

N. 0168

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXIII | Nov. 2012 | 4,20€

A Projeção Estereográfica e o Astrolábio

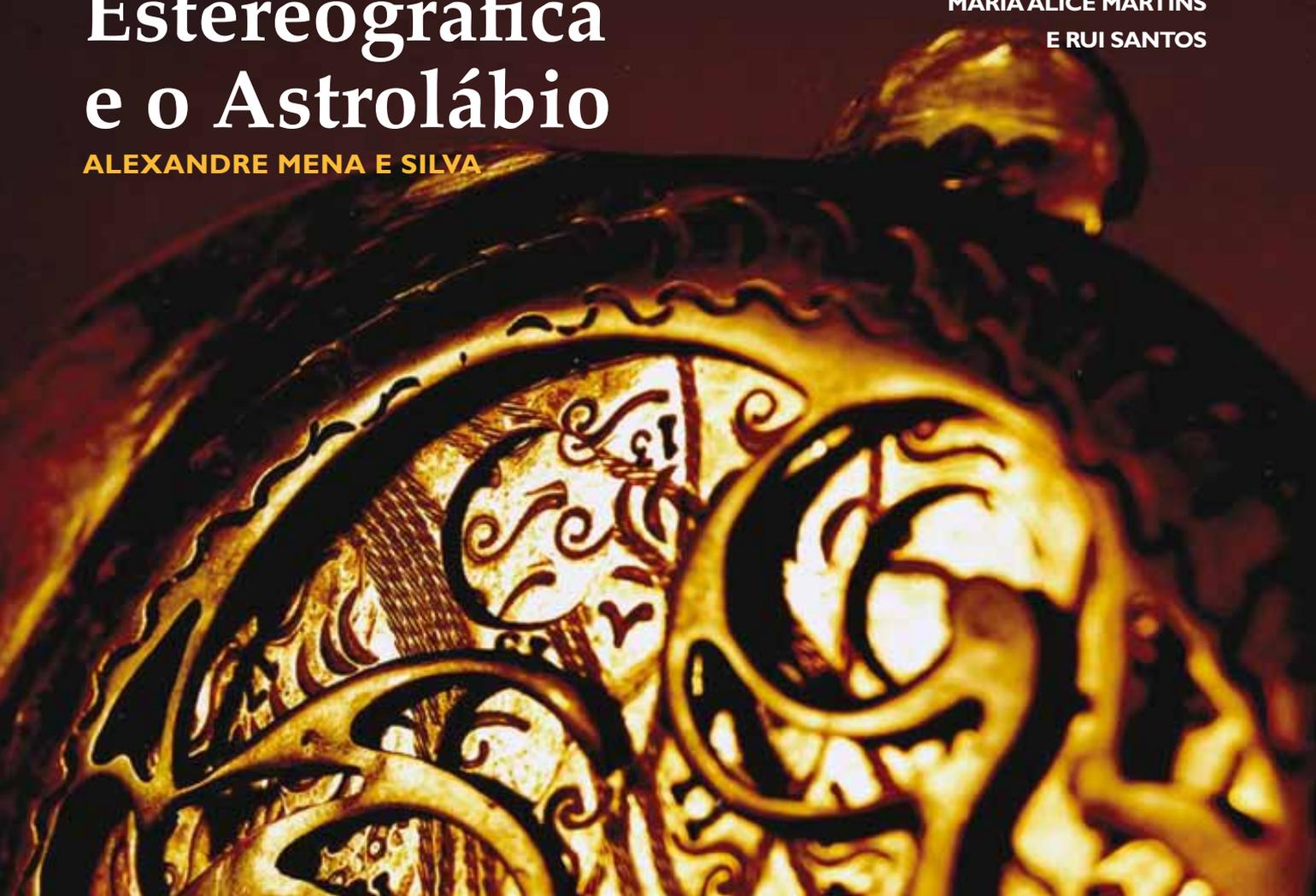
ALEXANDRE MENA E SILVA

Os Jogos no Ensino da Matemática

ANA JÚLIA VIAMONTE

A Regressão Linear Simplex no Ensino Secundário

HELENA RIBEIRO,
MARIA ALICE MARTINS
E RUI SANTOS



9.º campeonato nacional de JOGOS matemáticos

1 março 2013

Arena d'Évora

<http://www.cnjm.com.pt>

<http://uevora.cnjm9.pt>

cnjm9@uevora.pt

Organização



Ludus

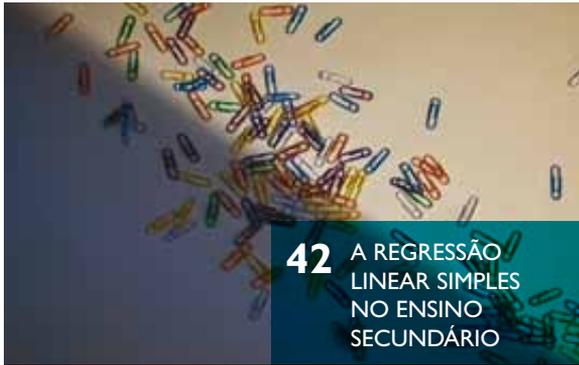


spm

Apoios

BANCO ESPÍRITO SANTO

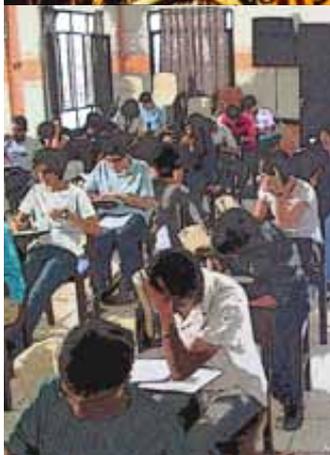




42 A REGRESSÃO LINEAR SIMPLES NO ENSINO SECUNDÁRIO



14 A PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA E O ASTROLÁBIO



36 XXVII OLIMPÍADAS IBERO-AMERICANAS DE MATEMÁTICA



26 OS JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA



39 NOVAS HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA

A MATEMÁTICA DO LUAR, DE PLUTARCO A KEPLER

- 02 EDITORIAL** | *Rogério Martins*
- 03 ATRACTOR**
Triângulos com ângulos múltiplos
- 06 RECREIO** | *Jorge Nuno Silva*
Outros heróis olímpicos: os problemas!
- 08 CANTO DÉLFICO** | *Amílcar Branquinho*
Uma desigualdade fundamental
- 11 NA LINHA DE FRENTE** | *Fabio Chalub*
5 sigmas de certeza
artigo de capa
- 14 A PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA E O ASTROLÁBIO**
Alexandre Mena e Silva
- 22 APANHADOS NA REDE** | *António Machiavelo*
Matemática e malabarismo
- 26 OS JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA**
Ana Júlia Viamonte
- 33 PERGUNTAS SIMPLES, RESPOSTAS SURPREENDENTES** | *Manuel Silva e Pedro J. Freitas*
Um Problema para Polimatemáticos
- 36 XXVII OLIMPÍADAS IBERO-AMERICANAS DE MATEMÁTICA**
António Salgueiro
- 39 NOVAS HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA ANTIGA** | *Bernardo Mota*
A matemática do luar, de Plutarco a Kepler
- 41 BARTOON** | *Luis Afonso*
- 42 A REGRESSÃO LINEAR SIMPLES NO ENSINO SECUNDÁRIO**
Helena Ribeiro, Maria Alice Martins e Rui Santos
- 49 NOTÍCIAS**
- 55 CARTAS DA DIREÇÃO** | *Jorge Buescu*
Duas mãos cheias de imenso



ROGÉRIO MARTINS
Universidade Nova
de Lisboa
roma@fct.unl.pt

A MATEMÁTICA COMO MEDIDA DE INTELIGÊNCIA

A matemática é frequentemente vista pela sociedade em geral como um teste de inteligência. Isto tem vantagens e inconvenientes para a imagem desta no cidadão comum. Confesso que não sei quais deles pesam mais...

