em 1731, John Hadley (1682-1744) inventa o octante, precursor do sextante (c. 1770), instrumentos que se tornarão indispensáveis às medições astronómicas feitas a bordo (com estes instrumentos náuticos as precisões das medições a bordo passam de valores de cerca de 1° , para $1'$). Embora inventado no início dos anos 30 do século XVIII, só em meados do século é que o octante seria adotado. Por exemplo, as marinhas portuguesa e holandesa adotaram-no em meados do século XVIII, substituindo assim a balestilha que até aí usavam, ao contrário dos ingleses que já a haviam abandonado a favor do quadrante de Davis.

No que diz respeito aos catálogos estelares, temos John Flamsteed (1646-1719) a publicar em 1729 o seu famoso catálogo *Atlas Coelestis* com cerca de 3000 estrelas e que Lacaille irá complementar na década de 1750.

MÉTODO DAS DISTÂNCIAS LUNARES

Edmund Halley (1656-1742), que havia, nos anos 1698-1703, empreendido uma série de viagens marítimas para o estudo da longitude, debruçando-se especialmente sobre a declinação magnética, publica, em 1731, uma memória na qual sugere um método de distâncias lunares para a determinação das longitudes. Contudo, será apenas em 1759 que Lacaille publica, na Académie Royale des Sciences de Paris, uma memória intitulada *Mémoire sur l'observation des longitudes en mer par le moyen de la Lune*, propondo um método das distâncias lunares verdadeiramente rigoroso.

O método das distâncias lunares é considerado um método direto e pressupõe três observações simultâneas: a altura da Lua, a altura do Sol ou da estrela, e a distância da Lua ao Sol, ou a essa estrela. Seguidamente, é necessário proceder a uma série de cálculos para correção dessas observações (aparentes), dos efeitos da paralaxe e da refração, de modo a obter ‘observações verdadeiras’. A grande questão que se coloca no método é como determinar a distância lunar ‘verdadeira’. Para tal, é necessário proceder a uma série de cálculos (à época algo complicados e fastidiosos) envolvendo várias tabelas e trigonometria esférica. Na posse do valor da distância lunar ‘verdadeira’ e consultando nas efemérides os valores das distâncias lunares previamente calculadas para o meridiano de referência, determina-se a hora neste meridiano. Após a determinação da hora local (pela altura do Sol ou das estrelas), a longitude do lugar em



relação ao meridiano de referência é determinada pela diferença horária.

A ideia de Lacaille é adotada em Inglaterra, levando à publicação, em 1766, pelo astrónomo real britânico Nevil Maskelyne (1732-1811), do *Nautical Almanac* com tabelas de distâncias lunares pré-calculadas de três em três horas para o meridiano de Greenwich. Anos mais tarde, em 1772, Jérôme Lalande (1732-1807) copia-as para o *Connaissance des Temps pour l'année 1774* (só a partir de 1789 as distâncias lunares do *Connaissance des Temps* passam a ser calculadas diretamente das tabelas astronómicas).

Embora sejam Lacaille e Maskelyne que estão na origem da fixação de um protocolo de observações e cálculos das distâncias lunares, a introdução a bordo deste método deve-se a Jean-Charles de Borda (1733-1799), que vê publicado em 1779, por Pierre Lévêque (1746-1814), um protocolo por si estabelecido para a aplicação prática e efetiva do método pela marinha.

Como alternativa ao método das distâncias lunares, o astrónomo Pierre Charles Le Monnier (1715-1799) propõe, em 1751, um outro método chamado método das alturas, ou do ângulo horário. Porém, este método pressupõe o co-

▲ Figura 3: Medição a bordo de distâncias lunares usando um sextante.

[48] APRIL 1767.									
Distances of J' 's Center from \odot , and from Stars west of her									
DAYS	Stars Names.	12 Hours.		15 Hours.		18 Hours.		21 Hours.	
		o	' "	o	' "	o	' "	o	' "
1		40.	59. 11	42.	34. 44	44.	9. 51	45.	44. 35
2		53.	32. 7	55.	4. 24	56.	36. 16	58.	7. 45
3		65.	39. 18	67.	8. 27	68.	37. 14	70.	5. 39
4	The Sun.	77.	22. 36	78.	48. 58	80.	15. 1	81.	40. 46
5		88.	45. 20	90.	9. 27	91.	33. 21	92.	57. 0
6		99.	52. 6	101.	14. 34	102.	36. 52	103.	59. 1
7		110.	47. 42	112.	9. 6	113.	30. 25	114.	51. 40
8	Aldebaran	50.	36. 10	52.	4. 5	53.	31. 57	54.	5. 44
9		62.	17. 43	63.	45. 10	65.	12. 34	66.	39. 27
10	Pollux.	31.	25. 48	32.	53. 11	34.	20. 40	35.	48. 12
11		43.	7. 5	44.	35. 4	46.	3. 8	47.	31. 15
12	Regulus.	17.	51. 57	19.	20. 36	20.	49. 25	22.	18. 27
13		29.	45. 36	31.	15. 26	32.	45. 26	34.	15. 35
14		41.	48. 49	43.	19. 55	44.	54. 10	46.	22. 36
15		54.	2. 11	55.	34. 36	57.	7. 12	58.	39. 59
16		26.	16. 28	68.	0. 18	69.	34. 20	71.	8. 27

Figura 4: Distâncias lunares previstas para o meridiano de Greenwich para o mês de abril de 1767 segundo o 1º volume do *Nautical Almanac* inglês.

nhecimento prévio da longitude estimada do navio (com uma aproximação até 5°), sendo por isso considerado um método indireto. O método baseia-se em determinar o ângulo horário da Lua, sabendo a sua altura acima do horizonte (pela observação) e a sua declinação pelas tabelas de efemérides. Determinado esse ângulo horário, recorre-se às mesmas efemérides para saber a hora em que tal ângulo é observado no meridiano de referência e pela diferença horária determina-se a longitude do navio. Embora relativamente simples no plano teórico, o seu cálculo é algo fastidioso e necessita de observações muito precisas na determinação da latitude do lugar, na determinação da altura da Lua e nos valores da sua declinação (fornecidos pelas efemérides). Lacaille, na sua memória de 1759, faz uma análise crítica do método de Monnier/Pingré, estimando que $2'$ de incerteza na declinação da Lua e $4'$ de incerteza na altura da Lua e na latitude do lugar se traduzem em erros significativos na determinação da longitude, em média de 85 léguas marítimas ($1 \text{ légua} \approx 5.5 \text{ km}$).

A SOLUÇÃO MECÂNICA (O CRONÓMETRO)

Na década de 1760 atinge-se o auge do debate sobre as longitudes. Uma outra ideia, avançada no longínquo ano de 1524 por Fernando Colombo (1488-1539), da construção de um relógio que permitisse “transportar” a bordo com preci-

são a hora do meridiano de referência vê desenvolvimentos surpreendentes e torna-se ela mesma uma forte adversária aos métodos astronómicos. (A historiografia costuma referir erradamente que a ideia do relógio foi proposta em 1530 por Gemma Frisius. Na realidade, foi Fernando Colombo, na Junta de Badajoz-Elvas de 1524).

O uso do relógio para a resolução da longitude é só por si uma grande história e que viria a ter como protagonista o relojoeiro e artesão mecânico inglês John Harrison (1693-1776). Dava Sobel no seu livro *A Longitude* (1995) descreve (embora com algum facciosismo) esta longa aventura.

Em 1760, depois de quarenta anos de trabalho, Harrison conseguiu construir uma maravilha técnica, o seu relógio marítimo H4 (1760). Testado pela primeira vez numa viagem à Jamaica, tendo partido de Inglaterra no dia 18 novembro de 1761, chegou ao destino no dia 27 de janeiro de 1762, com um atraso apenas de cinco segundos. Numa segunda viagem, realizada entre 28 de março e 18 de julho de 1764, desta feita com destino aos Barbados, o H4 foi três vezes mais preciso do que o estipulado pelo *Longitude Act* (o máximo de uma variação de dois minutos em 60 dias).

Apesar do evidente sucesso do cronómetro de Harrison, o *Board of Longitude* não se deu por satisfeito. Em larga medida, devido à descrença de Maskelyne, um fervoroso adepto do método das distâncias lunares, na solução mecânica.



Figura 5: Método astronómico vs. método mecânico. Com o sextante como exemplo do primeiro e o primeiro cronómetro de Harrison, o H1 (1730-35), como exemplo do segundo.



Figura 6: O H4 (1760) de Harrison, em cima, e a réplica de Kendall, o K1 (1769).

Entretanto, em 1769, Larcum Kendall (1719-90) construiria uma réplica do H4. O K1 (assim ficou conhecido) mostrou-se igualmente preciso, como bem documentou James Cook (1728-1779) nas suas segunda (1772-75) e terceira (1776-79) viagens de exploração. Harrison ainda construiria um outro relógio, o H5 (1772), que lhe valeu a segunda metade do prémio das longitudes (a primeira foi-lhe concedida em 1765 pelo H4), ver figura 6.

Ao todo, Harrison receberia do *Board of Longitude*, entre prémios e outros apoios, um total de 23.065 libras pelos seus trabalhos e invenções.

Muitos outros, desde construtores de instrumentos a astrónomos e matemáticos, também receberiam várias quantidades monetárias sob a forma de ajudas de custo, incentivos e prémios (na realidade, o primitivo valor de 20.000 libras foi sendo, ao longo dos anos, em muito aumentado).

Tobias Mayer, ou melhor, a sua viúva, receberia, pelas suas tabelas lunares, 3.000 libras, e Euler, 300 libras pelas contribuições teóricas que lhe prestou.

A disseminação do relógio a bordo é feita lentamente. A dificuldade da sua produção em massa e o seu preço exorbitante comprometem a sua entrada a bordo como método exclusivo para a determinação da longitude no mar. Por exemplo, um cronómetro marítimo em 1810 custava cerca de 2680 francos, praticamente o salário anual de um professor francês de navegação.

Assim, durante grande parte do século XIX, o relógio e as distâncias lunares irão partilhar e complementar-se na solução do problema da determinação a bordo das longitudes.

PORTUGAL E AS LONGITUDES

Desde a aventura dos Descobrimentos que os portugueses foram desenvolvendo técnicas de navegação astronómica. Nos finais de Quatrocentos, os marinheiros portugueses já haviam solucionado o problema da determinação da latitude. E no que diz respeito à longitude, várias tentativas e soluções foram sendo ensaiadas.

Na viagem de circum-navegação (1519-22), Fernão de Magalhães (c. 1480-1521) leva consigo especificações técnicas do cosmógrafo Rui Faleiro, em que este propunha três métodos para calcular a longitude: pela latitude da Lua, pelas conjunções e oposições desta em relação às estrelas e por variação magnética. Pedro Nunes (1502-1578), o principal responsável pela transformação da náutica em verdadeira ciência, baseada em princípios matemáticos e astronómicos, também sugere os eclipses da Lua para a determinação da longitude, bem como a construção de um “instrumento de sombras” para determinação da variação magnética. O método de determinação da longitude pela variação magnética (ou declinação magnética), sugerido por João de Lisboa (?-1525) no seu *Tratado da Agulha de Marear* (1514), baseia-se no facto de a declinação magnética parecer variar na superfície da Terra regularmente com a longitude. A agulha magnética da bússola aponta para o norte magnético, que não coincide com o norte geográfico; a declinação magnética mede, assim, a diferença entre estas duas direções. Durante muitos anos pensou-se, erradamente, que havia uma lei para a declinação magnética, o que permitiria assim saber qual a verdadeira direção do norte geográfico e, conseqüentemente, a longitude de um lugar.

Ao longo dos séculos XVI e XVII, vários tratados de náutica são escritos nos quais são tratadas questões práticas de navegação ligadas à orientação astronómica em alto mar. Em meados do século XVIII, mais propriamente na década de 1760, José Monteiro da Rocha (1734-1819), um ex-jesuíta que mais tarde se tornará um dos pilares da Reforma Pombalina da Universidade de Coimbra (1772), vem do Brasil para Lisboa com o firme propósito de publicar um manuscrito que estava em vias de concluir sobre o problema das longitudes – *Methodo de achar a Longitude Geográfica no mar y na terra Pelas observações y cálculos da Lua Para o uso da Navegação Portugueza*.

Trata-se de um trabalho técnico-científico sobre um dos problemas mais importantes e atuais da astronomia náutica da época e que se encontrava, como vimos, ainda em aberto, envolvendo toda a comunidade científica internacional. Por isso, este trabalho de Monteiro da Rocha é de uma singularidade absoluta, tanto no panorama nacional como no panorama internacional. No panorama nacional, tanto quanto sabemos, o primeiro trabalho no quadro pós-newtoniano sobre o método das distâncias lunares em Portugal. No panorama internacional, poderia ele mesmo, caso tivesse sido publicado e conhecido, ter contribuído significativamente para um debate que se encontrava no auge. (Até à sua descoberta, pelo Professor Henrique Leitão, em 2005, na Biblioteca Nacional de Portugal [Ms. 511, Coleção Pombalina], este trabalho de Monteiro da Rocha nunca havia sido mencionado na historiografia).

