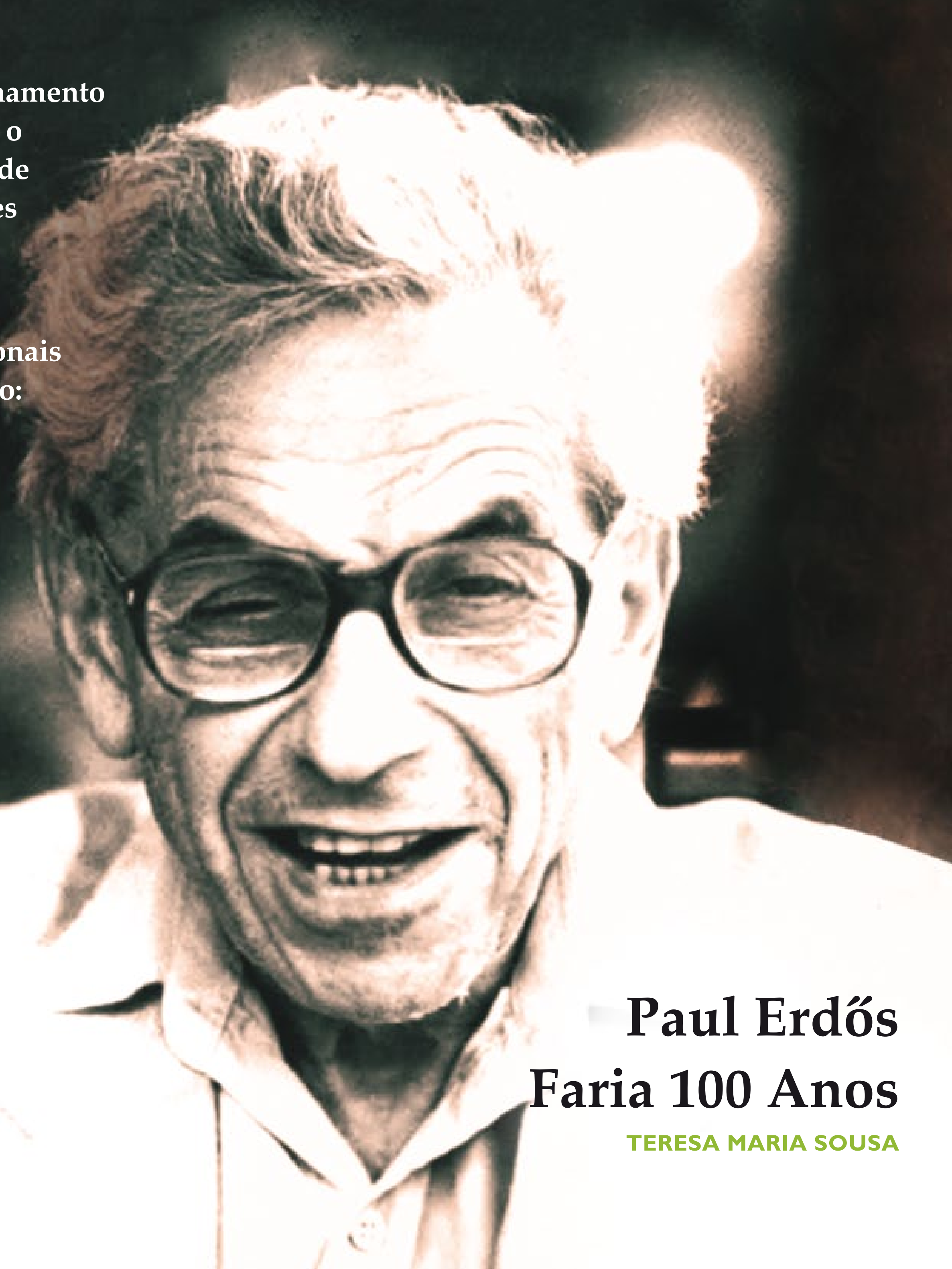
N.0171

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXIV | Nov. 2013 | 4,20€



Sobre o Funcionamento do Planímetro e o Cálculo Prático de Áreas Irregulares

CARLOS SARRICO

Números Irracionais no Ensino Básico: Os Desafios da História de π

ISABEL SERRA E LUÍSA DE SOUSA

Erros de Matemática Podem Levar ao Desastre

JOSÉ MATOS

Paul Erdős Faria 100 Anos

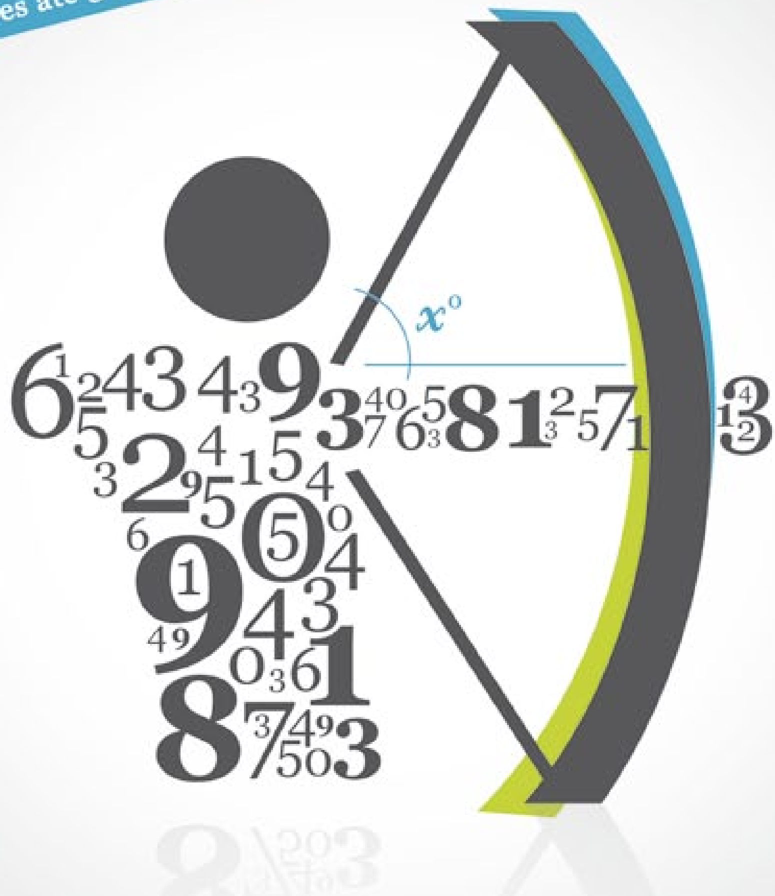
TERESA MARIA SOUSA

32^as OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

BANCO ESPIRITO SANTO
spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Participar nestas Olimpíadas é acertar em cheio!

Inscrições até **30 de abril 2014** • **http://mopm.mat.uc.pt/MOPM**



CATEGORIA

MINI-OLIMPÍADAS (3º E 4º ANOS DO ENSINO BÁSICO)

PROVA ÚNICA Maio de 2014

4ª Edição Nacional das Olimpíadas de Matemática do 1º Ciclo do Ensino Básico

CONTACTOS: www.spm.pt Tel.: 217 986 353 Telm.: 960 130 506 Email: opm@spm.pt

M

ÍNDICE

02 **EDITORIAL** | *Rogério Martins*

03 **ATRACTOR**
1.º Portugal-Itália em GeCla

08 **RECREIO** | *Jorge Nuno Silva*
Quadrados e cubos

09 **CANTO DÉLFICO** | *Alexander Kovačec*
Lotarias biológicas: exemplos do papel clarificador da matemática

14 **NA LINHA DE FRENTE** | *Fabio Chalub*
Adão e Eva nos nossos genes

17 **APANHADOS NA REDE** | *António Machiavelo*
A equação que nunca foi de Pell

03 *artigo de capa***3**
20 **PAUL ERDŐS FARIA 100 ANOS**
Teresa Maria Sousa

23 **BARTOON** | *Luis Afonso*

24 **NÚMEROS IRRACIONAIS NO ENSINO BÁSICO: OS DESAFIOS DA HISTÓRIA DE π**
Isabel Serra e Luísa de Sousa

32 **PERGUNTAS SIMPLES, RESPOSTAS SURPREENDENTES** | *Manuel Silva e Pedro J. Freitas*
Grupo E_8 Superstar **0**

36 **NOVAS HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA ANTIGA** | *Bernardo Mota*
Francisco de Melo, entre filologia e matemática

38 **SOBRE O FUNCIONAMENTO DO PLANÍMETRO E O CÁLCULO PRÁTICO DE ÁREAS IRREGULARES**
Carlos Sarrico

42 **ERROS DE MATEMÁTICA PODEM LEVAR AO DESASTRE**
José Matos

49 **NOTÍCIAS**

55 **CARTAS DA DIREÇÃO** | *Joana Teles*
Fantásticos, brilhantes, espetaculares!

EDITORIAL

Rogério Martins
Universidade Nova
de Lisboa
roma@fct.unl.pt

E **CHEGÁMOS** AO FIM DO **MANDATO**

Chegou a hora de entregar a *Gazeta* a uma nova direção...

Esta direção completa neste número o seu mandato de três anos. Foi um grande prazer fazer parte desta equipa editorial, para trás ficam muitos objetivos que nos tínhamos proposto e que não conseguimos realizar, assim como alguns outros que cumprimos. A verdade é que a rotatividade é algo que me parece muito salutar. A entrada de uma nova direção vai seguramente trazer uma nova vida à *Gazeta*, com novas ideias e entusiasmo para as levar a bom porto.

A *Gazeta* vai seguramente ficar muito bem entregue, tendo como próximo diretor o Prof. Dr. Adérito Araújo, da Universidade de Coimbra, que fez parte da direção que precedeu a atual, tendo sido vice-diretor durante esse mandato. Estou seguro de que vai conduzir a *Gazeta* da melhor forma durante os próximos três anos.

Para o bem ou para o mal, vivemos num país pequeno e a *Gazeta* acaba por ter um papel único em Portugal. Por outro lado, a *Gazeta* deve ser uma revista na qual toda a comunidade matemática se reveja. Por estas razões, parece-me ainda mais importante esta rotatividade da direção, optimizando a representatividade de sensibilidades e tendências na direção da revista. Da mesma forma que a diversificação de uma carteira de investimentos torna essa carteira mais estável no futuro, também a diversificação na direção da *Gazeta* lhe garante uma estabilidade que é essencial.

Gostaria agradecer a todos os que contribuíram e trabalharam na *Gazeta* nos últimos anos, e especialmente neste mandato. Provavelmente porque na minha atividade docente e de investigação não há uma diversidade tão grande de tarefas, fico sempre maravilhado quando observo uma equipa onde cada um tem um papel essencial e bem diferenciado, desde o *design* gráfico, ao processo de edição, e no final resulta algo que nunca poderia ter sido produzido por nenhuma das partes separadamente.

Gostaria de agradecer esecialmente a todos os que escreveram para a *Gazeta* nos últimos anos, por um lado aos colaboradores das secções permanentes e por outro a todos aqueles que submeteram artigos para publicação na *Gazeta.* Na verdade, a *Gazeta* é o seu conteúdo e esse conteúdo é vosso.

ATRACTOR

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site *www.atractor.pt* . Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

1.º PORTUGAL - ITÁLIA EM GeCla

Em 2009, o Atractor concluiu o DVD "Simetria – apresentação dinâmica", desenvolvido ao longo de cerca de cinco anos, onde procurou transmitir, com forte apoio de imagens e animações especialmente criadas, as ideias-base dos métodos desenvolvidos por W. Thurston (1946-2012) para o estudo da simetria de frisos e de padrões duplamente periódicos no plano. Pouco tempo depois, deu início ao desenvolvimento de outro material interativo sobre o mesmo tema, mas desta vez dirigido a um público mais vasto.

A cada padrão ou friso está associado um carimbo só dependente da simetria desse padrão ou friso, que permite carimbar o plano, recriando assim todas as simetrias do padrão ou friso inicial a partir de um motivo-base sem simetria. Comecemos por ver alguns exemplos, constituídos pelos quatro tipos de carimbos mostrados na figura 1: um cone rolando a pintar uma rosácea, um cilindro a carimbar um friso só com translações, uma tira de Moebius a pintar um friso com reflexões deslizantes e um triângulo retângulo isósceles com bordos espelhados a carimbar um padrão com reflexões no plano (podem ver-se mais imagens em [1]).

Por que são úteis os carimbos? É que, para contar os diferentes tipos de simetria, basta contar todos os "bons" carimbos. Uma explicação detalhada do que é um "bom" carimbo e de como se podem encontrar todos eles é também apresentada no DVD interativo, não exigindo dos seus utilizadores o conhecimento técnico necessário à leitura dos textos matemáticos originais. E, embora o Atractor não tenha visado com este DVD criar um instrumento didático para ser usado regularmente por alunos, algumas das suas secções podem ser utilizadas com proveito por professores para transmitir ideias matemáticas importantes a alunos mais interessados.

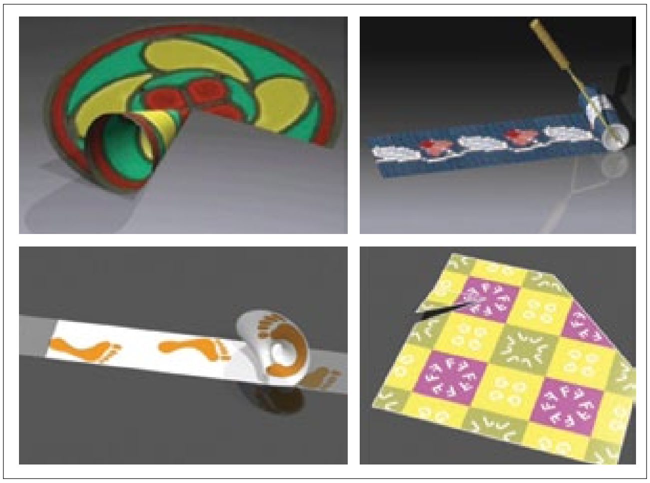


Figura 1

Pouco tempo depois de iniciada a difusão do DVD, o Atractor começou o desenvolvimento de outro material interativo sobre o mesmo tema, que utiliza componentes do DVD mas é guiado por uma filosofia completamente diferente: o programa deveria ser acessível e apelativo aos alunos de uma larga faixa etária e procuraria ser útil no estudo e na compreensão das questões de simetria entretanto introduzidas nos currículos escolares.

Esse novo programa – o GeCla [2] – foi a ferramenta usada num evento recente, que reuniu via Internet alguns alunos de uma escola portuguesa com outros de uma escola italiana, num torneio com contornos inéditos. E foram o sucesso do evento, a adesão e o entusiasmo dos alunos participantes, e a satisfação das professoras envolvidas, que nos levaram à escolha desta notícia como tema da coluna do Atractor no presente número da Gazeta, na esperança de que mais professores venham a manifestar interesse em tomar iniciativas análogas com os seus alunos.

Começaremos por descrever resumidamente o GeCla, antes de darmos mais alguns detalhes sobre o referido torneio. O GeCla tem um *gerador* (figura 2) que permite criar um desenho (abreviatura de friso/padrão/rosácea) após a escolha de um motivo sem simetria e de um tipo de simetria (indicado pelo respetivo carimbo). Por exemplo, partindo de **L** como motivo, para desenhar um friso que só admita translações, basta (e é necessário) escolher o carimbo cilíndrico: um cilindro ao rolar desenha exemplares do motivo obtidos por sucessivas translações uns dos outros (figura 3). O programa permite guardar o desenho obtido como ficheiro no formato jpg e nesse ficheiro o programa grava também, sob forma encriptada, informação sobre todas as simetrias do desenho. De modo semelhante, para desenhar uma rosácea ou um padrão bastará escolher, em vez do cilindro, outro carimbo correspondente ao tipo de simetria desejado. Por exemplo, com um triângulo isósceles com os dois lados iguais espelhados e fazendo esses lados um ângulo de 30º, obtém-se uma rosácea com seis reflexões e seis rotações (figura 4); com um triângulo retângulo isósceles (agora com os três bordos espelhados) obtém-se o padrão representado na quarta imagem da figura 1. Além do gerador, o GeCla contém um *classificador* (figura 5): a sua função é a de permitir uma pesquisa sistemática de todas as simetrias de um desenho e chegar, assim, à determinação do seu tipo de simetria e, portanto, do carimbo associado. Se o ficheiro do desenho que se pretende classificar tiver sido produzido pelo gerador do GeCla,

Figura 2

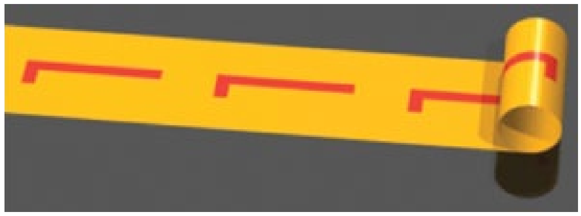


Figura 3

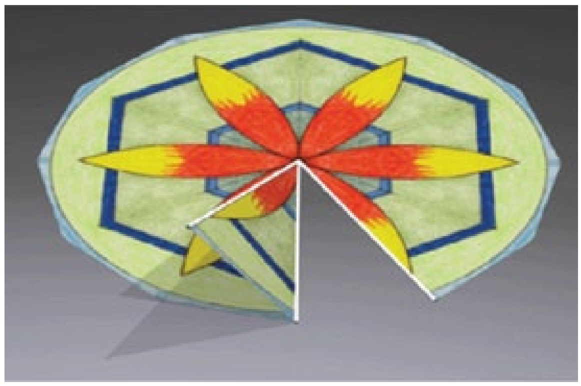


Figura 4

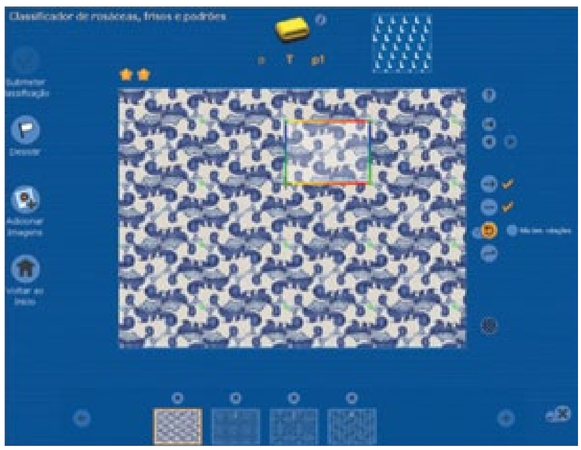


Figura 5

o classificador também é capaz de ler a informação encriptada que foi gravada ao gerar o desenho. Ele fica assim a conhecer todas as simetrias do desenho e o programa permite que essa informação seja útil ao utilizador sob uma forma que ele tenha previamente escolhido: em modo de *ajuda máxima*, o programa pode recusar imediatamente qualquer escolha que considere incorreta; no de *ajuda mínima*, pode deixar avançar todas as escolhas coerentes, dando apenas no fim um relatório de eventuais erros cometidos. Este aspeto é muito útil didaticamente: é natural escolher *ajuda máxima* no início da aprendizagem e, após alguma experiência, começar a reduzir o grau de ajuda.

E o que acontece se quisermos classificar um desenho obtido, por exemplo, fotografando uma parede de azulejos? Obviamente, neste caso o ficheiro não contém nenhuma informação encriptada sobre as simetrias e o classificador não pode ajudar nas escolhas do utilizador, exceto para exigir coerência na informação que lhe é transmitida. Mas, se o utilizador não marcar nenhuma simetria erradamente nem esquecer nenhuma, deduz corretamente qual o tipo de simetria e o correspondente carimbo. Numa situação como esta, um professor que esteja interessado em permitir que os seus alunos classifiquem, com ajuda do programa, o desenho da fotografia, pode sempre tornear a dificuldade: basta-lhe classificar corretamente o padrão (sem ajuda), guardar o motivo encontrado e tomar nota do carimbo. Depois, usando o motivo guardado, pode gerar com o carimbo encontrado um novo desenho, que terá aspeto igual ao da fotografia original, mas agora o ficheiro conterá a informação encriptada sobre as simetrias existentes. Foi assim obtida a imagem que está a ser mostrada em fase de classificação na figura 5. Um aluno que venha a usar este novo ficheiro pode utilizar a ajuda do programa (ver figura 6) para classificar o desenho idêntico ao da fotografia e encontrar um motivo (ver imagens da figura 7). No portal do Atractor encontra-se uma grande variedade de desenhos, todos com informação encriptada sobre as simetrias existentes; alguns deles [3] foram obtidos a partir de fotografias pelo processo descrito.

Além do gerador e do classificador, cujos esquemas de funcionamento acabam de ser brevemente descritos, o programa comporta:

1. Uma secção que permite ao utilizador testar, por qualquer ordem e sem qualquer registo visando uma classificação do desenho, se uma dada isometria é ou não uma simetria do desenho (ver figura 8); constitui um auxiliar didático útil, sobretudo na fase inicial de aprendizagem, pois o aluno que se confronta com o problema de identificar as isometrias que conservam o desenho pode, com esta ferramenta, verificar facilmente a validade das conjeturas que a sua intuição lhe sugere.
2. Outra secção que permite a realização de uma competi-

Figura 6

Figura 7

Figura 8

Figura 9

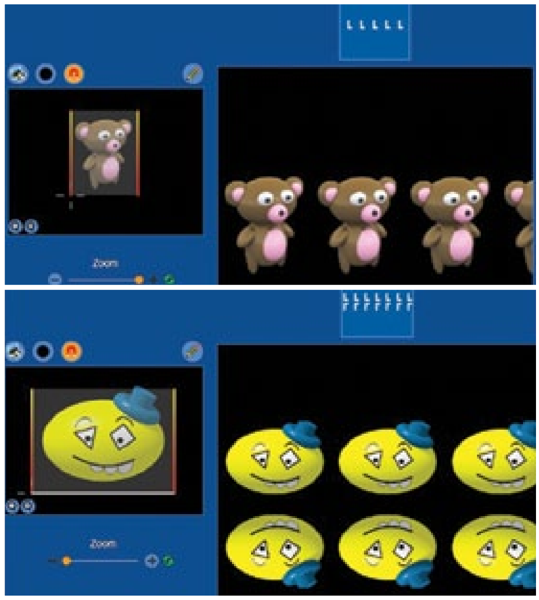


Figura 10

ção entre dois jogadores, durante a qual cada um gera um conjunto de desenhos, com motivos à sua escolha e utilizando diferentes carimbos, e depois tenta classificar os desenhos gerados pelo seu adversário; no final, o programa produz um relatório que indica quais as classificações corretas e quais as incorretas, apontando, para cada uma das incorretas, o primeiro erro cometido. O programa permite a escolha do número de desenhos a produzir por cada jogador e de uma gama muito variada de níveis de dificuldade. Uma vez feitas as escolhas, o programa gere a progressão do jogo até à sua conclusão. Uma versão própria para os mais jovens – o GeCla-mini (figura 9) – nem sequer permite optar pelos níveis mais avançados; além disso, tem uma apresentação e um conjunto de motivos feitos a pensar em faixas etárias mais baixas.

Vejamos um exemplo extremo, adaptado a alunos do 1º ciclo que nunca tiveram contacto nem com o programa nem com as questões de simetria. Com o GeCla-mini, e escolhido o primeiro nível de dificuldade na competição, cada jogador, na fase em que tem de gerar um desenho, dispõe de apenas duas opções: ou um friso só com translações (figura 10) ou um friso que tem apenas uma reflexão "horizontal" além das translações. Criados pelos dois jogadores vários frisos destes dois tipos, na fase seguinte cada jogador tem, pois, apenas de descobrir quais os frisos gerados pelo adversário que "admitem uma reflexão horizontal", o que é visualmente muito fácil (ver figura 11). Uma vez familiarizado com o funcionamento do programa a este nível mais elementar, é possível o jogador avançar para níveis seguintes, por exemplo com frisos admitindo também reflexões "verticais" ou rotações.

O GeCla tem presentemente instruções em quatro línguas (inglês, italiano e espanhol, além do português) e o Atractor tem conhecimento de que foi utilizado com sucesso em aulas em Portugal e em Itália. E foi precisamente de uma professora italiana que surgiu, em abril deste ano, a primeira proposta para a organização de uma competição com o GeCla via Internet, algo que é possível nas últimas versões do programa e de uma forma por ele inteiramente controlada. O Atractor divulgou esta proposta entre professores que tinham participado em sessões de trabalho sobre o GeCla organizadas pelo Atractor, alguns dos quais usam regularmente o programa com os seus alunos. Chegou a ser encarada a participação de uma escola cujos alunos conheciam o GeCla, mas problemas logísticos na escola, ligados também ao facto de já se estar demasiado perto do final do ano letivo, não permitiram que se concretizasse essa participação. O evento viria a ser garantido quase *in extremis* por uma professora que escolheu um grupo

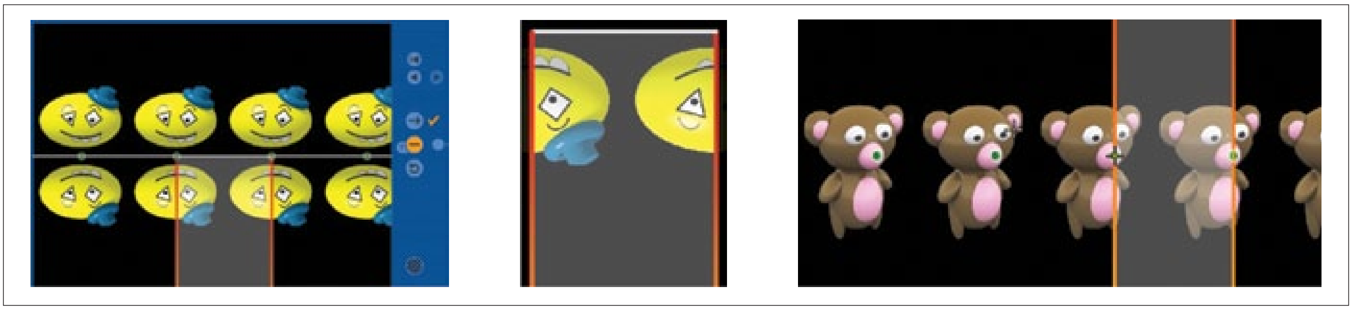


Figura 11

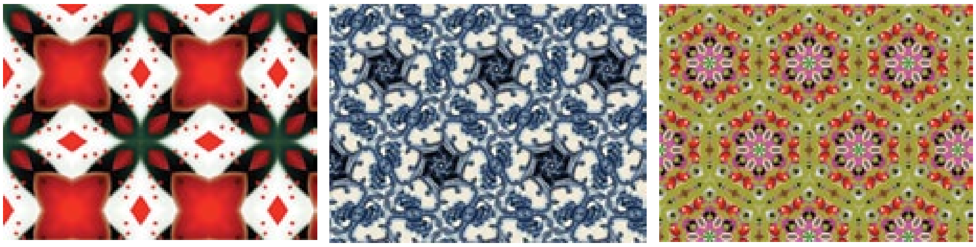


Figura 12

de alunos que não conheciam o GeCla mas manifestaram um enorme entusiasmo pela iniciativa. Em pouco mais de uma semana, houve que ensinar aos alunos o manuseamento do programa, mas, apesar das condições em que decorreu a preparação dos participantes portugueses, a iniciativa foi unanimemente considerada um enorme sucesso. As duas professoras, que ficaram muito contentes com o entusiasmo com que os respetivos alunos encararam a experiência e com a forma como ela decorreu, publicarão noutro local um relato detalhado. Para os alunos, o aspeto internacional do evento foi bastante valorizado e parece que o *chat* que o programa permite foi usado intensamente. Na figura 12 estão algumas das numerosas imagens geradas pelos alunos durante a competição.