Se a sua profissão está relacionada com a matemática ou obtive algum grau académico na área, seguramente já lhe aconteceu dizer este facto a alguém não ligado ao meio e ver uma reacção do outro lado de alguém que diz ou pensa algo do género: “Uau, deves ser muito inteligente!” A verdade é que, para o bem ou para o mal, a capacidade de entender ou fazer matemática é vista pela sociedade em geral como uma medida de inteligência.

Não creio que a matemática seja uma medida fiel das nossas capacidades intelectuais, por várias razões.

Em primeiro lugar, aquilo a que se pode chamar inteligência tem várias facetas, e só algumas delas são exploradas pela atividade matemática. Veja-se, por exemplo, a chamada inteligência emocional, mais relacionada com capacidades sociais. A habilidade para a matemática não tem de estar necessariamente (embora possa haver ligações) relacionada com esta faceta do ser humano. A atividade matemática acaba geralmente por conter períodos de isolamento, por exemplo, de estudo ou de escrita. Seja porque as pessoas que escolhem fazer matemática já têm alguma capacidade de isolamento ou porque a matemática as leva a isso, a verdade é que é mais ou menos conhecida uma pequena tendência entre os matemáticos para serem pouco hábeis para atividades sociais. Como dizia um amigo meu, nos congressos de matemática, nos intervalos da primeira metade do congresso fala-se da viagem de ida e na segunda metade fala-se da viagem de regresso.

Em segundo lugar, creio que somos todos muito parecidos quanto à capacidade para fazer matemática. Na minha opinião,

a distribuição da capacidade de fazer matemática no ser humano é semelhante a muitas outras características físicas e psíquicas. Veja-se, por exemplo, a capacidade de jogar basquetebol: praticamente todas as pessoas podem aprender a jogar basquetebol, claro que há jogadores naturais, porque têm mais de dois metros, e também há anões para quem este jogo nunca será o seu forte, mas a maioria da população pode jogar ou, pelo menos, aprender a jogar de uma forma razoável. A distribuição da capacidade para a matemática não deve de ser muito diferente, de facto ao longo dos últimos vinte anos em que fiz matemática, nunca conheci nenhum matemático de “quatro metros de altura” (embora já tenha conhecido alguns de “dois metros de altura”), creio mesmo que se me cruzasse com os chamados génios do passado, não iria ver gigantes de “quatro metros”. Tal como um desses génios dizia, “a genialidade é 1% inspiração e 99% transpiração” e trabalhar, em princípio, quase toda a gente pode deste que esteja motivada para isso. Assim, mesmo que a capacidade de fazer matemática seja o reflexo de uma inteligência lógica, seja porque já nascemos com o dom da habilidade para a matemática ou porque treinámos esse “músculo” que é o cérebro, a verdade é que não somos assim tão diferentes de um não-matemático.

Claro que esta imagem que a sociedade tem dos matemáticos tem vantagens, por exemplo, dá um ar um pouco mítico à atividade matemática, mas também tem desvantagens... No próximo número falarei essencialmente sobre as segundas...

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site www.atractor.pt. Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para atractor@atractor.pt

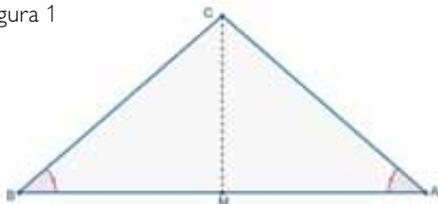
TRIÂNGULOS COM ÂNGULOS MÚLTIPLOS

Num triângulo plano $\triangle ABC$, a igualdade entre os ângulos $\angle B = \angle A$ é equivalente a uma relação simples entre os dois lados opostos a esses ângulos, $|AC| = |BC|$. E se $\angle B = n\angle A$ para algum natural n ?

Esta foi a questão que Euler considerou em 1765 no artigo [2]. Euler começa por tratar alguns casos particulares, de $n = 1$ a $n = 5$, apercebendo-se de que há um padrão nas equações que vai obtendo, mas resume a apresentação aos valores de n até 13 e algumas afirmações que faz requerem uma justificação. Por isso, vale a pena regressar a este problema.

Dado um triângulo $\triangle ABC$, com vértices A, B, C , designemos por a, b e c os comprimentos dos lados opostos a A, B e C , respetivamente. Começemos por supor que $\angle B = \angle A$ e tracemos o segmento CP perpendicular à reta que contém o lado AB , construindo desse modo dois triângulos, $\triangle APC$ e $\triangle BPC$, que são rectângulos e semelhantes. Além disso, têm em comum o lado CP , que se corresponde pela semelhança. E, portanto, são triângulos congruentes, com $a = b$. Reciprocamente, se $a = b$, consideremos o ponto médio M do lado AB (figura 1) e o segmento que o une a C . Os triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle BMC$ são congruentes, logo, em particular, $\angle B = \angle A$.

Figura 1



Analisemos agora os triângulos $\triangle ABC$ (figura 2) tais que $\angle B = 2\angle A$. Se bissectarmos o ângulo $\angle B$ e considerarmos o ponto Q de intersecção dessa bissectriz com o lado AC , en-

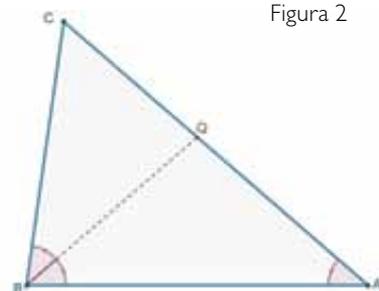


Figura 2

tão os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BQC$ são semelhantes. Pelo Teorema de Tales, $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AB|}{|BQ|} = \frac{|BC|}{|CQ|}$, ou seja, $\frac{b}{a} = \frac{c}{|BQ|} = \frac{a}{|CQ|}$ e, conseqüentemente, $|BQ| = \frac{ac}{b}$ e $|CQ| = \frac{a^2}{b}$. Além disso, por construção, $|AC| = |AQ| + |CQ|$, isto é, $|AQ| = b - \frac{a^2}{b}$. E, no triângulo $\triangle ABQ$, tem-se $\angle B = \angle A$, logo $|AQ| = |BQ|$. Substituindo nesta igualdade os valores anteriores, obtemos $b - \frac{a^2}{b} = \frac{ac}{b}$, ou seja, $b^2 - a^2 = ac$. Reciprocamente, suponhamos que no triângulo $\triangle ABC$, de lados correspondentes a, b e c , vale a igualdade $b^2 - a^2 = ac$. Então $b > a$ e, portanto, no lado AC podemos fixar um ponto Q tal que o ângulo $\angle QBC$ é igual a $\angle A$. Desse modo, criamos um triângulo $\triangle BQC$ semelhante a $\triangle ABC$, logo, como vimos, $|BQ| = \frac{ac}{b}$, $|CQ| = \frac{a^2}{b}$ e $|AQ| = b - \frac{a^2}{b}$. Além disso, como por hipótese $b - \frac{a^2}{b} = \frac{ac}{b}$, isto é, $|AQ| = |BQ|$, sabemos que o triângulo $\triangle AQB$ é isósceles, com $\angle ABQ = \angle A$. Daqui resulta que, no triângulo $\triangle ABC$, se tem $\angle B = 2\angle A$. Com esta caracterização dos triângulos em que um ângulo é o dobro de outro, podemos, por exemplo, provar que existe exatamente um destes triângulos cujos comprimentos dos lados são inteiros

consecutivos¹: é o que verifica $a = 4$, $b = 6$ e $c = 5$. Ou determinar expressões gerais para o seno e o cosseno de um ângulo duplo.