A sua escrita foi iniciada ainda no Brasil, e talvez aí em grande parte desenvolvida, sendo porém ultimada e concluída já em Portugal (1766). Durante a sua viagem de regresso (1765), Monteiro da Rocha diz que procedeu a muitas observações a bordo e a variadíssimos cálculos na tentativa de testar e otimizar os métodos e as técnicas. Dedicado «Ao Ilustríssimo e Exmo. Senhor Conde de Oeiras, Ministro e Secretário dos Negócios do Reino», isto é, a Sebastião José de Carvalho e Melo (1699-1782), o futuro Marquês de Pombal, tem o objetivo declarado de fornecer aos pilotos nacionais um método astronómico para a determinação da longitude no mar, numa tentativa de contribuir para a «utilidade pública da Navegação Portuguesa» que «faz a maior parte dos interesses públicos, e fará sempre glorioso o nome dos Portugueses». Monteiro da Rocha mostra-se inteiramente a par das



Figura 7: 1.º volume (1803) das *Ephemerides Astronomicas*, do Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra

principais questões científicas e técnicas que envolvem o problema. Está a par dos sucessos do H4 de Harrison, mas firmemente convicto de que a questão das longitudes passa pela solução astronómica. Porém, considera que o método proposto por Lacaille tinha uma grande desvantagem, de «estar ligado a uma estrela determinada ao arbítrio do autor do Almanac». Assim, os métodos que irá propor (são cinco, sendo os dois primeiros variantes do método das alturas e os outros três do método das distâncias lunares) não fazem uso de tabelas pré-calculadas de distâncias lunares, mas sim de longitudes (celestes) da Lua. Usar a longitude da Lua e não a distância lunar tinha a vantagem, na sua opinião, de poder generalizar o método das distâncias lunares, não se ficando ‘preso’ a um reduzido número de estrelas para as quais previamente se tinham de elaborar as efemérides; ficando assim «ao arbítrio do piloto escolher aquela que conhecer e estiver na melhor situação para fazer a sua observação». Sobre

o que propõe, escreve: «*Consiste pois este método em ter o piloto uma Efeméride náutica com os lugares da Lua calculados com exactidão de quatro em quatro horas para o meridiano de Lisboa*». E fornece um “*Exemplo da Efeméride Náutica calculada ao Tempo Médio do Meridiano de Lisboa*”, onde são tabeladas (de quatro em quatro horas) para os dias 25, 27, 29 e 31 de dezembro de 1767 e «*do mesmo modo se hão-de continuar para os anos futuros*». Infelizmente, o manuscrito não é publicado nem o *Exemplo de Efeméride Náutica* passou disso mesmo.

Porém, estas questões das longitudes e das efemérides não abandonam José Monteiro da Rocha. Podemos mesmo afirmar que são questões centrais da sua futura atividade científica. Mais tarde, quando se vê envolvido na Reforma da Universidade, como um dos principais responsáveis pela conceção do moderno programa curricular para o ensino da matemática e da astronomia, Monteiro da Rocha fixa como sendo o grande objetivo do futuro Real Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra trabalhar «*com assiduidade em fazer todas as Observações, que são necessárias para se fixarem as Longitudes Geográficas; e rectificarem os Elementos fundamentais da mesma Astronomia*».

O primeiro volume das *Ephemerides Astronomicas calculadas para o meridiano do Observatório Real da Universidade de Coimbra: para uso do mesmo Observatório, e para o da navegação Portuguesa*, da responsabilidade científica de José Monteiro da Rocha, é publicado em 1803, com dados astronómicos para o ano seguinte (neste primeiro volume publica um trabalho intitulado *Calculo de Longitude*). Estas *Ephemerides Astronomicas* serão as primeiras efemérides portuguesas em que os lugares da Lua e as distâncias lunares aí tabelados são calculados diretamente das tabelas astronómicas (a “*Ephemerides Náuticas*” ou o “*Diário Astronómico*” que a Academia Real das Ciências de Lisboa vinha publicando desde 1787 copiava as suas distâncias lunares do “*Nautical Almanac*” inglês).

ALGUMAS RECOMENDAÇÕES DE LEITURA (E NÃO SÓ)

► Sobre o *Board of Longitude* e a consulta do seu espólio (à guarda da Universidade de Cambridge), que foi recentemente digitalizado, e está todo acessível online, ver aqui: <http://cudl.lib.cam.ac.uk/collections/longitude> (grande parte das imagens apresentadas neste texto foram daqui retiradas).

► Dava Sobel, *Longitude: The True Story of a Lone Genius Who Solved the Greatest Scientific Problem of His Time* (Walker Publishing Company, 1995) – foi traduzido e publicado em 2000 pela Temas e Debates. Nesse mesmo ano foi adaptado ao cinema (e conta com a participação Jeremy Irons), pode vê-lo no YouTube. Aconselho também *Time Restored: The Story of the Harrison Timekeepers and R.T. Gould, The Man who Knew (almost) Everything* (NMM & Oxford, 2006), de Jonathan Betts.

► Derek Howse, *Greenwich Time and the Discovery of the Longitude* (Oxford University Press, 1980)

► Umberto Eco, *A Ilha do Dia Antes* (Círculo de Leitores, 1996). A fabulosa aventura de Roberto de la Grive a bordo de um navio inglês para espionar o que estes sabiam da longitude.

SOBRE O AUTOR

Fernando B. Figueiredo (n. 1970) é licenciado em Física/Matemática Aplicada (Astronomia) pela Universidade do Porto e tem um mestrado em História e Filosofia da Ciência pela Universidade Nova de Lisboa. É doutorado em Matemática (especialidade em Matemática Aplicada) pela Universidade de Coimbra, com uma tese sobre a obra científica de José Monteiro da Rocha (1734-1819) na Faculdade de Matemática e no Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra, entre 1772 e 1820. Atualmente é investigador pós-doc no Departamento de Matemática/Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra (OAU) e no Centro de François Viète, da Universidade de Nantes (França).

Gazeta de Matemática

TABELA DE PUBLICIDADE 2014

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral
Tiragem: 1900
Nº de páginas: 64
Formato: 20,2 x 26,6 cm
Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.
Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.
Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

CONTACTOS



Ana Rita Ferrer
Tel.: 21 793 97 85 Tlm.: 96 184 89 66
rita.ferrer@spm.pt

ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK
Resolução: 300 dpi (alta resolução)
Margem de corte: 4 mm

LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€
Contracapa: 1100€
Verso contracapa: 990€

					
	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.



JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade do Porto
jcsantos@fc.up.pt

A FORMA DOS NÚMEROS

Qual é a origem da forma dos algarismos que usamos? Porque é que o zero se representa por 0, o um se representa por 1 e assim sucessivamente até ao nove?

Uma explicação simples e que parece ser bastante popular¹ é esta: originalmente, o algarismo 1 era desenhado com um ângulo, o algarismo 2 com dois ângulos e assim sucessivamente. Mais precisamente, os dez algarismos originais seriam então da forma que se pode ver na figura 1; os pontos vermelhos estão na figura somente para assinalar a localização dos ângulos.

Quem vê esta explicação provavelmente sente que há algo de forçado no que se refere aos algarismos 7, 8 e 9. Com efeito, já surgiram explicações alternativas (mas também baseadas em ângulos) para estes três algarismos, que podem ser vistas na figura 2.

De facto, esta explicação é totalmente fantasista. Parece ter

origem no trabalho de francês P. Voizot, que a publicou em 1899 (atribuindo a sua origem a um autor genovês). Desde aí, surgiram várias variantes da mesma ideia. De facto, na proposta original de Voizot, a forma original do 4 seria +. É claro, esta figura também tem quatro ângulos.

Acontece que teorias para a forma dos algarismos não faltam. Outra teoria, divulgada por Jacob Leupold em 1727 (que afirmava que era a teoria corrente do seu tempo), é a de que a forma dos algarismos tem origem num quadrado

¹ Ver <http://www.blogdacomunicacao.com.br/a-origem-dos-numeros/> ou <http://www.teiportuguesa.com/manual/unidade03numeros/unidade03.htm>.

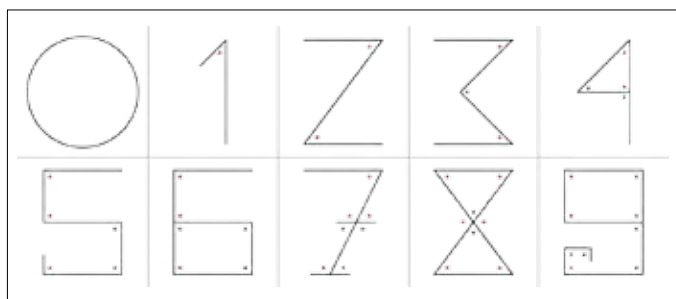


Figura 1: Relação entre a forma dos algarismos e ângulos.

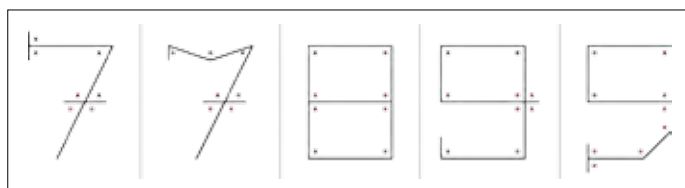


Figura 2: Alternativas para os algarismos 7, 8 e 9.

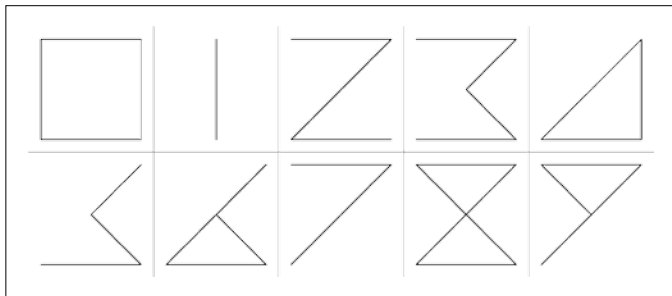


Figura 3: Explicação baseada num quadrado e nas suas diagonais.

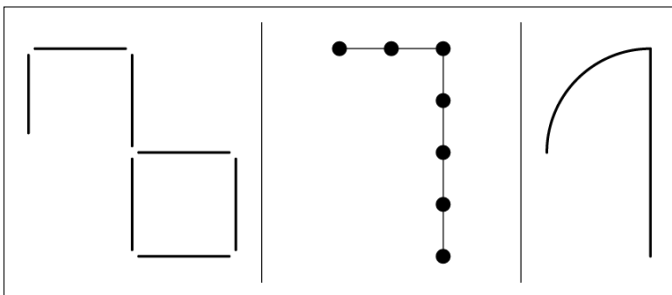


Figura 4: O algarismo 7 formado por segmentos, por pontos e por parte de uma circunferência com dois diâmetros.

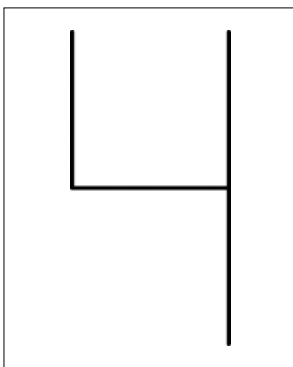


Figura 5: Símbolo empregue para representar 6.

juntamente com as suas diagonais, como na figura 3. Cada algarismo seria obtido eliminando alguns lados ou algumas semidiagonais.

Há mais teorias do mesmo género.

- ▶ Em 1833, Anton Müller sugeriu que originalmente cada algarismo seria representado por segmentos de reta (o n -ésimo algarismo teria n segmentos).
- ▶ Segundo outra teoria, defendida pelo jesuíta italiano Mario Bettini e pelo alemão Georg Phillip Harsdörffer em meados do século XVII, originalmente o n -ésimo algarismo era representado por n pontos.
- ▶ Uma teoria semelhante à de Jacob Leopold mas baseada numa circunferência com dois diâmetros (um horizontal e outro vertical) foi avançada por Johann Friedrich Weidler em 1737 e atribuída ao astrónomo árabe Abenragel (sécs. X-XI).

Na figura 4 pode ser visto como seria representado o algarismo 7 segundo estas teorias.

Acontece que a forma dos algarismos não foi sempre a mesma desde a criação da numeração indo-árabe na Índia. E o mesmo símbolo já foi usado em locais e épocas distintos para representar algarismos distintos. Por exemplo, o símbolo da figura 5, que é bastante parecido com o atual «4» era empregue na Idade Média na Arábia Oriental para representar o algarismo 6 e viria a ser usado, para o mesmo efeito, pelo monge grego Maximus Planudes. E há muitos mais exemplos deste género.²

O que estas teorias (e outras do género) têm em comum é que tentam reduzir a forma dos algarismos a um princípio unificador, concebido por um só indivíduo. Mas a origem dos algarismos é muito mais tortuosa, contingente e anárquica (e também mais interessante) do que isto.

²Veja-se Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Dover, 1993, §96 ou, com algumas reservas, Georges Ifrah, *Histoire Universelle des Chiffres*, Robert Laffont, 1994, cap. 24.