Do ponto de vista do Atractor, não foi dada ênfase ao aspeto "competitivo" e os certificados passados (ver figura 13) apenas atestam a participação dos alunos.

Mas, naturalmente, não é surpresa que os participantes tendam a valorizar mais o aspeto de competição do que os organizadores…

As duas professoras fizeram previamente alguns testes para ensaiar as ligações e o Atractor esteve disponível para o apoio que lhe foi solicitado, como estará para iniciativas análogas que venham a ser tomadas no futuro, envolvendo uma ou mais escolas, a nível nacional ou internacional.

Figura 13

REFERÊNCIAS

[1] *http://www.atractor.pt/publicacoes/entrada2.htm*
[2] *http://www.atractor.pt/mat/GeCla*
[3] *http://www.atractor.pt/mat/GeCla/im4.html*

Jorge Nuno Silva
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

QUADRADOS E CUBOS

David Wells, um autor bem conhecido entre nós, já que algumas das suas obras foram editadas em português, tem um novo livro: *Games and Mathematics – Subtle Connections* (Cambridge UP 2012). Wells propõe uma viagem fascinante por problemas e teoremas, mostrando como as ligações entre os jogos abstratos e a matemática são profundas e variadas. Desta reflexão que, se bem que filosófica, é também matemática, retiramos um resultado para partilhar com os leitores.

Pouco após aprender que a soma dos primeiros n naturais é dada por $n(n+1)/2$, muitos de nós encontrámos uma fórmula para a soma dos cubos dos primeiros naturais:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Ora, combinando as duas relações mencionadas acima, obtemos a igualdade surpreendente

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$$

Wells pergunta-se "será isto uma coincidência, ou tratar-se-á de algo profundo?" O que se entende por coincidência, em matemática, é discutido no livro em apreço, assim como o que caracteriza a profundidade de um resultado.

As expressões conhecidas para as somas das potências dos primeiros naturais não costumam apresentar esta, chamemos-lhe assim, simetria. Será que se trata da ponta de algum *iceberg*, será que alguma outra área matemática está aqui a espreitar?...

Wells chama a nossa atenção para um resultado de Louville de 1857. Para o exibir relembremos que os divisores de um número natural incluem o 1 e o próprio número. Por exemplo, os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4, 6, 12. Assim, 12 tem seis divisores, o que também se escreve $d(12)=6$.

Calculemos o número de divisores de cada destes números. Temos $d(1)=1$, $d(2)=d(3)=2$, $d(4)=3$, $d(6)=4$, $d(12)=6$ e um pequeno cálculo dá-nos

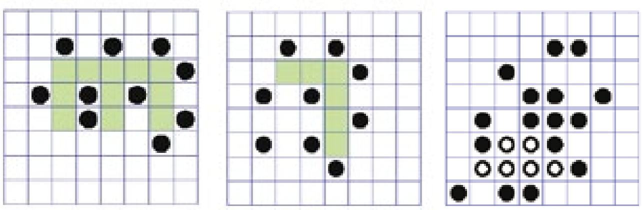
$$1^3+2^3+2^3+3^3+4^3+6^3=(1+2+2+3+4+6+12)^2=324.$$

O que o Teorema de Liouville diz é exatamente que este tipo de igualdade se verifica sempre que consideramos os divisores de um natural n qualquer. No caso de n ser uma potência de 2, digamos $n=2^{k-1}$, tem-se $d(n)=k$ e os divisores de n são $1,2,2^2,\ldots,2^{k-1}=n$, donde $d(1)=1$, $d(2)=2$, $d(4)=3$, $\ldots$, $d(2^{k-1})=k$ e $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

Como caracterizar os conjuntos de números $x,y,\ldots,z$ tais que $x^3+y^3+\cdots+z^3=(x+y+\cdots+z)^2$?

Não se sabe se esta igualdade só se verifica neste caso particular de Liouville, em que os números em questão são os números de divisores dos divisores de um dado natural. Aqui fica um problema aberto para os nossos leitores...

Soluções para os problemas do último número:



Alexander Kovačec
Universidade de Coimbra
kovacec@mat.uc.pt

LOTARIAS BIOLÓGICAS: EXEMPLOS DO PAPEL CLARIFICADOR DA MATEMÁTICA

Como noutras ciências assim também na genética, a matemática teve por diversas vezes um papel clarificador. As observações de Mendel sobre a hereditariedade podem ser deduzidas com simples considerações probabilísticas. Um matemático famoso que se desculpou (ou gabou?) de 'não ter feito nunca nada de útil', na verdade ajudou com um artigo de duas páginas a converter biólogos céticos à aceitação da teoria mendeliana. A nossa abordagem menos ortodoxa das leis de Mendel e da lei da estabilidade de Hardy-Weinberg – por polinómios em lugar das habituais tabelas – aplicar-se-ia a planetas distantes onde podem reinar leis de hereditariedade bem mais complicadas. Polinómios podem ajudar a um ictiólogo determinar quantas carpas, lúcios e trutas vivem em cada um de lagos diferentes se souber pouco mais do que com quantos peixes de cada espécie estes lagos em conjunto abastecem por dia um mercado próximo. Vejamos porquê...

Desde os primórdios os homens terão notado semelhanças entre pais e filhos; se curiosidade na altura já existia, interrogaram-se de certeza porquê. As ideias sobre isto até cerca de 1900 foram pouco convincentes. O naturalista Leclerc de Buffon (1707-1788) pensava que os licores masculino e feminino contêm partículas enviadas por todas as partes do corpo que se ordenam miraculosamente para constituir o filho. E mesmo o pai da teoria da Evolução, Charles R. Darwin (1809-1882), viu cada célula do corpo como funcionando em dependência de pequeníssimas partículas, as 'gémulas'. As gémulas do pai e da mãe reencontrar-se-iam em cada célula do embrião, dotado assim de características intermédias entre as da célula paterna e as da célula materna.

No entanto, estas teorias não resistem a um exame minucioso. Na transmissão de geração para geração, as características individuais deviam desaparecer e após poucas gerações todos nós devíamos ter aparências quase iguais, contrariando o facto de que características dos pais que na geração dos filhos se podem não manifestar, podem reaparecer nos netos.

Muitos leitores terão conhecimento de que foi um frade da ordem dos Agostinhos, Gregor Mendel (1822-1884), que nos anos 1850 na cidade de Brünn (do império austro-húngaro, hoje Brno, na República Checa), com as suas experiências sistemáticas de

cruzamentos de plantas, trouxe pela primeira vez luz sobre o assunto. Com ele começou na biologia o que na física nos lembra de Galileu: por experiências sistemáticas e pacientes em situações simples, suprimiu influências perturbadoras e descobriu relações essenciais.

Durante oito anos, Mendel experimentou com a ervilheira *(pisum sativum)*. Com esta planta fez uma escolha feliz, pois poucas plantas exibem as leis da hereditariedade de forma tão pura como esta.

Será útil na nossa abordagem recordar duas coisas elementares:

a. A lei da distributividade implica que o produto de duas ou mais somas se obtém selecionando de todas as maneiras possíveis um termo em cada soma, multiplicando estes termos e adicionando todos os produtos obtidos, por exemplo $(a+b+c)(d+e) = ad+bd+cd+ae+be+ce$. Junto com a comutatividade, obtemos regras tais como
$$(a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2.$$

b. Da teoria das probabilidades sabemos que a probabilidade de dois eventos independentes acontecerem é igual ao produto das probabilidades dos dois eventos. Por exemplo, a probabilidade de no lançamento simultâneo de um dado e de uma moeda não viciados se obter o par (5, cara) é $(1/6)(1/2) = 1/12$.

É devido a estas observações (a) e (b) que a contabilização da totalidade dos resultados possíveis em certas considerações probabilísticas é feita de forma muito cómoda com polinómios. Por exemplo, se numa urna há duas letras x e três ys, a probabilidade de tirar da urna ao acaso um x é $\frac{2}{5}$, enquanto a probabilidade de tirar um y é $\frac{3}{5}$; informação que codificamos convenientemente pelo polinómio $\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}y$. Se numa outra urna houver um x, três ys e dois zs, informação codificada por $\frac{1}{6}x+\frac{3}{6}y+\frac{2}{6}z$, então, calculando o produto das duas combinações lineares, obtemos $\frac{1}{15}x^2+\frac{3}{10}xy+\frac{3}{10}y^2+\frac{2}{15}xz+\frac{1}{5}yz$. Torna-se claro que este polinómio nos informa corretamente de que na experiência 'tirar uma letra de uma das urnas, e uma letra da outra urna', a probabilidade de tirar 'x's de ambas as urnas é $\frac{1}{15}$, a de tirar um x de uma das urnas e um y da outra é $\frac{3}{10}$; a de tirar ys de ambas é $\frac{3}{10}$; a de tirar um x e um z é $\frac{2}{15}$, e a de tirar um y e um z é $\frac{1}{5}$. Esta técnica pode ser directamente generalizada a três ou mais urnas. Os polinómios obtidos seriam produtos respectivamente de três ou mais fatores.

Voltando ao nosso tópico, para obtermos gráficos simples vamos supor que fazemos experiências com plantas de aspetos básicos □, a que chamamos 'quadradas'; e △, a que chamamos 'triângulas'. Além de ser 'lisa', uma triângula pode ocorrer ainda com um 'ponto': △.

O que nós vemos nestas plantas são apenas os seus 'fenótipos': a forma como os genes – que Mendel viria a descobrir e a chamar fatores – se manifestam. Imaginem Mendel a fazer as experiências seguintes e apontando de seguida os resultados no seu caderno como todo o bom naturalista faz.

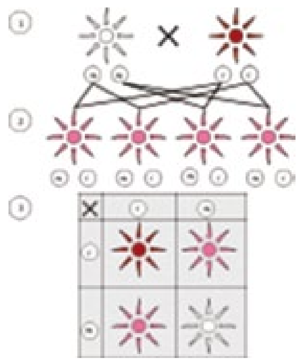
Ensaio 1: Cruzar quadradas vermelhas ■ com quadradas brancas □.

Resultado: Todas as quadradas-filhos, i.e., as quadradas da geração filial F_1, são de cor-de-rosa: resulta em

■ × □ resulta em □□□□ (apenas).

Ensaio 2: Cruzar quadradas da geração F_1 entre si.

Resultado: Os filhos que constituem a geração F_2 não são todos iguais; na verdade, em termos estatísticos, saem em cada quatro uma quadrada vermelha, duas de cor-de-rosa e uma branca: □ × □ resulta em ■□□□.



Com estas experiências, que em livros seriam explicadas com figuras como a mostrada, a teoria dos licores de Buffon e de Darwin cai definitivamente por terra, pois segundo eles devíamos obter aqui flores cor-de-rosa apenas. Talvez pelos seus estudos matemáticos anteriores, Mendel tenha tido a ideia genial de que o fenótipo não é governado por um fator hereditário só, mas por dois. Supondo que a cor da quadrada é determinada por dois fatores que designamos por R (red) e W (white), e que ambos exercem a mesma influência sobre a cor, então devemos supor que as quadradas ■ têm dois fatores R; diríamos hoje que são do *genótipo* RR, as quadradas □ são do genótipo RW, e as quadradas □ são do genótipo WW. Se supusermos ainda, como é natural, que na criação de um filho cada um dos fatores de pai e mãe são transmitidos com a mesma probabilidade, então chegamos exatamente aos resultados descritos.

De facto, para o ensaio 1 justifica-se o cálculo polinomial $(\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R)(\frac{1}{2}W+\frac{1}{2}W)=\frac{1}{4}(RW+RW+RW+RW)=RW;$ e para o ensaio 2 o cálculo

$$(\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}W)(\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}W)=\frac{1}{4}(RR+RW+WR+WW)=$$
$$\frac{1}{4}RR+\frac{1}{2}RW+\frac{1}{4}WW.$$

Na verdade, sabe-se hoje a nível molecular e cromossomático o que Mendel intuiu: da perspetiva matemática pode pensar-se do processo da acquisição de uma determinada característica por um filho como se este fosse 'escolher' um gene da 'urna' dos genes (correspondente à característica) do pai e um tal gene da urna da mãe.

Resultados mais típicos do que os anteriormente relatados são aqueles nos quais um gene domina o outro.

Ensaio 3: Cruzar triângulas vermelhas de genótipo puro, RR ▲ com triângulas brancas rr. △

Resultado: Todas as triângulas da geração F_1 são vermelhas:

▲ ▲ ▲ ▲ ...

Ensaio 4: Cruzar triangulas da geração F_1 entre si.

Resultado: Obtemos triângulas vermelhas e brancas em números que estão na razão 3:1.

▲ × ▲ resulta em ▲ ▲ ▲ △.

Estes resultados pôde explicar supondo que nas triângulas o fator (hoje chamado alelo) responsável pelo vermelho é 'dominante', e o alelo que dava cor branca é 'recessivo'. Alelos dominantes são usualmente designados por letras grandes; a sua presença ou ausência sozinha determina a manifestação ou não de uma característica; para os alelos recessivos usam-se as mesmas letras, mas pequenas. Assim só flores de genótipos rr são brancas. Ao ensaio 3 corresponde o mesmo cálculo do ensaio 1:

$$(\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R)(\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}r)=\frac{1}{4}(Rr+Rr+Rr+Rr)=Rr$$

explica porque na geração F_1 temos apenas vermelhas, que, no entanto, são mistas (heterozigóticos), enquanto os seus pais foram todos puros (homozigóticos). Os resultados dos ensaios 1 e 3 foram cristalizados na 1ª Lei de Mendel, dita Lei da Uniformidade: se cruzarmos dois indivíduos de raça pura, i.e., homozigóticos que diferem num par de alelos, os híbridos da geração F_1 são todos iguais. No caso da hereditariedade intermédia, o fenótipo dos indivíduos F_1 tem um aspeto compreendido entre aqueles dos pais (ensaio 1); no caso da hereditariedade dominante, um dos alelos sozinho (o dominante) determina o fenótipo, o outro dito recessivo não se manifesta nesta geração. Ao ensaio 4 corresponde o mesmo cálculo do ensaio 2, mas as interpretações dos cálculos diferem por razões da existência de um alelo dominante: na geração F_2 que nasce da geração F_1, temos o cálculo

$$(\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}r)(\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}r)=(\frac{1}{4}RR+\frac{1}{2}Rr+\frac{1}{4}rr);$$

se 'algebrizarmos' a passagem para os fenótipos fazendo corresponder a RR e a Rr a mesma letra, digamos $\bar{R}$; e a rr a letra $\bar{r}$. Obtemos assim os polinómios simples $\bar{R}$ e $3\bar{R}+\bar{r}$, que explicam o resultado de que o número das vermelhas está para as brancas como 3:1.

Vimos aqui a 2ª Lei de Mendel, a Lei da Segregação em acção: se cruzarmos os monohíbridos da geração F_1, os genótipos vão dividir-se nas razões estatísticas $1:2:1$. No caso da hereditariedade intermédia, estas razões valem também para os fenótipos; mas simplificam para $3:1$ para os fenótipos no caso da hereditariedade dominante.

Exercício: *Quais as razões numéricas esperadas por cruzamentos de triângulas* $Rr\times rr$, $RR\times Rr$?

Naturalmente, testar as suas hipóteses sobre recessividade e dominância terá sido bem complicado para Mendel: do aspeto vermelho sozinho não se sabe se uma triângula é do genótipo RR ou Rr. Mas das suas próprias hipóteses decorre um método para identificar um conjunto de triângulas vermelhas de genótipo RR.

Problema: O leitor diga como.

Finalmente podemos examinar se existe ou não alguma dependência entre a cor (governada por alelos R,r) e o aspeto de ser liso ou ter ponto (governado pelos alelos L,l) de triângulas.

Ensaio 5: Cruzar triângulas vermelhas lisas de genótipos RR LL com triângulas brancas rr ll pontuadas.

Resultado: As triângulas da geração F_1 são todas vermelhas lisas:

▲ × △ resulta em ▲, ▲... apenas.

Este resultado obtém-se porque as propriedades de cor e de ser lisa ou pontuada são independentes. São provocadas por genes que residem em loci (posições) distintos dos cromossomas. O resultado corresponde ao cálculo $\frac{1}{16}(R+R)(L+L)(r+r)(l+l)$ no qual o fator $\frac{1}{16}$ é o produto de fatores $\frac{1}{2}$ que estariam à frente de cada letra. Expandindo o polinómio, obtém-se evidentemente $Rr\,Ll$; e como R domina r e L domina l, todas as flores são vermelhas e lisas. O polinómio dos fenótipos é $\bar{R}\bar{L}$.

Ensaio 6: Cruzar triângulas da geração F_1 entre si.

Resultado: Em dezasseis flores esperam-se:

9▲, 3△, 3▲, 1◬.

Este resultado obtém-se expandindo o produto

$$\frac{1}{16}(R+r)(L+l)\cdot(R+r)(L+l)$$

que significa que no cruzamento o acaso vai escolher no pai, no lócus responsável pela cor, um dos alelos R ou r e no locus responsável pelo aspeto um dos alelos L ou l, onde cada escolha é feita com a mesma probabilidade $\frac{1}{2}$.

Exatamente o mesmo acontece quanto à escolha dos alelos da mãe.

Calculando o produto, obtém-se $R^2L^2+2R^2Ll+R^2l^2+2RrL^2+4RrLl++2Rrl^2+r^2L^2+2r^2Ll+r^2l^2$. Passando para os fenótipos, substituimos os fatores LL e Ll por $\bar{L}$; RR e Rr por $\bar{R}$; ll por $\bar{l}$; e rr por $\bar{r}$. Resulta $\bar{R}\bar{L}+2\bar{R}\bar{L}+\bar{R}\bar{l}+2\bar{R}\bar{L}+4\bar{R}\bar{L}+2\bar{R}\bar{l}+\bar{r}\bar{L}+2\bar{r}\bar{L}+\bar{r}\bar{l}=9\bar{R}\bar{L}+3\bar{R}\bar{l}+3\bar{r}\bar{L}+\bar{r}\bar{l}$, o que explica perfeitamente a experiência 6, supondo as hipóteses de independência.

Os resultados obtidos nos ensaios 5 e 6 são expressos pela 3ª Lei de Mendel, a Lei da Recombinação dos Genes: se cruzarmos dihíbridos, então os alelos que dizem respeito a fénos distintos transmitem-se de formas independentes.

Uma das objeções que os biólogos aduziram contra as leis de Mendel foi que características raras (como o canhotismo ou doenças raras) deviam, ao fim de poucas gerações, desvanecer-se; uma ideia associada à teoria do licor.

Em 1908, o matemático Godfrey Harold Hardy, famoso pelos seus resultados obtidos na análise e na teoria dos números, bem como pelo seu controverso livro de honestas confissões [H], e autonomamente, o médico alemão Weinberg mostraram que, pelo contrário, independentemente da distribuição das frequências dos genótipos em sistemas de 2 alelos, *numa população panmista, a partir da primeira geração filial as frequências dos três genótipos possíveis ficam constantes.* Uma população diz-se panmista se a probabilidade de dois genótipos se cruzarem for o produto das probabilidades de encontrar os ditos genótipos na população. O resultado viria a ser conhecido como a Lei da estabilidade de Hardy -Weinberg.

Vamos trabalhar com os genótipos RR, Rr, rr, respetivamente. Supomos que estes se encontram numa dada população com as frequências a,b,c, respetivamente.

Como um qualquer sujeito de um dos referidos genótipos dá exatamente um dos seus alelos ao seu filho, podemos esperar outra vez que o produto de dois polinómios dê o resultado pretendido.

Em generalização direta do que fizemos antes, fazemos o cálculo

$$\begin{aligned}
&(a(\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R)+b(\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}r)+c(\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}r))^2\\
&\quad=((a+\frac{b}{2})R+(c+\frac{b}{2})r)^2\\
&\quad=(a+\frac{b}{2})^2RR+2(a+\frac{b}{2})(c+\frac{b}{2})Rr+(c+\frac{b}{2})^2rr\\
&\quad=a'R^2+b'Rr+c'^2r^2.
\end{aligned}$$

Aqui, no último passo definimos implicitamente a',b',c' como coeficientes dos monómios R^2,Rr,r^2, respetivamente; são também as probabilidades de encontrar os genótipos RR, Rr, rr na população filial. Estes coeficientes desempenham para esta geração o papel que a,b,c desempenharam para os pais. Os cálculos mostram-nos então que à passagem dos pais para os filhos corresponde um mapeamento

$$\begin{aligned}
&(a,b,c)\overset{\phi}{\mapsto}(a',b',c')\\
&\qquad:=((a+\frac{b}{2})^2,2(a+\frac{b}{2})(c+\frac{b}{2}),(c+\frac{b}{2})^2).
\end{aligned}$$

Seja agora $(a'',b'',c'')=\phi(a',b',c')$. Então,

$$\begin{aligned}
a'' &= (a'+\frac{b'}{2})^2\\
&= ((a+\frac{b}{2})^2+(a+\frac{b}{2})(c+\frac{b}{2}))^2\\
&= (a+\frac{b}{2})^2((a+\frac{b}{2})+(c+\frac{b}{2}))^2\\
&= (a+\frac{b}{2})^2\cdot 1=a',
\end{aligned}$$

dado a que a,b,c designam probabilidades de soma 1.

Exercício: *O leitor estabeleça de forma análoga que $b''=b'$ e $c''=c'$, concluindo a prova de que $\phi\circ\phi=\phi$, ou seja, que ϕ é idempotente. Finalmente, convença-se de que esta idempotência estabelece a lei de Hardy Weinberg.*

A matemática das leis de Mendel é relativamente simples e podíamos ter dispensado a nossa teoria. Mas, ao contrário do que é possível com tabelas, podíamos tratar com a ferramenta contabilística de polinómios – na qual podemos ver germes do que na análise combinatória é conhecido pelo termo 'funções geradoras' – também leis mendelianas em planetas distantes onde na procriação estão envolvidos três ou mais sexos e a transmissão dos alelos não é equiprobabilística.

Mas também o nosso planeta nos coloca questões onde a matemática apresentada é útil. Acessível a um leitor que tenha absorvido o método aqui exposto é o seguinte problema.

Problema. *Um ictiólogo já há tempos queria saber a distribuição das frequências relativas de carpas, lúcios e trutas em três lagos 1, 2, 3 vizinhos. A obtenção de tais dados é custosa, mas quis a sorte que ouvisse de três pescadores amigos que mantiveram durante dois anos (730 dias) o costume diário de cada um ir a um lago diferente e esperar até que um dos desejados peixes mordesse o isco.*

No jantar conjunto de cada dia cada um punha o seu peixe na mesma panela. Registavam também em que consistiam os seus jantares.

Contactados, emprestaram os seus registos ao cientista, que conseguiu construir a seguinte tabela, que lhe dizia que em 100 dias comeram três carpas, em 176 dias a panela continha duas carpas e um lúcio, etc.

três carpas 100	duas carpas, um lúcio 176	uma carpa, dois lúcios 89
três lúcios 13	duas carpas uma truta 120	um peixe de cada espécie 156
dois lúcios, uma truta 36	uma carpa, duas trutas 20	um lúcio, duas trutas 20

Sendo amigo matemático do ictiólogo, o leitor é capaz de o informar de qualquer coisa como de que num dos lagos os números de carpas, lúcios e trutas estão aproximadamente nas razões 3:1:5, no outro dos lagos .... etc.? Desta forma poupava-lhe imenso trabalho, tempo e dinheiro, além de se tornar coautor do próximo artigo científico do ictiólogo, o que não seria de todo mal para a carreira.

Explicámos aqui alguma matemática útil em certas considerações probabilísticas e, em particular biológicas. As fascinantes histórias da descoberta e da bioquímica da leis mendelianas, tivemos de simplificar radicalmente. Estas vertentes da narrativa mendeliana encontram-se, por exemplo, em [J],[A],[W].

REFERÊNCIAS

[J] Albert Jacquard, *Elogio da Diferença: a genética e os homens*, Publicações Europa-América, 1989.

[A] Peter Atkins, *O Dedo de Galileu: As dez grandes ideias da ciência*, Gradiva, 2007.

[H] G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge, 1967.

[W] Wikipédia, procurar Mendel, Mendelian Inheritance e *links* ligados a estes temas.

Fabio Chalub
Universidade Nova
de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

ADÃO E EVA NOS NOSSOS GENES

Somos todos irmãos! Esta frase pacifista ilustra uma realidade genética: tomos nós descendemos de ancestrais comuns. Adão, o pai de todos os pais, e Eva, a mãe de todas as mães, estão marcados em nossos genes. No entanto, eles nem precisam de se ter conhecido, pois ninguém disse que descendemos de um único casal, muito menos que eles eram os únicos seres humanos vivos. Novas estimativas sobre quando viveram estes nossos antepassados ilustres lançam novas luzes sobre a evolução humana.