Por processo análogo, usando o que já sabemos para $n = 2$, podemos explicitar uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo em que um dos ângulos é triplo de outro.

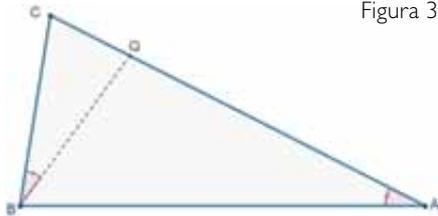


Figura 3

Seja $\triangle ABC$ (figura 3) um tal triângulo com $\angle B = 3\angle A$. Se trisetarmos o ângulo $\angle B$ e considerarmos o ponto Q do lado AC tal que o ângulo $\angle QBC$ é igual a $\angle A$, então, de novo, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BQC$ são semelhantes, sendo $|BQ| = \frac{ac}{b}$, $|CQ| = \frac{a^2}{b}$ e $|AQ| = b - \frac{a^2}{b}$. Por construção, no triângulo $\triangle ABQ$, tem-se $\angle B = 2\angle A$, e portanto $|AQ|^2 - |BQ|^2 = |AB||BQ|$, ou seja,

$$\left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 - \left(\frac{ac}{b}\right)^2 = \left(\frac{ac}{b}\right)c$$

o que é equivalente a $(b^2 - a^2)^2 - ac^2(a + b) = 0$ e, cancelando $a + b$, o mesmo que $(b^2 - a^2 + c^2)(b - a) - bc^2 = 0$.

Quanto à implicação recíproca, voltemos à referência [2]. Euler afirma que, se num triângulo $\triangle ABC$, de lados correspondentes a, b, c , vale a igualdade $(b^2 - a^2 + c^2)(b - a) - bc^2 = 0$ então $\angle B = 3\angle A$. A figura com que Euler pretende ilustrar esta afirmação só é possível se $b > a$. Esta é uma condição necessária para que o ângulo no vértice B seja triplo do do vértice A , mas não é consequência da hipótese $(b^2 - a^2 + c^2)(b - a) - bc^2 = 0$. Se, por exemplo, $a = 3$, $c = 2$ e b é a solução da equação $(b^2 - 5)(b - 3) = 4b \text{ em }]1, \sqrt{5}[$, então a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo $\triangle ABC$, opostos aos vértices A, B, C , respetivamente, que verifica a condição $(b^2 - a^2 + c^2)(b - a) - bc^2 = 0$ mas em que $\angle B \neq 3\angle A$. Se, contudo, admitirmos que no triângulo $\triangle ABC$, de lados a, b, c , se tem $(b^2 - a^2 + c^2)(b - a) - bc^2 = 0$ e $b > a$, então podemos fixar no lado AC um ponto Q tal que o ângulo $\angle QBC$ é igual a $\angle A$. Desse modo, o triângulo $\triangle BQC$ é semelhante a $\triangle ABC$, com lados $|BQ| = \frac{ac}{b}$, $|CQ| = \frac{a^2}{b}$ e, portanto, $|AQ| = b - \frac{a^2}{b}$. Além disso, como por hipótese $\left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 - \left(\frac{ac}{b}\right)^2 = \frac{ac}{b}c$, ou seja, $|AQ|^2 - |BQ|^2 = |AB||CQ|$, concluímos, pelo caso $n = 2$, que,

no triângulo original $\triangle ABQ$, o ângulo $\angle ABQ$ é igual a $2\angle QAB$. Daqui resulta que, no triângulo $\triangle ABC$, se tem $\angle B = 3\angle A$.

O argumento geométrico anterior pode repetir-se para os outros valores de n . Designemos por $F_n(a, b, c) = 0$ a relação entre os lados, com comprimentos a, b e c , de um triângulo $\triangle ABC$ em que $\angle B = n\angle A$. Então, uma vez obtidas as expressões de F_j para $1 \leq j \leq 4$, a fórmula de recorrência que resulta deste processo indutivo é, para todo o natural $n \geq 4$, dada por

$$F_{n+1}(a, b, c) := \left(b^2 - a^2 + c^2\right) F_{n-1}(a, b, c) - b^2 c^2 F_{n-3}(a, b, c).$$

Reciprocamente, se $b > a$ e $F_n(a, b, c) = 0$, então $\angle B = n\angle A$.

Fixado $\mathcal{P} > 0$, na família de todos os triângulos com perímetro \mathcal{P} , há um que se destaca: o equilátero com esse perímetro, por ser aquele que engloba maior área. Para $n \geq 1$, designemos por \mathfrak{T}_n o conjunto de triângulos $\triangle ABC$ tais que $\angle B = n\angle A$. Quando $n \geq 2$, o triângulo equilátero não pertence a \mathfrak{T}_n , e até só há dois triângulos isósceles neste conjunto: um com ângulos $\frac{\pi}{n+2}, \frac{n\pi}{n+2}, \frac{\pi}{n+2}$ e outro de ângulos $\frac{\pi}{2n+1}, \frac{n\pi}{2n+1}, \frac{n\pi}{2n+1}$. Qual é a solução, se existe, do problema isoperimétrico em \mathfrak{T}_n ? Pela Lei dos Senos, em \mathfrak{T}_n a área de um triângulo com perímetro \mathcal{P} é dada por

$$\mathcal{A}(\angle A) = \frac{\mathcal{P}^2}{2} \frac{\sin(\angle A) \sin(n\angle A) \sin((n+1)\angle A)}{[\sin(\angle A) + \sin(n\angle A) + \sin((n+1)\angle A)]^2}$$

onde $\angle A \in]0, \frac{\pi}{n+1}[$. Observe-se que os pontos críticos de \mathcal{A} não dependem do valor de \mathcal{P} e que o denominador de \mathcal{A} é positivo em $]0, \frac{\pi}{n+1}[$. Além disso, $\sin((n+1)\frac{\pi}{n+1}) = 0$ e $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}(\alpha) = 0$, e portanto a função \mathcal{A} estende-se continuamente a $[0, \frac{\pi}{n+1}]$ se definirmos $\mathcal{A}(\frac{\pi}{n+1}) = \mathcal{A}(0) = 0$, embora estes casos extremos correspondam a triângulos degenerados. Sendo \mathcal{A} contínua e valendo 0 nos extremos do domínio, tem máximo global atingido no interior do intervalo $[0, \frac{\pi}{n+1}]$. Com a página de *webMathematica* [1], podemos desenhar os gráficos da função área e da respetiva derivada para algumas escolhas de n . Por exemplo, para $n = 2$, eles permitem-nos prever que só um

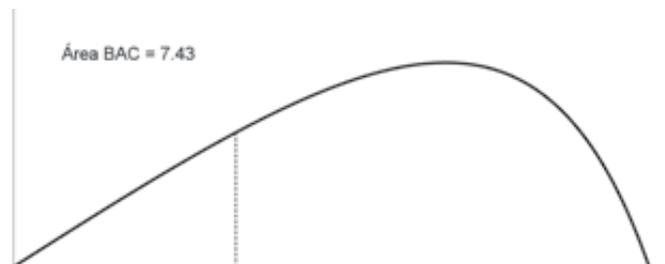


Figura 4

triângulo maximiza a área e que não é isósceles: tem ângulo $\angle A \sim 41$ graus, valor que, em radianos, se situa estritamente entre $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{\pi}{4}$. Para o confirmar, é mais simples usar a fórmula de Héron [3] que exprime \mathcal{A} em função dos comprimentos dos lados e do perímetro fixado \mathcal{P} , e utilizar multiplicadores de Lagrange, beneficiando da caracterização $F_2 = 0$ descrita anteriormente.