VISITE O CLUBE DE MATEMÁTICA
DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

- ✓ ARTIGOS DE OPINIÃO
- ✓ ENTREVISTAS
- ✓ PROBLEMAS
- ✓ HISTÓRIAS
- ✓ PASSATEMPOS
- ✓ PRÉMIOS

TUDO ISTO É MUITO MAIS EM WWW.CLUBE.SPM.PT



MANUEL SILVA
Universidade Nova
de Lisboa
mnas@fct.unl.pt



PEDRO J. FREITAS
Universidade
de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

GRUPOS FINITOS SIMPLES

A classificação completa dos grupos simples finitos foi uma das grandes conquistas da matemática do século XX. Demorou cerca de 50 anos a fazer e envolveu mais de cem autores, compreendendo um total de mais de 15 mil páginas, ficando o resultado conhecido com “o teorema enorme”.

Num texto anterior falámos da recente descrição do grupo E_8 e de todo o esforço envolvido neste trabalho. Ora, o grupo E_8 tinha surgido como um elemento excecional na classificação dos grupos de Lie simples, feita à custa de certas estruturas combinatórias chamadas diagramas de Dynkin. Este tipo de teoria de classificação não começou, evidentemente, com os grupos de Lie. Um dos casos mais próximos e espetaculares deste tipo de resultado foi a classificação de todos os grupos simples finitos.

Um grupo é um conjunto com uma operação associativa, com elemento neutro, e para a qual todo o elemento tem inverso. Os exemplos mais significativos são os conjuntos de Transformações de um conjunto que deixam uma certa estrutura desse conjunto invariante. Por exemplo, as permutações do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, que deixam invariante a cardinalidade. Podemos também pensar numa figura geométrica simples, como um quadrado, e pensar quais são as isometrias do plano que deixam o quadrado invariante: há três rotações, quatro reflexões e a identidade (este grupo pode ser visualizado em <http://www.cs.umb.edu/~eb/d4/>). Em qualquer dos casos anteriores, a operação de grupo em causa é a composição.

Uma das ações mais importantes de um grupo G é a ação de conjugação sobre si mesmo: cada elemento g age sobre um elemento $x \in G$ da seguinte forma: $x \mapsto g^{-1}xg$. Os subgru-

pos de G (subconjuntos de G que também são grupos) que se mantêm invariantes para esta ação são chamados subgrupos normais. Chamamos classe de conjugação de um elemento x ao conjunto de elementos de G que são conjugados de x , isto é, que têm a forma $g^{-1}xg$. Os subgrupos invariantes podem ser então vistos como subgrupos que são a união de várias classes de conjugação.

Num grupo em que a operação é comutativa, todos os subgrupos são normais. No caso mais geral, há sempre dois subgrupos normais de G : todo o G e o grupo formado apenas pela identidade. Se não houver mais do que estes, o grupo diz-se simples.

Fixemo-nos agora nos grupos finitos. Dentro destes, os grupos simples desempenham um papel semelhante ao dos primos para os números inteiros (até as próprias definições são de certo modo semelhantes). Surgem, naturalmente, as seguintes perguntas: quais são os grupos finitos simples, e será que com eles conseguimos construir todos os grupos finitos? Curiosamente, a segunda pergunta é mais simples de responder, e a resposta é afirmativa: qualquer grupo finito pode ser visto como uma “torre” de grupos simples (o nome técnico da “torre” é série de composição). Há uma diferença importante em relação aos inteiros: com uma certa coleção de grupos simples é possível construir vários grupos finitos (dependendo

de como se “empilham”). A primeira pergunta é muito mais difícil de responder: a classificação completa demorou cerca de 50 anos a fazer – entre 1955 e 2008, sensivelmente, houve artigos publicados com contribuições explícitas para a classificação, embora houvesse trabalho nesta área desde o século XIX. Envolveu mais de 100 autores e compreende um total de mais de 15 mil páginas (por isso é que este resultado é conhecido como “o teorema enorme” – ver, por exemplo, o artigo “An enormous theorem: the classification of finite simple groups”, de Richard Elwes, disponível na internet).

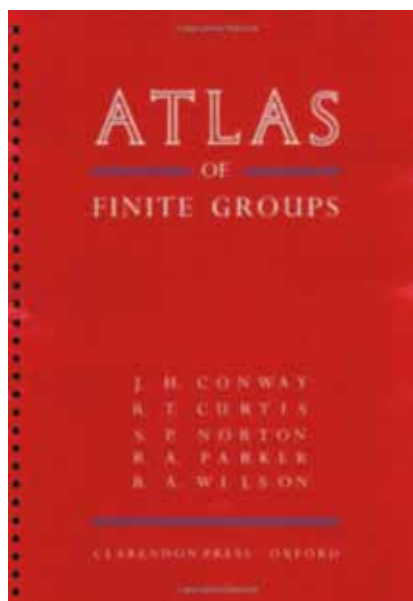
Os grupos simples foram classificados em três famílias infinitas, às quais se junta uma coleção de 26 grupos ditos esporádicos (a classificação é descrita com algum detalhe na *List of finite simple groups* da Wikipedia). Destes, houve um que se tornou particularmente famoso, o Monstro, que tem o seguinte número de elementos:

808, 017, 424, 794, 512, 875, 886, 459, 904, 961,
710, 757, 005, 754, 368, 000, 000, 000.

Infelizmente, e ao contrário do que aconteceu com os grupos de Lie, não há nenhuma estrutura combinatória que descreva os grupos simples, o que explica, em parte, a complexidade das demonstrações e da classificação final. No entanto, muitos destes grupos são grupos de permutações, ou grupos de transformações que deixam uma certa estrutura geométrica invariante, tal como nos exemplos anteriores.

Para além de se saber quais são os grupos simples, é importante saber um pouco mais sobre eles. Há certas funções, definidas num grupo e com valores complexos, que contêm informação importante sobre o grupo, chamadas caracteres, que passamos a descrever informalmente. Como dissemos, é natural esperar que um grupo atue sobre certos conjuntos, e quando os elementos atuam como aplicações lineares de um espaço vetorial nele próprio, a ação leva o nome de representação. Uma representação faz assim corresponder a cada elemento do grupo uma aplicação linear, e o carácter é então a função que faz corresponder a cada elemento o traço dessa aplicação.

Mais uma vez, há elementos mais simples entre os caracteres, a partir dos quais se podem obter todos os outros: são os caracteres irredutíveis. É conhecido que, num grupo finito, há tantos caracteres irredutíveis como classes de conjugação, sendo que cada carácter é constante em cada classe. Portanto, cada grupo finito tem uma tabela de caracteres, que é uma matriz quadrada, com uma linha por cada carácter irredutível e uma

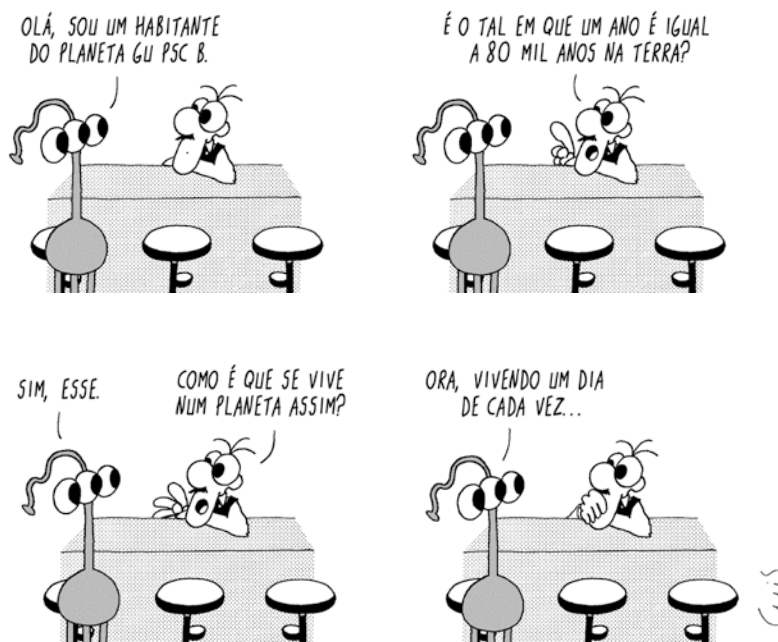


coluna por cada classe de conjugação; na linha i e na coluna j aparece o valor do carácter i na classe j .

O livro *Atlas of Finite Groups*, publicado em 1985 e reeditado com correções em 2003 (reconhecível pela sua capa vermelha e pelo seu grande formato, 42 cm por 30 cm), tem uma lista de vários factos sobre 93 destes grupos simples finitos, nomeadamente tabelas de caracteres, cujas matrizes chegam a ocupar páginas inteiras.

Este processo não se fez sem revezes. Em 1983, Gorenstein anunciou que o teorema de classificação estava completo (levando à publicação do *Atlas* dois anos depois), quando na verdade havia uma demonstração de um caso que não estava completamente correta, tendo havido correções de erros até 2008. Em 1955, Gorenstein, Lyons e Solomon começaram a tentar encontrar uma demonstração revista, na esperança de simplificar o trabalho monumental, projeto que está ainda em curso.

Quando pensamos no trabalho de provar um teorema matemático, podemos por vezes permanecer na imagem clássica, imaginando um matemático, no seu gabinete, estudando afincadamente e partilhando algumas conversas com os seus colegas, até ao momento em que tem uma intuição salvadora, que o leva à demonstração pretendida. A classificação de que falámos terá tido certamente momentos destes, mas, mais do que a sua soma, é um trabalho de colaboração monumental, envolvendo mesmo pessoas de várias gerações, trabalhando para um objetivo comum.



Publicado originalmente no jornal Público, em 21/05/2014. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

Adérito Araújo Universidade de Coimbra

EDITORES:

Daniel Pinto Universidade de Coimbra

Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:

António Machiavelo Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Arsélio Martins** Escola Secundária José Estevão, Aveiro • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Joana Latas** HDB - Tourism Investments, Departamento de Educação, São Tomé e Príncipe • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Marcelo Viana** IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Paulus Gerdes** Instituto Superior de Tecnologias e Gestão, Boane, Moçambique & Academia Africana de Ciências • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

Sílvia Dias SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

Dossier – Comunicação e imagem

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Sílvia Dias SPM

PROPRIEDADE:

Sociedade Portuguesa de Matemática

Av. República 45, 3^a Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

TIRAGEM **1500 Exemplares**

ISSN **0373-2681** • ICS **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**



A Tautócrona, a Evoluta e o Relógio de Pêndulo de Huygens

HELENA MENA MATOS^a; TERESA CARRAPA^b

UNIVERSIDADE DO PORTO^a; ESCOLA SECUNDÁRIA DE PAREDES^b

mmatos@fc.up.pt^a; mtcarrapa@gmail.com^b

O processo de aplicação da matemática nem sempre consiste em pegar numa sua teoria e aplicá-la num determinado domínio ou problema. O que acontece muitas vezes é não existir a matemática requerida e nesse caso nova matemática emerge como resultado da aplicação.

INTRODUÇÃO

O processo de aplicação da matemática nem sempre consiste em pegar numa sua teoria e aplicá-la num determinado domínio ou problema. O que acontece muitas vezes é não existir a matemática requerida e nesse caso nova matemática emerge como resultado da aplicação. Um exemplo disso é a criação, no século XVII, da teoria das evolutas de Huygens, que surge na sequência dos seus estudos sobre o pêndulo e aparece no tratado *Horologium Oscillatorium* (1673). O problema da determinação da longitude, associado à medição exata do tempo, fez com que Huygens se interessasse pela construção e pelo aperfeiçoamento dos relógios, levando-o à construção do relógio de pêndulo. O pêndulo circular, não sendo isócrona, conduziu-o ao problema da tautócrona, que consiste em encontrar a curva ao longo da qual um corpo sem velocidade inicial e apenas sujeito à força da gravidade chega ao ponto mais baixo sempre no mesmo intervalo de tempo, independentemente do seu ponto de partida. Huygens descobre e demonstra por processos geométricos que a cicloide invertida é tautócrona, mas fica com um novo problema. Como deve ser construído o pêndulo para que a sua massa descreva uma cicloide? A resposta seria dada resolvendo outra questão matemática: encontrar a curva cuja tangente em cada ponto é normal a uma dada cicloide, isto é, encontrar a evoluta da cicloide. Mais uma vez, por processos geométricos, Huygens consegue demonstrar que a evoluta da cicloide é outra cicloide, sendo-lhe finalmente possível idealizar um ajustamento mecânico para construir o pêndulo isócrona.

A partir da invenção do cálculo diferencial por Newton e Leibniz, este último discípulo de Huygens, os problemas de mecânica começam a ser resolvidos usando equações diferenciais. Em 1690, Jacob Bernoulli demonstrou novamente que a cicloide é tautócrona estabelecendo uma equação diferencial para essa curva e resolvendo-a.

Neste artigo, recorrendo à matemática dos nossos dias, apresentaremos a resolução analítica do problema da tautócrona e a determinação da evoluta da cicloide invertida, os dois resultados que permitiram a Huygens a construção do relógio de pêndulo isócrona.

RELÓGIO DE PÊNDULO DE HUYGENS

No século XVII tornou-se imperioso encontrar um método para medir a longitude que, sem referências terrestres, permitisse nas grandes viagens marítimas identificar a localização das embarcações. Este problema estava intimamente ligado ao da determinação precisa do tempo. Em teoria, como a 15° de longitude corresponde uma hora de diferença horária, se fosse possível manter a bordo um relógio acertado pela hora de um local de longitude conhecida, ao marcar nesse relógio o meio-dia local, a diferença entre as horas locais permitiria determinar a diferença das suas longitudes e consequentemente determinar a longitude do local. Contudo, na época, os melhores relógios atrasavam-se ou adiantavam-se vários minutos por dia, impossibilitando a manutenção do tempo de referência nos navios.