João tem dois pais; os seus pais têm, cada um, dois pais; os seus avós também. Quando retornamos n gerações para trás, encontramos 2^n antepassados do João. Nuns míseros 1000 anos, o João tem mais antepassados do que toda a população atual da Terra. Alguma coisa seriamente errada tem de haver neste argumento. A resposta é simples: muitos caminhos levam à mesma pessoa. Ou seja, por vezes o avô materno da avó paterna da mãe também é o pai de algum outro antepassado. E não precisa sequer de ser da mesma geração, pois este conceito não é rígido.

Se considerarmos também a Maria, que nem conhece o João, o raciocínio é parecido. Mas há um ingrediente a mais: quando recuamos no tempo, mais e mais antepassados da Maria serão também antepassados do João. Um, ou alguns deles, é conhecido como MRCA (antepassado comum mais recente, na sigla em inglês). Para dois irmãos, os MRCAs são o pai e a mãe. Para primos, os avós. Para quaisquer duas pessoas, existe um MRCA, caso contrário teríamos a indicação de que a linhagem humana foi criada duas vezes, o que não parece ter sido o caso. (De facto, também há um antepassado comum entre um dono e o seu cão, mas isto fica para outra crónica.)

Populações inteiras podem ter um MRCA, mas neste caso é muito difícil encontrar toda a linhagem passada. O que podemos fazer é estimar o tempo em que este ancestral existiu. É agora que a situação fica mais interessante. O nosso ADN é consitituído por 23 pares de cromossomas. Destes, 22 são conhecidos como autossomas e um par é formado pelos cromossomas sexuais. Cada um dos elementos dos autossomas é idêntico na sua estrutura (não necessariamente no seu conteúdo), assim como dois livros com o mesmo número de páginas e capítulos, mas um sobre física e outro sobre biologia. No entanto, o par sexual pode ser bastante distinto. As mulheres têm dois cromossomas X, enquanto os homens têm um X e Y. (O nome deriva da sua forma aproximada.) Os únicos cromossomas que recebemos na íntegra dos nossos pais são os sexuais. Os outros, antes da divisão celular, sofrem um processo conhecido como *cross-over*, que faz com que recebamos do nosso pai autossomas que têm origem parcialmente na nossa avó paterna e parcialmente no nosso avô paterno. No entanto, cada homem tem um cromossoma Y que recebeu integralmente do seu pai, e portanto do seu avô paterno, e do pai deste, formando o que é conhecido como a *patrilineagem*.

Cada um dos dois cromossomas X de uma mulher pode ter vindo do pai ou da mãe. Desta forma ele não permite reconstruir a *matrilineagem*. No entanto, todas as nossas células têm uma pequena organela, conhecida como *mitoncôndria*, que possui um DNA próprio (provavelmente resquício de uma existência autónoma no passado), chamado DNAmt. Recebemo-las todas da nossa mãe. Desta forma, podemos reconstruir a matrilineagem.

Porém, tanto o cromossoma Y, passado de pai para filho, como o DANmt, passado de mãe para filhos, não são necessariamente iguais nas duas gerações. Um processo fundamental para toda a vida tal como a conhecemos é a mutação: a possibilidade de um trecho do ADN sofrer uma alteração. Esta ocorre numa taxa pequena, da ordem de 1 alteração por cada milhão de unidades do ADN (chamadas bases) na comparação entre pai e filho. No entanto, supondo esta taxa constante e medindo o número de alterações entre o cromossoma Y de duas pessoas, podemos estimar quando viveu o seu antepassado comum por parte de pai. O mesmo ocorre com a linhagem materna.

É importante realçar que a estimativa depende crucialmente de conhecermos a velocidade com que as mutações ocorrem. Muitas causas, incluindo a espécie, a exposição a raios solares, agentes químicos, etc., podem fazê-la variar. Para termos uma boa estimativa, procuramos pedaços do ADN que em condições de laboratório tenham taxas aproximadamente constantes. Em geral, isto se encontra nas partes do ADN que não codificam proteínas (e cuja função não é de todo compreendida).

Juntando as ideias acima, podemos estimar a época passada em que viveu o nosso antepassado materno e aquela em que viveu o nosso pai comum. O hipotético antepassado masculino é conhecido como o "Adão do cromossoma Y", enquanto a grande mãe de todos nós é a "Eva mitocondrial".

É evidente que a terminologia associada evoca imagens bíblicas, como se houvesse um casal humano original do qual todos descendemos. Nem por isso. Não há grande evidência de que Adão e Eva se tenham conhecido. De facto, as estimativas de há quanto tempo cada um destes nossos (meu e do leitor) antepassados existiu são bastante díspares: cerca de 100.000 anos para o Adão; 300 milénios para Eva. Tamanha discrepância era explicada por uma maior pressão da seleção natural sobre os homens, fazendo com que a evolução seja mais rápida no cromossoma Y do que no DNAmt (há mais homens sem filhos, há mais homens com muitos filhos, apesar de – como consequência da população humana ser dividida quase meio a meio – a média de filhos tanto para homens como para mulheres ser aproximadamente a mesma).

Um novo trabalho, envolvendo 11 investigadores nos Estados Unidos e em França, vem no entanto desafiar estas ideias [1]. As novas estimativas, usando relógios moleculares aperfeiçoados, indicam uma sobreposição dos intervalos em que possivelmente Adão e Eva existiram. Desta forma, a conclusão é a de

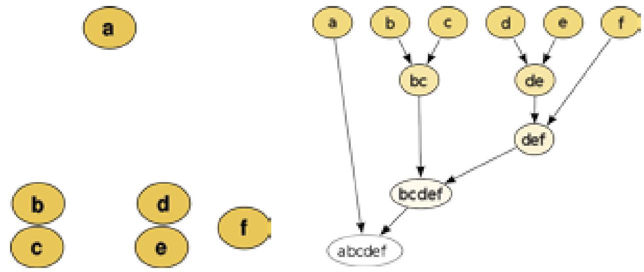


Figura 1: Seis pontos num gráfico representando seis diferentes indivíduos; a sua distância euclideana (ou seja, aquela medida com uma régua) representa a sua distância de Hamming (o número de diferenças nas sequências de ADN). Agrupando-os por proximidade, chegamos ao cladograma à direita. Inicialmente juntamos b com c e d com e; a seguir, o resultante desta última junção com f e assim por diante até obtermos o MRCA. Fonte: Wikimedia Commons.

que, afinal, as pressões de seleção natural sobre homens e mulheres não são tão distintas assim. Adão deve ter existido entre 120 e 156 mil anos atrás e Eva entre 99 e 148 mil anos. Considerando o tempo médio de vida humana, é fácil ver que mesmo assim a probabilidade de eles se terem conhecido é microscópica – lembrem-se de que ainda não havia Facebook, nem companhias aéreas; o número de conhecidos de cada ser humano pré-histórico era diminuto; além do mais, e por outras razões, podemos ter uma razoável certeza de que a população humana nunca foi de apenas duas pessoas.

Como foi feito este trabalho: inicialmente colheu-se amostra de ADN de nove populações humanas "primitivas" (que estiveram em isolamento até recentemente, não tendo ainda o seu ADN se misturado significativamente com os de outras populações). Além disso, foi necessário fazer uma estimativa do relógio molecular. Como em ciência dificilmente uma área do conhecimento vive sozinha, estimativas arqueológicas foram usadas para as populações das Américas. Estima-se, e confia-se com base em fortes evidências, que a migração da Ásia para as Américas começou há cerca de 15 mil anos e seguiu um rápido caminho costeiro. Desta forma, a divergência genética encontrada entre os ameríndios permitiu estimar a taxa de mutação. Usando o mesmo valor para toda a humanidade, os números acima foram concluídos.

É importante notar que se a estimativa da primeira colonização humana das Américas estiver errada, então mudam as estimativas de ancestralidade de Adão e Eva, mas não o facto de que estes intervalos têm uma boa concordância.

Por trás de toda esta análise há muita matemática. Um primeiro ponto importante é perceber como, a partir dos dados brutos, é possível construir a árvore evolutiva

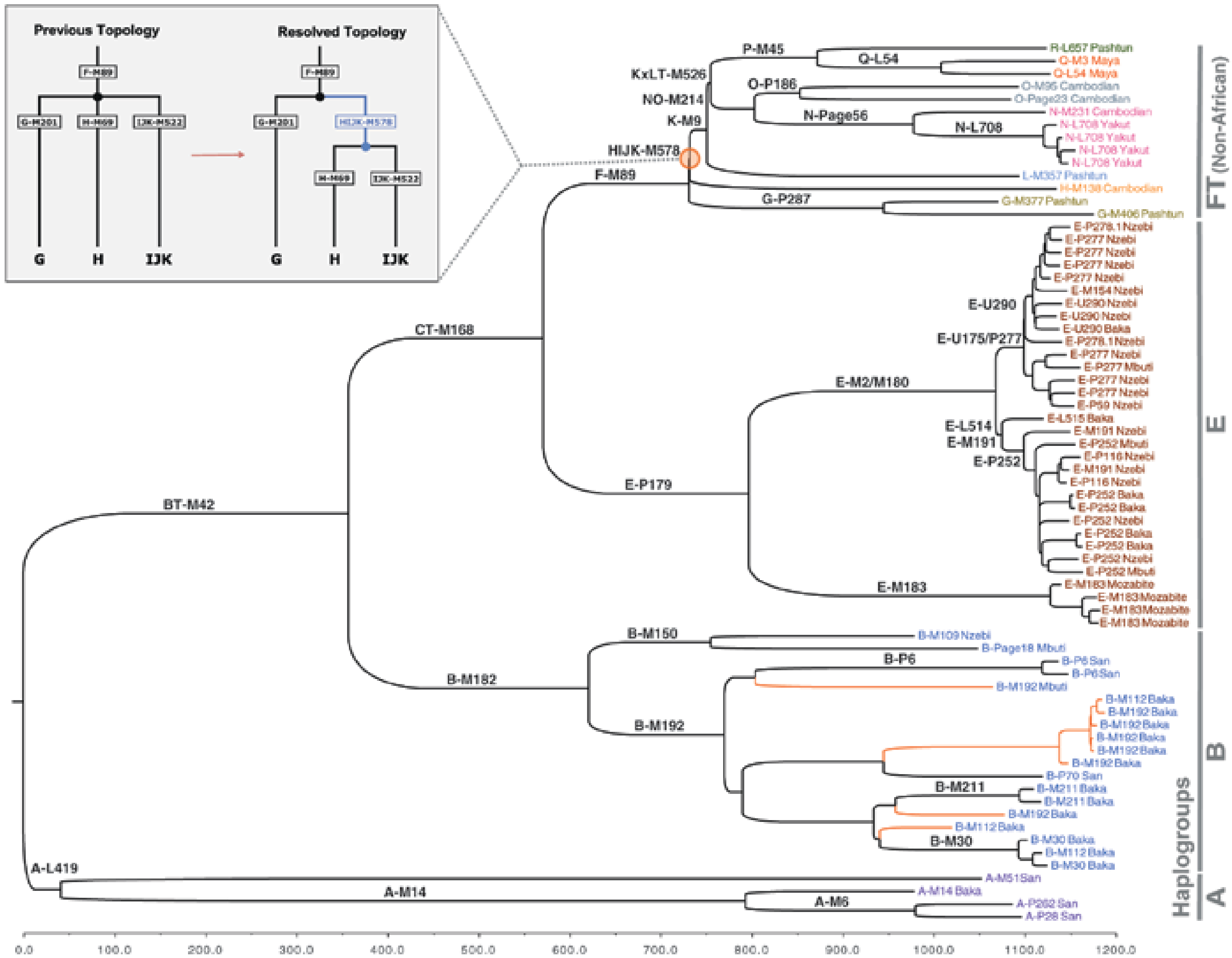


Figura 2: Cladograma obtido para os 69 indivíduos do sexo masculino de nove populações distintas investigadas. Note que ao escolher três indivíduos quaisquer e considerando que a distância entre eles é dada pelo tempo que as suas linhagens divergiram, então estes estão nos vértices de um triângulo isósceles. Figura gentilmente cedida pelos autores do artigo, em particular G. D. Poznik.

(cladograma). Quando comparamos duas sequências (como as de ADN), a sua distância é medida pela quantidade de pontos não idênticos. Isto é conhecido como métrica de Hamming. No entanto, para construir o cladograma, é preciso converter estes dados no que é conhecido como uma ultramétrica, uma forma de medir distâncias onde todo o triângulo é isósceles. Não há uma maneira única de converter uma na outra, e um exercício clássico em evolução é mostrar como os algoritmos de conversão são sensíveis aos dados (incluir ou excluir uma informação pode mudar completamente o resultado). É importante lembrar que existe uma única árvore da vida correta, o problema é saber qual é. Veja a figura 1 para uma exemplificação e a figura 2 para os resultados obtidos nos grupos pesquisados.

Uma outra área importante da matemática profundamente relacionada com esta análise é a da teoria da coalescência, um ramo da probabilidade particularmente útil em genética populacional e biologia evolutiva. Esta foi criada há poucas décadas e continua com desenvolvimento ativo. O seu objetivo é estimar o quanto é preciso andar para trás no tempo de forma a que a população *coalesça* (se junte) num único indivíduo. Quando a seleção natural tem um papel importante, isto é particularmente difícil de se calcular.

REFERÊNCIAS

[1] G. David Poznik, Brenna M. Henn, Muh-Ching Yee, Elzbieta Sliwerska, Ghia M. Euskirchen, Alice A. Lin, Michael Snyder, Lluis Quintana-Murci, Jeffrey M. Kidd, Peter A. Underhill, Carlos D. Bustamante. "Sequencing Y Chromosomes Resolves Discrepancy in Time to Common Ancestor of Males Versus Females" Science Vol. 341 no. 6145 pp. 562-565 (2 de agosto de 2013).

António Machiavelo
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

A **EQUAÇÃO** QUE **NUNCA** FOI DE **PELL**

Como determinar todas as soluções, em números naturais, da equação $x^2 - 2y^2 = 1$? E as de $x^2 - 61y^2 = 1$? Equações deste tipo são designadas por *equações de Pell*, apesar de John Pell (1611–1685) nunca ter tido nada a ver com o assunto e de terem sido investigadas séculos antes deste ter nascido. Mas, não obstante a sua longa história, contêm ainda alguns mistérios por desvendar.

A designação *equação de Pell* refere-se, de facto, à família de equações:

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

onde a é um número natural maior que 1, usualmente livre de quadrados[1], isto é, que não é divisível por um quadrado perfeito superior a 1. Mais ainda, está subentendido que se pretende resolver a equação em números naturais, ou seja, em que se procuram todas as suas soluções com $x, y \in \mathbb{N}$. Quando a não é um quadrado perfeito, esta equação tem uma infinidade de soluções que se podem todas obter de uma particular, por essa razão chamada *fundamental*. Por exemplo, as soluções em números naturais de $x^2 - 2y^2 = 1$ são todas obtidas a partir de $x_1 = 3, y_1 = 2$ fazendo, sucessivamente, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + 3y_n. \end{aligned} \qquad (1)$$

Obtêm-se assim (x,y) = (17, 12), (99, 70), (577, 408), (3363, 2378), (19601, 13860), etc.

A referência explícita mais antiga que se conhece a respeito destes pares de números, de facto a uma família um pouco mais geral, a das soluções de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, está contida na obra de Teão de Esmirna[2], que viveu algures no século II. Pensa-se, no entanto, que Teão conhecia estes assuntos de fontes pitagóricas bastante anteriores ao seu tempo. Estes números, que se obtêm de $x_1 = 1, y_1 = 1$ tomando, sucessivamente, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2y_n \\ y_{n+1} &= x_n + y_n, \end{aligned} \qquad (2)$$

são apelidados de algo como *lado* (y_n) e *diagonal* (x_n). A construção sumariada na figura 1 (página seguinte), que pode ser usada para mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional e que se deixa ao cuidado do leitor entender, conduz ao seguinte: fazendo $d - \ell = y_n$ e $2\ell - d = x_n$, obtém-se precisamente $d = x_n + 2y_n$ e $\ell = x_n + y_n$. Isto poderá explicar os nomes de lado e diagonal.

Evidência de que o assunto era conhecido muito antes da época em que Teão de Esmirna viveu, foi descoberta por

---

[1] É fácil ver que os outros casos podem ser reduzidos a este, e que se a for um quadrado perfeito então a equação não tem soluções, em números naturais.

[2] A tradução para o francês, publicada em 1892 por J. Dupuis, da obra de Teão de Esmirna com o título de *Exposição dos Conhecimentos Matemáticos Úteis para a Leitura de Platão* encontra-se disponível em *http://www.wilbourhall.org*, um site com traduções de textos antigos, originalmente em grego, sânscrito, árabe e latim, sobre matemática e astronomia

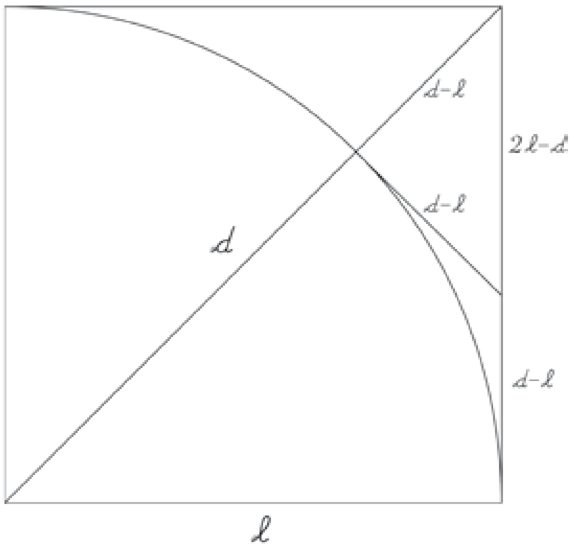


Figura 1

Gotthold Lessing (1729--1781), escritor alemão e uma figura importante do Iluminismo. Este, enquanto director da Biblioteca Herzog August in Wolfenbüttel, descobriu, num dos manuscritos ao seu cuidado, um curioso epigrama que contém um problema que tudo indica ser da autoria de Arquimedes, e que aqui reproduzimos, com alguma liberdade de tradução de modo a simplificar a sua leitura.[3]

O PROBLEMA DE ARQUIMEDES

Se fores diligente e sábio, ó estranho, calcula o número de bovídeos do deus Sol, que há muito tempo atrás pastavam pelos campos da ilha trinácria da Sicília, divididos em quatro manadas de diferentes cores, uma branca como o leite, outra de um preto lustroso, uma terceira amarela e a última malhada.

Em cada uma havia bois, imensos em número, de acordo com estas proporções: Entende, estranho, que os bois brancos eram tantos quantos a metade e um terço da manada preta em conjunto com todo o gado amarelo, enquanto que os bois pretos eram tantos quantos a quarta parte mais um quinto dos malhados conjuntamente com, novamente, todo o gado amarelo. Sabe ainda que os restantes bois, os malhados, eram em número igual à sexta parte mais um sétimo dos brancos e mais toda a manada amarela.

Esta era a proporção das vacas: As brancas eram precisamente iguais, em número, a uma terça parte mais um quarto de toda a manada preta; as vacas pretas eram tantas quantas a quarta mais a quinta parte de todo o gado malhado, quando bois e vacas iam para o pasto juntos. Agora, as malhadas eram iguais, em número, à quinta mais a sexta parte de toda a manada amarela. Finalmente, as vacas amarelas eram iguais, em número, à sexta mais a sétima parte da manada branca.

Se tu, ó estranho, conseguires dizer com exactidão qual o número de cabeças de gado do deus Sol, fornecendo separadamente o número de bois bem alimentados e o número de fêmeas de acordo com cada cor, então tu não poderás ser chamado de inábil ou ignorante dos números, mas ainda não poderás ser contado entre os sábios.

Mas vem, entende também todas estas condições que dizem respeito ao gado do deus Sol. Quando os bois brancos misturavam o seu número com os bois pretos, mantinham-se todos firmes, iguais em profundidade e largura, e as planícies da Sicília ficavam repletas em todas as direcções com a sua multitude.

De igual modo, quando os bois amarelos e os bois malhados eram reunidos numa só manada, colocavam-se de tal modo que o seu número, começando com o um, crescia lentamente até completar uma figura triangular, não havendo bois de outras cores entre eles, nem faltando algum.

Se fores capaz, ó estranho, de determinar todas estas coisas e de as reunir juntas na tua mente, fornecendo todas as suas relações, então tu partirás coroado de glória e sabendo que foste julgado perfeito neste género de sabedoria.

Fica ao cuidado do leitor perceber que este problema conduz a uma equação de Pell. Mas fica desde já avisado que, apesar do problema ter uma infinidade de soluções, a menor é um número com 206, 545 algarismos!

Para saber mais sobre este intrigante problema, consultar o artigo de D. Joyce, disponível em *http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/numbers/cattle.pdf*, assim como o artigo de H. W. Lenstra Jr. publicado nas *Notices da AMS* em Fevereiro de 2002, disponível em *http://www.ams.org/notices/200202/fea-lenstra.pdf*.

A equação dita *de Pell* foi também amplamente estudada por matemáticos indianos, pelo menos desde Brahmagupta no século VII, até Bhāskara no século XII. Num comentário escrito no século XI é descrito um processo para a resolver que ficou conhecido como o *método cíclico*, e que é atribuído, nesse documento, a um outro matemático indiano, Jayadeva, do qual se conhece apenas esta referência.[4]

Actualmente, a equação de Pell está intimamente ligada às unidades dos anéis de inteiros dos corpos quadráticos, ou seja à aritmética de conjuntos como, por exemplo, $\mathcal{A} = \{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\}$. A soma e o produto de dois elementos de $\mathcal{A}$ é ainda um elemento de $\mathcal{A}$, tendo este conjunto, munido dessas operações, uma aritmética algo análoga à dos inteiros, havendo primos e compostos, assim como factorização única em primos (neste caso). Uma pequena diferença é que, enquanto em $\mathbb{Z}$ há apenas dois elementos que têm inversos multiplicativos, nomeadamente ± 1, em $\mathcal{A}$ há uma infinidade, nomeadamente: $\{\pm(1+\sqrt{2})^m : m \in \mathbb{Z}\}$. Tem-se que $\pm(1+\sqrt{2})^m$ é um número da forma $a + b\sqrt{2}$, para alguns $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a - 2b^2 = \pm 1$, e quando m percorre todos os inteiros, a e b percorrem todas as soluções desta equação. Pondo $(1+\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, obtêm-se os números descritos em (02), enquanto que $(1+\sqrt{2})^{2n} = x_n + y_n\sqrt{2}$ dá todos os descritos por (01).

Tudo isto, e muito mais, incluindo aplicações relativamente recentes da equação de Pell à Criptografia, pode ser visto num livro inteiramente dedicado a esta equação: Michael J. Jacobson Jr., Hugh C. Williams, *Solving the Pell Equation*, Springer, 2009. Também o artigo acima referido de H. W. Lenstra Jr. deixa claro que, como esse autor escreve, a última palavra sobre a equação de Pell ainda não foi proferida, em particular no que diz respeito a algoritmos para encontrar a solução fundamental.

Dada toda a longa história desta equação muito especial (na realidade, como referido, trata-se de facto duma família de equações), porque se lhe chama então "*equação de Pell*"? A culpa é de Leonhard Euler que escreveu algures, erradamente, que foi John Pell que encontrou um método para as resolver. É muito provável que tal tenha resultado de uma leitura apressada de partes da *Algebra* de Wallis, numa fase em que, como Weil diz (*loc.cit.* p.174), "*Euler devia ser um leitor descuidado por essa altura*"[5].

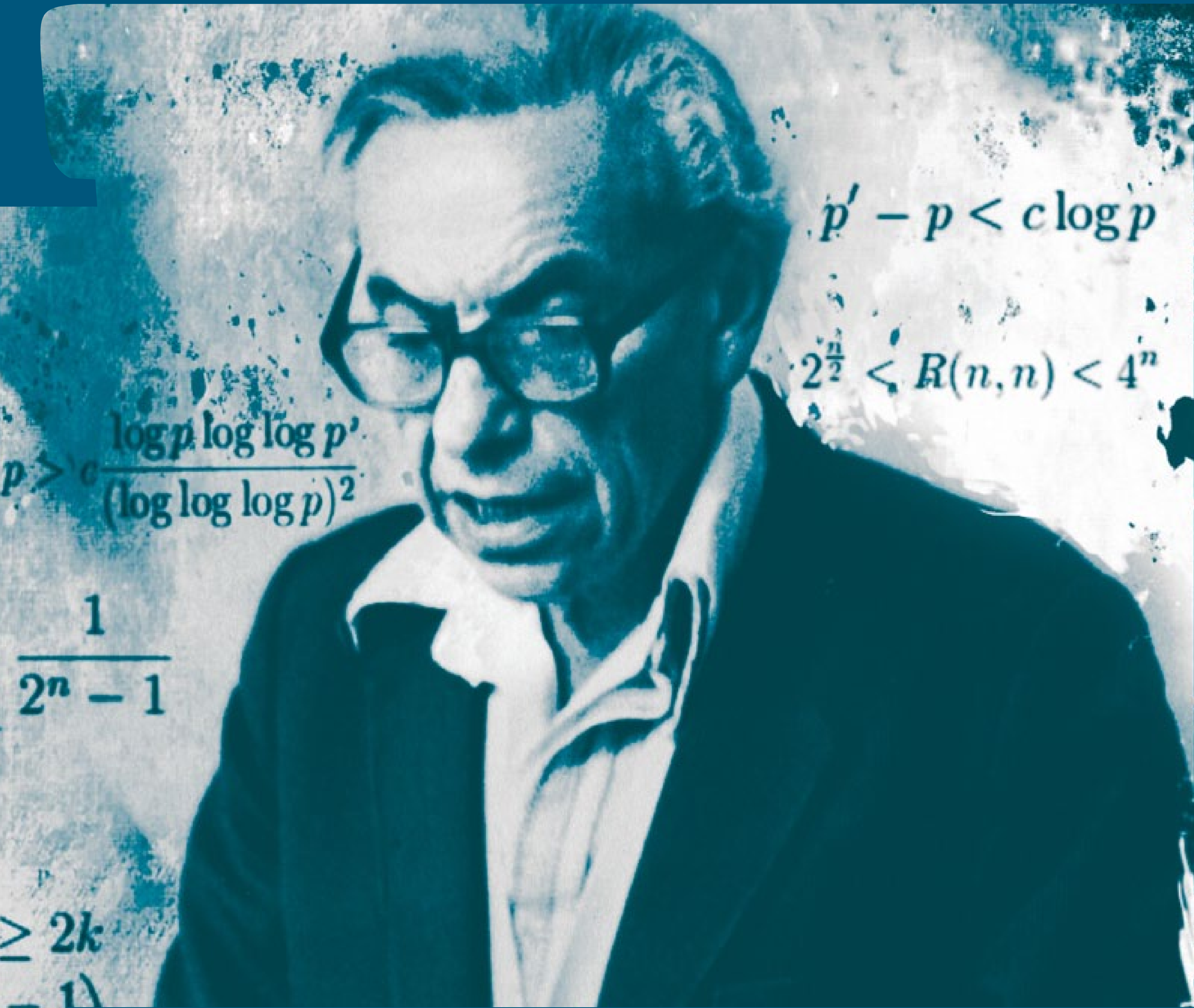
Sendo Euler quem foi, o nome pegou e não há agora como o alterar. Mas, como Shakespeare tão bem explicou por intermédio da sua célebre Julieta, não é o nome que interessa, pois a equação que chamamos de Pell por outro qualquer nome seria igualmente fascinante.