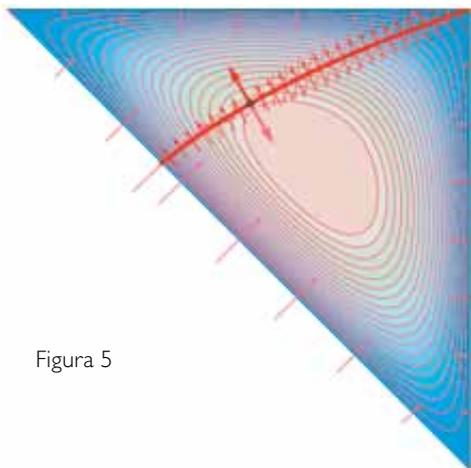


Figura 5

Fixado \mathcal{P} , queremos maximizar a função $A(a, b) = \sqrt{S(S-a)(S-b)(a+b-S)}$, onde $S = \frac{\mathcal{P}}{2}$, no conjunto $\{(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2 : g(a, b) = b^2 - 2aS + ab = 0\}$. Como as duas componentes do gradiente de g , isto é $\frac{\partial g}{\partial a} = -2S + b$ e $\frac{\partial g}{\partial b} = 2b + a$ não se anulam em \mathfrak{T}_2 basta encontrar os elementos (a, b) onde os gradientes de $f = \frac{A^2}{S}$ e de g são colineares. Esta dependência linear dos gradientes significa que o triângulo de área máxima que procuramos corresponde a um ponto de tangência de uma curva de nível de f com a curva de nível $g \equiv 0$.

Analisemos o sistema de equações $\nabla f = \lambda \nabla g$, com três incógnitas, a, b e λ , sujeito à restrição $g \equiv 0$:

$$\begin{pmatrix} (S-b)(2S-2a-b) \\ (S-a)(2S-2b-a) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial a} \\ \frac{\partial g}{\partial b} \end{pmatrix}$$

$$g(a, b) = 0.$$

Como, pela desigualdade triangular, temos $S = \frac{a+b+c}{2} > \frac{a+a}{2} = a$ e, analogamente, $S > b$, das duas primeiras equações podemos desde já concluir que $2S - 2a - b = 0$ se e só se $2S - 2b - a = 0$, uma vez que os coeficientes de λ não se anulam. Mas o triângulo equilátero

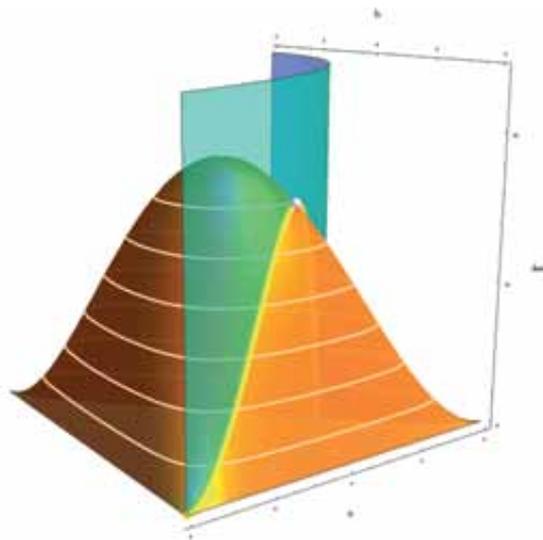


Figura 6

(correspondente a $2S - 2a - b = 0 = 2S - 2b - a = 0$) não pertence a \mathfrak{T}_2 . Logo nenhuma das alternativas $2S - 2a - b$ ou $2S - 2b - a = 0$, que descrevem, em separado, os triângulos isósceles de \mathfrak{T}_2 , serve para maximizar a área. O sistema tem uma única solução, sendo $\lambda = \frac{(S-a)(2S-2b-a)}{2b+a}$ e (a, b) o par que satisfaz as equações

$$\frac{(S-b)(2S-2a-b)}{-2S+b} = \frac{(S-a)(2S-2b-a)}{2b+a}$$

e

$$b^2 - 2aS + ab = 0.$$

No endereço http://www.atractor.pt/mat/triang_multis estão vários *applets* que permitem, variando \mathcal{P} ou n , conjecturar sobre a resposta no caso geral, além de uma versão mais detalhada deste texto.

REFERÊNCIAS

- [1] Atractor, “webMathematica no Atractor”, *Gazeta de Matemática* 155 (2008) 3-4.
- [2] L. Euler, “Proprietates triangulorum, quorum anguli certam inter se rationem tenent”, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Vol. XI 1765, (1767) 67–102.
- [3] I. Niven, “Maxima and Minima without Calculus”, *Dolciani Mathematical Expositions* 6, MAA, 1981.

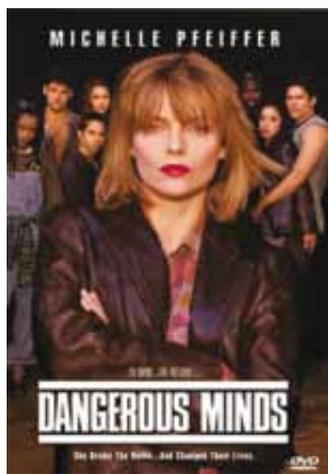
¹ Problema proposto, em 1968, nas Olimpíadas Internacionais de Matemática.



JORGE NUNO SILVA
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

OUTROS HERÓIS OLÍMPICOS: OS PROBLEMAS!

Um Convite à Matemática: das Competições à Investigação é o título de um livro recente da Springer. Nele vários autores mostram como alguns problemas das Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) conduzem naturalmente a problemas de investigação, necessariamente com outro nível de complexidade e profundidade. Escolhemos os problemas iniciais de Simon Norton, Stanislav Smirnov e Béla Bollobás pela simplicidade dos respectivos enunciados.



Michelle Pfeiffer no papel de professora.

O problema inicial apresentado por Norton conduz rapidamente a uma viagem por várias áreas da matemática pura. Contudo, tudo se passa numa turma de uma escolinha...

Problema 1: *Uma professora tem a seu cargo uma turma. Ela quer escolher dois estudantes à sorte e reparou que a probabilidade de serem do mesmo sexo é de 50%.*

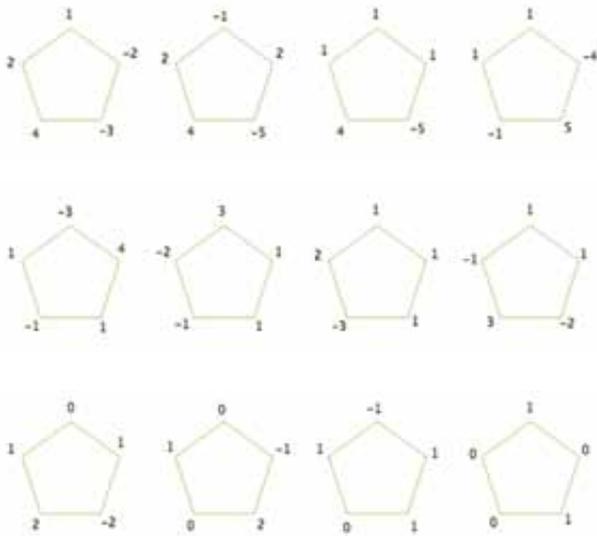
Quantos estudantes tem a turma e quantos são de cada sexo?

A generalização para o caso em que há três sexos em vez de dois é o próximo passo... Mas passemos ao problema de Smirnov. Trata-se de um problema da IMO de 1986, proposto por Elias Wegert.

Problema 2. A cada um dos cinco vértices de um pentágono regular faz-se corresponder um número inteiro, de maneira a que a soma dos cinco números seja positiva.

Se os números de três vértices consecutivos forem x , y e z em que $y < 0$, podemos substituí-los, respetivamente, pelos números $x+y$, $-y$ e $z+y$. Esta operação é repetida enquanto existir pelo menos um vértice com um número negativo.