Galileu (1564-1642) foi o primeiro a conceber um relógio regulado por um pêndulo, esperando com a sua utilização obter a precisão na medição do tempo que faltava aos relógios da época. Do estudo que fez sobre o pêndulo simples acreditou que este seria isócrona, isto é, o tempo de uma oscilação completa seria independente da amplitude da mesma. Consequentemente, as variações de amplitude provocadas quer pela resistência do ar quer pelo impulso para manter o movimento pendular não alterariam o seu período, pelo que este poderia ser usado como uma medida constante do tempo. Embora tenha deixado o seu projeto por finalizar e não tenha construído nenhum relógio de pêndulo, deixou a ideia para a sua construção.

Retomando a ideia de Galileu, Huygens (1629-95) construiu o primeiro relógio de pêndulo em 1657, e desde então trabalhou na conceção e no desenvolvimento de relógios,

tentando criar o relógio que pudesse ser utilizado como cronómetro marítimo. Em 1657, ciente de que o pêndulo simples ao oscilar descreve um arco de circunferência que não é isócrona, embora para pequenas amplitudes o seja aproximadamente, questionou-se se existiria uma curva ao longo da qual o movimento do pêndulo fosse independente da amplitude das oscilações. Huygens tentou encontrar essa curva empiricamente colocando o pêndulo entre duas placas metálicas que limitavam o seu balanço e que tinham como função acelerar o movimento à medida que o pêndulo se afastava da vertical. Quando o pêndulo oscilasse com amplitudes maiores, as placas produziram um encurtamento do fio, correspondendo a esse encurtamento um aumento de velocidade, de tal modo que o tempo gasto a descrever esse arco de maior amplitude se tornasse igual ao tempo necessário para percorrer um arco de pequena amplitude sem qualquer restrição.

A construção do pêndulo isócrona envolveu assim a resolução de dois problemas:

1. Encontrar a curva tautócrona ao longo da qual a massa do pêndulo deve mover-se.
2. Encontrar um modo de suspender o pêndulo, garantindo que este se move ao longo da curva tautócrona.

Estes dois problemas serão resolvidos nas secções seguintes, usando as ferramentas atuais.

CURVATURA E EVOLUTA

Uma curva plana pode ser interpretada como o caminho traçado por um ponto a mover-se sobre um plano. Se $\alpha(t)$ representar o vetor posição desse ponto no instante t , a curva será descrita por uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde I é um intervalo de \mathbb{R} e $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Trata-se do conceito de curva parametrizada e designa-se α por curva parametrizada e $\alpha(I)$ por traço da curva.

No caso de ambas as componentes de α possuírem derivadas de qualquer ordem, a curva diz-se suave. No que se segue, todas as curvas serão consideradas suaves.

O vetor velocidade da curva parametrizada α é $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ que, quando não nulo, define a direcção da tangente à curva no instante t . Se o vetor velocidade de α nunca se anula, a curva diz-se regular e tem uma direcção tangente bem definida em cada instante. Se a curva não é

regular, os pontos onde $\alpha'(t) = \vec{0}$ chamam-se pontos singulares de α .

O comprimento de arco de uma curva parametrizada regular α a partir do ponto $\alpha(t_0)$ é a função

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(u) du,$$

onde $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ é a velocidade escalar da curva α no instante t .

Note-se que se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para qualquer t , então $s(t) = t - t_0$, isto é, t mede o comprimento de arco a menos de uma constante.

Dizemos que uma curva está parametrizada pelo comprimento de arco quando é percorrida com velocidade escalar constante igual a 1.

Se α é uma curva definida no intervalo $[a, b]$, regular e não parametrizada pelo comprimento de arco, pode ser reparametrizada de tal modo que tenha velocidade escalar constante igual a 1. Com efeito, uma vez que $s'(t) = v(t) > 0$, a função s é estritamente crescente e, portanto, injetiva. Assim, s é uma bijecção de $[a, b]$ em $[s(a), s(b)]$. Chamando h à inversa de s , tem-se que $\alpha \circ h$ é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

Quando pensamos numa curva, é provável que a primeira imagem que nos ocorra seja a de uma trajetória com alteração contínua da direcção. Quanto maior for a alteração da direcção por unidade de distância percorrida, mais acentuada será a curva. Assim, a forma da curva está associada à rapidez de alteração da sua direcção, aquilo a que chamamos curvatura. Com a curvatura pretende-se medir quanto “curva” uma curva.

Como medir a curvatura de uma curva? De acordo com a nossa intuição, a curvatura de uma reta deverá ser zero e a curvatura de uma circunferência deverá ser igual em todos os pontos e diminuir quando o raio aumenta. No caso de uma curva parametrizada qualquer, $t \rightarrow \alpha(t)$, suave e regular, a parametrização define um sentido de percurso ao longo do traço da curva correspondente ao crescimento do parâmetro t . A direcção da curva num ponto P é a direcção do vetor tangente à curva nesse ponto, que pode ser medida pelo ângulo orientado φ que esse vetor faz com o semieixo positivo Ox . Medir a rapidez com que a curva muda a direcção equivale a medir a variação do ângulo φ de um ponto para outro comparada com a distância percorrida. Isto sugere

re que a curvatura em qualquer ponto de α seja medida pela taxa de variação de φ com respeito ao comprimento de arco. A curvatura assim definida pode ser positiva, negativa ou nula. O valor absoluto da curvatura mede o grau de encurvamento, diminuindo quando a curva se torna menos acentuada. O sinal indica a orientação da curva sendo a curvatura positiva ou negativa consoante a curva vire à esquerda ou à direita.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A parametrização define a orientação da curva no sentido em que s cresce. Seja $\vec{t}(s) = \alpha'(s)$ o vetor unitário tangente a α no ponto $\alpha(s)$. Para cada $s \in I$, define-se o vetor unitário normal $\vec{n}(s)$ que se obtém de $\vec{t}(s)$ por rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido positivo (anti-horário).

Assim se $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ então $\vec{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ e $\vec{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$. Sendo $\varphi(s)$ o ângulo orientado que $\vec{t}(s)$ faz com o semieixo positivo Ox , a curvatura com sinal de α no ponto $\alpha(s)$ é a taxa de variação da direção do vetor tangente a esse ponto com respeito ao comprimento de arco, isto é

$$k(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds}.$$

Através de alguns cálculos simples conclui-se que $k(s) = \vec{t}'(s) \cdot \vec{n}(s)$ ou, alternativamente, $k(s) = x'y'' - x''y'$.

Se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ for uma curva regular não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco, $\vec{t} = \frac{1}{v}(x', y')$, $\vec{n} = \frac{1}{v}(-y', x')$ e facilmente se verifica que $\vec{t}' = kv\vec{n}$ e $\vec{n}' = -kv\vec{t}$. Neste caso define-se a curvatura de α como a curvatura de uma qualquer reparametrização de α pelo comprimento de arco, sendo a sua expressão dada por:

$$k = \frac{(x'', y'') \cdot (-y', x')}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se $\alpha(t_0)$ é um ponto regular de uma curva parametrizada α , o centro de curvatura de α em $\alpha(t_0)$ é o ponto

$$\alpha_*(t_0) = \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}\vec{n}(t_0)$$

e a grandeza

$$\frac{1}{|k(t_0)|}$$

é o raio de curvatura de α em $\alpha(t_0)$.

O centro de curvatura situa-se na normal à curva no ponto $\alpha(t_0)$ a uma distância igual ao raio de curvatura e está à "esquerda" da curva (no sentido de $\vec{n}(t_0)$) se $k(t_0) > 0$ e à "direi-

ta" da curva (no sentido de $-\vec{n}(t_0)$) se $k(t_0) < 0$. Em qualquer caso o centro de curvatura situa-se no lado côncavo da curva.

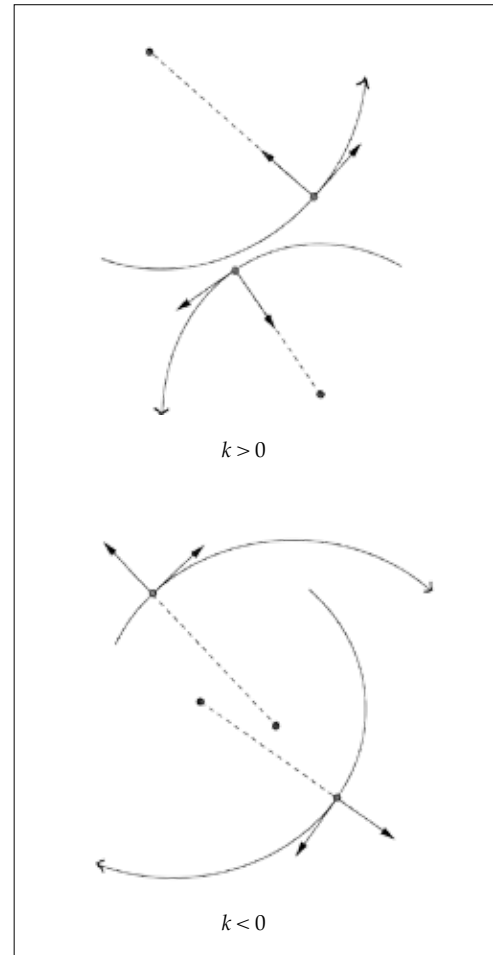


Figura 1: Centros de curvatura.

O lugar geométrico dos centros de curvatura de uma curva parametrizada regular α é uma nova curva α_* com o nome de evoluta de α . Assim,

$$\alpha_*(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\vec{n}(t). \quad (t \in I).$$

Se α e α_* são regulares em $t = t_0$, então a tangente à evoluta em $\alpha_*(t_0)$ é a reta normal a α em $\alpha(t_0)$ e vice-versa. De facto, derivando $\alpha_*(t)$ em ordem a t , tem-se

$$\begin{aligned} \alpha_*' &= \alpha' + \left(\frac{1}{k}\right)' \vec{n} + \frac{1}{k} \vec{n}' \\ &= v\vec{t} - \frac{k'}{k^2} \vec{n} - \frac{1}{k} kv\vec{t} \\ &= -\frac{k'}{k^2} \vec{n}. \end{aligned}$$

O PROBLEMA DA TAUTÓCRONA

O problema da tautócrona consiste em determinar a curva plana ao longo da qual um corpo sem velocidade inicial e sujeito somente à força da gravidade desliza até ao ponto mais baixo da curva sempre no mesmo intervalo de tempo, independentemente do seu ponto de partida.

Considere-se um arame com a forma de uma curva suave que representa meia oscilação do pêndulo, e deixe-se uma conta partindo do repouso na posição (x_0, y_0) escorregar ao longo do arame até ao ponto mais baixo, que assumiremos como a origem $(0, 0)$. Se a conta escorrega sem fricção, então, pelo princípio de conservação da energia mecânica, a energia cinética em qualquer instante será igual à variação da energia potencial,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y_0 - y)$$

onde m representa a massa da conta, $v = -\frac{ds}{dt}$ e s o comprimento de arco entre a origem e o ponto (x, y) .

Da equação anterior resulta

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(y_0 - y)}$$

Considerando $s = f(y)$, o tempo de descida desde a altura y_0 até à origem é dado por

$$\begin{aligned} T(y_0) &= \int_{y_0}^0 -\frac{\frac{ds}{dy}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} dy \\ &= \int_0^{y_0} \frac{f'(y)}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} dy. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = y_0z$, obtém-se

$$\begin{aligned} T(y_0) &= \int_0^1 \frac{f'(y_0z)}{\sqrt{2g(y_0 - y_0z)}} y_0 dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{f'(y_0z)}{\sqrt{(1-z)}\sqrt{y_0}} y_0 dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{f'(y_0z)\sqrt{y_0}}{\sqrt{(1-z)}} dz. \end{aligned}$$

Para que t seja constante, deverá ter-se

$$\frac{\partial}{\partial y_0} (f'(y_0z)\sqrt{y_0}) = 0,$$

o que conduz à equação diferencial

$$2f''(y)y + f'(y) = 0 \quad \text{para } 0 < y < y_0.$$

Substituindo f' por g , obtemos uma equação diferencial de primeira ordem homogénea, que tem como solução geral

$$g(y) = ce^{-\frac{1}{2}\ln(y)} = \frac{c}{\sqrt{y}}$$

onde c é uma constante positiva, pois g terá de ser positiva dado que f' é uma função crescente.

Por outro lado, da igualdade

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

resulta

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1$$

donde

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{(f'(y))^2 - 1}$$

e integrando ambos os membros em ordem a y

$$x = \pm \int \sqrt{\left(\frac{c}{\sqrt{y}}\right)^2 - 1} dy = \pm \int \sqrt{\frac{c^2 - y}{y}} dy.$$

O integral pode ser resolvido através da substituição

$$y = c^2 \left(\frac{1 - \cos \theta}{2}\right) = c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$, obtendo-se:

$$x = \pm \frac{c^2}{2} (\theta + \operatorname{sen} \theta) + k$$

onde k é a constante de integração.