---

[3] Ver *https://www.cs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/Statement.html*.

[4] Sobre este assunto, ler André Weil, *Number Theory: an approach through history, from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, 1984, pp. 19–24.

[5] Ver também Heath, *Diophantus of Alexandria: a study in the history of Greek Algebra*, segunda edição, Cambridge University Press, 1910, pp.286, especialmente a nota-de-rodapé 4. Esta obra está disponível *online* em *https://archive.org/details/diophantusofalex00heatiala*, assim como em *http://www.wilbourhall.org*.



Paul Erdős faria 100 anos

Teresa Maria Sousa
Universidade Nova de Lisboa
tmjs@fct.unl.pt

A 26 de Março de 1913 nascia, em Budapeste, Pál Erdős, cujo nome foi mais tarde ocidentalizado para Paul Erdős. Filho de pais judeus e ambos professores de matemática, cedo mostrou interesse pelos números. "Erdős era um prodígio matemático e aos 3 anos conseguia multiplicar, de cabeça, números com três algarismos e aos 4 anos descobriu os números negativos." [1]

Grande parte do trabalho de Erdős envolveu números primos. "Os números primos eram amigos íntimos de Erdős, que os compreendia melhor do que ninguém." Aos 17 anos provou que entre qualquer número e o seu dobro existe sempre um número primo. Embora este resultado já tivesse sido demonstrado por volta de 1850 pelo grande matemático russo Pafnuty Chebyshev, a demonstração de Erdős era mais simples e elegante. "Ele (Chebyshev) tinha usado uma escavadora para transplantar uma roseira, enquanto Erdős tinha conseguido o mesmo com uma colher." [1] Mais tarde simplificou também a demonstração do teorema dos números primos que descreve a distribuição dos primos ao longo dos inteiros positivos. Este resultado formaliza a ideia intuitiva de que perto de zero os números primos são bastante frequentes (2, 3, 5, 7...), mas, à medida que avançamos, os números primos tornam-se cada vez mais raros. "Tal como a demonstração de Chebyshev, a demonstração de 1896 do teorema dos números primos dependia de maquinaria pesada e as mais brilhantes mentes matemáticas estavam convencidas de que o teorema não podia ser demonstrado com nada menos. Erdős e Selber, um colega que ainda não era muito conhecido, espantaram o mundo da matemática com uma demonstração elementar". [1]

Paul Erdős era um génio matemático que adorava conjecturar e demonstrar. Colaborou directamente com mais de 500 matemáticos de todo o mundo e quando queria fazer matemática perguntava aos seus colaboradores: *"Is your brain open?"*

Erdős acreditava que Deus (a quem chamava "o Fascista Supremo") possuía um Livro com demonstrações perfeitas e simples para todos os teoremas, e defendia que a tarefa primordial de um matemático era a de transcrever as demonstrações do Livro.

Erdős adorava conjecturar e resolver problemas de matemática, mas também apreciava conversar sobre história e política, adorava caminhar, jogar pingue-pongue, xadrez e realizar pequenos truques para divertir crianças pequenas. Era indubitavelmente uma figura ímpar: nunca se casou, nunca teve filhos, nunca comprou uma casa e nunca teve uma profissão, nem mesmo muito dinheiro. Viajava pelo mundo, levando consigo apenas duas malas com todos os seus haveres, ficando alojado em casa de amigos ou colaboradores. A sua vida errante levou-o aos cinco continentes. «O seu estilo consistia em trabalhar em vários problemas em simultâneo com colegas em locais muito afastados. "Telefonava a matemáticos de todo o mundo todos os dias", dizia Peter Winkler, da AT&T. "Está sempre a telefonar-me. 'O Professor Winkler está?' Mesmo quando os meus filhos eram muito pequenos, sabiam imediatamente que era o Tio Paul. Sabia o número de telefone de todos os matemáticos, mas não me parece que soubesse o nome próprio de nenhum. Duvido que reconhecesse o meu, apesar de ter trabalhado com ele durante 20 anos. A única pessoa que tratava pelo nome próprio era Tom Trotter, a quem chamava Bill."»[1] [1]

Erdős publicou 1521 artigos científicos com 511 colaboradores, um volume de publicações que é claramente superior ao de qualquer outro matemático. O seu extenso trabalho abarca diversas áreas da matemática, como, por exemplo, Teoria de Números, Combinatória, Probabilidades, Teoria de Conjuntos, Análise Matemática, entre outras, e foi determinante para o desenvolvimento de novas áreas de investigação. O seu nome ficará para sempre associado à teoria aditiva de números, à geometria combinatória, à teoria de grafos e hipergrafos extrema, a grafos aleatórios e ao método probabilístico. Devido ao seu prolífico trabalho, os matemáticos homenagearam-no, criando o número de Erdős, que descreve o grau de separação de uma pessoa relativamente ao trabalho de Paul Erdős. De forma simples, quem publicou um artigo em coautoria com

[1] O primeiro nome de Tom Trotter é William cujo diminutivo é Bill, no entanto todos o tratam por Tom.

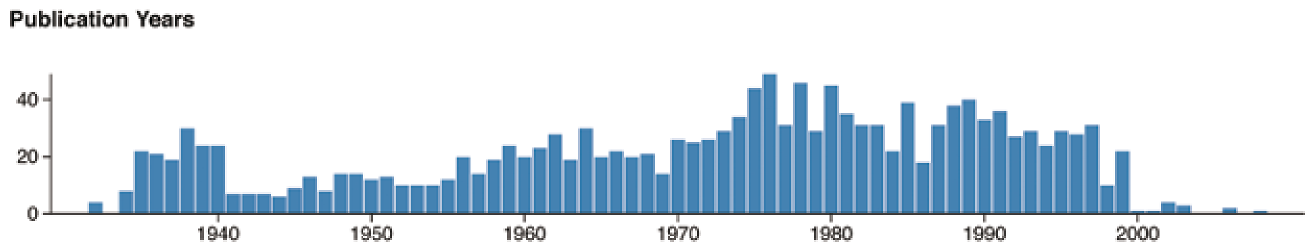


Figura 1: Publicações de Erdős ao longo dos anos

Erdős tem número de Erdős 1, quem publicou um artigo em coautoria com um coautor de Erdős obtém número de Erdős 2, e assim por diante. Estima-se que 90% dos matemáticos tenha um número de Erdős menor do que 8 (o que não é de espantar, tendo em conta o fenómeno dos pequenos mundos). O trabalho de Erdős é tão abrangente que muitos cientistas de outras áreas também possuem número de Erdős finito. Por exemplo, Albert Einstein tem número de Erdős 2 e Bill Gates tem número de Erdős 4. [2]

O número de Erdős não tem qualquer consequência matemática, é apenas um jogo. Paul Erdős acreditava que a matemática deve ser fruto de partilha e colaborações. «Erdős era singularmente generoso no que dizia respeito a partilhar ideias matemáticas com colegas. "Partilhava as suas conjecturas porque o seu objectivo não era o de ser o primeiro a demonstrar alguma coisa", dizia Alexander Soifer, que escreveu dois artigos com ele. "Pelo contrário, o seu objectivo era garantir que alguém a demonstrava – com ele ou sem ele. Ninguém assumia mais o papel de judeu errante do que ele. Deu a volta ao mundo a distribuir as suas conjecturas, a sua perspicácia, por outros matemáticos."» [1]

A 20 de Setembro de 1996, com 83 anos, Paul Erdős sofreu um ataque cardíaco e morreu "em acção" durante uma conferência sobre combinatória em Varsóvia. "O desaparecimento de muitos matemáticos, tal com as suas vidas, geralmente passa desapercebido fora da sua pequena comunidade de matemáticos. Mas quando Erdős faleceu, a primeira página do The New York Times anunciava: "Paul Erdős, 83, a Wayfarer in Math's Vanguard, Is Dead." (Paul Erdős, 83, um Caminhante na Vanguarda da Matemática, morreu.) Os jornais de todo o mundo escreveram longos obituários sobre Erdős e a importância do seu trabalho." [3]

Paul Erdős celebraria o seu centésimo aniversário no dia 26 de Março de 2013. Para celebrar o centenário do seu nascimento e homenagear o seu trabalho e o seu legado matemático, realizou-se em Julho, na Academia das Ciências Húngara, em Budapeste, um congresso. Este encontro reuniu cerca de 700 matemáticos de todas as idades, vindos de todo o mundo, cujas carreiras matemáticas foram indubitavelmente marcadas pela vida e pelo trabalho de Paul Erdős. Durante a sessão de abertura do congresso, Verá T. Sós, uma das mais importantes colaboradoras de Erdős, que fora também sua amiga próxima, disse: "Erdős é considerado o Euler do séc. XX, no entanto a grande questão é: Quem será o Euler do século XXI?"

REFERÊNCIAS

[1] Hoffman, Paul, *O Homem Que Só Gostava de Números*, Gradiva.

[2] Grossman, Jerry. "Some Famous People with Finite Erdős Numbers". *www.oakland.edu/enp/erdpaths*

[3] Schechter, Bruce. *My Brain is Open. The Mathematical Journey of Paul Erdős.*

A autora escreve de acordo com a antiga ortografia.

SOBRE A AUTORA

Teresa Maria Sousa é doutorada em Algoritmos, Combinatória e Optimização pela Carnegie Mellon University, EUA, e é professora no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Desenvolve investigação em Teoria de Grafos e tem número˝de Erdos 3.

Luis Afonso

Publicado originalmente no jornal Público, em 28/07/2013. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR:
Rogério Martins Universidade Nova de Lisboa

VICE-DIRETOR:
Alessandro Margheri Universidade de Lisboa

CONSELHO EDITORIAL:
Afonso Pedrosa Pinto E. S./3 S. Pedro Vila Real • **António Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho • **Elisabete Rodrigues** E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** E. S. Felismina Alcântara • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação de Viana do Castelo • **Maria do Céu Pinto** Universidade de Coimbra • **Manuel Domingos Oliveira Cadete** Universidade Agostinho Neto • **Paulus Gerdes** Universidade Eduardo Mondlane, Moçambique • **Raquel Escórcio** antiga professora na E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • **Teresa Almada** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • **Juan-Miguel Gracia** Universidad del País Vasco, Espanha

ASSISTENTE EDITORIAL:
Sílvia Dias SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

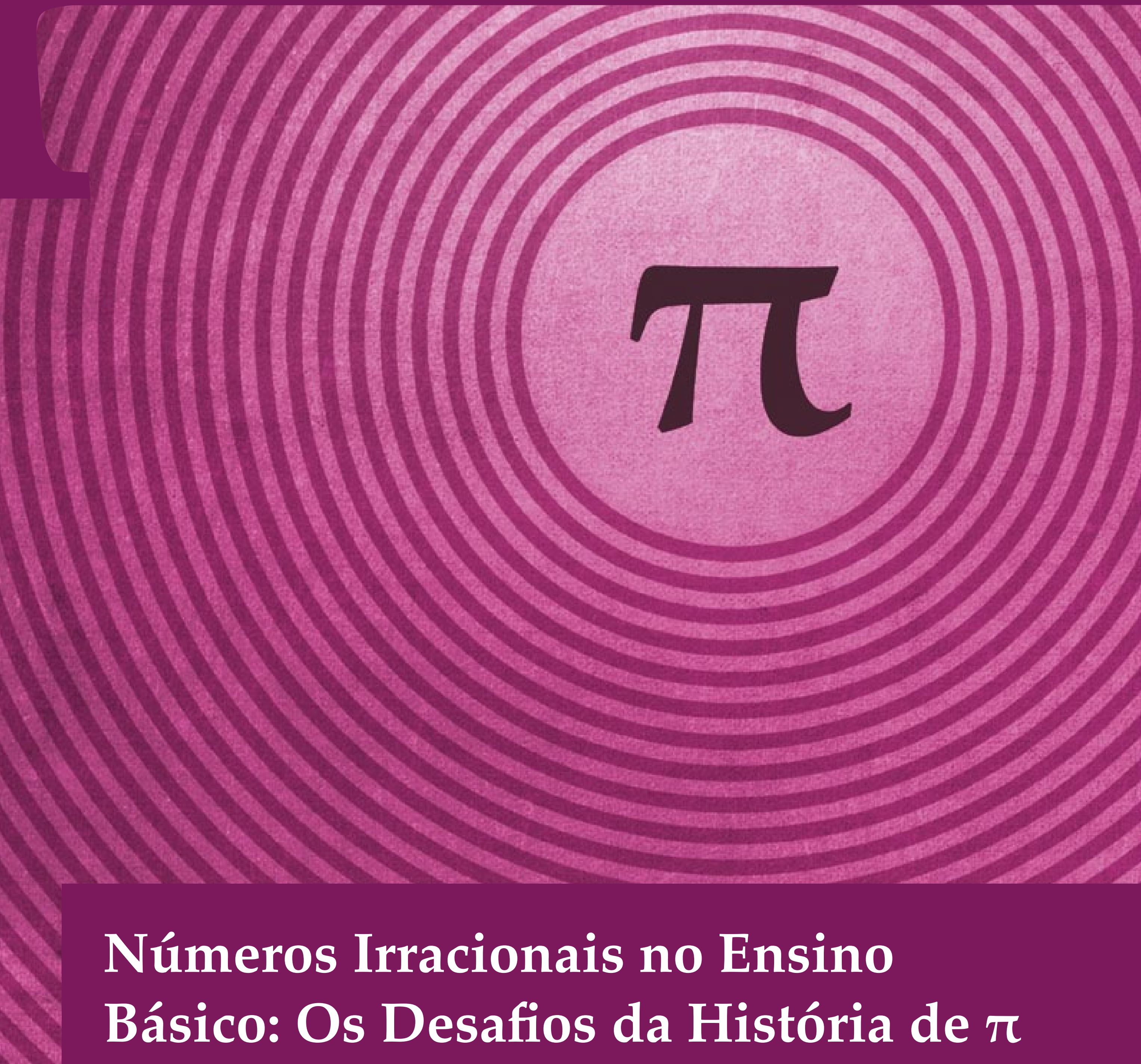
IMPRESSÃO:
Dossier – Comunicação e imagem

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Sílvia Dias SPM

PROPRIEDADE:
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

TIRAGEM **1500 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ICS **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**



Números Irracionais no Ensino Básico: Os Desafios da História de π

Isabel Serra e Luísa de Sousa
Universidade de Lisboa
luisalousousa@gmail.com

O ensino do que é o "misterioso" π coloca dificuldades de vária ordem. Para as ultrapassar é possível usar alguns exemplos inspirados na história da matemática, como os que se apresentam neste artigo. As técnicas de aproximação de π, cujo percurso histórico é aqui rapidamente esboçado, podem também contribuir para esclarecer a natureza deste número.

1. O CÍRCULO E O NÚMERO Π

A medição de uma figura geométrica foi desde a Antiguidade uma questão importante pela sua utilidade imediata, mas constituiu também um problema fundamental da matemática. Medir comprimentos, áreas e volumes implica estabelecer a ligação entre geometria e número, o que originou ideias e técnicas inovadoras ao longo da história, mas também levantou problemas complexos acerca da natureza do número. De entre os objetos que materializam a relação entre figura geométrica e número, o mais célebre de todos talvez seja o círculo, tanto pelas suas particularidades e presença na natureza, como pela dificuldade em calcular as suas medidas, que dependem do "misterioso" π.

O desenvolvimento do cálculo integral tornou possível, a partir do século XVII, a determinação da área e do comprimento de figuras geométricas definidas por curvas, em particular das cónicas. Mas a medida exata do círculo não levanta apenas problemas de cálculo, passa também pela definição de número irracional, uma questão que só foi completamente resolvida no século XIX. Outros números há que, desde a Antiguidade associados à geometria, não podem também ser escritos com um número finito de dígitos. É o caso de $\sqrt{2}$ [1], ou a medida da diagonal do quadrado de lado 1. Mas o número π, além de irracional, é transcendente, o que veio justificar uma outra impossibilidade célebre na história, a da quadratura do círculo. Assim, esta figura geométrica, colocada na encruzilhada de várias questões relativas à natureza dos números, é um exemplo concreto das dificuldades históricas e também didáticas na definição de número real.

O número π, a par das suas características e da sua história, destaca-se também no ensino atual por ser um dos primeiros irracionais a ser apresentado. Se por um lado a importância do círculo justifica que se aprenda desde cedo a calcular a sua área e o seu perímetro, por outro é impossível ignorar, e fazer ignorar, as dificuldades subjacentes a esses cálculos. Mas, precisamente, a história de π contém momentos e episódios que podem ser esclarecedores e simultaneamente aliciantes para quem ensina e aprende a medir o círculo. Ainda a propósito das dificuldades com π, é possível tratar algumas questões mais gerais e relevantes em vários níveis de aprendizagem, como "números e grandezas geométricas", "dízimas finitas e infinitas", "exatidão de uma medida", além de outras menos prioritárias no ensino elementar, como por exemplo as quadraturas.

É impossível percorrer num pequeno texto todos os cálculos e episódios que constroem essa história ímpar da matemática que é a do círculo e do número π. Nos próximos parágrafos apresentam-se apenas alguns exemplos históricos que podem ter interesse na aprendizagem, ao mesmo tempo que se referem, brevemente, algumas das etapas que permitiram esclarecer a relação entre o círculo e o número.

2. O CÍRCULO NA BABILÓNIA, NO EGITO E NA GRÉCIA

Babilónios e egípcios (séculos 20-18 a.C.) usaram técnicas astuciosas para calcular aproximadamente a área do círculo. As suas aproximações equivalem, nas notações atuais, a usar valores de π respetivamente iguais a 3,125 e $(16/9)^2 \approx 3{,}16$, resultados que, naquelas épocas, eram suficientemente rigorosos para as aplicações desejadas. O papiro de Rhind[2], um dos mais famosos documentos matemáticos da Antiguidade, fornece indícios, no problema 48, de como os egípcios obtiveram o valor de π.

---

[1] Ver "O que é realmente $\sqrt{2}$?", de A. Machiavelo, *Gazeta de Matemática*, 2013, nº 169, pp. 23-24.

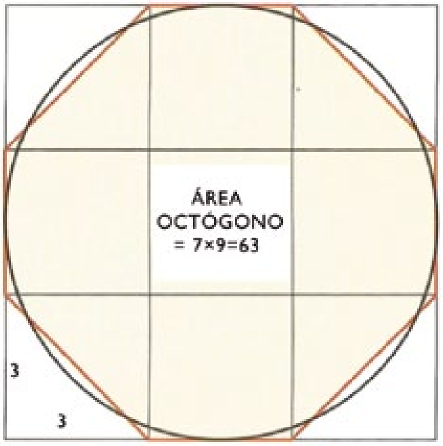


Figura 1

Considere-se um octógono (irregular) construído no interior de um quadrado com nove unidades de lado onde está inscrito um círculo (figura 1). A área deste octógono, que se obtém contando o número de partes dos quadrados de lado 3, é igual a 63. Usando a fórmula atual, $A = (D/2)^2\pi$, obtém-se para área do círculo representado na figura o valor $(9/2)^2\pi$. Considerando que essa área é ligeiramente superior à do octógono, e aproximando-a pelo valor 64, compensa-se assim a área que falta ao octógono, o que também facilita os cálculos (Delahaye, 1997). Fica então, $(9/2)^2\pi = 64$, do que resulta o valor acima referido, $\pi = (16/9)^2 \approx 3,16$.

Desde a Antiguidade até ao Renascimento que todas as aproximações de π se baseiam nesta "proximidade geométrica" já utilizada pelos egípcios. A substituição da área ou do perímetro da circunferência pelos de um polígono é uma ideia explorada por inúmeros calculadores de várias civilizações para obter resultados que equivalem, nalguns casos, a calcular π com grande aproximação, muito superior ao requerido pelas necessidades do dia a dia[3]. O rigor procurado nestas aproximações por matemáticos de várias épocas e civilizações só se justifica considerando que o cálculo de π se tornou uma finalidade em si mesma e o número π um objeto de investigação matemática. Foi na Grécia Antiga que nasceu essa forma aparentemente especulativa de trabalhar a matemática, e que atualmente se designa por "investigação".

Arquimedes (287-212 a.C.) é o cientista da Antiguidade que melhor representa o sucesso da matemática na medida do círculo. O seu resultado constitui uma grande novidade na matemática grega pois é definido por "enquadramento", uma grande ousadia no seu tempo (Jean Dhombres, 1985, p. 64), embora de prática corrente na atualidade.

Esse resultado, publicado em *A Medida do Círculo*, em notações atuais escreve-se:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} \text{ ou } \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

(as frações que definem o enquadramento podem ambas ser aproximadas por 3,14)

O que é extraordinário neste resultado é que para o obter não foi usado nem cálculo algébrico nem o sistema de numeração posicional, que na época não existia. A sua importância deve-se também ao método usado, designado por "método da exaustão" (Vasconcelos, 1927, 2009, pp. 171-173) inventado por Eudóxio de Cnido (408–355 a.C.). A técnica de Arquimedes baseava-se no enquadramento geométrico da circunferência através de inscrição e circunscrição de uma sucessão de polígonos com número de lados definido pela expressão $3 \times 2^n (n = 1, 2, \dots)$, como é exemplificado na figura 2, para n=1 e n=2. Para obter a aproximação acima apresentada, Arquimedes fez o cálculo até aos termos de ordem 5, ou seja, para polígonos de 96 lados. Consideremos um círculo de raio 1 enquadrado por dois polígonos de 3×2^n lados. Sejam a_ne b_n os semiperímetros dos polígonos, respetivamente circunscrito e inscrito.

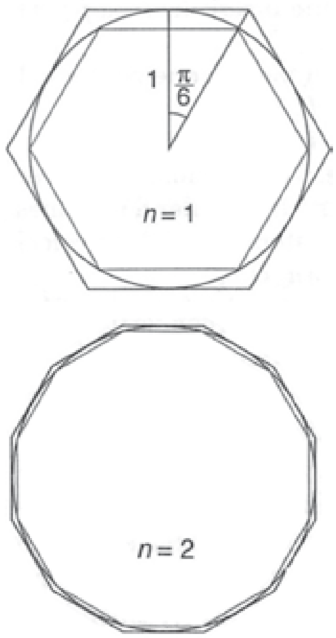


Figura 2: O círculo enquadrado por polígonos (casos n=1 e n=2).

Mostra-se facilmente que, para $n = 1$, ou seja, no caso do hexágono, $a_1 = 2\sqrt{3}$ e $b_1 = 3$.

Usando trigonometria verifica-se, pela observação da figura anterior, que para os termos de ordem n das sucessões de polígonos se tem[4]:

$$a_n = 3 \times^n \tan[\pi/(3 \times 2^n)] \quad b_n)3 \times 2^n \sin[\pi/(3 \times 2^n)]$$

As aproximações dadas pelo algoritmo de Arquimedes são, até aos termos de ordem 5:

$b_1 = 3$	$a_1 = 3,464101616$
$b_2 = 3,105828540$	$a_2 = 3,215390308$
$b_3 = 3,132628612$	$a_3 = 3,159659942$
$b_4 = 3,139350206$	$a_4 = 3,146086216$
$b_5 = 3,141031951$	$a_5 = 3,142714600$

Estes dados mostram que o processo de aproximações sucessivas usado por Arquimedes pode conduzir intuitivamente à noção de limite. No entanto, em Arquimedes não há qualquer sugestão de que é possível prolongar o cálculo indefinidamente, ou seja, a ideia de limite nunca é explicitada. A noção de limite pressupunha a consideração do infinito, que esteve sempre excluído da matemática grega. O formalismo matemático necessário para trabalhar com a noção de limite foi elaborado só centenas de anos depois, no quadro do cálculo infinitesimal, mas o maior incentivo e a grande inspiração para o seu desenvolvimento encontram-se, sem dúvida, nos trabalhos de Arquimedes. Efetivamente, o método da exaustão desenvolvido por Arquimedes tornou-se, no Renascimento, o modelo para o cálculo de áreas e volumes. Ainda hoje se usa um método análogo, embora adaptado aos processos de representação e de cálculo da matemática atual. A ideia de base é a mesma: para calcular a área ou o perímetro definidos por uma curva (a circunferência ou outra), substitui-se a curva por uma linha poligonal e calcula-se o espaço ou o comprimento assim definido.