Será que este processo é sempre finito?



Um exemplo a partir dos números 1, -2, -3, 4, 2.
Após onze passos, o processo termina.

O problema de Bollobás é dinâmico, trata-se de uma instância da caça ao cristão...

Problema 3. Imaginemos um circo romano circular com um leão e um cristão capazes de correr à mesma velocidade. Admitamos que o leão quer comer o cristão, e que este pretende sobreviver.

O que deve cada um deles fazer para atingir o seu objectivo? O leão apanha necessariamente o cristão?

Para simplificar, sem alterar a essência da questão, imaginemos que o leão está no centro da arena, que é um disco circular fechado, e que o cristão está noutro ponto

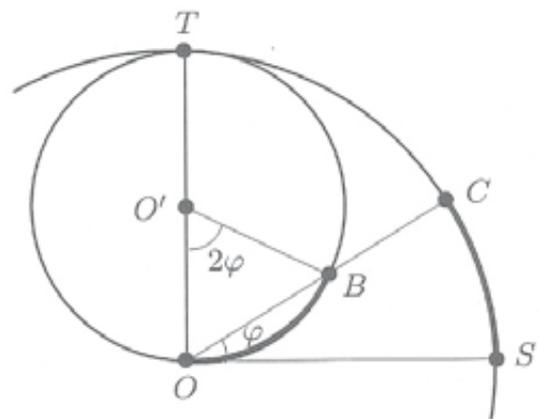
qualquer. Uma possibilidade natural para o cristão é deslocar-se rapidamente para a circunferência circundante e dar à sola. . .



O cristão corre pela periferia e . . . sobrevive. S é a posição do cristão após uma volta, T a do leão.

Se o leão optar por se deslocar sempre à velocidade máxima em direção do cristão, este salva-se, porque a circunferência é assíntota da curva traçada pelo leão, mas nunca se tocam. . .

Acontece que se o leão decidir perseguir o cristão a velocidade máxima, mas sempre sobre o raio que une o centro à posição do cristão, então caça-o rapidamente! Este dá um quarto de volta e é surpreendido pelo felino.



O cristão corre pela periferia e . . . morre. S é a posição inicial do cristão, B a posição típica do leão. Chegam a T ao mesmo tempo.

Em que ficamos? Quem ganha, e como, este jogo de vida ou de morte?



AMÍLCAR BRANQUINHO
Universidade de
Coimbra
ajplb@mat.uc.pt

UMA DESIGUALDADE FUNDAMENTAL

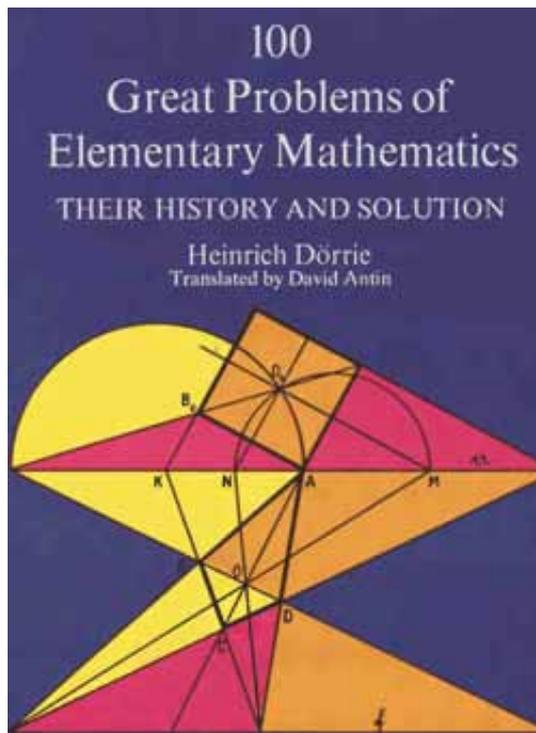
Caro Leitor,

Numa altura em que muitos acreditam que o conhecimento está na *nuvem* e que o ruído e as informações contraditórias imperam, pensamos ser fundamental a matematização na sociedade.

A Matemática é uma exploração de certas estruturas omnipresentes e mais ou menos complexas que se nos apresentam e que admitem uma análise racional, manipulável mediante símbolos, colocando nas nossas mãos um certo domínio da realidade. A nossa mente necessita de interpretar racionalmente, o melhor que lhe for possível, as realidades e os factos. Disto se nutre o matemático no seu trabalho diário.

Ao nos sentirmos, como matemáticos, próximos dos nossos antecessores (o que acontece, acreditamos nós, mais do que com qualquer outra ciência), temos a responsabilidade de apresentar a matemática aos mais jovens, para além das técnicas, mostrando-lhes a sua história, incentivando o conhecimento e a leitura de obras fundamentais, e explicando-lhes a responsabilidade e a importância que implica o saber matemática na sociedade e no tempo em que vivemos.

Não nos podemos esquecer que há uma ligação estreita entre as necessidades educativas e a conveniência em dialogar com a sociedade, enculturando-a em assuntos de matemática. Numa altura em que muitos acreditam que o conhecimento está na *nuvem* e em que o ruído e as informações contraditórias imperam, pensamos ser fundamental a matematização da sociedade.



100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solutions, Dover, 1965.

Neste livro inspirador, Heinrich Dörrie recolhe problemas célebres de matemática elementar, analisando a sua origem e, acima de tudo, apresentando a sua solução de forma clara e compreensiva.

A restrição a problemas de matemática elementar foi considerada, por Dörrie, aconselhável tendo em vista os leitores que não têm o tempo nem a oportunidade de se familiarizar com os detalhes de matemática superior.

Desta forma, é possível dar uma ideia da incrível variedade de métodos, técnicas e pensamentos matemáticos, fundamentais a quem queira iniciar-se nesta ciência. Neste livro encontramos pérolas de arte matemática da autoria de Cauchy, Euler, Gauss, Pedro Nunes, Steiner e tantos outros.

Um dos propósitos de Dörrie, com este livro, é o de captivar jovens para o estudo desta ciência tão perfeita, a matemática.

Ao apresentar alguns dos problemas reunidos no livro queremos, imbuídos do espírito do seu autor, popularizar o interesse e o prazer no pensamento matemático, que é uma das ideias-chave do Projecto Delfos.

O tema que passamos a expor serviu de base a uma sessão para alunos do Projecto Delfos designada “O Oráculo”, e nele aparecem números, funções, extremos de funções. . .

Teorema da média de Cauchy. Augustin Louis Cauchy (1789-1857) foi um dos maiores matemáticos franceses, que em 1821 no seu *Cours d'Analyse* apresentou o teorema sobre a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica que será, como veremos, o ponto de partida para o estudo que aqui vamos apresentar.

A prova do teorema que a seguir daremos baseia-se na solução do *problema* fundamental: *Quando é que o produto de n números reais positivos de soma constante atinge o seu valor máximo?*

Consideremos n números a, b, c, \dots , de soma constante K , e de produto P . Por experimentação podemos inferir que o produto P atinge o seu valor máximo quando os números a, b, c, \dots possuem o mesmo valor $M = K/n$.

Para determinar a precisão desta hipótese, usamos o **Teorema Auxiliar**: *Dados dois pares de números de igual soma, o que possui o maior produto é aquele cujos números exibem a menor diferença.*

De facto, considerando os pares de números reais (X, Y) e (x, y) , com $X + Y = x + y$, o teorema auxiliar segue a partir das identidades $4XY = (X + Y)^2 - (X - Y)^2$ e $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$.