Assim, a curva que procuramos é parametrizada por

$$x = \frac{c^2}{2} (\theta + \operatorname{sen} \theta) + k$$

$$y = \frac{c^2}{2} (1 - \cos \theta)$$

para $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Para determinar k basta ter em conta que esta curva deve passar na origem. Para $y = 0$ resulta que $\cos \theta = 1$ logo $\theta = 0$. Portanto, para que se tenha $x = 0$ deve ter-se $k = 0$.

A constante c é determinada exigindo que a curva passe em $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, isto é resolvendo o sistema

$$x_0 = \frac{c^2}{2} (\theta_0 + \operatorname{sen} \theta_0)$$

$$y_0 = \frac{c^2}{2} (1 - \cos \theta_0)$$

em ordem a $c > 0$ e θ_0 .

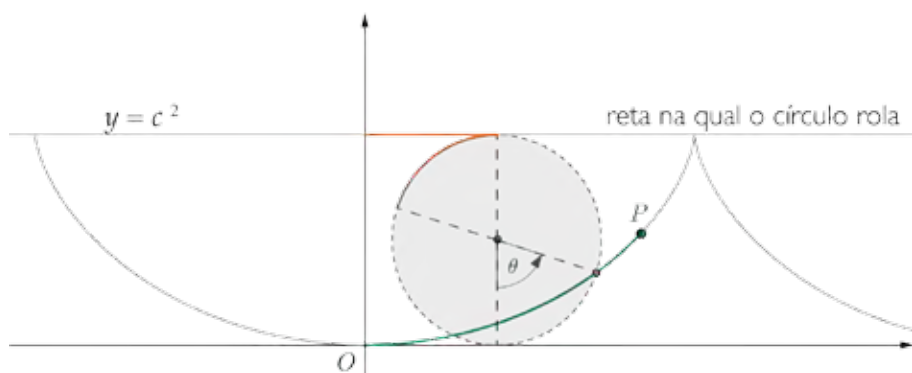


Figura 2: A curva que liga O a P é parte de uma cicloide invertida.

Este sistema pode ser resolvido em ordem a c e $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$, em função de x_0 e y_0 se e só se $0 < \left| \frac{y_0}{x_0} \right| \leq \frac{2}{\pi}$. Verifica-se facilmente que assim é, uma vez que a função h definida por

$$h(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{1 - \cos \theta}{\theta + \sin \theta}$$

com $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ é estritamente crescente, logo injetiva, e tem por contradomínio $[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}] \setminus \{0\}$.

A curva encontrada é descrita pelas equações paramétricas

$$x = \frac{c^2}{2} (\theta + \sin \theta)$$

$$y = \frac{c^2}{2} (1 - \cos \theta)$$

com $\theta \in [-\pi, \pi]$ e facilmente se verifica que é parte da cicloide invertida traçada por um ponto de uma circunferência de raio $\frac{c^2}{2}$ que rola sem deslizar por baixo e ao longo da reta $y = c^2$ (fig. 2).

Facilmente se verifica que o movimento de uma conta ao longo deste arco, partindo do repouso e sujeita apenas à força da gravidade, é um movimento harmónico simples em torno da origem com período

$$T = 4\pi c \sqrt{\frac{1}{2g}}$$

independente da amplitude.

O PROBLEMA DA SUSPENSÃO DO PÊNDULO

Como já foi dito, a ideia de Huygens era a de colocar o pêndulo entre duas placas metálicas que limitavam o seu balanço

de modo a que o pêndulo descrevesse uma trajetória isócrona. Embora Huygens não soubesse a forma a dar a essas placas e a sua determinação tenha sido empírica, ele tinha uma justificação teórica. Na figura 3, a trajetória do pêndulo representada no manuscrito é constituída por arcos circulares GK , EG e AE cujos centros são H , F e B e cujos raios vão sendo cada vez menores. Estes pontos atuam como centros de rotação e em qualquer instante o fio é perpendicular ao arco que descreve. Cada ponto da placa metálica é visto como um centro de rotação instantâneo ou centro de curvatura, isto é, as placas constituem o lugar geométrico dos centros de curvatura da curva descrita pela massa do pêndulo, ou seja, a sua evoluta. Quando o fio oscila enrolando e desenrolando ao longo de uma placa, a parte livre do fio é mantida esticada, sendo normal à trajetória do pêndulo e tangente à superfície da placa no ponto de contacto. Huygens descobriu a propriedade que relaciona a curva descrita pelo pêndulo com a curva das placas metálicas. A normal à trajetória pendular deverá ser tangente à curva das placas. Em 1656, ele não conhecia nenhuma das curvas.

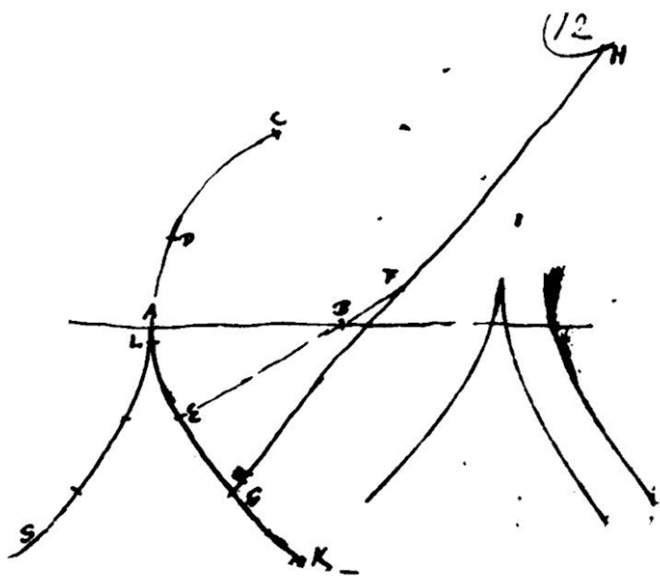


Figura 3: Manuscrito com as restrições do pêndulo de 1657 (imagem retirada de [5]).

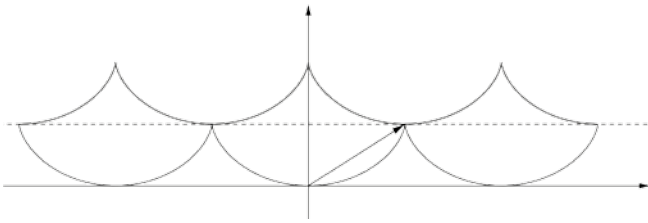


Figura 4: Cicloide invertida e a sua evoluta.

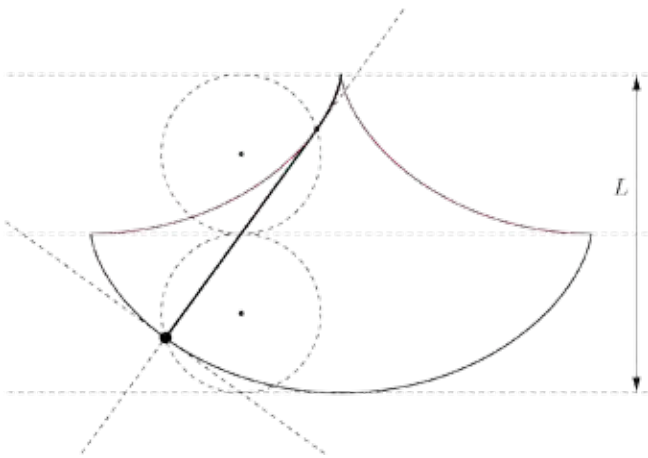


Figura 5: Pêndulo isócrono.

Em dezembro de 1659, Huygens demonstrou que a curva tautócrona era uma cicloide e a sua evoluta era outra cicloide. A forma das placas metálicas é assim descrita pela evoluta à cicloide invertida obtida na secção anterior.

Dada a cicloide invertida parametrizada por $\alpha(\theta) = (r\theta + r \operatorname{sen} \theta, r - r \operatorname{cos} \theta)$, temos

$$\alpha'(\theta) = (r + r \operatorname{cos} \theta, r \operatorname{sen} \theta) \quad \alpha''(\theta) = (-r \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{cos} \theta),$$

logo

$$k(\theta) = \frac{(r + r \operatorname{cos} \theta)(r \operatorname{cos} \theta) - (r \operatorname{sen} \theta)(-r \operatorname{sen} \theta)}{r^3 ((1 + \operatorname{cos} \theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} r \sqrt{1 + \operatorname{cos} \theta}}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_*(\theta) &= \alpha(\theta) + \frac{1}{k(\theta) \|\alpha'(\theta)\|} (-y'(\theta), x'(\theta)) \\ &= (r\theta + r \operatorname{sen} \theta, r - r \operatorname{cos} \theta) + 2(-r \operatorname{sen} \theta, r + r \operatorname{cos} \theta) \\ &= (r\theta - r \operatorname{sen} \theta, 3r + r \operatorname{cos} \theta) \\ &= (r(\theta - \pi) + r \operatorname{sen}(\theta - \pi) + r\pi, r - r \operatorname{cos}(\theta - \pi) + 2r) \\ &= \alpha(\theta - \pi) + (r\pi, 2r). \end{aligned}$$

A última linha mostra que a evoluta de uma cicloide invertida é a mesma curva trasladada para outra posição (fig. 4).

Para construir o pêndulo isócrono (fig. 5), que teoricamente marca o tempo certo¹, basta determinar o comprimento do fio a partir da fórmula do período,

$$L = \frac{t^2 g}{4\pi^2},$$

moldar duas placas com a forma da cicloide gerada por uma circunferência de diâmetro $\frac{l}{2}$ e pendurar o pêndulo entre elas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Gibson, C. G., *Elementary Geometry of Differentiable Curves: an undergraduate introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [2] Pressley, A., *Elementary Differential Geometry*, Springer-Verlag, London, 2001.
- [3] Rutter, John W., *Geometry of Curves*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.
- [4] Teixeira, F. G., *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*, Tome II, Éditions Jacques Gabay, 1995.
- [5] Joella G., *Unrolling Time, Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [6] Zwikker, C., *The Advanced Geometry of Plane Curves and Their Applications*, Dover Publications, Inc., New York, 2005.

SOBRE AS AUTORAS

Helena Mena Matos é licenciada e doutorada em Matemática pela Universidade do Porto, sendo atualmente docente no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências dessa Universidade.

Teresa Carrapa é licenciada em Matemática – Ramo de Formação Educacional e mestre em Matemática para Professores pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Atualmente é docente na Escola Secundária de Paredes.

¹ Na prática a utilização das placas foi a origem de vários problemas que alteravam a precisão do relógio, pelo que a solução adotada foi manter o pêndulo com pequenas oscilações.



NUNO CARMANEIRO
Universidade de Aveiro
nfc@ua.pt

UMBERTO ECO E A LONGITUDE

Uma viagem com Umberto Eco à procura da solução para o problema da longitude.

Umberto Eco é um verdadeiro “príncipe das letras” – romancista, filósofo, linguista, especialista da Idade Média e noto bibliófilo, é ainda o presidente da Escola Superior de Estudos Humanísticos da Universidade de Bolonha. Os seus romances, muitos deles ditos “históricos”, são grandes ensaios narrativos que exploram sobretudo as questões do tempo e da construção da memória, mas também o relacionamento entre o conhecimento científico e o mundo religioso.

No romance *A Ilha do Dia Antes*, publicado em 1994, seguimos a vida atribulada de Roberto de la Grive, um náufrago nos mares do sul que encontra um navio abandonado e ali se refugia. A algumas milhas do navio, Roberto consegue avistar uma ilha, próxima mas infinitamente distante, já que ele não sabe nadar e todos os métodos alternativos de navegação redundam em fracasso.

A história decorre no ano de 1643 e acabamos por descobrir que tanto o navio inicial onde viajava Roberto como o *Daphne*, onde se refugiou, tinham por missão encontrar o *punto fijo*, nome dado ao antimeridiano de Greenwich.

Umberto Eco descreve os vários métodos propostos ao tempo para resolver o problema da longitude, incluindo um

particularmente bizarro que faz uso do “pó da simpatia”, uma substância que aplicada no país de origem a um punhal que tinha ferido um cão, o faria latir de dor onde quer que se encontrasse. A ferida do pobre animal era mantida aberta durante a viagem e os seus latidos indicavam que alguém estaria a fazer uso da substância à hora pré-definida.

Num dos momentos mais poéticos e complexos do livro, Gaspar, um padre jesuíta que se escondia no barco, faz uma tentativa de atingir a ilha com um aparelho submersível. Roberto observa a ilha que acreditava situar-se do outro lado do antimeridiano e, como tal, do outro lado da linha das datas, e duvida da possibilidade de alguma vez voltar a vê-lo:

“Mas claro, o padre Gaspar bem lhe dissera, a Ilha que ele via diante de si não era a Ilha do dia de hoje, mas sim a de ontem... ... Podia esperar ver agora naquela praia, onde era ainda ontem, uma pessoa que descera para a água hoje?... ... E como todo o prodígio do meridiano se joga entre o ontem e o amanhã, e não entre o ontem e o depois de amanhã, ou amanhã e anteontem, agora já tinha a certeza de que daquele mal o padre Gaspar nunca mais sairia.”