O valor aproximado da área do círculo obtido por Arquimedes, sendo suficiente em muitas aplicações ainda hoje, não satisfazia no entanto as exigências de rigor da matemática grega. Mas na Grécia havia outra forma de "medir" uma figura que fugia à imprecisão do cálculo – a "quadratura" – que consistia na construção de um quadrado com a mesma área da figura dada, utilizando apenas régua não graduada e compasso. Os gregos tinham métodos eficazes para realizar muitas quadraturas. Uma das mais célebres é a das lúnulas (Boyer, 1996, p. 66) conseguida por Hipócrates de Quios (séc. V a.C.) que tentou realizar também, sem sucesso, a quadratura do círculo, uma tentativa que muitos outros retomaram ao longo dos séculos. De facto, o problema atormentou os geómetras profissionais e amadores de todos os tempos até que, em 1882, se demonstrou que não tinha solução. A quadratura do círculo continuou, no entanto, a ser um problema apaixonante para os matemáticos amadores[5], que não entendiam a razão da sua insolubilidade. Essa razão prende-se com a "transcendência" de π, demonstrada por Ferdinand von Lindemann (1852-1939). A explicação do que é um número transcendente e a sua demonstração exigem conhecimentos matemáticos que ultrapassam o nível elementar, e que só poderão ser abordados nos finais do ensino secundário ou no superior.

Paralelamente às tentativas para quadrar o círculo, o desenvolvimento da matemática a partir do séc. XVII, e em particular da análise, propiciou um rigor crescente no cálculo de números irracionais, permitindo esclarecer alguns aspetos da sua natureza e acabando por conduzir aos conceitos de irracionalidade e transcendência. O problema da quadratura exata do círculo perdeu sentido, mas a outra via, a do cálculo aproximado, que Arquimedes havia inaugurado, prolonga-se até hoje através do cálculo computacional.

3. O NÚMERO π E A ANÁLISE MATEMÁTICA

O matemático francês François Viète (1540-1603) foi o primeiro, no cálculo de π, a usar uma fórmula que, embora de inspiração geométrica, já não é aproximada. É uma fórmula que usa a noção de limite e que, no limite, é exata:

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \cdots$$

A fórmula continua a basear-se em polígonos, neste caso inscritos na circunferência de raio 1, e com número de lados definido por 2^n. A sua área tende para π, quando n tende para infinito.

---

[2] *http://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Rhind*

[3] Por exemplo, no século V, na China, Tsu Chung-Chi estabelece que 3,1415926 < π < 3,1415927

[4] Demonstração das fórmulas de Arquimedes presentes em Delahaye, 1997, pp.55-57.

[5] O matemático De Morgan chamou à atração por esse problema a "doença dos quadratores de círculo" ou morbus ciclometricus (*http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Squaring_the_circle.html*)

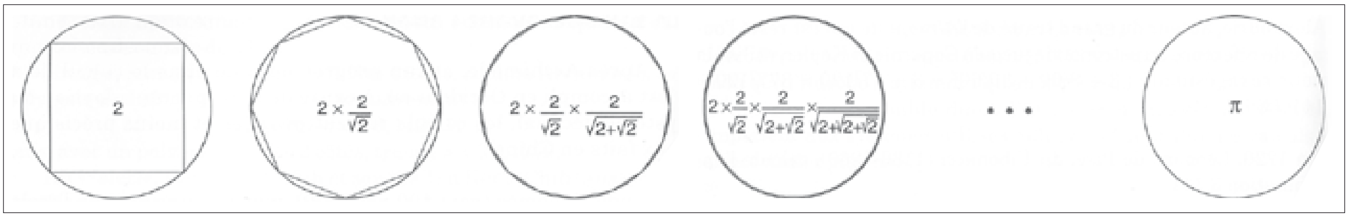


Figura 3

Podemos considerar que esta fórmula astuciosa se enquadra na história da matemática no período de transição para o cálculo. A geometria desempenha ainda um papel importante na sua elaboração mas, por outro lado, a passagem ao limite está presente. Embora recorrendo a um produto infinito, Viète não se interrogou acerca da sua convergência. Esse tipo de preocupações surgiu apenas mais tarde.

O desenvolvimento do cálculo infinitesimal propiciou o aparecimento de um grande número de fórmulas em que π é calculado a partir de séries ou produtos infinitos, já sem recurso a qualquer imagem geométrica. John Wallis (1616-1703) foi um dos primeiros autores desse tipo de expressões, de que é exemplo o produto infinito:

$$\pi = 2 \times \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \ldots \right)$$

O matemático escocês James Gregory (1638-1675), professor nas universidades de Saint Andrews e de Edimburgo, descobriu uma série famosa pela sua simplicidade, embora seja de convergência lenta, o que a torna pouco útil do ponto de vista do cálculo de π:

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

James Gregory foi um dos primeiros a especular acerca da existência dos "números transcendentes". Em 1667, tentou demonstrar, sem sucesso, que o problema da quadratura do círculo por meios algébricos é de impossível resolução.

Entre as séries cuja soma envolve o número π, uma das mais célebres, e também mais curiosas pela sua simplicidade, foi determinada por Leonhard Euler (1707-1783):

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Foi Euler quem, em 1737, adotou a notação π para designar este número. Embora tivesse sido usada pela primeira vez em 1706 por William Jones (1675-1749), só depois de Euler a ter utilizado se tornou corrente entre a comunidade de matemáticos.

De entre séries e produtos infinitos que convergem para π, uns são mais favoráveis do que outros porque convergem mais rapidamente, ou seja, para obter uma precisão determinada no seu cálculo aproximado usa-se um menor número de termos. Atualmente esse cálculo, evidentemente efetuado por computadores, permite obter uma aproximação de π muito superior ao que é necessário. De facto, para a maioria das aplicações bastam alguns dígitos de π e, mesmo em cálculos científicos onde se pretende grande rigor, nunca se usam mais do que 39 dígitos. No entanto, a procura de dígitos de π continua a fazer-se em centros de investigação de vários países, pois o seu cálculo permite testar algoritmos numéricos, ou mesmo investigar questões teóricas da matemática. Alguns dos métodos usados pelos modernos calculadores de π foram antecipados por Srinivasa Ramanujan (1887-1920), um matemático indiano com um percurso singular[6] que publicou várias fórmulas para obter π, extraordinárias pela sua elegância e rapidez de convergência. Uma delas, de uma grande simplicidade, obtida por métodos empíricos, foi usada por Ramanujan para fazer uma quadratura aproximada do círculo e permite obter π com oito casas decimais:

$$\left(9^2 + \frac{19^2}{22} \right)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = 3,14159265\ldots.$$

O facto de existirem inúmeros métodos para calcular π é, só por si, um facto de relevância pedagógica. Essa abundância permite diferentes escolhas para diferentes situações de ensino, e, por outro lado, traduz a importância da questão do cálculo de π na matemática.

4. DA HISTÓRIA PARA A SALA DE AULA: SUGESTÕES E EXEMPLOS

Compreender o que é um número irracional exige conhecimentos matemáticos que só estão ao alcance dos alunos nos finais do ensino secundário. Mas antes disso é possível explicar-lhes o que muitos povos souberam desde a Antiguidade: o que são "aproximações racionais de um número irracional".

A ideia de que podemos substituir um valor numérico por outro não é difícil de exemplificar, pois basta usar uma divisão, por exemplo de 1 por 3, e substituir a dizima por um valor aproximado. Ganhar a sensibilidade de um jovem para essa simplificação é um passo essencial na construção da ideia de aproximação.

A história da matemática proporciona inúmeros exemplos de aproximações de π que podem ser escolhidos pelo professor de acordo com diferentes turmas e diferentes contextos. Desde a Antiguidade até aos primórdios da matemática moderna, a associação entre a geometria e o número π, em particular, deu origem a um vasto leque de construções e exercícios adequados aos vários níveis de ensino. Em níveis elementares, poderão ser utilizadas aproximações muito simples e acessíveis. Os que se seguem foram selecionados entre os propostos num trabalho mais longo (Sousa, 2013), por poderem ser apresentados de forma breve e sucinta, e também, por serem adequados a alunos até ao 9º ano.

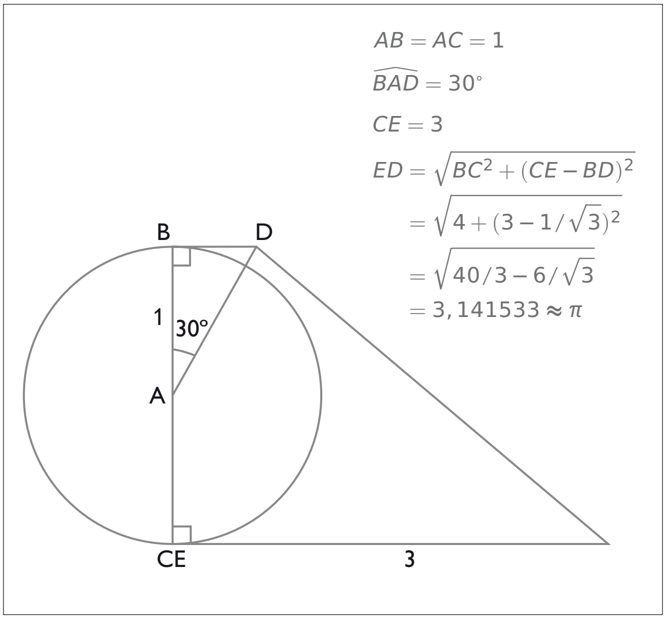


Figura 4: Método de Kochansky (1685).

A construção egípcia já referida é uma das mais fáceis de realizar. Gaspar e Mauro[7] apresentam, para a fórmula que lhe está associada, $A = \left[\left(\frac{8}{9}\right) D\right]^2$, explicações baseadas em conhecimentos sobre a cultura egípcia e que encontraram em textos de história da matemática e de etnografia da matemática. Essas diferentes explicações "fornecem uma quantidade de materiais e métodos que podem ser utilizados em sala de aula na discussão do cálculo da área do círculo"[8].

É possível obter retificações simples da circunferência, ou seja, traçar um segmento cujo comprimento é próximo do seu perímetro. A construção de Adam Kochansky (1631--1700), ver figura 4, permite obter π com seis casas decimais exatas, mas para o calcular é necessário usar o Teorema de Pitágoras e raízes quadradas.

Esta construção pode ser usada em sala de aula e proporcionar familiaridade com um problema célebre que contribui para entender e concretizar a questão da aproximação de π.

Em "números e geometria", capítulo incluído numa obra coletiva (Bouvier, 1986, pp. 237-248) e no qual se usa também a ideia de retificação, Fernand Lemay propõe que se verifique experimentalmente que π está bastante próximo de 22/7, fazendo rodar um círculo de diâmetro 1 sobre uma reta e mostrando que, após sete voltas, se atinge um ponto próximo de 22, como é esquematizado na figura 5 (Bouvier, 1986, p. 242).

Uma roda de bicicleta e uma linha branca de campo desportivo podem ser úteis para o processo. Com uma moeda e uma folha de papel, a experiência é possível mas mais delicada. Um material que facilitaria o procedimento numa experiência em sala de aula seria, por exemplo, um carrinho de linhas, ou um cilindro de pequenas dimensões.

Este exercício destaca-se pela sua simplicidade, mas também porque está associado a uma experiência. O "ensino experimental", embora nem sempre permita obter resultados muito precisos, pode ser um importante fator de motivação para os alunos.

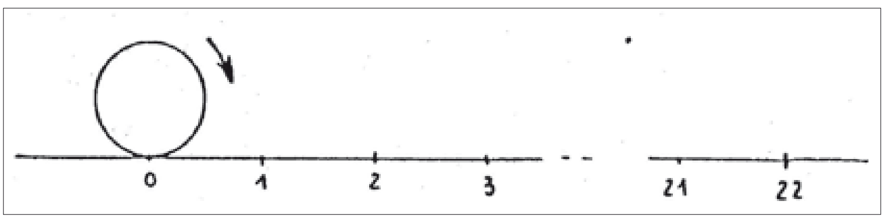


Figura 5: Esquema do procedimento para verificação do valor de π.

[7] Gaspar, M.T. e Mauro, S. (2004). Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática, VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. (U.F.P.; S.B.E.M) *http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/MC10721746500.pdf*, pp. 9-16

[8] Idem, pp. 9-10

A oportunidade de usar a via experimental surgiu no seguimento de um trabalho sobre a interação de história e ensino da matemática (Sousa, 2013, pp.71-83), e foi concretizada através de um projeto envolvendo duas turmas do 5º ano do Ensino Básico. O seu objetivo consistiu na determinação experimental da razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência, P/D.

Partindo da definição de perímetro, diâmetro e raio, foi proposto aos alunos que traçassem na sua folha de registos circunferências com medidas de raio/diâmetro definidas, e que depois medissem os seus perímetros, sobrepondo um cordel nas circunferências e utilizando uma régua. As medições foram registadas numa tabela, bem como o respetivo cálculo da razão P/D.

Em seguida, os alunos foram questionados sobre quantas vezes caberá, aproximadamente, a medida do diâmetro dentro da medida do perímetro de um círculo e depois incitados a verificar a resposta, usando exemplos e o material já utilizado.

Após esta pequena experiência, chamou-se a atenção dos alunos para a imprecisão dos valores obtidos nos seus cálculos das razões P/D e fez-se referência ao erro experimental. Sugeriu-se que, utilizando o menor e o maior valor das razões registadas, os diferentes grupos procedessem a um enquadramento de π. Depois, utilizaram-se os enquadramentos obtidos para abordar a questão das aproximações do número π, em particular pelo valor 3,14.

Numa segunda fase da experiência, os alunos escolheram alguns objetos com forma cilíndrica, dentro e fora da sala de aula, para realizar medições e calcular a razão P/D, efetuando os respetivos registos numa tabela semelhante à inicial. Compararam-se as duas tabelas e discutiram-se as causas das suas diferenças e semelhanças.

Na conclusão da atividade apresentaram-se algumas informações sobre os números irracionais, as dízimas infinitas, e também sobre o número π, a sua história e as suas aproximações mais interessantes para este nível de ensino.

O objetivo desta atividade é proporcionar um conhecimento "experimental" de que P/D tem sempre aproximadamente o mesmo valor, e não obter a verificação rigorosa desse facto. A tarefa possibilita, contudo, que o aluno vá experimentando e observando que os valores obtidos são diferentes mas, ainda assim, próximos do valor de π.

O exercício não permite, evidentemente, explicar o que é um número irracional, mas apenas fazer perceber que há uma razão constante entre perímetro e diâmetro, um conhecimento que existia já nas civilizações egípcia e babilónica. Esta ideia, que podemos considerar já abstrata e complexa, e é ensinada no 5º ano de escolaridade apenas "teoricamente", torna-se mais concreta e real através da experimentação. Mas a experiência deve ser complementada com a discussão da falta de rigor do método, e também com a da validade da aproximação dos valores de π encontrados, discussão na qual o professor desempenha um papel fundamental.

5. CONCLUSÃO: A DEFINIÇÃO RIGOROSA DE π, A HISTÓRIA E O ENSINO DA MATEMÁTICA

A descoberta de que existem segmentos geométricos incomensuráveis, embora não esteja associada a uma data precisa, parece estar relacionada com a aplicação do Teorema de Pitágoras, pelos próprios pitagóricos, ao triângulo retângulo isósceles (Boyer, 1989, p. 72). Na matemática grega eram conhecidos outros segmentos e também áreas e volumes incomensuráveis ou, como dizemos atualmente, cuja medida é dada por um número irracional. Alguns autores defendem a ideia de que as dificuldades conceptuais criadas pela existência dos incomensuráveis impediram, na Grécia, o desenvolvimento do cálculo, uma área onde a prática aparecia associada à falta de rigor (Boyer, 1989, p. 117). No entanto, mesmo reconhecendo a impossibilidade de traduzir por números as medidas dos incomensuráveis, a que chamavam "grandezas", os gregos souberam enunciar as suas propriedades, construindo uma "teoria das proporções" que se aplicava tanto a grandezas comensuráveis quanto a grandezas incomensuráveis (Dieudonné, 1990, p. 79). Esta teoria, elaborada por Eudóxio e apresentada no livro V dos *Elementos* de Euclides, foi durante mais de dois mil anos a única base para lidar com os números irracionais, até Richard Dedekind (1831-1916) se debruçar sobre o assunto, no séc. XIX.

Dedekind construiu a noção de número irracional a partir da natureza da continuidade de uma grandeza geométrica. Introduzindo o conceito de "corte", elaborou uma definição com base na teoria de números, mas que assenta num conceito intuitivamente aceitável. Ao observar que um ponto divide uma reta em duas partes, foi conduzido para o que considerou como sendo a essência da continuidade (Sousa, 2013, p.11). As construções dos números reais de Charles

Méray (1835-1911) e de Karl Weierstrass (1815-1897) foram elaboradas na mesma época e, tal como no caso de Dedekind, o ensino foi a sua principal motivação.

A definição rigorosa dos números irracionais proporcionou, evidentemente, o fundamento indispensável ao cálculo com essas grandezas, mas a sua ausência não influenciou o cálculo nem as técnicas de aproximação numéricas, que definiram um percurso autónomo ao longo da história, dando origem a inovação e conhecimento matemático. Por outro lado, essa prática, mesmo não fundamentada no conhecimento rigoroso dos números irracionais, foi propiciando a compreensão da sua natureza, ou seja, ao trabalhar com objetos que não estavam definidos rigorosamente os matemáticos passaram a conhecê-los melhor. O mesmo pode acontecer com um aluno que precisa de usar os números e não é ainda capaz de compreender perfeitamente a sua natureza.

Noutras matérias da matemática é também possível estabelecer paralelismos entre o trajeto de aprendizagem e o da história, e usá-los com proveito. Mas a utilização da história tem ainda mais interesse no caso do número π, pois sendo o primeiro irracional a ser formalmente introduzido no ensino básico, envolve conceitos difíceis de transmitir e compreender, principalmente em níveis elementares. Em particular, o percurso de alguns matemáticos no estudo dos números poderá ser uma fonte de recursos para o professor explorar. De facto, as dificuldades e dúvidas por eles encontradas ao longo da história, assim como os processos usados para as ultrapassar, propiciam pistas e soluções interessantes para introduzir ou desenvolver conceitos, mesmo em níveis elementares de aprendizagem. E quase sempre, mesmo no caso de alunos com algum tipo de preconceitos relativamente à matemática, a abordagem histórica torna a disciplina mais aliciante, efeito que pode ser reforçado por outros fatores como, por exemplo, a articulação com outras disciplinas.

REFERÊNCIAS

Boyer, C. (1968, 1989), *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, U.S.A.

Bouvier, F. (coord.) (1986) *Didactique des Mathématiques*

Delahaye, J.P. (1997), *Le Fascinant Nombre Pi*, Ed. Belin, Pour la Science Paris.

Dhombres, J. (1985), "Archimèdes in Le matin des mathématiciens. Entretiens sur l'histoire des mathématiques", Ed. Belin, Pour la Science Paris

Dieudonné, J. (1990), *A Formação Matemática Contemporânea*, Ed. D. Quixote, Lisboa, (Edição original, Hachette, 1987)

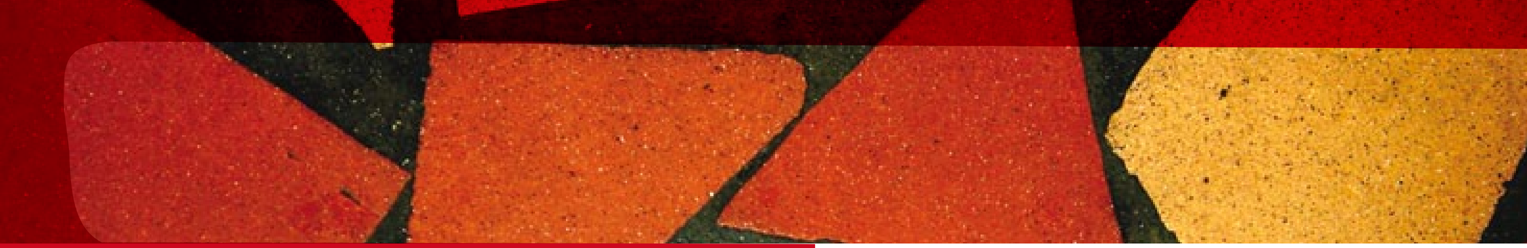
Sousa, L. (2013), "Números Reais: História e Didática", dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, FCUL.

Vasconcellos, F. A. (1927), *História das Matemáticas na Antiguidade*, Aillaud e Bertrand. (Reeditado pela Ludus em 2009).

SOBRE OS AUTORES

Isabel Serra é professora auxiliar aposentada da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e lecionou no Departamento de Matemática e na Secção Autónoma de História e Filosofia das Ciências. É investigadora do Centro Filosofia das Ciências da UL, onde realiza investigação em história e filosofia da física e da matemática.

Luísa de Sousa é docente do Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza, tendo exercido funções em várias escolas da rede de estabelecimentos do Ensino Público. A produção do artigo surgiu na sequência do tema desenvolvido na sua dissertação do curso de mestrado Matemática para Professores, ministrado na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.



PERGUNTAS SIMPLES, RESPOSTAS SURPREENDENTES

MANUEL SILVA
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

PEDRO J. FREITAS
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

GRUPO E_8 *SUPERSTAR*

Em 2007 foi finalmente concluído o projeto de descrever o gigantesco grupo E_8. O feito envolveu a participação de um vasto grupo de matemáticos e pesados cálculos computacionais. E chegou às páginas do *The New York Times*.

Embora possa não parecer, um dos grandes interesses dos matemáticos é simplificar. Quando se fala de números naturais, por exemplo, um dos teoremas mais famosos é o da decomposição em fatores primos. Estes são, por assim dizer, os naturais mais simples de todos, à custa dos quais podemos construir todos os outros.

Outros objetos, menos conhecidos do público em geral mas muito centrais em matemática, são os grupos. Estes podem ser definidos como conjuntos onde está definida uma operação que é associativa, com elemento neutro, e para a qual todos os elementos têm inverso. Um modo natural de pensar nos grupos é vê-los como conjuntos de simetrias de algum objeto. Por exemplo, o conjunto das bijeções de $\{1, \ldots, n\}$ em si mesmo forma o famoso grupo simétrico sobre n objetos. Podemos também pensar nos grupos de aplicações do espaço tridimensional nele próprio que preservam a distância, conhecido como o grupo de isometrias de $\mathbb{R}^3$. Em linguagem matemática, dizemos que os grupos atuam sobre estes conjuntos.

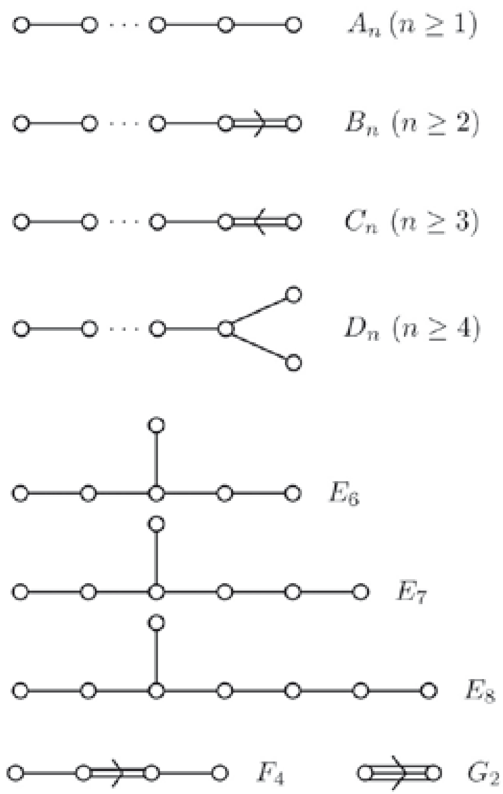
Como há uma grande variedade de grupos, é razoável dividi-los em famílias e perguntar, dentro de cada família, quais são os membros mais simples, e se os restantes se podem construir a partir destes, tal como acontece com os inteiros. Os grupos finitos formam uma destas grandes famílias de grupos. Dentro destes, os grupos *simples* (é este o termo técnico) desempenham um papel semelhante ao dos primos para os números inteiros.

Além de se saber quais são os grupos simples, é importante saber um pouco mais sobre eles. Há certas funções, definidas num grupo e com valores complexos, que contêm informação importante sobre o grupo, chamadas carateres, que passamos a descrever informalmente. Como dissemos, é natural esperar que um grupo atue sobre certos conjuntos, e quando os elementos atuam como aplicações lineares de um espaço vetorial nele próprio, a ação leva o nome de representação. Cada representação faz assim corresponder a cada elemento do grupo uma aplicação linear, e o caráter é então a função que faz corresponder a cada elemento o traço dessa aplicação.

A classificação dos grupos simples finitos é mais complicada do que a dos primos: demorou quase cinquenta anos a fazer (de 1955 a 2004) e envolveu mais de cem autores.

Outra família de grupos, menos fácil de definir mas igualmente central em matemática desde o século XIX, é a dos grupos de Lie, que combinam duas estruturas: são simultaneamente um grupo e uma variedade diferenciável – além de serem infinitos, têm, ao contrário dos grupos finitos, uma natureza contínua. O grupo de rotações em torno de um ponto fixo de $\mathbb{R}^3$ é um exemplo de um destes grupos.

A descrição destes grupos pode ser feita recorrendo a uma estrutura de álgebra não associativa que se pode estabelecer no espaço tangente ao elemento identidade. Chama-se a essa estrutura uma *álgebra de Lie*. E, por sorte, a classificação das álgebras de Lie *simples* (mais uma vez, é este o termo técnico) faz-se através de estruturas combinatórias muito elegantes: os diagramas de Dynkin. Ei-los.



A cada diagrama corresponde uma álgebra. Como vemos, há quatro famílias infinitas, A_n, B_n, C_n e D_n, e cinco álgebras excecionais. A maior destas álgebras excecionais é E_8, de dimensão 248.

A partir desta classificação das álgebras, começou-se o caminho inverso: conhecer os grupos que a elas estão associados. Este percurso é sinuoso e não unívoco: a cada álgebra podem estar associados vários grupos. Além disso, há outro problema: se inicialmente os grupos eram variedades reais, foi necessário considerar álgebras sobre $\mathbb{C}$ para estabelecer esta classificação. O regresso a $\mathbb{R}$ também não é unívoco: há vários grupos reais associados a cada grupo complexo oriundo das álgebras, em particular, para cada grupo complexo há dois grupos reais especiais (podendo haver outros): a forma compacta e a *split form* – e é a esta última que vamos referir-nos a partir de agora.