Por aplicação reiterada do teorema auxiliar, obtemos que $P \leq M^n$, tendo-se igualdade se, e somente se,

$$a = b = c = \dots = M/n.$$

Podemos então enunciar o seguinte **Teorema**: *O produto de n números reais positivos cuja soma é constante atinge o seu valor máximo, quando os números são todos iguais.*

Extraindo a raiz n -ésima na última desigualdade entre P e M , obtemos o *teorema* da média aritmética e geométrica, conhecido como **desigualdade de Cauchy**: *Sejam a, b, c, \dots , n números reais positivos, então*

$$\sqrt[n]{abc \dots} \leq \frac{a + b + c + \dots}{n}, \quad (1)$$

tendo-se igualdade somente quando, $a = b = c = \dots$.

Este teorema de Cauchy leva-nos diretamente a um **problema extremal análogo**: *A soma de n números positivos cujo produto é constante atinge o seu valor mínimo quando os números são todos iguais.*

De facto, denotando estes n números por x, y, z, \dots , o seu produto por k , a função soma por s , e a raiz de índice n de k por m , obtemos, tendo em atenção, a desigualdade de Cauchy, $s \geq nm$, com igualdade somente quando $x = y = z = \dots$.

Desigualdade fundamental. A desigualdade de Cauchy leva-nos também a uma nova desigualdade,

$$\sqrt[m]{a^n} \leq 1 + n(a - 1)/m, \quad (2)$$

válida para todo os inteiros positivos n, m com $n \leq m$ e todo o número real positivo a , com igualdade somente quando $a = 1$.

De facto, basta considerar a desigualdade (1) para o conjunto de m números reais positivos constituído por, n de valor a e $m - n$ de valor 1.

A desigualdade (2) pode ser estendida da seguinte forma,

$$x^\varepsilon \leq 1 + \varepsilon(x - 1), \quad \varepsilon \in]0, 1[, \quad x \in]0, +\infty[, \quad (3)$$

com igualdade somente se, $x=1$.

Número de Euler, e . O número e foi introduzido por Leonhard Euler (1707-1783) em meados do século XVIII. À primeira vista a sua definição pode parecer misteriosa, pois surge como solução do *problema* da existência de limite quando $x \rightarrow +\infty$ das funções definidas em \mathbb{R}^+ com expressão analítica

$$\varphi(x) = (1 + 1/x)^x \text{ e } \Phi(x) = (1 + 1/x)^{x+1}.$$

Partindo da desigualdade (3), vamos conseguir analisar este problema. De facto, sejam a, b dois números reais positivos com $a > b$. Tomando $x = 1 + 1/b$ e $\varepsilon = b/a$ em (3), obtemos

$$(1 + 1/b)^b < (1 + 1/a)^a,$$

e portando φ é uma função crescente. Da mesma forma se prova que Φ é decrescente, para tal basta considerar a desigualdade (3) com $x = 1 - 1/(b+1)$ e $\varepsilon = (b+1)/(a+1)$.

Assim, para $X > x$, e como $\Phi(x) = (1 + 1/x)\varphi(x)$, temos que $\varphi(x) < \varphi(X) < \Phi(X)$ e $\varphi(X) < \Phi(X) < \Phi(x)$.

Considere-se agora dois pontos, p e P em \mathbb{R}^+ que se situam à distância $\varphi(t)$ e $\Phi(t)$ da origem no momento t , e começam o seu movimento no instante $t=1$. O ponto p começa em $\varphi(1) = 2$ e desloca-se continuamente para a direita, e o ponto P , que começa em $\Phi(1) = 4$, desloca-se continuamente para a esquerda.

A distância entre os pontos p, P é dada por

$$d = \Phi(t) - \varphi(t) = \varphi(t)/t$$

e, portanto, $0 < d < 4/t$, logo o limite quando $t \rightarrow +\infty$ de d é 0.

Agora, como φ é uma função monótona e limitada, inferiormente por $\varphi(1) = 2$ e superiormente por $\Phi(1) = 4$, temos que existe o limite quando $t \rightarrow +\infty$ de $\varphi(t)$. Da mesma forma concluímos que existe o limite quando $t \rightarrow +\infty$ de $\Phi(t)$. Das considerações anteriores concluímos que estes limites coincidem. O valor comum destes limites designamos *número de Euler, e* .

Função exponencial e uma desigualdade exponencial.

Acabámos de ver que o número de Euler, e , é tal que

$$(1 + 1/x)^x < e < (1 + 1/x)^{x+1}, x \in \mathbb{R}^+.$$

Tomando $x = 10^6$, obtemos $e = 2,71828\dots$

Da primeira destas desigualdades, $(1 + 1/x)^x < e$, tomando $x = 1/P$, onde P é um qualquer número real positivo, obtemos

$$e^P > 1 + P, P \in \mathbb{R}^+.$$

Da segunda desigualdade, substituindo $x + 1$ por $-1/n$, i.e. $1 + 1/x = 1/(1 + n)$, onde n é um qualquer número real em $[-1, 0[$, obtemos

$$e^n > 1 + n, n \in [-1, 0[.$$

Tomando na segunda desigualdade $x + 1 = -1/N$ com N um qualquer número real em $] -\infty, -1[$, obtemos também $e^N > 1 + N$ pois $1 + N < 0$.

Em conclusão, temos a seguinte desigualdade exponencial

$$e^x \geq 1 + x, x \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

tendo-se igualdade somente quando, $x = 0$.

Sejam agora $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R}^+$ tais que $1 \pm x/n > 0$. Tendo em atenção a desigualdade (4) temos

$$e^{x/n} > 1 + x/n \text{ e } e^{-x/n} > 1 - x/n.$$

Da primeira desigualdade, obtemos $e^x > (1 + x/n)^n$ e da segunda, obtemos, depois de multiplicar por, $1 + x/n$, $(1 + x/n)^n e^{-x} > (1 - (x/n)^2)^n$.

Agora da desigualdade (3), temos que

$$(1 - (x/n)^2)^n > 1 - x^2/n$$

e, portanto, a segunda desigualdade pode escrever-se como

$$(1 + x/n)^n > (1 - x^2/n) e^x,$$

que combinada com a primeira, nos dá

$$(1 - x^2/n) e^x < (1 + x/n)^n < e^x.$$

Concluimos assim que o limite quando $n \rightarrow +\infty$ de $(1 + x/n)^n$ é e^x , $x \in \mathbb{R}$.

Problema de Steiner sobre o número de Euler. O seguinte problema foi proposto por Jacob Steiner (1796-1863) no *Crelle's Journal*, vol. XL: *Determinar o máximo da função $\sqrt[n]{x}$ em \mathbb{R}^+* .

Da desigualdade para funções exponenciais, obtemos $e^{(x-e)/e} \geq 1 + (x-e)/e = x/e$, tendo-se igualdade somente quando, $x = e$. Esta desigualdade lê-se, depois de algumas simplificações, como $\sqrt[n]{e} \geq \sqrt[n]{x}$.

Assim, o problema de Steiner tem como resposta o número de Euler.



FABIO CHALUB
 Universidade Nova
 de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

5 SIGMAS DE CERTEZA

A confirmação experimental da existência do bóson de Higgs foi uma das grandes conquistas da física contemporânea. O seu anúncio, no entanto, foi cheio de cuidados: era uma partícula *compatível*, mas podia não ser a própria; é necessário ter a certeza de “5 sigmas”, etc. Mas o que é uma certeza de 5 sigmas? Aliás, o que é a certeza em ciências experimentais? Considerando um exemplo simples das sondagens eleitorais, vamos discutir como se pode medir o grau de confiança de um enunciado científico, seja em ciências humanas ou mesmos nos experimentos mais precisos do mundo, como os realizados no Centro Europeu de Investigação Nuclear (o famoso CERN, na fronteira franco-suíça).