GONÇALO MORAIS
Instituto Superior de
Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM

ROGÉRIO MARTINS

Rogério Martins, conhecido do grande público sobretudo pelo programa “Isto é Matemática”, é docente do Departamento de Matemática da FCT/UNL. Trabalha na área dos Sistemas Dinâmicos, na qual fez o doutoramento, sob orientação do professor Rafael Ortega, da Universidade de Granada. Comunicador nato, foi um dos dez finalistas do Famelab 2010, onde na meia final¹, quase sem recursos, explicou o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Rosto do referido programa televisão, o qual foi nomeado em 2013 pela Sociedade Portuguesa de Autores como Melhor Programa de Entretenimento, tendo ganho no mesmo ano o Prémio Ciência Viva – Montepio. A importância do projeto foi também reconhecida além fronteiras, tendo sido agraciado no Brasil com a Homenagem Especial Ver Ciência 2013, da Mostra Ver Ciência. É um homem de muitas facetas, e procurámos nesta entrevista conhecer quem habitualmente nos *entra pela casa adentro sem ser convidado*.

GONÇALO Tendo tu um percurso *standard* na tua formação científica, licenciatura, mestrado e doutoramento, houve uma mudança de área entre o mestrado e o doutoramento, certo?

ROGÉRIO Eu não diria tanto uma mudança de área, mas mais uma mudança de perspetiva. Fiz, de facto, equações diferenciais nos dois, embora no doutoramento tenha olhado para as equações diferenciais mais do ponto de vista dos sistemas dinâmicos, passando a haver mais geometria e menos contas.

GONÇALO E o que é que motivou essa mudança de perspetiva?

ROGÉRIO Eu gosto de ver o lado geométrico das coisas, o lado intuitivo. Todos nós puxamos mais para o lado em que temos mais habilidade. Gosto bastante de poder explicar às pessoas aquilo que estou a investigar. Uma das palestras que mais tenho dado no secundário é sobre sincronização que é justamente um dos temas em que tenho trabalhado, aliás, que também trabalhei contigo. Durante algum tempo eu não sabia se escolhia os meus temas de investigação porque eram aqueles sobre os quais era mais fácil falar. Um dia, eu estava a falar com o meu orientador sobre isso e ele disse que não, que eu possivelmente olhava para os temas de uma forma que fosse fácil de contar aos outros. E de facto

em matemática, uma das coisas de que mais gosto é contar aos outros, quer do ponto de vista de divulgação quer de um ponto de vista mais científico, aquilo que fazemos. É precioso, mesmo que o nosso público seja composto por dez pessoas, que possamos falar sobre os assuntos que investigamos.

GONÇALO E aí a geometria ajuda imenso...

ROGÉRIO Sem dúvida! Porque consegues transmitir muito mais informação se apelares à geometria e à intuição.

GONÇALO E já que estamos a falar dos sistemas dinâmicos, olhando um pouco para a sua história, é essa mudança de paradigma que muda tudo e que tem origem no trabalho de Poincaré. É essa abordagem que muda tudo.

ROGÉRIO Se calhar, nunca tinha visto isso dessa perspetiva, mas sim, a intuição é fortíssima e há ali uma mudança de paradigma que, não sendo eu talvez a pessoa mais indicada para falar sobre isso, de facto mudou muita coisa.

GONÇALO E a escolha do professor Rafael Ortega e de ires estudar para Granada, como é que tudo isso aconteceu?

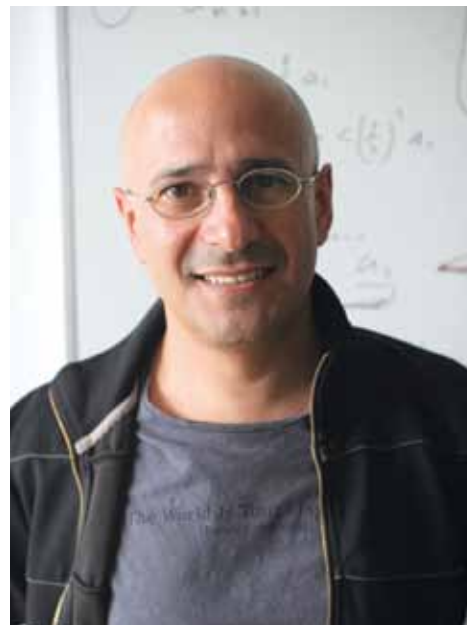
ROGÉRIO Eu um dia assisti a um minicurso dele cá em Portugal e gostei muito, tanto da pessoa como da sua forma de abordar a matemática. A escolha foi natural.

GONÇALO E essa escolha foi marcante...

ROGÉRIO Sem dúvida, pois do ponto de vista científico foi a pessoa que mais me influenciou e também ao nível pessoal, pois somos muito amigos e passamos grandes tardes a discutir muitas outras coisas, além de matemática.

GONÇALO E ires estudar matemática para Granada, no sul de Espanha, com toda aquela envolvente, é diferente de estudar noutra sítio qualquer?

ROGÉRIO É seguramente. Eu não conheço assim tão profundamente o sistema em Espanha e estando tão ligado a este grupo de Granada, tenho sempre medo de generalizar. A



Rogério Martins

verdade é que eu gosto muito deste grupo porque tem um trabalho muito profundo, tendo ficado com a ideia de que a matemática é muito bem ensinada em Espanha, apelando-se talvez muito mais à intuição do que cá. Os alunos são estimulados mais para adquirirem um entendimento do que uma habilidade de cálculo.

Por outro lado, Granada é um sítio estranho, aliás, o meu orientador dizia que era talvez o sítio mais improvável para se fazer matemática porque, como deves saber, Granada é um centro turístico. A matemática é uma coisa séria, que se faz num gabinete fechado e ali ao lado está toda a gente a divertir-se. Sais à noite e vês pessoas que vêm da Serra Nevada ou que tinham ido visitar o Alhambra.

GONÇALO Depois disso arranjaste ainda tempo para seres diretor da *Gazeta de Matemática*...

ROGÉRIO Nós, quando somos professores universitários, uma das áreas em que podemos desenvolver um trabalho é nas chamadas áreas de extensão académica, em que temos uma responsabilidade social em atividades relacionadas com a matemática e não só. Inicialmente comecei por ser vice-diretor da *Gazeta*, na altura em que era o Professor Jorge

¹ http://www.cvtv.pt/home/pesquisa.asp?id_video=581



Entrevista a Rogério Martins.

Buescu o diretor. No mandato seguinte nomearam-me e fiz o melhor que pude.

GONÇALO Mas é um trabalho muito duro, não é? Encontrar um conjunto de pessoas para escrever artigos sobre matemática, para uma audiência não especializada. Qual foi a tua experiência a lidar com isso?

ROGÉRIO É, de facto, um grande desafio. Quando iniciei o meu mandato como diretor tinha uma série de objetivos. Alguns cumprimos, outros não. O grande desafio aqui, e respondendo à tua pergunta, é acharmos relevante que a *Gazeta* seja composta quer por artigos convidados quer por artigos que as pessoas espontaneamente submetam. Era assim no meu tempo e julgo que será ainda hoje assim. A parte dos artigos submetidos, que estão fora das secções habituais, vem de uma diversidade de quadrantes, de opiniões e de sensibilidades. Como, ainda por cima, a *Gazeta* é dirigida a um público bastante geral, nós queremos que ela seja apelativa para esse público. Muitas vezes é difícil gerir isto. Muitas vezes as pessoas têm a ideia de que criar um artigo de divulgação é uma coisa bastante pacífica, mas na verdade não é. O entendimento de um assunto na cabeça de várias pessoas é bastante diferente, o que cria uma grande diversidade de formas de abordar um determinado tema, mesmo para um público geral.

Uma outra coisa que tentámos, e que talvez não tenha sido

assim tão bem-sucedida, foi a nossa tentativa de alargar o público que lê a *Gazeta*. Se na verdade a *Gazeta* é vendida para o público geral, a grande maioria dos leitores são os sócios da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM). Quando assumi o lugar de diretor da *Gazeta*, assumi claramente este objetivo, o qual foi de alguma forma fracassado. Mudámos a aparência da revista, num processo que vinha já detrás, da direção do Buescu, e não propriamente da minha direção. Tornámos a revista mais apelativa graficamente. Além disso, conseguimos alargar a sua leitura aos professores do secundário. Queríamos ir mais longe, mas não conseguimos.

GONÇALO E quando se é diretor da *Gazeta*, sente-se o peso histórico daquele lugar?

ROGÉRIO Sim, claro que sim! Quando olho para a história da *Gazeta* e para a sua lista de antigos diretores, de facto sente-se um grande peso em termos de responsabilidade, percebemos que há uma herança. A *Gazeta* foi durante algum tempo descontinuada, mas continua a ser a mesma revista. Por isso, sente-se sobre as costas a responsabilidade de ter este papel, mas também acho que as coisas têm de evoluir. Nas opções que tomámos durante o meu mandato e certamente durante o do Buescu, isso nunca nos impediu de tentar inovar. Cada tempo é um tempo. Temos de saber aceitar o passado e perceber que as coisas mudam. Por exemplo,

acho que um dos projetos bem-sucedidos durante a minha direção foi o lançamento de uma versão digital *online*. Criámos um *website* e gostaríamos de ter lá tudo desde o primeiro número e que permitisse às pessoas fazerem pesquisas. Eu não sei como é com os outros leitores, mas já começo a não ter espaço na minha estante e, nos tempos que correm, já não quero carregar tanto papel como antigamente. Se é natural que as pessoas queiram colecionar a sua revista em papel, pelo menos é o que acontece comigo, quando quero procurar alguma coisa, faço uma pesquisa *online*. Gostaríamos por isso de ter um espaço ainda maior, no sentido de termos um *website* de referência, com conteúdos próprios que não tivessem de estar sujeitos à periodicidade da revista. Isso ainda não foi concretizado sobretudo porque tem custos de manutenção, porque seria preciso contratar alguém que fizesse esse trabalho, e porque a própria SPM tem outros espaços.

GONÇALO E no seguimento, que poderíamos assumir quase como natural, aparece o programa “Isto é Matemática”...

ROGÉRIO Um dia, o Miguel Abreu telefonou-me e disse-me que precisava de um apresentador para um programa de televisão. Disse-me também que estava um bocado assustado porque era um dos maiores projetos que a SPM já tinha tido, sobretudo em termos financeiros. A SPM é um dos parceiros deste projeto, com financiamento europeu do QREN, e tem uma visibilidade enorme porque, embora a SIC Notícias seja um canal de cabo, é o que tem maior audiência.

GONÇALO Esperavam todo este sucesso?

ROGÉRIO Eu acho que não, mas como sou um dos grandes responsáveis por este projeto tenho alguma dificuldade em avaliá-lo. Mas não era expectável todo este sucesso, inclusive para a própria SIC, que é o outro parceiro. A matemática pode ser mal vista pela sociedade, mas é mediática. Nas mais recentes finais das Olimpíadas de Matemática, além de vários jornais, estavam lá duas estações de televisão a fazer a cobertura do acontecimento.

GONÇALO O que tu me dizes é que a matemática, podendo ser incompreendida, é no entanto respeitada.

ROGÉRIO É respeitada e passa bem para a televisão, ou seja, as estações de televisão gostam de comprar este produto, porque mexe com as pessoas por várias razões. O que não vemos na televisão é aquilo que o “Isto é Matemática” trouxe: a matemática por si só, como saber. Nós no “Isto é Matemática” não queremos falar sobre o ensino da matemática, sobre os problemas da matemática. Não! Queremos falar sobre matemática! O que queríamos mostrar às pessoas é que a matemática é um tema *per se*, queríamos que as pessoas se juntassem num café e falassem de matemática, assim como falam de economia e de outro qualquer assunto.

GONÇALO E qual foi o aspeto mais gratificante que tiraste de toda essa experiência?

ROGÉRIO Em primeiro lugar, aprendi uma série de coisas sobre comunicação, sobre como se faz televisão, e esse é todo um mundo novo. Para um matemático que passou a maior parte do tempo fechado num gabinete a fazer investigação ou a dar aulas, a coisa que mais me marcou, e isto pode parecer ridículo para pessoas que têm outra profissão, foi de repente fazer parte de uma equipa e perceber que na minha equipa, que é composta por seis ou sete pessoas, se houvesse seis ou sete Rogérios, não seria possível fazer o que nós estamos a fazer. Quando eu era responsável por cadeiras com cinco ou seis docentes, eu seria capaz de fazer o trabalho de cada um deles. Ali eu não sei fazer o que o técnico de som sabe fazer e nem faço ideia de como aquilo se faz. Não consigo fazer o que o operador de câmara faz quando quer apanhar um determinado plano ou captar uma determinada luz, não consigo fazer aquilo que o realizador faz ou o que o guionista faz. O trabalho do guionista parece uma coisa muito trivial, escrever um texto para ser lido em televisão. Não! Tudo aquilo é uma ciência, é todo um saber, e eu não conseguiria fazer aquilo. Depois existe também a reação das pessoas, que nos dizem que nunca gostaram de matemática e adoram o programa. Este é o poder da televisão: é nós entrarmos na casa das pessoas sem elas nos pedirem. Elas estão a ver uma coisa qualquer e de repente apareço eu a falar-lhes de matemática. Se eu escrevesse um livro com aqueles conteúdos, esse livro ia ser lido por um público que já tem alguma sensibilidade para a matemática. Na televisão as pessoas são surpreendidas.