Tal como aconteceu com os grupos finitos, estabeleceu-se um projeto de elaborar um atlas dos grupos de Lie e suas representações, que se pode encontrar na página [2]. Tal como no caso dos grupos finitos, parte da compreensão dos grupos de Lie envolve um estudo dos seus carateres. O seguinte resultado, de Langlands e Knapp-Zuckerman, permite que os carateres mais simples (irredutíveis) se caracterizem por uma matriz: estes dividem-se num número finito de famílias $\mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq N$ sendo que em cada família há um número finito de *carateres infinitesimais* χ_i^λ (as variáveis i e λ apenas tomam um número finito de valores). Por sua vez, Harish-Chandra provou que estes carateres infinitesimais se escrevem como

$$\chi_i^\lambda = \sum_{j=1}^{N} P_{ij}(1)\Theta_j^\lambda$$

para certas funções Θ_j^λ e certos polinómios P_{ij}, chamados *polinómios de Kazhdan-Lusztig*. Portanto, os coeficientes $P_{ij}(1)$ caracterizam completamente os carateres. Há um mar de detalhes teóricos e técnicos que estamos propositadamente a omitir; quem quiser conhecer mais pormenores poderá consultar o artigo [Vo] disponível em [2].

O projeto dedicou-se então a encontrar estes polinómios de Kazhdan-Lusztig para as *split real forms* dos grupos vindos dos diagramas de Dynkin excecionais, pois os seus valores em 1 determinavam então toda a estrutura dos carateres, segundo a fórmula acima. Esta iniciativa começou a tomar forma em 2003. Depois de sucessivamente tratados todos os outros grupos, o que ficou terminado em 2005, restava E_8, o maior de todos. Para o grupo E_8, de dimensão 248, os polinómios ocupavam uma matriz quadrada de tipo $453,060 \times 453,060$ (ainda que a matriz fosse triangular inferior, o que dava cerca de cem mil milhões de entradas para preencher)[1].

Os cálculos foram feitos em vários computadores, o maior dos quais com 128G de RAM e 128G de memória adicional

[1] David Vogan apresentou estes resultados numa palestra intitulada ``The Character Table for E_8 or How we wrote down a $453,060 \times 453,060$ matrix and found happiness''.

(*swap space*) e teve de recorrer a aritmética modular e a *software* feito de propósito para o efeito (embora se tenha usado também o *software sage*, que está disponível gratuitamente, ver [4]. As primeiras frases do artigo [Vo] descrevem o fim do processo:

"On January 8, 2007, just before 9 in the morning, a computer finished writing to disk about sixty gigabytes of files containing the Kazhdan-Lusztig polynomials for the split real group G of type E_8. Values at 1 of these polynomials are coefficients in characters of irreducible representations of G; so all irreducible characters were written down."

Como termo de comparação, note-se que o genoma humano se consegue codificar em menos de um *gigabyte*.

Este feito gerou um grande interesse, mesmo para o público não matemático. O próprio *The New York Times* falou do assunto, ver [NYT]. Além disso, o grupo E_8 tem tantas simetrias que o fisico Garrett Lisi o considera uma peça fundamental para a integração de várias teorias e a eventual criação de uma "teoria de tudo" (veja-se, por exemplo, a "TED Talk" [3]). Isto faz de E_8 um grupo verdadeiramente *excecional*.

Sem mais parangonas, notamos que este resultado foi conseguido graças ao esforço de vários matemáticos, entre os quais os 21 que participaram (até agora) no projeto, quer teóricos quer ligados a implementação computacional de algoritmos. Aqui estão alguns deles, numa foto gentilmente cedida pelo *American Institute of Mathematics* (ver [1]).

Foi necessário traduzir resultados teóricos, sem nenhuma motivação computacional, em algoritmos implementáveis num computador. Foram usados teoremas recentes e antigos (com mais de 100 anos) e um poder de cálculo só há pouco tempo atingido.

Terminamos com uma imagem que se tornou popular. Tal como o diagrama de Dynkin, codifica a estrutura da álgebra E_8. O objeto original existe em 8 dimensões, esta é uma projeção para dimensão 2. A sua beleza, para além do seu significado, ajudou à popularidade que o trabalho sobre E_8 veio a ter.

REFERÊNCIAS

[Vo] David Vogan, "The Character Table for E8" , *Notices of the AMS*, vol. 54 (9), outubro de 2007.

[NYT] Kenneth Chang, "The Scientific Promise of Perfect Symmetry", *The New York Times*, 20 de março de 2007

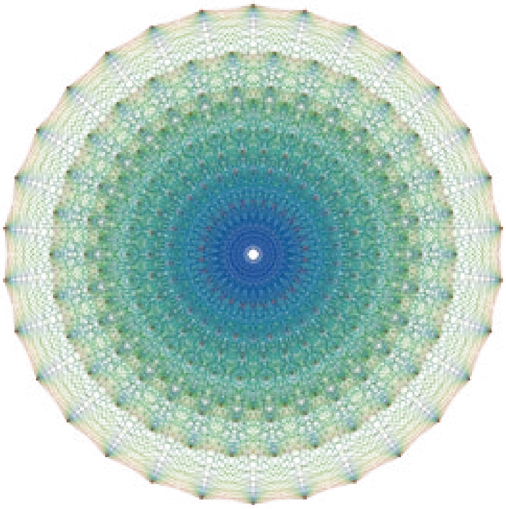
http://www.nytimes.com/2007/03/20/science/20math.html?_r=0).

[1] *http://www.aimath.org/E8/*

[2] *http://www.liegroups.org/*

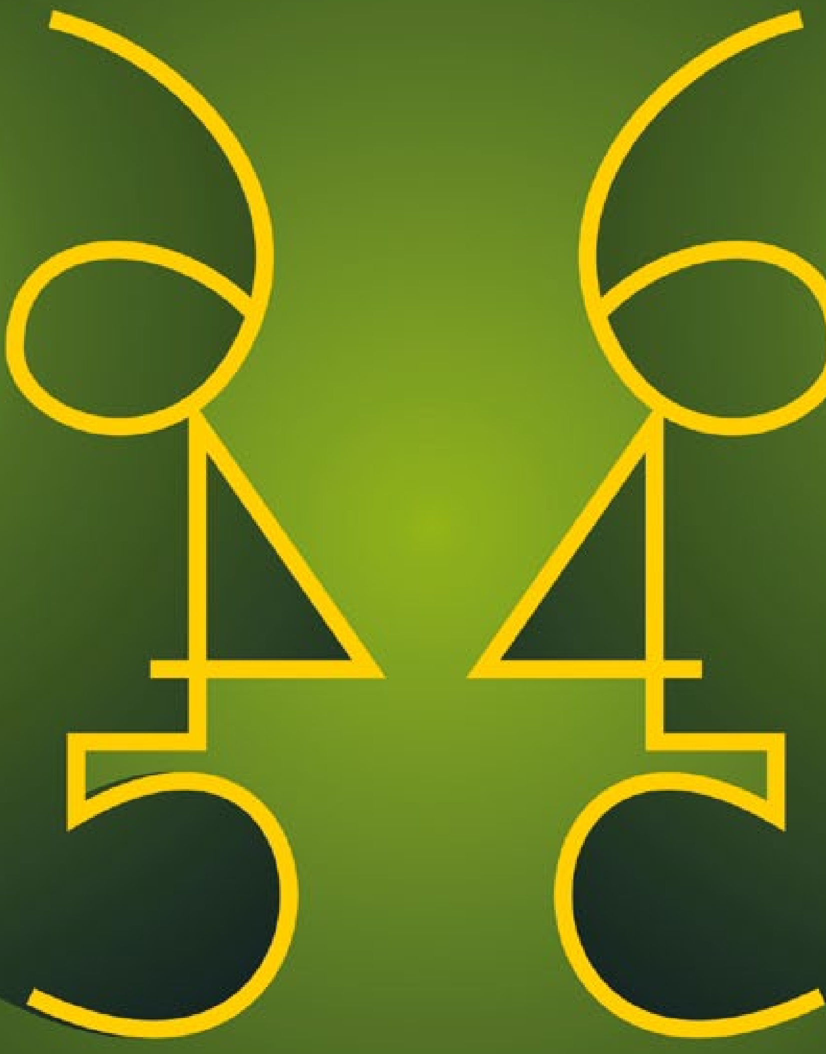
[3]*http://www.ted.com/talks/garrett_lisi_on_his_theory_of_everything.html*

[4] *http://www.sagemath.org/*



concurso 2013 2014

UM CONTO QUE CONTAS



contactos

http://spmsul.uevora.pt/concurso

spmsul@uevora.pt

design | cristina brázio

Bernardo Mota
Universidade de Lisboa
bernardomota@campus.ul.pt

FRANCISCO DE MELO, ENTRE **FILOLOGIA** E **MATEMÁTICA**

Estudar a matemática de um período em que não há senão textos manuscritos faz desenvolver o gosto pela filologia. Uma melhor compreensão dos processos de escrita, cópia e transmissão dos textos conduz a uma melhor interpretação da própria matemática.

Francisco de Melo foi um importante matemático português que viveu entre 1490 e 1536. Estudou e lecionou na Universidade de Paris, onde redigiu, em latim, um conjunto de comentários a obras de Euclides (*Óptica, Catóptrica*) e de pseudo- Arquimedes (*Sobre os objectos que caem em líquidos*). Durante muito tempo, conhecia- se apenas uma única cópia destes comentários, que pertencia às coleções da Biblioteca Nacional de Portugal (BNP). Em 2011 descobriu-se, numa biblioteca alemã, o manuscrito original que Melo mandou executar, a partir do seu autógrafo (que não possuímos), e ofereceu ao Rei D. Manuel I, como forma de agradecimento pelo apoio dado pelo monarca à sua estada em Paris.

Esta foi uma descoberta feliz; quanto mais não seja, porque a única cópia que se conhecia, a que se encontra em Portugal, estava em muito mau estado e apresentava óbvias dificuldades de leitura. Além de exigir um intenso esforço do leitor, algumas linhas estavam irremediavelmente ilegíveis. Nas imagens ao lado, é possível confirmar a diferença que faz ler um e o outro manuscrito (figura 1).

As vantagens de se ter descoberto uma nova cópia do texto não terminam aqui. Como os copistas de um e do outro manuscrito optaram por abreviar e escrever por extenso expressões diferentes, a maior parte das dificuldades de leitura causadas por motivos estenográficos desaparecem.

Ainda assim, a existência das duas cópias não nos permite uma leitura descansada da obra. A razão é que o texto

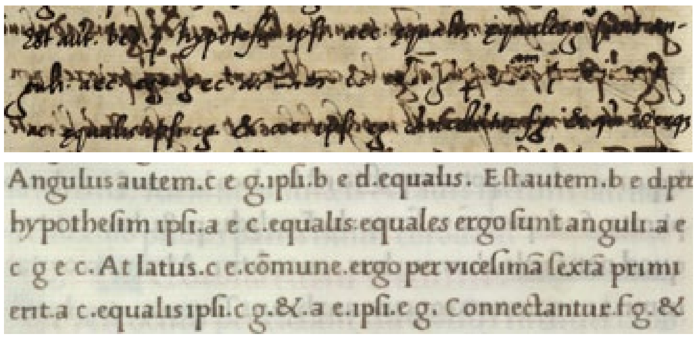

Angulus autem.c e g.ipsi.b e d.equalis. Est autem.b e d.per
hypothesim ipsi.a e c.equalis equales ergo sunt anguli.a e
c g e c. At latus.c e.cõmune.ergo per vicesimã sextã primi
erit.a c.equalis ipsi.c g.&.a e.ipsi.e g. Connectantur.f g.&

Figura 1: Um passo do comentário de Melo à primeira proposição da *Catóptrica* de Euclides (em cima: BNP COD 2262, f. 69r; em baixo: Stadtarchiv Stralsund, ms. HS 0767, f. 73r); o texto diz: *Est autem .bed. per hypothesim ipsi .aec. equalis equales ergo sunt anguli .aec gec. At latus .ce. commune. ergo per...*

continua a apresentar inúmeras falhas relacionadas com a forma de produção (e reprodução) do texto e com o processo de interpretação de obras antigas próprio da Renascença: além dos habituais problemas da tradição manuscrita (abreviaturas mal desdobradas, interpretação errada pelo copista, etc.), algumas figuras estão erradas ou apresentam letras trocadas, outras são pouco compreensíveis, outras ainda estão em falta; além disso, algumas partes do texto e da argumentação são de difícil interpretação. Por isso, o trabalho de edição e tradução da obra exige inúmeras correções que têm de ser bem sustentadas matemática e filologicamente. É esta necessidade de cruzar matemática e filologia que pretendo exemplificar sucintamente.

Por exemplo, em dois ou três passos relativamente distantes, o texto apresenta a expressão: *Conuertantur enim .ef.* Literalmente, o texto afirma “com efeito (enim) *troque-se* (conuertantur) E e F”, o que não faz sentido no contexto. Como a confusão entre “u” e “n”, e entre “r” e “c” é constante, substituímos “conuertantur” por “connectantur” e o texto passa a dizer: “com efeito, *ligue-se* [os pontos] E e F”, o que já faz todo o sentido. Uma expressão relacionada com a anterior é *connexis ... signis* (“ligados os pontos”), que por vezes aparece escrita *conuexis ... signis* (“pontos convexos”); como a pontuação é muito deficiente e corresponde mais a pausas para descanso do copista do que a pausas sintáticas, é frequente pensar-se que *conuexis* quer dizer “espelhos convexos” e se encontra no final de uma frase. Por vezes, as dificuldades de leitura tendem a acumular-se; o termo “*enim*”, por exemplo, é abreviado muitas vezes para “.n.”. Resultado: o texto citado em primeiro lugar neste parágrafo poderia perfeitamente estar escrito desta forma: *Conuertã* ^{tur}*.nef*. Se uma linha apresentar demasiadas abreviaturas, incluir troca de caracteres e apresentar uma ordem trocada na indicação das letras de objetos geométricos, a leitura de manuscritos de matemática antigos pode tornar-se um quebra-cabeças muitíssimo complicado.

Por vezes, conhecer a matemática por detrás de um argumento ajuda a corrigir o texto; por vezes, é ao contrário. Outras vezes ainda, o conhecimento que se deve ter é de outra ordem. Por exemplo, a páginas tantas, o texto afirma: *per primam communem sententiam additam a Campaurit .heg. maior erit angulus angulo .ecg*. Literalmente: “pela primeira noção comum acrescentada por [segue-se *Campaurit*, que é uma palavra inexistente em latim], o ângulo HEG será maior do que o ângulo ECG”. Como corrigir? Atentemos no texto; lembremo-nos, mais uma vez, da habitual confusão entre “u” e “n”; reparemos que o final da palavra desconhecida (“-rit”) se repete um pouco mais à frente (“erit”); finalmente, notemos que o texto menciona uma noção comum acrescentada por alguém, que terá de ser um comentador de Euclides. Acabamos por achar natural propor a correção *Campano*, em substituição de *Campaurit* e traduzimos: “pela primeira noção comum acrescentada por Campano...”. Verificamos o texto de Campano e tudo bate certo (penso que é nestes momentos que o filólogo sente algo semelhante ao que sente o matemático quando consegue uma prova há muito procurada). Depois pensamos no que pode ter causado um erro tão absurdo. Francisco de Melo deve ter escrito *a Campano erit* e depois riscou a expressão porque preferiu escrever “*erit*” mais à frente; o copista acabou por não perceber a expressão rasurada e o resultado foi o que vimos.

Um episódio engraçado da edição do texto refere-se a uma figura desonesta, apresentada em baixo (veja-se a figura 2). Como se pode ver, a figura repete as letras A e D. Por outro lado, o texto refere (na terceira linha a contar de baixo) um olho G (*oculo .g.*) que não se encontra representado na figura. Tentamos adequar o texto à figura e não conseguimos perceber o argumento.

É quando abandonamos a fé na correção do passo que admitimos que a imagem está errada. Mais: ela está, na realidade, rasurada, e por isso tem uma cruz desenhada por cima. As figuras foram desenhadas num momento posterior ao da cópia do texto e o desenhador, ao aperceber-se de que tinha desenhado esta de forma errada, procurou eliminá-la da forma mais discreta possível, para evitar forçar um novo trabalho de cópia (o desenhador tentou uma segunda figura na folha seguinte do manuscrito, mas esta continua errada). Para o leitor, no entanto, a figura parece legítima, o que o faz perder algumas horas até conseguir fazer sentido do texto.

Ler textos de matemática antiga é isto: é nunca saber se podemos confiar no texto que temos diante dos olhos.

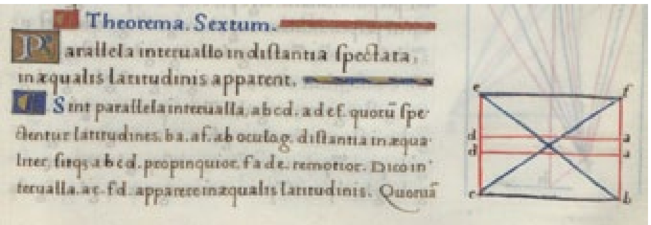


Figura 2: Comentário de Melo ao teorema sexto da *Óptica* de Euclides (Stadtarchiv Stralsund, ms. HS 0767, f. 31r).

REFERÊNCIAS

Marshall Clagett editou a parte dos comentários de Melo relacionada com Arquimedes em: *Archimedes in the Middle Ages: The Fate of the Medieval Archimedes*, Philadelphia, American Philosophical Society, 1978, volume 3, pp. 146 ss. Sobre a vida de Francisco de Melo, recomendo a tese de mestrado de Luís Miguel Ferreira Santos (*D. Francisco de Melo. Biografia e Escritos*, Universidade de Coimbra, 2007). O manuscrito da BNP está disponível no endereço eletrónico: *http://purl.pt/23706*. Finalmente, o projeto de tradução, edição e estudo dos comentários de Melo está em curso, com financiamento da Fundação para a Ciência e Tecnologia (EXPL/IVC- HFC/1290/2012), e as novidades podem ser consultadas em *http://melo.fl.ul.pt.*

Sobre o funcionamento do planímetro e o cálculo prático de áreas irregulares[1]

Carlos Sarrico
CMAF, Universidade de Lisboa
csarrico@ptmat.fc.ul.pt

[1]Conferência proferida pelo autor: (1) no Museu Nacional de História Natural e da Ciência, no dia 27 de setembro de 2012, integrada no ciclo de conferências "A Raíz do Cálculo"; (2) na Faculdade de Ciências de Lisboa, no dia 9 de abril de 2013, integrada nas atividades promovidas pelo *Clube de Matemática C-infinito*.

Conheça um instrumento mecânico que serve para medir áreas planas e reveja os seus conhecimentos sobre funções de várias variáveis ao mesmo tempo que compreende o seu espantoso funcionamento.

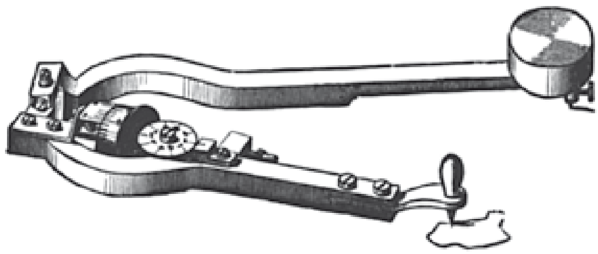


Figura 1: Planímetro polar de Amsler.

Vamos estudar o funcionamento mecânico de um instrumento chamado planímetro polar, que permite medir a área de um domínio plano interior a um contorno irregular.

Os conhecimentos de Análise Matemática inerentes à compreensão completa de tal funcionamento situam-se ao nível de um curso de Cálculo de várias variáveis e constitui um excelente exercício para alunos e professores de tais matérias, uma vez que exige o conhecimento:

- do método dos infinitésimos constantemente usado nas aplicações,
- do produto interno de vetores e sua interpretação geométrica,
- do integral duplo e sua relação com a área de um domínio plano,
- do integral de linha e sua relação com o problema mecânico da roda que sofre rotação e arrasto simultaneamente,
- do teorema de Green para a transformação do integral de linha no integral duplo,
- da derivação implícita de funções de mais de uma variável,
- da interpretação de um determinante 2×2 como área de um certo paralelogramo.

Assim sendo, não podemos dizer que se segue um texto de compreensão rápida e simples, mas vale a pena tentar uma leitura atenta não só pelo acréscimo de conhecimentos de Cálculo que possibilita como também pela beleza mecânica intrínseca do funcionamento de tal instrumento.

Existem muitos tipos de planímetros. O mais vulgar é, sem dúvida, o chamado planímetro polar de Amsler (1854) representado na figura 1. É constituído por duas hastes de comprimento r e s, articuladas no ponto (u,v), tendo um polo fixo (na origem das coordenadas) e uma extremidade no ponto (x,y) que vai percorrer o contorno Λ do domínio plano A (ver figura 2). Uma roda com eixo na haste de comprimento r (não representada na figura 2 mas identificável na figura 1) assenta sobre o plano onde está desenhado o domínio A.

Esta roda, arrasta-se sobre este plano e/ou efetua um movimento de rotação sobre o seu eixo, à medida que a extremidade (x,y) do planímetro percorre o contorno Λ. Ligado a esta roda existe um contador mecânico que permite uma contagem bastante rigorosa do número n (real) de voltas que a roda deu sem arrasto. A rotação da roda em torno do seu eixo mede-se em voltas, sendo uma volta igual ao comprimento do perímetro da roda. O contador mede o número de voltas usualmente a menos de um milésimo do perímetro da referida roda.

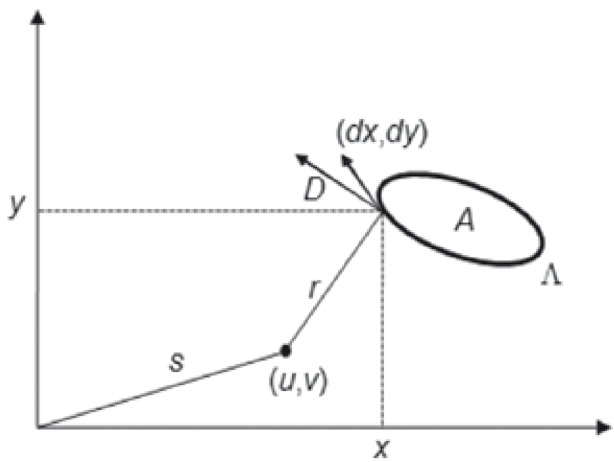


Figura 2: Vista esquemática, em projeção horizontal de um planímetro formado por duas hastes de comprimento r e s articuladas no ponto (u,v). O polo do planímetro está fixo no ponto (0,0). A extremidade (x,y) percorre o contorno Λ. A roda do planímetro, que não está representada na figura, tem o seu eixo na haste de comprimento r.

Seja *(dx,dy)* o deslocamento elementar da extremidade *(x,y)* sobre o contorno Λ. A rotação elementar da roda correspondente a este deslocamento é a medida da projeção do vetor *(dx, dy)* sobre a direção do vetor unitário D perpendicular à haste de comprimento r (eixo da roda) cujo vetor diretor é $(x-u, y-v)$: notemos que a roda não efetua nenhuma rotação quando o deslocamento *(dx, dy)* se dá na direção da haste de comprimento r porque arrasta na direção do seu eixo; porém, a rotação da roda dá-se sem qualquer arrasto quando o deslocamento *(dx, dy)* se processa na direção D, perpendicular ao eixo da roda. Para deslocamentos *(dx, dy)* não coincidentes com os dois agora descritos, a roda efetua alguma rotação com algum arrasto. Assim, a rotação elementar da roda correspondente ao deslocamento elementar geral *(dx, dy)* é dada pelo produto interno *(dx, dy). D.* Como

$$D = \frac{1}{r}(-(y-v), x-u),$$

então o número n de voltas que a roda dá sem arrasto é a soma de todas estas rotações elementares, isto é,

$$n = \int_\Lambda (dx, dy).D = \frac{1}{r}\int_\Lambda (-(y-v), x-u).(dx, dy) =$$

$$= \frac{1}{r}\int_\Lambda -(y-v)dx + (x-u)dy.$$

Sendo *(u,v)* função de *(x,y)*, isto é, *u=u(x,y)* e $v = v(x,y)$, este integral de linha pode exprimir-se num integral duplo sobre o domínio plano A cujo contorno é Λ. Assim, por aplicação do teorema de Green, resulta

$$n = \frac{1}{r}\int_A \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} + 1 - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy =$$

$$= \frac{2}{r}\int_A dx\, dy - \frac{1}{r}\int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Como se tem

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2, \tag{1}$$

$$u^2 + v^2 = s^2, \tag{2}$$

por derivação implícita obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v(x-u)}{vx-yu},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{u(y-v)}{vx-yu},$$

uma vez que $vx - yu \neq 0$ (ver a observação antes da nota histórica). Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 1,$$

e portanto

$$n = \frac{1}{r}(\text{área de } A),$$

ou seja,

$$\text{área de } A = rn. \tag{3}$$

Por consequência, o valor da área é exatamente igual ao produto do comprimento r da referida haste pelo número n de voltas que a roda efetua sem arrasto (embora a roda arraste enquanto a extremidade do planímetro percorre o contorno de A!).

A exatidão deste resultado contrasta com alguns processos mais modernos, utilizados para o mesmo fim, e baseados na digitalização da imagem do domínio; estes últimos são mais dispendiosos e não são teoricamente exatos.

Por exemplo, se quisermos comprar ou vender uma quinta com o terreno avaliado num certo preço por metro quadrado, teremos de saber com suficiente exatidão a área da quinta. Um método expedito consiste no uso do planímetro sobre a planta topográfica onde se encontra traçado o contorno da quinta. O planímetro não é só usado em topografia, é também usado em muitas situações técnico-científicas que requerem a medição de áreas limitadas por contornos irregulares desde a engenharia à biomedicina.