Imagine um país em que a população se divide politicamente em dois grupos exatamente do mesmo tamanho: enquanto metade da população apoia o partido PX, um grupo de precisamente o mesmo tamanho apoia o partido PY. No entanto, isto não é sabido. A fratura na sociedade só será revelada ao mundo no dia das eleições. Enquanto a votação não chega, sondagens são feitas. O método consiste em escolher um pequeno número de eleitores e a partir das suas intenções de voto tentar inferir o resultado das urnas.

Vamos supor que dez cidadãos foram escolhidos de forma aleatória para participar numa sondagem: Alice, Bernardo, Cátia, David, Elisa, Filipe, Germana, Hugo e Joana. Também para simplificar nossas contas, vamos supor que ninguém evita revelar o seu voto, que sempre é num dos dois concorrentes, o Governo — PX — ou a oposição, PY.

Vamos quantificar todas as possibilidades, escrevendo em maiúsculas os eleitores de PX e em minúscula os de PY. Há apenas uma maneira de todos votarem em PX: ABCDEFGHIJ, ou seja, os dez querem reconduzir o Governo. Há uma probabilidade de $1/2$ de cada componente da amostra ser gover-

nista, pois a sociedade está dividida em duas partes iguais; logo há uma probabilidade de $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$ do resultado da sondagem ser 10-0, ou seja 10 votos no Governo e 0 na oposição.

Aumentam as possibilidades quando consideramos uma amostra de 9 governistas e um oposicionista entre 10 eleitores: aBCDEFGHIJ, AbCDEFGHIJ, ABcDEFGHIJ, . . . , ABCDEFGHIj. São exatamente dez configurações possíveis, e como cada uma tem uma probabilidade de $\frac{1}{1024}$, então há uma probabilidade de $\frac{10}{1024}$ do resultado da sondagem ser 9-1. Obter o caso geral não é difícil. O número de combinações de n eleitores de PX num conjunto de 10 eleitores é dado por

$$C_n^{10} = \frac{10!}{n!(10-n)!},$$

onde $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ é o fatorial de n . Levando em consideração as probabilidades, temos que numa população dividida politicamente meio a meio, a probabilidade de numa sondagem com 10 eleitores, n serem governistas é dada por

$$\frac{10!}{n!(10-n)!2^{10}}.$$

Veja a tabela 1 para as várias probabilidades (medidas em percentagens) para sondagens com 10 e 100 eleitores. A partir deste número poderíamos calcular médias, desvios-padrão e tudo mais (o desvio padrão é o intervalo típico – que precisaremos melhor abaixo – que os experimentos se desviam do valor esperado, ou seja, da média). No entanto, como devem lembrar das primeiras linhas, nós não sabemos que a sociedade se dividiu em dois, portanto nós não temos as probabilidades acima à disposição.

Abstraindo o exemplo para o caso das ciências experimentais, temos algumas observações (que no exemplo acima é o resultado da sondagem) e queremos saber o quanto é confiável extrapolar o resultado para o conjunto completo não observado (sejam experiências que não foram feitas, mas poderiam ter sido, seja o conjunto completo da população que não foi inquirido na sondagem). Para isto, formulamos o que é conhecido como *hipótese nula* que no nosso exemplo pode ser escrita: “a sociedade divide-se igualmente, em relação à sua intenção de voto, entre os partidos PX e PY”, e calculamos a probabilidade de que, na validade desta hipótese, o resultado da sondagem seja exatamente igual aquele registado ou mesmo ainda mais extremo. Suponha, por exemplo, que na sondagem com apenas 10 eleitores, encontramos uma divisão de 7-3. Então, sob a hipótese nula, a possibilidade de termos este resultado ou um ainda mais extremo (8-2, 9-1, ou 10-0) é de

$$\frac{1}{2^{10}} \left(\frac{10!}{7!3!} + \frac{10!}{8!2!} + \frac{10!}{9!1!} + \frac{10!}{10!0!} \right) = \frac{176}{1024} \approx 17.2\%.$$

Portanto existe uma probabilidade de 17.2% de, numa sociedade dividida igualmente pelos dois partidos, por razões puramente aleatórias na escolha de uma amostra de eleitores, uma sondagem com 10 pessoas resultar em 7 ou mais votantes no partido do Governo. Pior ainda, há uma probabilidade de 34.4% de uma sondagem com 10 pessoas apresentar 7 apoiantes de um dos dois partidos, mesmo quando a sociedade como um todo está dividida em grupos partidários de mesmo tamanho.

A conclusão é que a sondagem acima não nos permite deduzir que o PX será o vencedor, pois com alta probabilidade este resultado pode ter sido obtido apenas pelas flutuações estatísticas da escolha da amostra. Se fizermos uma sondagem com 100 pessoas e tivermos um resultado de 70-30, as conclusões são diferentes, apesar de todos os números serem uma simples multiplicação por 10 da sondagem restrita anterior.

PX	Probabilidades (10 eleitores, em %)	Probabilidades (100 eleitores, em %)
0-5%	0.098	10^{-20}
6-15%	0.98	10^{-11}
16-25%	4.4	10^{-5}
26-35%	12	0.18
36-45%	21	18
46-55%	25	68
56-65%	21	13
66-75%	12	0.090
76-85%	4.4	10^{-5}
86-95%	0.98	10^{-12}
96-100%	0.098	10^{-22}

Tabela 1: Na hipótese nula de uma sociedade dividida em grupos iguais, estas são as probabilidades, numa sondagem com 10 eleitores (centro) e com 100 eleitores (direita), de os vários resultados possíveis medidos em percentagem de apoiantes do partido PX. Note como aumenta a probabilidade de a sondagem capturar o resultado correto. (A soma de cada coluna difere de 100% devido aos arredondamentos.)

Em particular:

$$\frac{1}{2^{100}} \sum_{70}^{100} \frac{100!}{n!(100-n)!} = \frac{49756171168061176633478360}{1267650600228229401496703205376} \approx 0.003925069823\%$$

Portanto, a veracidade da hipótese nula é compatível com o resultado da sondagem ou um resultado mais extremo em menos do que 0.01% dos casos. Podemos então rejeitar a hipótese nula e supor que a sociedade não está dividida em dois, concluindo uma provável vitória do partido PX. É importante notar que nenhum dos números discutidos acima fornece a probabilidade de vitória de PX nem a probabilidade de a hipótese nula ser verdadeira. De facto, chamamos ao complementar destes números “nível de confiança”, no primeiro caso de $100\% - 34.4\% = 65.6\%$ e no segundo caso de 99.99% .

Há, evidentemente, um conceito mal definido. Qual o número mágico que nos permite ter uma razoável certeza de que podemos rejeitar a hipótese nula? Não há resposta única. Nas sondagens eleitorais, assim como em grande parte do trabalho das ciências humanas e sociais, este valor é fixado

em 5%. Por exemplo, se fizermos experimentos com seres humanos, ou mesmo com ratinhos, para medir se em dadas circunstâncias eles fazem *isto* ou *aquilo*, é costume considerar como hipótese nula que o seu comportamento é aleatório e ver qual a probabilidade de a hipótese nula reproduzir os dados observados ou mais extremos. Se esta for inferior a 5%, dizemos que a mesma foi rejeitada e temos uma conclusão a mostrar ao mundo. Caso contrário, nada afirmamos.

As ciências físicas costumam ter um padrão muito mais rigoroso. Aqui entram os tais 5σ (diz-se “cinco sigmas”) de que tanto se falou nos experimentos do bóson de Higgs [1]. A hipótese nula é algo como “não há partícula de massa entre 125 GeV e 126 GeV no experimento” (o giga-eletrão-volt ou GeV é uma unidade de energia frequentemente usada em física de partículas como medida de massa – lembre-se da relação entre massa e energia antevista por Einstein; os valores usados decorrem de experimentos preliminares que indicaram que se o bóson de Higgs existisse, teria massa num certo intervalo e da afinação destes valores-limites pelo próprio experimento). Finalmente temos de considerar que os dados experimentais podem ser decorrentes da existência de um bóson na faixa procurada ou resultado apenas de movimentos aleatórios de outras partículas que por puro acaso geraram nos aceleradores do CERN o mesmo padrão previsto pelo físico irlandês.