GONÇALO Deixa-me fazer uma pergunta um pouco provocatória. Seria possível transformar aquele modelo de seis ou sete minutos para algo que tivesse 40 ou 50 minutos?

ROGÉRIO [Risos] Essa é a pergunta a que eu ainda não sei responder. Talvez um dia saiba. Eu acho que é teoricamente possível, mas difícil de fazer. A televisão, não damos por isso, mas é um meio super competitivo. Cinco minutos de televisão custam muito dinheiro e as “coisas têm de valer muito a pena”.

GONÇALO Mas será possível em televisão complexificar mais a linguagem de um programa de matemática para lá daquilo que vocês já fizeram?

ROGÉRIO A minha opinião é que a matemática é uma coisa complexa feita de muitas coisas simples. Por isso, quando queremos explicar uma coisa complicada, temos de explicar uma série de coisas simples. Um dos problemas das pessoas em relação à matemática é que tentam estudar muitas coisas de uma vez. E isso torna-a difícil. Nos livros, a matemática aparece de uma forma extremamente densa, e se é normal num dia lermos umas 100 páginas de um romance, isso não se consegue ao ler um livro de matemática. Para um público generalista temos de ser modestos, não podemos tentar explicar demasiadas coisas ao mesmo tempo.

GONÇALO No meio de tudo isto apareces no Expresso como um dos portugueses mais influentes...

ROGÉRIO Foi bom, mas na verdade para mim não mudou grande coisa. Não me sinto mais influente por eles acharem que eu sou um dos mais influentes... Como costume dizer, em minha casa continuo a lavar a louça, [Risos] como já lavava antes. Mas é bom que haja de vez em quando matemáticos, tal como já houve no passado, como a Irene Fonseca ou o Nuno Crato, nessa lista, porque isso motiva as pessoas a estudarem matemática e mostra-lhes que também assim podem deixar uma marca na sociedade. E isto reforça o que disse antes: a matemática é, de facto, mediática.

GONÇALO Para terminar, gostaria ainda de referir uma face-ta tua menos conhecida: seres artista plástico. Isto surge como complemento ou como escape?

ROGÉRIO Não sei se é complemento, porque não me complementa totalmente. Essencialmente o que me leva às artes plásticas prende-se com o facto de eu achar que dentro do ser humano há uma enorme necessidade de criar. Eu gosto de fazer coisas e ver coisas feitas, seja lá o que for. Esta atividade complementa muito a parte científica porque, enquanto artista, é como se estivesse sempre a reinventar tudo, não tendo de me apoiar nos ombros de alguém. Posso recomençar do zero e isso é uma coisa perfeitamente válida. É um jogo quase sem regras em que podemos fazer tudo ao contrário da ciência. Não a encaro como escape.

GONÇALO E projetos para o futuro?

ROGÉRIO Não sei! Neste momento estou a dar aulas. No próximo ano também. Tenho várias ideias, mas nada em concreto. Muitas dessas ideias precisam de financiamento e por isso não dependem só de mim. São ainda uma incógnita.

GONÇALO Um livro baseado nos conteúdos do programa?

ROGÉRIO Já várias pessoas me desafiaram para isso. Sim, essa é uma das possibilidades que me ocupará no futuro. Isso tem o problema que referi atrás, com todas as restrições de público, mas usando o facto de já me conhecerem da televisão, podia acontecer chegar a um maior número de pessoas.



Criação artística de Rogério Martins

2015

INTERNATIONAL MEETING

AMS / EMS / SPM

american
mathematical
society

european
mathematical
society

sociedade
portuguesa de
matemática

10 - 13 June, **Porto** - Portugal



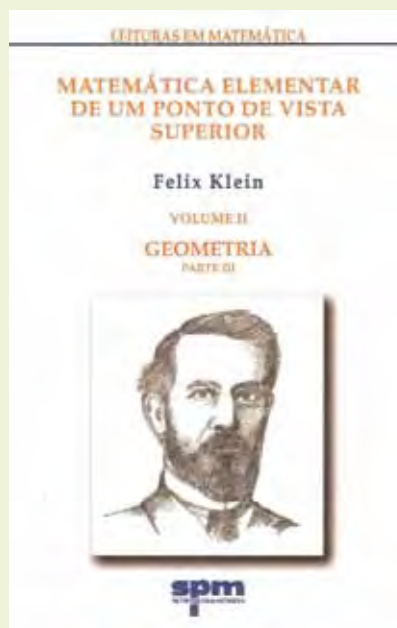
Visite a página do Encontro em
<http://aep-math2015.spm.pt/>

PORTUGAL NA ETAPA INTERNACIONAL DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Entre 3 e 13 de julho, a Cidade do Cabo, na África do Sul, receberá jovens de todo o mundo para disputarem as Olimpíadas Internacionais de Matemática (OIM). A equipa que representará Portugal nas OIM é composta por David Martins (Escola Secundária de Mirandela), Francisco Andrade (Escola Secundária do Padrão da Légua, Matosinhos), Henrique Aguiar (Escola Secundária José Estêvão, Aveiro), Henrique Santos (Escola Secundária José Falcão, Coimbra), Miguel Moreira (Escola Secundária Rainha D. Amélia, Lisboa) e Nuno Santos (Colégio Nossa Senhora do Rosário, Porto). Terminadas as OIM, as atenções passarão a centrar-se nas Olimpíadas de Matemática da CPLP, que decorrerão em Luanda, Angola, entre 14 e 19 de julho. Alberto Pacheco (Colégio Paulo VI, Gondomar), David Andrade (Escola Básica e Secundária de Albufeira), Henrique Navas (Escola Básica 2, 3 Marquesa de Alorna, Lisboa) e Miguel Vieira (Colégio S. João de Brito, Lisboa) são os olímpicos que compõem a equipa portuguesa. Como é habitual, serão as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática (OIAM) a fechar a época de competições internacionais de matemática. Nesta que é a sua 29.^a edição, as OIAM decorrerão nas Honduras de 19 a 27 de setembro. A participação de Portugal nestas competições é organizada pela SPM, e a seleção e preparação dos alunos está a cargo do Projecto Delfos, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. As Olimpíadas contam com o apoio do Ministério da Educação e Ciência, da Ciência Viva, do Banco Espírito Santo, da Fundação Calouste Gulbenkian e da Pathena.

EDITADA TERCEIRA PARTE DE GEOMETRIA DE FELIX KLEIN

Já foi publicada a terceira e última parte de *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior - Geometria*, de Felix Klein. Referência obrigatória para quem se dedica ao ensino, a obra de Klein apresenta uma visão unificadora e inovadora da geometria. *Geometria III*, de Felix Klein, é o 13.^o título da coleção da SPM Leituras em Matemática. A Loja SPM lançou entretanto uma campanha promocional, em que oferece um desconto de 10% na compra dos cinco títulos que compõem a série *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*, de Felix Klein.



EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY DIVULGA “ISTO É MATEMÁTICA”

O programa televisivo “Isto é Matemática” está agora acessível a um público mais vasto, depois da sua tradução para a língua inglesa. A iniciativa partiu da European Mathematical Society que, com o apoio da Munich RE, pretende disponibilizar a primeira série de 13 programas *online*. Os primeiros episódios do “Isto é Matemática” em inglês já se encontram disponíveis na página da Mathematics in Europe, em mathematics-in-europe.eu.

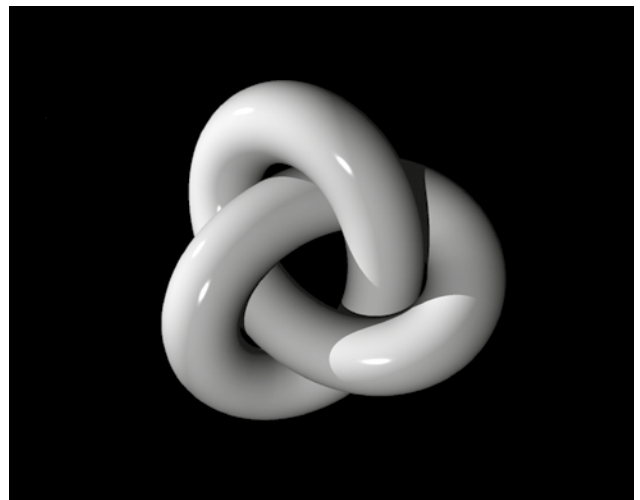


FCT/UNL A POSTOS PARA ENCONTRO NACIONAL DA SPM 2014

O Encontro Nacional da SPM 2014 (ENSPM) terá brevemente início na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (FCT/UNL), no Campus da Caparica, onde decorrerá até 16 de julho. Peter Cameron (University of St. Andrews, Reino Unido), João Gouveia (Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra), Gonçalo Tabuada (FCT/UNL, Centro de Matemática e Aplicações da UNL e Massachusetts Institute of Technology, EUA), Christopher Emdin (Columbia University, EUA) e Sara Santos (Maths Busking, Reino Unido) são os nomes confirmados para as sessões plenárias. Do programa do Encontro fazem ainda parte inúmeras sessões temáticas que abrangerão áreas diversificadas: Álgebra e Combinatória, Análise e Equações com Derivadas Parciais, Ensino da Matemática, Geometria e Topologia, História da Matemática, Lógica e Computação, Matemática nas Ciências e Tecnologia, Otimização/ Investigação Operacional, Probabilidades e Estatística, Sistemas Dinâmicos. Está também prevista uma sessão específica para estudantes de doutoramento e uma ação de formação acreditada para professores de Matemática (15 horas, 0.6 créditos), integrado no ProfNova. As inscrições para este Encontro podem ser efetuadas em enspm14.spm.pt.

INSCRIÇÕES ABERTAS PARA ENCONTRO IBÉRICO DE MATEMÁTICA

A 5.^a edição do Encontro Ibérico de Matemática realiza-se na Universidade de Aveiro, entre os dias 3 e 5 de outubro. As inscrições poderão ser efetuadas a um preço especial até ao dia 25 de julho. Organizado em conjunto pela Sociedade Portuguesa de Matemáticas e pela Real Sociedad Matemática Española, o encontro pretende incentivar a colaboração entre matemáticos portugueses e espanhóis e desenvolver a investigação matemática na Península Ibérica. Equações Diferenciais e Sistemas Dinâmicos, Geometria e Topologia, e Matemática Industrial serão as áreas contempladas nas sessões temáticas.



ENCONTRO AMS/EMS/SPM 2015 APRESENTA CONFERENCISTAS

Já são conhecidos os nomes dos oradores convidados do Encontro conjunto AMS/EMS/SPM, que decorrerá na cidade do Porto entre 10 e 13 de junho de 2015: Marcus du Sautoy (University of Oxford, Reino Unido), Rui Loja Fernandes (University of Illinois, EUA), Irene Fonseca (Carnegie Mellon University, EUA), Annette Huber (Albert-Ludwigs-Universität, Alemanha), Mikhail Khovanov (Columbia University, EUA), André Neves (Imperial College London, Reino Unido) Sylvia Serfaty (Université Pierre et Marie Curie Paris 6, França), Gigliola Staffilani (MIT, EUA), e Marcelo Viana (Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Brasil). Além das sessões plenárias de interesse geral, o Encontro oferecerá ainda sessões especiais focadas nos desenvolvimentos da investigação em diferentes

áreas, uma palestra aberta ao público e um atrativo programa social. Mais informações sobre o encontro podem ser consultadas em aep-math2015.spm.pt.



PORTUGUESES E BRASILEIROS REÚNEM-SE EM ENCONTRO SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Estão a decorrer até 15 de setembro as inscrições para o 7.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática. O encontro terá lugar na cidade de Óbidos, entre 15 e 19 de outubro, e é uma iniciativa conjunta da SPM/Seminário Nacional de História da Matemática e da Sociedade Brasileira de História da Matemática. Esta edição assinala o centenário do nascimento do Professor José Sebastião e Silva, estando previstas no programa uma secção sobre a sua produção e a sua vida científica e outra sobre a sua produção de prática didática. O programa contemplará ainda sessões dedicadas aos 150 anos do nascimento de Luciano Pereira da Silva, à História da Lógica, a Henri Poincaré, à História da Cartografia, à História da Astronomia, à História do

Ensino da Matemática e aos Instrumentos na História da Ciência. A página do encontro pode ser consultada em encontrohistoriamatematicaobidos.com.





LONGITUDE ACT EM EXPOSIÇÃO NO MUSEU DA MARINHA

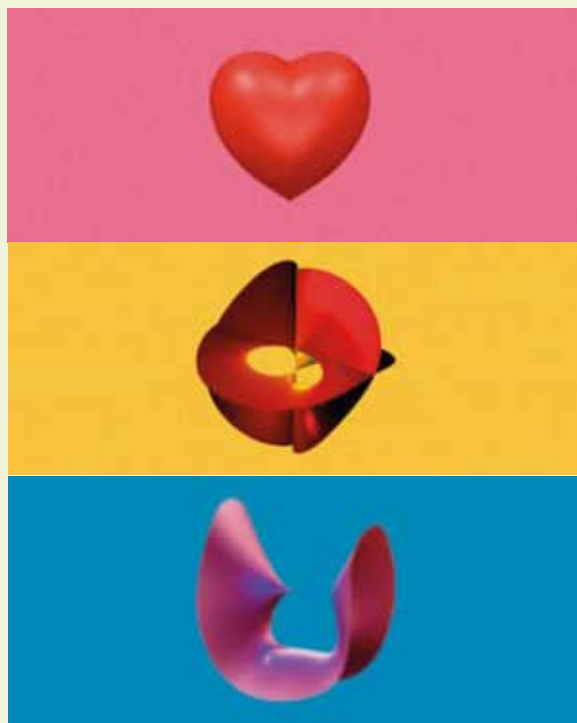
A exposição "300 anos - *Longitude Act*" foi inaugurada no passado dia 6 de junho no Museu da Marinha, em Lisboa. A exposição, patente na Sala Seixas até 28 de setembro, dá a conhecer a história do *Longitude Act*, no contexto das navegações portuguesas.