Observação: Note-se que a expressão $vx - yu$ que figura no denominador das frações se pode escrever na forma de um determinante,

$$vx - yu = \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix},$$

e que o valor absoluto deste se pode interpretar como a área do paralelogramo gerado pelos vetores *(x,y)*, e *(u,v)*. Assim, enquanto a extremidade do planímetro percorre o contorno, será sempre $vx - yu \neq 0$ porque $vx - yu = 0$ corresponde à área nula de tal paralelogramo (ver a figura 2), isto é, à coincidência das duas direções *(x,y)* e *(u,v)*; tal, porém, não pode acontecer na prática porque o planímetro ficaria "esticado" com as duas hastes no prolongamento uma da outra! Deste modo se garante também, (na vizinhança de cada ponto do contorno e pelo teorema da função implícita) a existência de *(u,v)* como função de *(x,y)*, definida implicitamente pelas relações (1) e (2), o que já era mecânicamente evidente.

NOTA HISTÓRICA:

O primeiro planímetro foi inventado por Johann Martin Hermann em 1814. Seguiu-se o planímetro ortogonal de Titto Gonnella (1784-1867), professor em Florença, que publicou a sua invenção em 1825, mas só em 1850 foi reinventada e introduzida no mercado pelo engenheiro suíço Kaspar Wetli (1822-1889). Em 1854 foi inventado o planímetro polar pelo matemático suíço Amsler o qual ainda hoje perdura em versões mecânicas e eletrónicas. As versões eletrónicas baseiam-se exatamente no mesmo princípio que as mecânicas. Além dos descritos, existem ainda outros tipos de planímetros. Físicos notáveis, como Lord Kelvin (1824-1907) e Maxwell (1831-1879), interessaram-se também por este instrumento, tendo introduzido melhorias no seu funcionamento mecânico.

REFERÊNCIAS

R. W. Gatterdam, "The planimeter as an example of Green's theorem", *American Mathematical Monthly*, 88: 701-704, 1981.

L.I.Lowell, "Coments on the polar planimeter", *American Mathematical Monthly*, 61: 467-469, 1954.

Guido Ascoli, "Vedute Sintetiche Sugli Strumenti Integratori", *Rend. Sem. Mat. Fis.* Milano, 18: 36, 1947.

SOBRE O AUTOR

Carlos Sarrico é licenciado em Engenharia Geográfica e doutorado em Matemática. Foi professor na Faculdade de Ciências de Lisboa e na Academia Militar. Trabalha atualmente no Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, onde faz investigação na linha "Sistemas Hiperbólicos e Singularidades em Equações Diferenciais às Derivadas Parciais". Além da tese de doutoramento, é autor de três livros e de diversos artigos em revistas especializadas e de divulgação.

Erros de matemática podem levar ao desastre

José Matos
Instituto Superior de Engenharia do Porto
jma@isep.ipp.pt

O título deste trabalho é retirado da frase de abertura do artigo intitulado "The Excel Depression", da autoria do Nobel da Economia de 2008, Paul Krugman, publicado em 18 de abril 2013 no The New York Times. No seu artigo, Krugman começa por fazer uma breve referência a dois desastres provocados por erros numéricos e passa ao desenvolvimento explicando o caso de um trabalho de economia, muito referido e citado, que entre outros erros, inclui uma utilização errada de estatística. Além de detalhar os exemplos referidos por Krugman, nas linhas seguintes são referidos e detalhados outros exemplos de desastres provocados por erros numéricos. Os últimos casos apresentados, retirados de contratos de parcerias público-privadas, também podem considerar-se relacionados com a depressão económica.

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas seis décadas, com a generalização dos instrumentos de cálculo automático, cientistas, economistas e engenheiros tornaram-se cada vez mais independentes de volumosos processos de cálculo numérico.Além de limitados e enfadonhos, os processos de cálculo baseados no papel e no lápis são impraticáveis em tempo útil em muitas aplicações atuais. Em problemas que envolvem um grande volume de dados, na resolução de sistemas de grande dimensão e na utilização de métodos numéricos em equações diferenciais em derivadas parciais, por exemplo, podemos até dizer que a resolução só é possível com sofisticados instrumentos de cálculo de elevado desempenho.

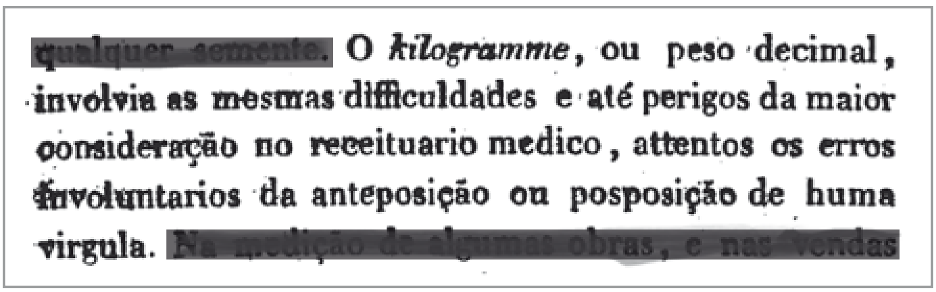
No entanto, este afastamento do cálculo de papel e lápis, como todos os professores e encarregados de educação já perceberam, tem a desvantagem de reduzir a sensibilidade aos resultados numéricos. Simultaneamente, a utilização de algoritmos de cálculo sofisticados, por vezes sem que os utilizadores conheçam os limites à sua utilização, dificulta a análise crítica dos resultados.

Na literatura encontramos exemplos de desastres devidos à utilização de algoritmos numéricos fora do contexto para que foram preparados, mas também devidos à simples acumulação de erros de arredondamento ou até à representação errada de resultados. Vamos ver que alguns desastres resultam da utilização de fórmulas erradas, outros da utilização errada de fórmulas.

2. ERROS ORIGINADOS NA REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA

Podemos encontrar relatos de desastres originados em erros de representação numérica, ou porque tal representação não tem precisão suficiente ou porque tal representação não é convenientemente interpretada.

Ao contrário do que se possa pensar, este não é um problema específico da nossa era da informação. Nas polémicas que envolveram a alteração dos sistemas legais de unidades para o sistema decimal, aparecem referências [1] aos perigos de colocação errada da vírgula, ver figura 1.



[redacted] O *kilogramme*, ou peso decimal, involvia as mesmas difficuldades e até perigos da maior consideração no receituario medico, attentos os erros involuntarios da anteposição ou posposição de huma virgula. [redacted]

Figura 1: Perigos da maior consideração no receituário médico.

2.1. Erro na órbita da sonda Mars Climate Orbiter

Quase dois séculos depois deste aviso, permanecem dificuldades na utilização do sistema decimal de unidades. Exemplo deste facto é o caso de uma organização da dimensão da NASA, capaz de planear e enviar sondas para diversos planetas do Sistema Solar e que perdeu uma sonda por um erro na interpretação do sistema de unidades.

O caso da sonda Mars Climate Orbiter (MCO), que se perdeu ao entrar na órbita do planeta Marte, é detalhado no relatório apresentado pela comissão de investigação ao acidente [2]. Durante os nove meses de viagem, da Terra a Marte, foram realizadas periodicamente manobras de correção de rota (AMD - Angular Momentum Desaturation). Estas manobras realizaram-se com uma frequência entre 10 e 14 vezes superior ao previsto, tendo esta falha de previsão resultado de uma assimetria nos painéis solares da sonda. Este elevado número de correções realizadas durante a viagem e o facto de existir um pequeno erro de cálculo neste processo resultaram numa grande acumulação de erros na manobra de correção de trajetória final (TCM-4) da sonda.

O erro resultou de os dados de leitura da rota serem registados na unidade inglesa *pound force* e o *software* que tratava os dados assumia que estes estariam registados em *newton*. Esta discrepância na leitura das variações de velocidade da sonda, $\Delta V = 4{,}45$ (1 *pound force* = 4,45 *newton*), resultou num erro de 170km na manobra de entrada na órbita de Marte. Conforme se ilustra na figura 2, a entrada em órbita foi planeada para ocorrer a 226 km de altitude, tendo ocorrido 49 segundos mais cedo do que o previsto e a apenas 57 km de altitude.

Em vez de cumprir os fins para que foi enviada, a sonda perdeu-se, e com ela perderam-se 125 mil milhões de dólares.

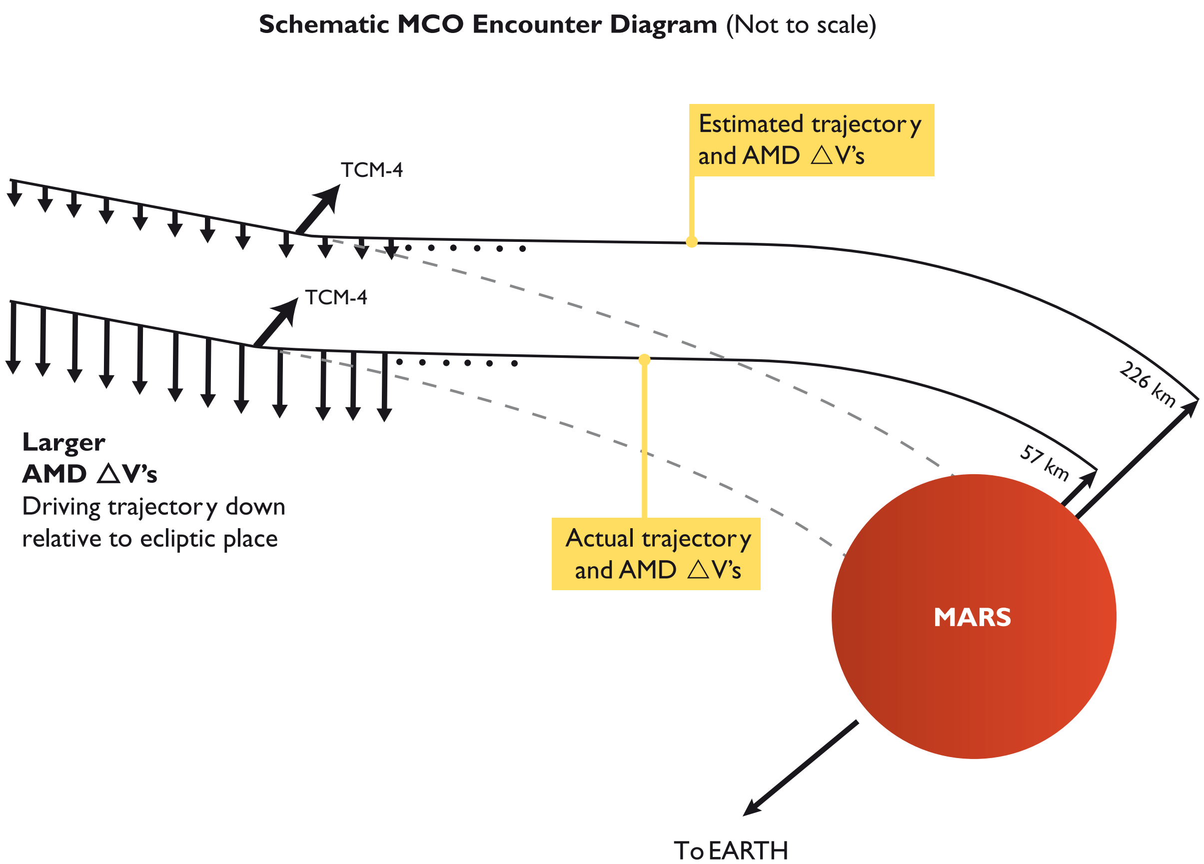


Figura 2: Erro na manobra de correção de trajetória da sonda [2].

2.2. Explosão de um Ariane 5

Em 4 de junho de 1996, apenas 39 segundos após o início das operações de voo e a uma altitude de 3,7 km, naquele que seria o primeiro lançamento de um Ariane 5, o foguetão saiu da sua rota, quebrou-se e explodiu. A Agência Espacial Europeia promoveu um inquérito, tendo concluído que a explosão se deveu a um erro de conversão numérica.

Segundo o relatório do inquérito ao acidente [3], o *software* de controle da velocidade instalado no Ariane 5 é o mesmo *sofware* instalado no Ariane 4. Por uma questão de segurança, o sistema de controle inclui diversos componentes duplicados, funcionando em paralelo e de forma independente. Este é o caso do Inertial Reference System (SRI), que existe em duplicado, cada unidade com o seu próprio computador e medindo ângulos e velocidades de voo de forma independente.

O acidente resultou de um erro de *overflow* nos computadores das unidades SRI. O facto de este *software* estar desenhado para o Ariane 4, conjugado com o facto de o Ariane 5 ter uma trajetória inicial com componente de velocidade horizontal consideravelmente mais elevada, provocou a sucessão de erros que culminou no desastre. Quando, durante a execução de um algoritmo, o resultado de uma operação aritmética ultrapassa os limites de representação da máquina que o executa, o resultado designa-se por *overflow*. Ocorre um erro se o programa não estiver protegido contra este resultado. Neste acidente, o erro de *overflow* ocorreu durante a operação de conversão de um valor representado em vírgula flutuante de 64 *bits* para um inteiro de 16 *bits* e do facto de o valor representado em 64 *bits* ultrapassar o maior inteiro representável em 16 *bits*

$$+1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{14}=2^{15}-1=32767$$

O erro custou mais de 7, 5 mil milhões de euros à Agência Espacial Europeia.

2.3. Erro de arredondamento altera composição do parlamento

Não se tratando exatamente de um desastre, dependendo do ponto de vista de quem ficou a ganhar ou a perder, em 5 de abril de 1992, um erro de arredondamento alterou a distribuição de mandatos para o parlamento estadual alemão do Schleswig-Holstein.

A lei eleitoral deste Estado diz que, independentemente da distribuição de votos, os partidos com votação inferior a 5% não têm representação parlamentar. Efetuada a contagem de votos, registaram-se 5% de votos para o partido Os Verdes. A distribuição proporcional de mandatos originou grande dispersão e nenhum partido obteve maioria absoluta.

No dia seguinte, alguém resolveu verificar os cálculos e concluiu que o resultado d'Os Verdes foi 4,97%. A lei eleitoral excluiu este partido do parlamento estadual, os lugares foram redistribuídos e o SPD obteve metade dos mandatos mais um, isto é, maioria absoluta para formar Governo estadual.

Este erro resultou apenas do formato de escrita dos resultados, estando o *software* programado para arredondar as percentagens a um algarismo decimal [5].

3. ACUMULAÇÃO DE ERROS

Com alguma frequência, pequenos erros em operações de cálculo intermédias dão origem a erros desastrosos no resultado final. Este foi o caso de um erro de cálculo na trajetória de um míssil, com a consequente perda de vidas humanas.

3.1. Falha no sistema antimíssil Patriot

Em 25 de fevereiro de 1991, no decorrer da primeira Guerra do Golfo, um erro de 9.5×10^{-8} segundos, no registo de tempo de uma componente do sistema de defesa antimíssil Patriot, originou um erro de centenas de metros no cálculo da trajetória de um míssil *scud* do Iraque, tendo morrido 28 soldados americanos.

O sistema registava o tempo 10 vezes por segundo, em sistema de vírgula fixa de 24 *bits*. Uma vez que o valor 1/10 constitui uma dízima infinita em base 2, a sua representação numa máquina binária é necessariamente aproximada. No caso de 24 *bits,*

$$\begin{aligned}0.1_{10} &\approx .000110011001100110011001100_2\\ &=2^{-4}+2^{-5}+2^{-8}+2^{-9}+2^{-12}+2^{-13}+2^{-16}\\ &\quad+2^{-17}+2^{-20}+2^{-21}\\ &=\frac{209715}{2097152}\end{aligned}$$

resultando no erro

$$\frac{1}{10}-\frac{209715}{2097152}=\frac{1}{10485760}\approx 9.5\times10^{-8}$$

O Patriot foi projetado para trabalhar na Guerra Fria, na Europa, como defesa contra mísseis cujas velocidades não chegavam aos 2500 km/h, montados em plataformas por-

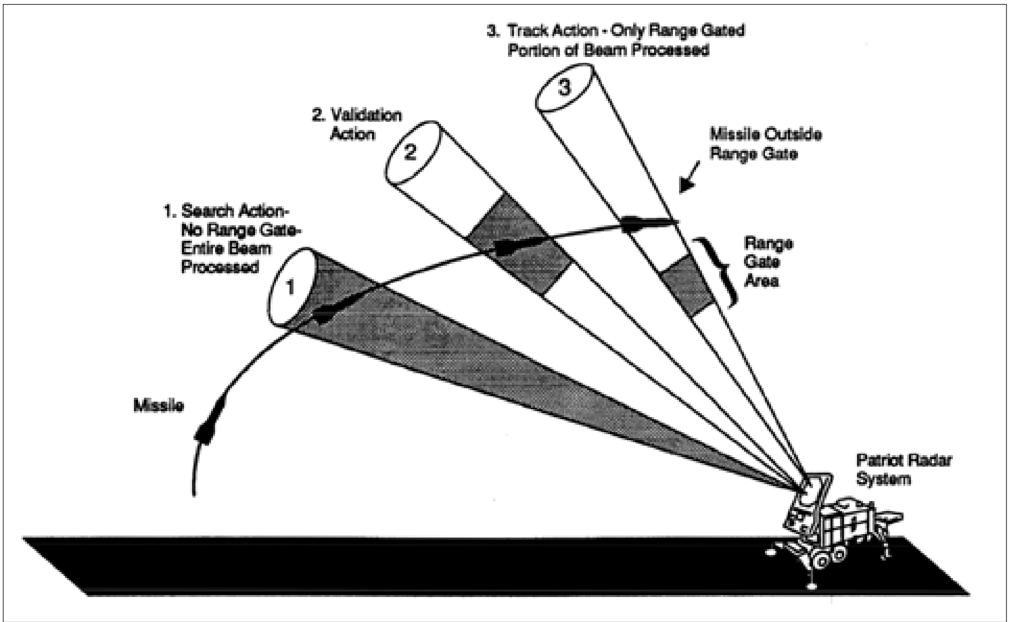


Figura 3: Erro no cálculo da trajetória do míssil [4].

táteis e pensados para funcionar por pequenos períodos de tempo. Na Guerra do Golfo o sistema foi instalado em plataformas fixas, como defesa de posições fixas, contra mísseis *scud* com velocidades superiores a 6 mil km/h. O erro ocorreu após mais de 100 horas de funcionamento ininterrupto da bateria [4]. Ao fim deste tempo, o erro acumulado

$$100 \times 60 \times 60 \times 10 \times \frac{1}{10485760} = \frac{653}{1902} \approx 0.343s$$

provocou um erro de 687 m no cálculo da trajetória e o míssil perdeu-se do radar.

4. ERROS NAS FÓRMULAS E NA SUA UTILIZAÇÃO

Por descuido, por acidente ou deliberadamente, encontramos a utilização de fórmulas de cálculo que não calculam aquilo que se diz ou que não justificam os seus resultados. Nos casos seguintes, podemos constatar que as consequências de tais erros podem conduzir ao desastre financeiro e podem ser muito mais determinantes nas nossas vidas do que esperaríamos.

4.1. Pagamentos por disponibilidade em PPP

Estipula o decreto-lei nº 44/2010 de 5 de maio que as concessionárias das autoestradas Ex-SCUT passem a ser retribuídas pela disponibilidade das infraestruturas. A componente da remuneração anual pela disponibilidade é calculada nos termos da fórmula

$$Dis_t = \sum_j td_t \times \frac{IPC_{Dez_{t-1}}}{IPC_{Dez2009}} \times nd_t(j) \times \frac{L_j}{L_{Total}} \qquad (1)$$

onde td_t é o valor da tarifa diária de disponibilidade no ano t, $nd_t(j)$ o número de dias do ano t em que o sublanço j se encontrou em serviço, IPC_{Dez_t} representa o índice de preços no consumidor em dezembro do ano t , L_j a extensão do sublanço j e L_{Total} a soma das extensões dos sublanços que integram a concessão [6].

Uma vez que estes contratos foram assinados depois de todos os sublanços se encontrarem ao serviço, logo $nd_t(j) = 365$ para todos os valores j, e porque por definição $\sum_j L_j = L_{Total}$, então a fórmula anterior é algebricamente equivalente a

$$Dis_t = td_t \times \frac{IPC_{Dez_{t-1}}}{IPC_{Dez2009}} \times 365. \qquad (2)$$

Prescindindo do quociente L_j/L_{Total}, a fórmula (2) é numericamente estável, ao contrário da fórmula (1), que é numericamente instável. De facto, uma vez que $td_t \times \frac{IPC_{Dez_{t-1}}}{IPC_{Dez2009}} \times nd_t(j)$ é da ordem de grandeza das dezenas de milhões de euros [7], um erro ϵ de arredondamento no quociente em (1) produz um erro de $10^7 \times \epsilon$ euros no resultado final. Concluímos que a utilização da fórmula instável é potencialmente danosa, especialmente se os cálculos intermédios não forem efetuados com pelo menos nove algarismos significativos. Acresce que o texto é omisso quanto aos procedimentos de cálculo a adotar.

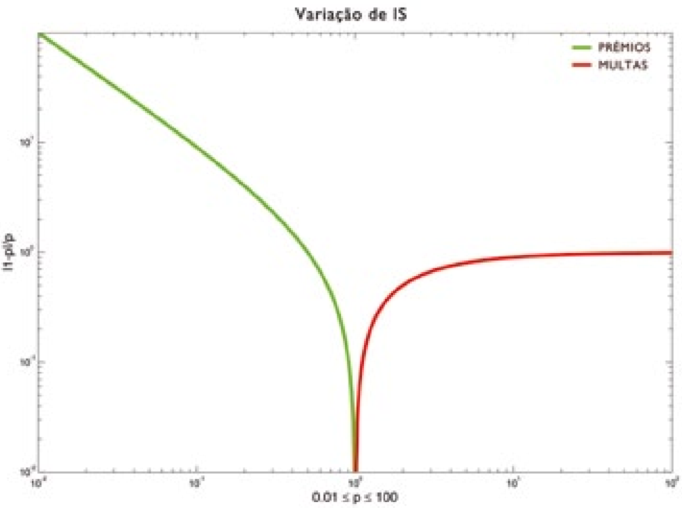


Figura 4: Prémios e multas devidos por variação dos índices de sinistralidade.

4.2. Prémios e multas por variação do índice de sinistralidade

Os mesmos contratos estipulam que, conforme o índice de sinistralidade de uma concessionária $\mathrm{IS}_t(Conc)$ é menor ou é maior do que o índice de sinistralidade ponderado com as restantes concessionárias IS_t(ponderado) no ano t, então a concessionária recebe um prémio calculado segundo a fórmula

$$Sin_t = 2\% \times Dis_t \times \frac{IS_{t-1}(\text{ponderado}) - IS_t(Conc)}{IS_t(Conc)}$$

ou paga uma multa calculada pela fórmula simétrica.

Esta fórmula inclui dois erros, um no numerador e outro no denominador. O facto de existir um desfazamento temporal de um ano entre os índices de sinistralidade do numerador viabiliza a existência de prémios e de multas com sinal negativo, sempre que o índice de sinistralidade de uma concessionária é menor do que o ponderado num ano e maior no ano seguinte ou vice-versa.

O outro erro consiste na escolha do denominador, que pode ser nulo. Para ilustrar o que pode resultar desta fórmula, defina-se $p = \frac{IS_t(Conc)}{IS_{t-1}(\text{ponderado})}$, de que resulta

$$Sin_t = 2\% \times Dis_t \times \frac{1-p}{p}, \text{ se } IS_{t-1}(\text{ponderado}) \neq 0,$$

fórmula que representa uma hipérbole, o que permite concluir que os valores dos prémios e das multas são calculados utilizando escalas diferentes. Com efeito, os prémios, atribuídos quando o denominador é pequeno, são calculados no intervalo que contém a assimptota vertical e as multas, quando o denominador cresce, tendem para a assimptota horizontal.

Na figura 4 representa-se em escala logarítmica o gráfico de $\frac{|1-p|}{p}$, para $p \in [0.01, 100]$.

Para uma concessionária com taxa de disponibilidade diária de 130 mil euros, a remuneração anual por disponibilidade é $Dis = 47{,}45$ milhões de euros. Na tabela seguinte apresentam-se alguns valores de prémios e de multas, juntamente com a remuneração anual desta concessionária, em função do valor de p.

A existência de autoestradas com índices de sinistralidade zero (acidentes com mortos ou feridos graves), ou valores muito póximos de zero, pode estar na origem dos sistemáticos desvios entre os encargos previstos com PPP rodoviárias e os encargos realmente suportados pelo Estado [8].

p		Sin_t	$Dis_t \pm Sin_t$	$(Dis_t \pm Sin_t)/Dis_t$
100	multas	939 510€	46 510 490€	98,02%
10		854 100€	46 595 900€	98,20%
2		474 500€	46 975 500€	99,00%
1		0€	47 450 000€	100%
0.5	prémios	949 000€	48 399 000€	102,00%
0.1		8 541 000€	55 991 000€	118,00%
0.01		93 951 000€	141 401 000€	298,00%
0		∞	∞	

Tabela 1: Prémios e multas por variação de sinistralidade Sin_t e remuneração anual $Dis_t \pm Sin_t$, de uma concessão com 130 mil euros de tarifa de disponibilidade diária, como função da razão entre os índices de sinistralidade da concessão e o ponderado.

4.3. Crescimento em tempo de débito

No seu artigo do *The New York Times* [9], Paul Krugman disserta sobre a possibilidade de um erro de utilização de Excel poder destruir as economias do Mundo Ocidental. Supostamente, existem erros na base da principal conclusão de um muito citado artigo de economia. A conclusão do artigo [10] é a de que existe um limiar de 90% do Produto Interno Bruto de um país que, quando ultrapassado pela dívida pública, provoca uma queda brusca no respetivo crescimento económico. A relação com o Excel reside no facto de ter sido este o *software* utilizado nos cálculos.

Segundo investigadores de economia [11]-[12], existem erros no trabalho de Reinhart and Rogoff, tendo sido identificados erros de código, exclusão seletiva de dados disponíveis e uma utilização não justificada de pesos utilizados no cálculo de médias. Além disso, segundo este estudo, a utilização de longas séries de dados, com lacunas e imperfeições, foi descuidada e incompleta, ignorando especificidades históricas e ignorando padrões temporais. Corrigidos os erros, as conclusões são de que a aparente não linearidade entre déficite público e crescimento do PIB constitui uma especificidade histórica e que a relação entre estas duas variáveis económicas é mais fraca em anos recentes do que em períodos mais remotos.

Mas uma utilização tendenciosa de resultados imprecisos ou parciais, baseados em falsas estatísticas, é desde há muito tempo uma frequente falsificação.