"CRISTALOGRAFIA NAS CIÊNCIAS FUNDAMENTAIS" EM EXPOSIÇÃO ITINERANTE

"Cristalografia nas Ciências Fundamentais" é uma nova exposição itinerante, desenvolvida no âmbito do Ano Internacional da Cristalografia. A exposição poderá ser requisitada por escolas, bibliotecas e outras entidades através da página do Matemática no Planeta Terra. Mais informações em <http://www.mat.uc.pt/mpt2013/aic2014.html>

CONCURSO SURFIN'MAT DESAFIA PARTICIPANTES A CRIAR IMAGENS ATRAVÉS DE EQUAÇÕES

O Centro Ciência Viva de Tavira está a promover um concurso que desafia os participantes a criar superfícies algébricas no programa SURFER, através da manipulação de equações matemáticas. As melhores imagens submetidas a concurso serão incorporadas na exposição IMAGINARY - SURFIN'MAT, que será inaugurada em Tavira em outubro de 2014, com o tema "o Mar". O concurso, que decorrerá até 31 de dezembro de 2014, premiará a originalidade, a criatividade e a beleza das imagens, que deverão ter como inspiração a biodiversidade marinha. Mais informações sobre este concurso podem ser consultadas em imaginary-exhibition.com/concurso-portugal/





ESPAÇO MATEMÁTICO EM LÍNGUA PORTUGUESA PROPOSTO NO BRASIL

Foi assinada no passado dia 7 de junho no Rio de Janeiro a proposta de fundação do EMeLP - Espaço Matemático em Língua Portuguesa. O documento foi assinado pelos delegados moçambicano, brasileiro e português da International Commission on Mathematical Instruction, organismo da International Mathematical Union. Aguarda-se agora o reconhecimento desta iniciativa pela ICMI, assim como o en-

volvimento dos restantes países lusófonos. Duas das ações já programadas no âmbito do EMeLP incluem a realização do 1.º Congresso do EMeLP, a realizar na Universidade de Coimbra, em outubro de 2015, e a criação de uma biblioteca digital de matemática em língua portuguesa. Mais informações sobre o EMeLP serão disponibilizadas brevemente em emelp.org.

ESCOLAS DE VERÃO DE MATEMÁTICA PARA ESTUDANTES DO ENSINO SECUNDÁRIO

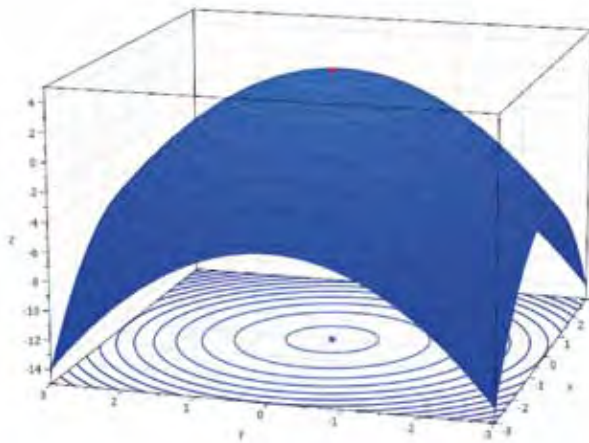
De 1 a 5 de setembro, a Faculdade de Ciências da Universidade do Porto abrirá portas aos alunos do ensino secundário para participarem na Escola de Verão de Matemática, organizada pelo Departamento de Matemática e pelo Centro de Matemática da

FCUP. Durante a EVMAT2014 os alunos terão oportunidade de participar em cursos e palestras e de desenvolver projetos de grupo sobre temas de matemática e suas aplicações, nomeadamente: linguagens de programação; as simetrias dos desenhos de Escher; como uma calculadora realmente não calcula raízes quadradas; uma viagem pela geometria de um universo esférico; o efeito borboleta, fractais e

caos. Mais a sul, o Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, com o apoio do Centro de Matemática e Aplicações, vai organizar a MatNova2014, entre 2 e 6 de setembro. Esta iniciativa é dirigida a alunos de excelência do ensino secundário, preferencialmente com o 10.º ou o 11.º ano de escolaridade concluído, que queiram trabalhar tópicos de matemática avançados.

OTIMIZAÇÃO NA UNIVERSIDADE DO MINHO

Estão abertas as inscrições para a conferência “Otimização 2014”, que decorrerá na Escola de Engenharia da Universidade do Minho, em Guimarães, entre 28 e 30 de julho. Este encontro pretende reunir investigadores e profissionais de diferentes áreas e com *backgrounds* distintos, mas com interesse comum pela otimização. Na sua oitava edição, a conferência contará com a presença de diversos oradores reconhecidos a nível internacional: Masao Fukushima (Universidade Naza, Japão), Serge Gratton (INP-ENSEEIH, França), Tim Kelley (North Carolina State University, EUA), Nenad Mladenovic (Brunel University, Reino Unido), François Vanderbeck (Université Bordeaux, França) e Maarten H. Van der Vlerk (University of Groningen, Holanda). A conferência tem o apoio da APDIO – Associação de Portuguesa de Investigação Operacional. Mais informações em optimization2014.dps.uminho.pt.



PRÉMIO ABEL FOI ATRIBUÍDO A YAKOV SINAI



Imagem: Princeton University, Department of Mathematics

Yakov G. Sinai, matemático russo de 78 anos, foi distinguido pela Academia Norueguesa de Ciências e Letras com o Prémio Abel 2014, em virtude das suas importantes contribuições nos campos dos sistemas dinâmicos, da teoria ergódica e da física matemática. Yakov Sinai, matemático influente e respeitado pelas comunidades física e matemática, deu nome a vários dos seus resultados pioneiros em áreas como a física matemática e a teoria das probabilidades - “Entropia de Kolmogorov–Sinai”, “Passeio Aleatório de Sinai”, “Teoria de Pirogov–Sinai”, etc. Desde 1993 que Sinai é Professor de matemática na Princeton University, EUA, sendo também membro do Landau Institute for Theoretical Physics, e da Russian Academy of Sciences. A American Mathematical Society atribuiu recentemente (2013) a Yakov G. Sinai o Leroy P. Steele Prize for Lifetime Achievement, tendo sido ainda galardoado com o Wolf Prize in Mathematics (1997) e o Henri Poincaré Prize, da International Association of Mathematical Physics (2009), entre outros.

Ações de Formação

2014/2015

Visite a página do
Centro de Formação SPM em
www.formacao.spm.pt

Informações/Marcações

Centro de Formação SPM
Av. da República, 45, 3^oEsq. 1050-187 Lisboa
Telf.: 217 986 354 Telm.: 96 000 90 45
Email: formacao@spm.pt

CENTRO DE FORMAÇÃO
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
CCPFC/ENT-AP-0328/11

BREVE **BALANÇO** DE **SEIS ANOS** NA **DIREÇÃO** DA **SPM**

Foi um privilégio servir a SPM e, com mais calma, continuei a colaborar com enorme prazer.

O Encontro Nacional da SPM, entre os dias 14 e 16 de julho de 2014 (<http://enspm14.spm.pt>), marca para mim o final de um período de seis anos como membro da direção, os últimos quatro como seu presidente. A nível pessoal, foi extremamente compensador:

▶ Com muita ajuda de todos os membros das três equipas de direção que integrei, aprendi imenso sobre as várias vertentes que estão necessariamente envolvidas na gestão de uma entidade como a SPM, que é uma sociedade científica sem fins lucrativos, com uma quotização anual na ordem das dezenas de milhares de euros e um movimento anual na ordem das centenas de milhares de euros. Fiquei também a conhecer melhor as minhas limitações, algo que me será certamente útil no futuro.

▶ As relações pessoais que estabeleci ao longo destes anos, tanto em Portugal (com os muitos que por todo o País colaboram de alguma forma com a SPM) como a nível inter-

nacional (por exemplo, no âmbito da EMS), não têm preço e são uma mais-valia que levo comigo e que não me será possível pagar.

Foi também cansativo. É bom haver eleições de dois em dois anos e não aconselharia a ninguém mais do que dois mandatos como presidente. A SPM está felizmente envolvida em muitas atividades que, apesar da competência dos muitos que a elas dedicam voluntariamente uma quantidade significativa do seu tempo, acabam por exigir alguma atenção.

Neste breve balanço, gostaria de referir três projetos que não fazem parte daquilo que é a atividade corrente da SPM:

▶ Na área da divulgação, a série televisiva “Isto é Matemática” (<http://www.spm.pt/istoematematica>). A proposta e a submissão deste projeto foram ainda feitas pelo Nuno Crato, no final do seu último mandato como presidente da SPM (2010). Não foi algo em que eu acreditasse muito e quando soube da sua aprovação para financiamento estava conven-

cido de que ia dar-me muito mais preocupações do que alegrias. Como em muitas outras coisas, estava felizmente enganado: houve poucas preocupações e muitas alegrias. Um agradecimento especial ao Rogério Martins, que acreditou no projeto logo na primeira vez que lhe telefonei.

▶ Na área do ensino, a parceria com a Fundação PT para a tradução dos vídeos de matemática da Khan Academy para o ensino básico e secundário (<http://www.spm.pt/khan>). Foram traduzidos cerca de 400 vídeos em 2013, estão a ser traduzidos cerca de 400 em 2014 e vão ser traduzidos cerca de 200 em 2015, num total de cerca de 1000 vídeos que cobrem uma quantidade muito significativa do programa de matemática do 1º ao 12º anos. Este é um projeto em que eu acreditei logo na primeira vez que a Fundação PT me telefonou. Tenciono continuar ligado a ele até à sua conclusão.

▶ Na área da investigação, o encontro AMS-EMS-SPM, que terá lugar de 10 a 13 de junho de 2015, no Porto (<http://aep-math2015.spm.pt>). Aqui foram fundamentais os contactos do Samuel Lopes com a AMS e o reconhecimento que a SPM tem na EMS. Vai ser o primeiro encontro que junta a AMS e a EMS, sendo mais do que apropriado que tenha lugar em Portugal, no ano em que a SPM comemora o seu 75.º aniversário. Esperam-se mais de 500 participantes, de Portugal, da Europa, dos EUA e do resto do mundo. Espero que os matemáticos portugueses ou a trabalhar em Portugal participem em grande número, tirando o maior partido desta oportunidade. Eu irei fazê-lo.

Quando, há seis anos, integrei pela primeira vez a direção da SPM, fazia apenas uma pequena ideia da dimensão da sua atividade corrente. Sabia da *Portugaliae*, do *Boletim* e da *Gazeta*, conhecendo alguns dos seus editores. Sabia também das Olimpíadas, das Escolas de Verão, dos Encontros Nacionais e dos Encontros Ibéricos, tendo até neles participado. No entanto:

▶ Não sabia a quantidade de trabalho nem de pessoas envolvidos nestas atividades.

▶ Não sabia que se publicavam livros.

▶ Não sabia que se faziam pareceres sobre os programas e as provas nacionais de matemática dos ensinos básico e secundário.

▶ Não sabia que se fazia formação de professores dos ensinos básico e secundário.

▶ Não sabia que iria começar a fazer-se em breve certificação de manuais escolares dos ensinos básico e secundário.

▶ Não sabia que havia Tardes de Matemática por todo o País, com grande envolvimento das Delegações Regionais.

▶ Não sabia que tinha havido um Clube de Matemática que iria ser possível voltar a dinamizar com sucesso.

▶ Não sabia da colaboração com a Ludus, a APM e a Ciência Viva no Campeonato Nacional de Jogos de Matemática.

▶ Não sabia que havia uma secção autónoma dedicada à História da Matemática.

▶ Não sabia da participação ativa na EMS e na IMU (esta última via Comissão Nacional de Matemática).

▶ Não sabia que havia professores destacados, uma loja, um gabinete de comunicação e um secretariado.

▶ Não sabia muitas outras coisas.

Há certamente muito que continuo a não saber, mas sei e sou hoje muito mais do que sabia e era há seis anos.

A SPM está de boa saúde e tenho enorme confiança na direção que inicia agora um novo mandato.

Foi um privilégio servir a SPM e, com mais calma, continuarei a colaborar com enorme prazer.

Obrigado a todos os que muito me ajudaram: colegas de direção, colaboradores na sede, delegados e sócios por todo o País. Bem hajam!

M Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: *gazeta@spm.pt*.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2014

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

NOVIDADE!

Matemática Elemental de
um Ponto de Vista Superior
Volume II
Geometria (Parte III)