REFERÊNCIAS

[1] J.D. Mascarenhas, et al. (1819), "Memoria Sobre as Medidas e o Peso de Portugal comparadas com as Medidas e o Peso actuaes da França", *Annaes das Sciencias das Artes e das Letras,* Volume 5, Paris, 1815

[2] A.G. Stephenson, et al. (1999), "Mars Climate Orbiter Mishap Investigation Board", Jet Propulsion Laboratory, Washington, DC (*ftp://ftp.hq.nasa. gov/pub/pao/reports/1999/MCO_report.pdf*, consulta em 7 de maio de 2013

[3] J.L. Lions (1996), "Ariane 5, Flight 501 Failure", Report by the Inquiry Board, *http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/ariane5rep.html*, consulta em 8 de maio de 2013

[4] M. Blair, S. Obenski, P. Bridickas (1992), "Patriot Missile Software Problem", Information Management and Technology Division, General Accouting Office, Washington, DC (*http://www.fas.org/spp/starwars/gao/im92026.htm*, consulta em 10 de maio de 2013

[5] D. Weber-Wulff (1992), "Rounding error changes Parliament makeup", in *The Risk Digest*, ACM Committee on Computers and Public Policy, *http: //catless.ncl.ac.uk/Risks/13.37.html\#subj4*, consulta em 10 de maio de 2013

[6] *http://dre.pt/pdf1sdip/2010/05/08701/0000300069.pdf*, consulta em 11 de maio de 2013

[7] J. Matos, P. Morais e F. Miranda (2013), "Errors and Numerical Instabilities in Portuguese Public-Private Partnership contracts", em preparação

[8] Parcerias Público-Privadas e Concessões - Relatório de 2012, Direcção-Geral do Tesouro e Finanças, *http://www.dgtf.pt/ResourcesUser/PPP/Documentos/Relatorios/2012/Relatorio_Anual_PPP_2012.pdf*, consulta em 11 de maio de 2013

[9] P. Krugman (2013), "The Exel Depression", *The New York Times*, *http://www.nytimes.com/2013/04/19/opinion/ krugman-the-excel-depression.html?_r=0*, consulta em 3 de maio de 2013

[10] C.M. Reinhart and K.S. Rogoff (2010), "Growth in a time of debt", NBER Working Paper Series, *http://www.nber.org/papers/w15639.pdf*, consulta em 13 de maio de 2013

[11] M. Konczal (2013), "Researchers finally replicated Reinhart-Rogoff, and there are serious problems", *Next New Deal the Blog of the Roosevelt Institute*, *http://www.nextnewdeal.net/rortybomb/researchers-finally-replicated-reinhart-rogoff*, consulta em 13 de maio de 2013

[12] T. Herndon, M. Ash and R. Pollin (2013), "Does High Public Debt Consistently Stifle Economic Grwth? A Critique of Reinhart and Rogoff", Political Economy Research Institute, University of Massachusetts Amherst, Workingpaper series, no 322, April 2013, *http://www.peri.umass.edu/fileadmin/pdf/working_papers/working_papers_301-350/WP322.pdf*, consulta em 13 de maio de 2013

SOBRE O AUTOR

José Matos é Professor Coordenador do Departamento de Matemática e integra o Laboratório de Engenharia Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto. É também investigador do Centro de Matemática da Universidade do Porto. É doutorado em Matemática Aplicada pela Universidade do Porto, com uma tese em Análise Numérica, tem trabalhado em aproximação de funções, propagação de erros e estabilização de algoritmos. É docente e subdiretor do mestrado em Matemática Aplicada à Engenharia e às Finanças do Instituto Superior de Engenharia do Porto.

SPM COMPLETA **73 ANOS** EM **DEZEMBRO**

Foi no fulgor da atividade matemática das décadas de 1930 e 1940, em Portugal, que a SPM nasceu, impulsionada por uma geração composta por nomes históricos como Bento de Jesus Caraça, Ruy Luís Gomes, António Aniceto Monteiro, Manuel Zaluar, Alfredo Pereira Gomes e Pilar e Hugo Ribeiro. Ao longo de várias décadas, a SPM tem desenvolvido as suas atividades com base nos objetivos a que se propôs aquando da sua criação: a divulgação da matemática e o desenvolvimento do ensino e da investigação desta área em Portugal. Atualmente, a SPM é responsável por várias publicações, entre as quais a *Gazeta de Matemática*, pela edição de livros, apostando ainda na formação de professores, através do seu Centro de Formação, e na certificação de manuais escolares. A Sociedade organiza ainda iniciativas e eventos que mobilizam cada vez mais pessoas a nível nacional, como as Olimpíadas Portuguesas de Matemática, as Tardes de Matemática ou exposições temáticas, no esforço de desenvolver o conhecimento da matemática e o interesse pela disciplina. A dinamização de projetos como o Clube de Matemática, o programa televisivo "Isto é Matemática" e a adaptação para português dos vídeos da Khan Academy reflete também esta preocupação. A SPM assinala 73 anos de existência no próximo dia 12 de dezembro.

JÁ **ARRANCARAM** AS **32AS OLIMPÍADAS PORTUGUESAS** DE **MATEMÁTICA**

Foram perto de 40 mil os alunos que no dia 13 de novembro participaram na 1ª eliminatória das Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM), que decorreu, em simultâneo, em centenas de escolas de todo o País. As provas foram realizadas por estudantes dos 6º e 7º anos (Categoria Júnior), 8º e 9º anos (Categoria A) e 10º,11º e 12º anos (Categoria B). No mesmo dia realizou-se a prova única das Pré-Olimpíadas (5ºano). No dia 15 de janeiro, na 2ª eliminatória desta competição, serão apurados, a nível regional, os 90 finalistas das OPM que disputarão a Final Nacional, entre os dias 3 e 6 de abril, no Agrupamento de Escolas Dr. Mário Sacramento, em Aveiro. Em maio, os alunos dos 3º e 4º anos terão ainda a oportunidade de realizar a prova única das Mini-Olimpíadas. As incrições podem ser efetuadas até 30 de abril de 2013. As OPM são organizadas pela SPM, em parceria com o Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, com o objetivo de desenvolver o conhecimento da matemática, o treino do raciocínio e o gosto pelos desafios matemáticos. A SPM conta com o apoio do Ministério da Educação e Ciência, do Ciência Viva, da Fundação Calouste Gulbenkian, do Banco Espírito Santo, da Pathena e do jornal Público na realização das Olimpíadas.

“ISTO É MATEMÁTICA” DISTINGUIDO AQUÉM E ALÉM-FRONTEIRAS

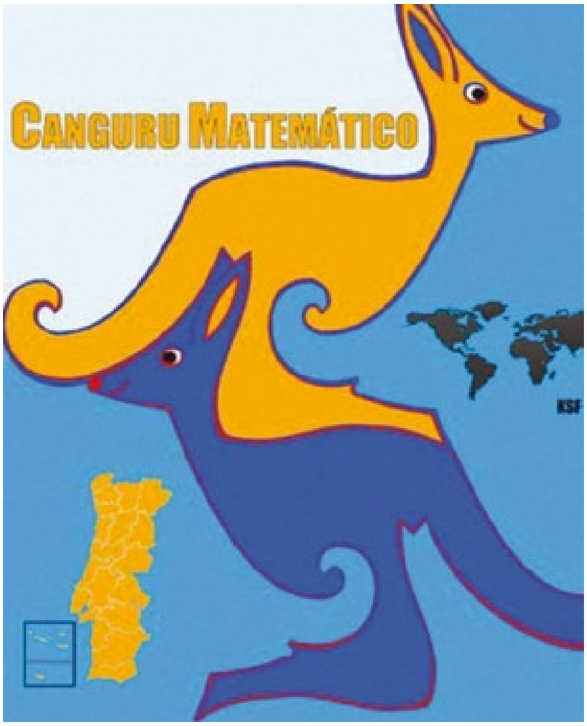
Há um ano que o programa “Isto é Matemática”, transmitido todos os sábados na SIC Notícias, habituou os portugueses a encontrar matemática em tudo o que os rodeia. À boa aceitação do público nacional juntaram-se agora duas distinções. Em solo nacional, o programa foi distinguido com o Prémio Ciência Viva Montepio nos Media. O galardão foi entregue pela Agência Ciência Viva ao presidente da SPM, Miguel Abreu, no dia 24 de novembro, Dia Nacional da Cultura Científica. Os Prémios Ciência Viva Montepio são atribuídos anualmente como reconhecimento por intervenções excecionais na divulgação científica e tecnológica em Portugal. Antes disso, o programa havia sido já premiado na Mostra Internacional de Ciência na TV VerCiência 2013, que decorreu no Brasil entre 21 de outubro e 3 de novembro, com a Homenagem Especial VerCiência 2013 “pela excelência dos programas produzidos, apresentando tópicos da matemática de forma atraente e divertida”. O “Isto é Matemática” é promovido pela SPM e produzido pela Sigma 3, com o apoio do COMPETE, da Ciência Viva e do QREN/FEDER.

“UM CONTO QUE CONTAS”

Os alunos do 1º ao 12º ano de escolaridade das escolas de todo o País estão convidados a participar no concurso “Um Conto que Contas”, que consiste na escrita e na ilustração de um conto que envolva conteúdos matemáticos, e que deverá ser submetido a concurso até ao dia 31 de janeiro de 2014. Os participantes podem concorrer a uma de oito categorias e de acordo com os ciclos de ensino em que estão integrados, individualmente ou em equipa, num máximo de quatro elementos. O concurso “Um Conto que Contas” vai agora na sua 2ª edição e procura fomentar hábitos de leitura e de escrita nos alunos, assim como promover a articulação entre diversas áreas do saber, desenvolver a capacidade de expressão e de comunicação, e estimular a imaginação dos participantes. Esta iniciativa é organizada pela Delegação Regional do Sul e Ilhas da SPM e tem o apoio da Universidade de Évora, da Fundação Luís de Molina, do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações da Universidade de Évora, do Centro de Matemática Aplicada e Tecnologias de Informação da Universidade dos Açores e da Delta Cafés. Mais informações em *http://www.spmsul.uevora.pt/concurso.htm.*

CANGURU MATEMÁTICO **SEM FRONTEIRAS** 2014

Já é conhecida a data da próxima edição do Canguru Matemático sem Fronteiras 2014. No dia 20 de março do próximo ano, os alunos de todos os ciclos de ensino (a partir do 2º ano de escolaridade) inscritos neste concurso realizarão a prova única do Canguru Matemático em simultâneo com todos os outros estudantes dos países participantes. A inscrição na prova deve ser efetuada de acordo com cinco categorias distintas, com base na idade dos concorrentes. As escolas poderão efetuar a sua inscrição na competição a partir do próximo mês de janeiro. A Associação Canguru sem Fronteiras é uma organização internacional que reúne personalidades de diversos países e que tem como objetivo a divulgação da matemática elementar. Em Portugal a organização deste concurso está a cargo do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e tem o apoio da SPM.



INSCRIÇÕES ABERTAS PARA **PRÉMIO PEDRO MATOS**

O Prémio Pedro Matos, uma iniciativa do Instituto Politécnico de Leiria, vai já na sua 6ª edição e, este ano, convida os alunos do ensino secundário a apresentar trabalhos sob a perspetiva da "Matemática na Natureza". As inscrições devem ser efetuadas até ao dia 28 de fevereiro e os trabalhos, apresentados a concurso até ao dia 12 de maio. Os projetos podem ser elaborados individualmente ou em grupo (máximo de três estudantes) e poderão ainda ter a participação de um professor do ensino secundário, ao qual caberá o papel de orientador. Os prémios serão entregues em julho do próximo ano, na 7.ª edição do Mat-Oeste: Matemática na Região Oeste (ver caixa). Esta iniciativa, que conta com o apoio da SPM, tem como objetivo fomentar a criatividade e o interesse pela matemática e as suas aplicações.

MATEMÁTICA NA **REGIÃO OESTE** NO DIA **11 DE JULHO**

A 6ª edição do Mat-Oeste: Matemática na Região Oeste decorrerá na manhã do dia 11 de julho de 2014, na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria. Tendo como público-alvo os professores de todos os níveis de ensino e o público em geral, este encontro pretende promover a divulgação, a discussão e a partilha de experiências nas mais diferentes vertentes da matemática. Nesta edição, o tema em destaque será a "Matemática na Natureza".

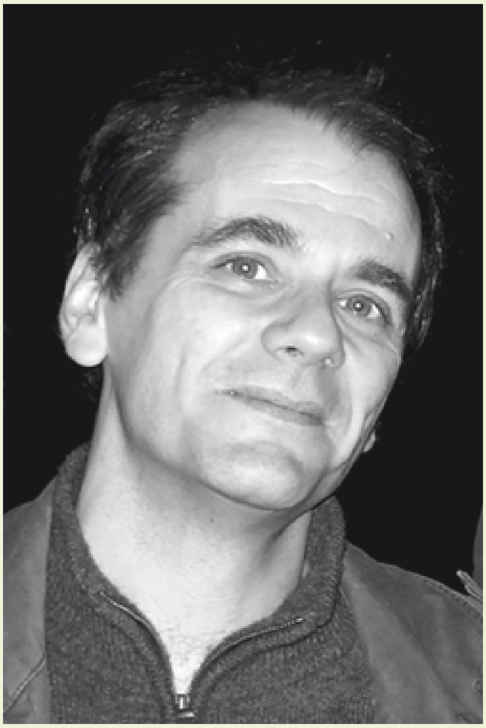
SÉRGIO MACIAS MARQUES PUBLICA ***REMEMORAÇÕES MATEMÁTICAS*** E ***ALTERNATIVAS***

Coordenado por Sérgio Macias Marques, *Rememorações Matemáticas e Alternativas* é uma compilação de textos que aborda a linguagem matemática, a geometria, a didática da matemática, e temas tão diversos como os pentaminós, a numeração romana ou a filatelia, e apresenta ainda uma entrevista ao autor, na altura diretor do *Jornal de Mathematica Elementar* (JME). Em 1984, Macias Marques reeditou a publicação, há muito extinta, quando se assinalavam os 100 anos da sua criação, tendo sido diretor do jornal durante mais de 20 anos, e mantendo-se atualmente como seu diretor honorário. Sérgio Macias Marques nasceu em Loulé em 1928, e foi, durante 40 anos, professor do ensino secundário e superior. Licenciado em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, é autor dos quatro volumes da *Galeria de Matemáticos do Jornal de Mathematica Elementar* e do *Dicionário Ilustrado de Matemática Elementar.*

KHAN ACADEMY EM **PORTUGUÊS** CONTINUA A **CRESCER**

Já são quase 400 os vídeos de matemática da Khan Academy, disponíveis em *http://fundacao.telecom.pt/*. As matérias abordadas nestas vídeo-aulas abrangem agora todos os níveis do ensino básico e do 3º ciclo, e ainda o 12º ano. A SPM continua a colaborar neste projeto da Fundação Portugal Telecom, certificando a adaptação dos conteúdos de acordo com o currículo escolar nacional. Em 2014, a Fundação PT espera disponibilizar cerca de 800 vídeos de matemática, física, química e biologia. O projeto pretende chegar também, além do público português, aos internautas dos Países Africanos de Língua Oficial Portuguesa e Timor-Leste através do Sapo Internacional. Os vídeos, que procuram servir de reforço às matérias lecionadas na sala de aula, são narrados por Rogério Martins e por quadros da PT. O repositório da Khan Academy, criada em 2006 por Salman Khan, conta já com mais de quatro mil vídeos sobre matemática, física, química, história, e economia, entre outras áreas.

KHAN ACADEMY

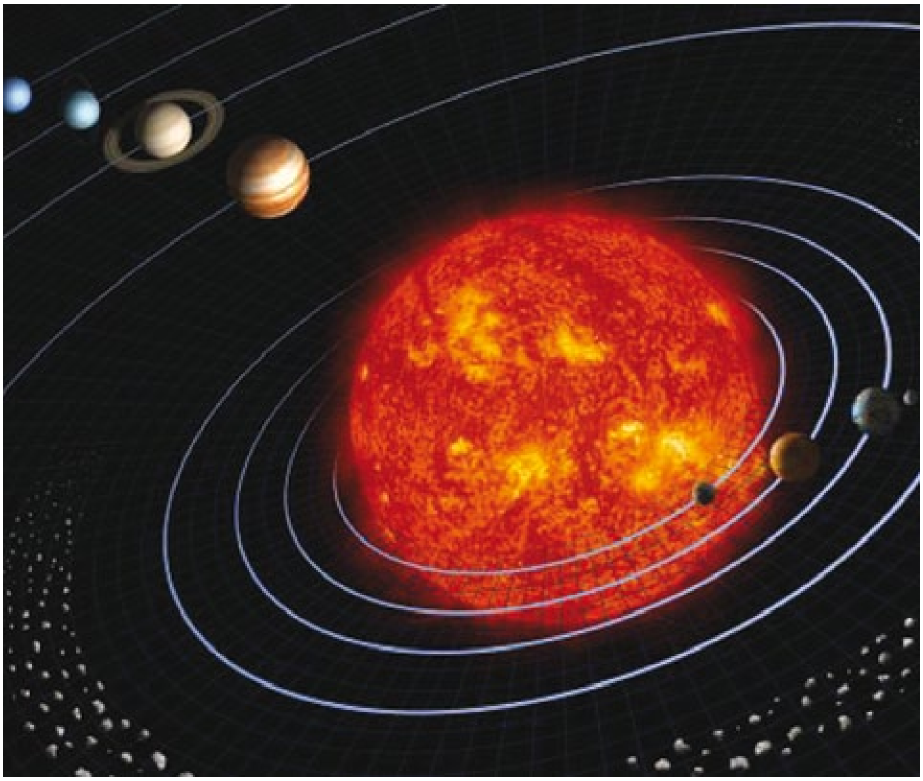


FCUL HOMENAGEIA **MIGUEL RAMOS**

A Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL) prestará uma homenagem a Miguel Ramos no dia 6 de janeiro de 2014, que contará com a participação de matemáticos radicados em diversas universidades, nacionais e estrangeiras. As apresentações e testemunhos dos oradores decorrerão no edifício C3, anfiteatro 3.2.14, na FCUL, e serão seguidos de um jantar no mesmo edifício. As inscrições para o jantar deverão ser efetuadas até ao dia 19 de dezembro, através do *e-mail* aimarques@fc.ul.pt ou do tel. 217 500 042. Miguel Ramos (1963-2013) foi professor catedrático no Departamento de Matemática da FCUL e desenvolvia a sua atividade de investigação em áreas como: Equações Diferenciais Parciais, Análise Funcional e Cálculo de Variações. Autor de *Teoremas de Enlace na Teoria de Pontos Críticos* e *Curso Elementar de Equações Diferenciais Ordinárias* (DMFCUL), Miguel Ramos foi também editor da *Portugaliae Mathematica*.

EXPOSIÇÃO **MATER** PATENTE NA **FCT/UNL**

Integrada na iniciativa Matemática do Planeta Terra 2013, a exposição MATER foi inaugurada recentemente na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (FCT/UNL). A exposição é composta por vários módulos (Tempo, Espaço, Arte, Vida, Quotidiano) e está patente na Biblioteca e no Edifício VII FCT/UNL. Ao longo do período da exposição, decorrerão visitas guiadas, oficinas pedagógicas e concursos, destinadas a escolas dos ensinos básico e secundário e ao público em geral.



7.º CONGRESSO EUROPEU DE MATEMÁTICA REALIZA-SE EM BERLIM

Berlim será a cidade anfitriã do 7.º Congresso Europeu de Matemática, encontro que se realiza de quatro em quatro anos. Entre 18 e 22 de julho de 2016, a capital alemã será palco de um dos acontecimentos matemáticos mais importantes da Europa. O congresso decorrerá na Technische Universität Berlin, onde, durante quatro dias, se reunirão matemáticos vindos de toda a Europa para discutir os principais desenvolvimentos na área da matemática. Este encontro é uma iniciativa da European Mathematical Society.

UNIVERSIDADE DE AVEIRO RECEBE CONFERÊNCIA SOBRE OTIMIZAÇÃO, EM FEVEREIRO

A discussão dos desenvolvimentos mais recentes em otimização e as suas aplicações às ciências naturais estará em destaque na EURO Mini-conference on Optimization in the Natural Sciences, que decorrerá na Universidade de Aveiro entre os dias 5 e 9 de fevereiro do próximo ano. O encontro será também uma oportunidade para a troca de conhecimentos e de contactos entre investigadores nas áreas de computação, otimização, estatística, física, química, biologia e ciências médicas. O prazo para as inscrições termina a 15 de dezembro.

PRÉMIO REN 2014 DISTINGUE TESES DE MESTRADO

Estão abertas até 14 de janeiro as inscrições para o Prémio REN, que distinguirá as melhores teses de mestrado em matemática, engenharia, economia, física, química, sistemas de informação e computação. Os trabalhos apresentados deverão ter sido concluídos e classificados nos anos letivos de 2011/2012 e de 2012/2013 e realizados em estabelecimentos portugueses de ensino superior por recém-mestrados ou finalistas de mestrados nas áreas atrás mencionadas. Mais informações sobre este prémio podem ser consultadas em *http://www.ren.pt/sustentabilidade/premios_ren/*.

Joana Teles
Direção SPM
jteles@mat.uc.pt

FANTÁSTICOS, BRILHANTES, **ESPETACULARES!**

Em 2013 os resultados de Portugal nas competições de matemática internacionais foram assim…

Escrever sobre os resultados dos alunos portugueses nas competições internacionais não é tarefa fácil. Depois de um ano de ouro em 2011, com a obtenção da primeira medalha de ouro nas Olimpíadas Internacionais, os resultados não param de nos surpreender. Ano após ano, é preciso encontrar novos adjetivos para não haver repetições. Brilhantes, espetaculares, fantásticos, todos eles já foram usados para qualificar os resultados. Este ano, mais uma vez, todos os resultados superaram os anteriores. Nas três participações internacionais, todos os elementos das delegações foram premiados e Portugal arrecadou uma medalha de ouro em cada uma das competições.

A equipa portuguesa que participou nas Olimpíadas Internacionais de Matemática, realizadas na Colômbia no passado mês de julho, era a mais experiente de sempre. Cinco dos seis alunos presentes já tinham participado na edição anterior e quatro dos seis ainda poderão participar no próximo ano. Portugal conquistou, pela terceira vez consecutiva, uma medalha de ouro, este ano atribuída ao aluno Miguel Moreira, que no ano anterior tinha conquistado uma medalha de prata. Além desta medalha, Portugal obteve quatro medalhas de bronze e uma menção honrosa. O número total de pontos de Portugal, 111, ultrapassou, pela primeira vez, a barreira dos 100 pontos. De Moçambique e das Olimpíadas de Matemática da CPLP, os quatro alunos participantes trouxeram uma medalha de ouro, uma de prata e mais duas de bronze.

Nas Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, que decorreram em setembro no Panamá, Portugal obteve a sua melhor pontuação de sempre, com o aluno Luís Duarte, medalhado de ouro, a conquistar, pela primeira vez, para um aluno português, os 42 pontos possíveis na prova. A adicionar a este resultado, os dois alunos que conquistaram medalhas de prata terminaram a prova com 41 pontos, apenas a um ponto da pontuação perfeita (e também do ouro) e a fechar a delegação mais uma medalha de bronze. Na classificação por países, Portugal repetiu o extraordinário segundo lugar obtido no ano passado, de novo atrás do Brasil. De realçar que, mais uma vez, os dois países de língua portuguesa conseguiram destacar-se dos restantes que falam espanhol.

Qual é a fórmula mágica? O que é que está por detrás de todos estes sucessos? Os nossos alunos olímpicos trabalham e dedicam-se totalmente à sua preparação para as Olimpíadas, estudando temas e conteúdos não abordados nas escolas básicas e secundárias, mas principalmente treinando a resolução de problemas, com a aprendizagem de ideias e técnicas que poderão ser usadas noutros problemas. Este trabalho, que para eles é visto como um verdadeiro divertimento, é feito com uma dedicação, uma naturalidade e uma simplicidade difíceis de descrever. O outro ponto fulcral no trabalho atrás descrito é a existência do Projecto Delfos e a possibilidade que ele dá a qualquer aluno de se juntar a outros jovens com esta aptidão e este gosto pela resolução de problemas. A dimensão do nosso país e a localização geográfica de Coimbra tornam possíveis as deslocações ao longo do ano de alunos de todo o País. O trabalho e o ambiente vivido pelos olímpicos no Delfos é fundamental para o espírito de equipa e para o trabalho, em e para a equipa, que os portugueses têm apresentado nas competições matemáticas. Os alunos que se destacam nas Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM) podem desde

Chegada a Lisboa da equipa que representou Portugal nas Olimpíadas Internacionais de Matemática

muito cedo começar a sua preparação no Projecto Delfos e o trabalho continuado quer dos alunos quer do próprio Projecto tem dado os seus frutos.

O que é que ainda poderemos melhorar? Gostaríamos de levar as OPM a todas as escolas e a todos os alunos. Como exemplo, as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) são obrigatórias. Todos os alunos das escolas públicas brasileiras realizam a primeira eliminatória das OBMEP. Temos consciência de que alguns alunos, ou porque pensam que não têm jeito para a matemática ou porque a sua escola não participa, perdem a oportunidade de verificar o talento e a facilidade que têm na resolução de problemas. Estamos certos de que, ao participar nas Olimpíadas, os alunos, desenvolvem capacidades que são úteis nas várias áreas do saber.

Para terminar, uma palavra de agradecimento às entidades que nos têm apoiado. Em primeiro lugar, o Ministério da Educação e Ciência que permite que as Olimpíadas Portuguesas de Matemática se iniciem nas escolas com a primeira eliminatória e terminem na grande festa que é a Final Nacional, onde se reúnem os alunos que nas duas provas anteriores tiveram melhor desempenho. Em segundo lugar, a Ciência Viva, que nos permite chegar até às competições internacionais além-fronteiras. Por último, os nossos patrocinadores, Banco Espírito Santo, Pathena, Fundação Calouste Gulbenkian, que nos ajudam a poder dignificar e melhorar todas as atividades olímpicas.

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2013

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3° esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*