Voltemos ao nosso exemplo, o das sondagens eleitorais. Uma boa estimativa é que as várias combinações possíveis C_k^n podem ser aproximadas pelas distribuições normais quando a população e as amostras são grandes. Esta é uma função caracterizada por dois parâmetros (a média μ e o desvio padrão σ) e dada explicitamente por

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Esta expressão é conhecida como “gaussiana”. A figura 1 mostra o gráfico desta função, e também ilustra o facto de que σ mede o grau de dispersão em torno da média μ . Na figura 2 vemos como os dados experimentais estão próximos do que seria de esperar sem um bóson com massa x , exceto quando x é próximo a 126 GeV.

A probabilidade de termos um resultado que se desvie da média de um valor igual ou superior a 5σ é o integral da gaussiana entre $-\infty$ e $\mu - 5\sigma$ somado ao integral entre $\mu + 5\sigma$ e $+\infty$. Isto dá menos de 10^{-6} . Quando um físico de partícu-

las afirma que uma partícula existe ele quer dizer que a probabilidade de ele ter observado um determinado valor (ou ainda, um valor mais extremo) nos seus experimentos sem que a partícula existisse era inferior a um em um milhão. É devido a este rigor na produção de enunciados que podemos acreditar mais na equipa do CERN do que nas sondagens em véspera de escrutínio eleitoral!

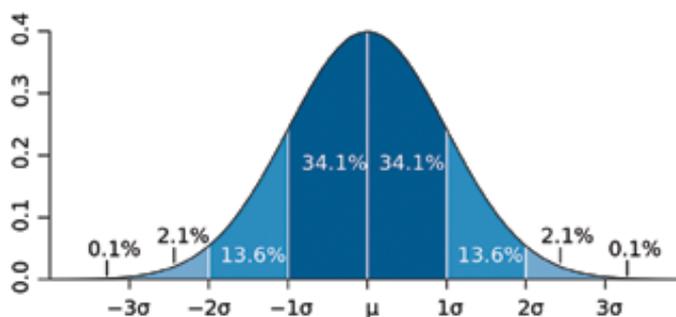


Figura 1: Distribuição normal e probabilidades. Se exigirmos uma precisão de 1σ , então o nível de confiança na rejeição da hipótese nula é de $100\% - 2 \times 34.1\% = 31.8\%$; o 5σ não é mostrado no gráfico. Fonte:Wikipedia.

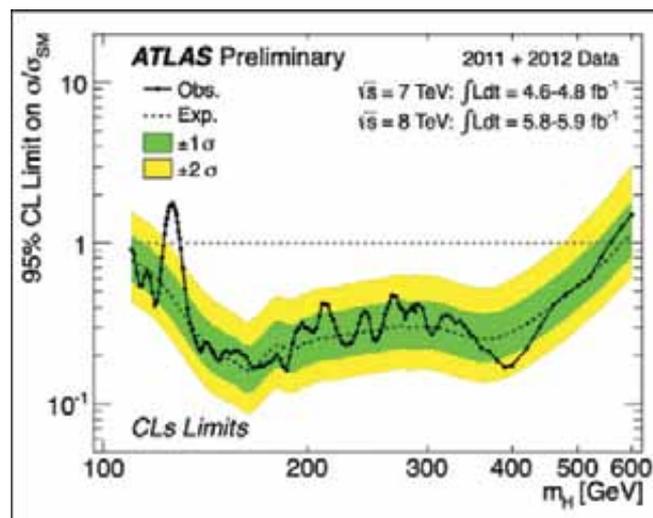


Figura 3: Resultados do experimento Atlas. Na maior parte das energias estudadas o resultado observado pode ser considerado consequência de flutuações aleatórias, exceto próximo aos 126 GeV, onde o desvio chega a 5σ tornando altamente improvável obter estes dados na ausência de um bóson com esta massa aproximada. Fonte:ATLAS Experiment ©2012 CERN

REFERÊNCIA

[1] "Últimos Resultados da Experiência ATLAS na Procura pelo Higgs". Comunicado de imprensa do experimento ATLAS no CERN, disponível em <http://www.atlas.ch/news/2012/HiggsStatementATLAS-PortuguesePortugal.pdf>.



A Projeção Estereográfica e o Astrolábio

ALEXANDRE MENA E SILVA

UNIVERSIDADE DO PORTO

ammsilva@gmail.com

Se de repente acordássemos num local deserto, sem relógio nem telemóvel, sem sistema de navegação eletrónico à nossa mão e sem ninguém por perto para nos indicar o caminho de volta para casa, o que faríamos numa situação extrema como esta? Teríamos de regressar ao passado e voltar a aprender a olhar as estrelas e a orientarmo-nos por elas. Saber um pouco de projeção estereográfica e ter um astrolábio no bolso poderia também ser muito útil nesta situação.

Em matemática, projetar é o ato que consiste em representar um determinado objeto num plano, denominado plano da projeção. Para fazer uma projeção é necessário escolher um ponto qualquer do espaço para origem da projeção e, a partir desse ponto, fazer passar várias semirretas através do objeto em questão, de forma a que todos os seus pontos pertençam a uma semirreta. Essas semirretas interseitam o plano da projeção num conjunto que constitui a projeção do objeto dado.

Há muitas formas de projetar um objeto no plano, mas existe uma muito particular que, pelas suas propriedades, é muito usada em astronomia, por exemplo. Trata-se da projeção estereográfica, que permite representar num plano figuras que estão sobre a superfície de uma esfera. Escolhe-se um ponto qualquer da esfera para origem da projeção e considera-se como plano da projeção o plano tangente à esfera no ponto diametralmente oposto ao da origem da projeção. No entanto, não é necessário que o plano da projeção seja tangente à esfera: qualquer outro plano que lhe seja paralelo e não passe pela origem da projeção pode desempenhar esse papel, pois com uma qualquer escolha deste tipo as principais propriedades da projeção estereográfica mantêm-se. Entre estas propriedades, consideraremos três muito particulares, que a tornam única em relação às outras formas de projetar. A primeira propriedade da projeção estereográfica estabelece que qualquer círculo inscrito na esfera se projeta como um círculo

(se não passar pela origem da projeção) ou como uma reta (se passar pela origem da projeção). A segunda propriedade consiste no fato de que os ângulos entre curvas da superfície esférica são preservados quando essas mesmas curvas são projetadas estereograficamente no plano. A terceira propriedade desta projeção diz que se rodarmos a esfera ao longo do diâmetro que contém a origem da projeção, a projeção dos objetos da superfície esférica também roda em torno do ponto de interseção desse diâmetro com o plano da projeção seguindo o mesmo ângulo de rotação.

Este artigo está dividido em três secções. Na primeira, que foi organizada tendo em conta o material exposto em [1],[2],[3] e [9], serão apresentadas a definição de projeção estereográfica e as demonstrações das três propriedades referidas no parágrafo anterior. Na segunda secção, seguindo [1], será feito um breve apontamento histórico da projeção estereográfica e na terceira e última secção falar-se-á das aplicações desta projeção à astronomia, mais propriamente ao astrolábio. A exposição desta secção segue o que foi apresentado em [9].

PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA: DEFINIÇÃO E PRINCIPAIS PROPRIEDADES

Sejam S e α um ponto qualquer da superfície de uma esfera e um plano tangente à esfera no ponto diametralmente a S , ou seja, S' , respetivamente. A projeção estereográfica de um ponto $P \neq S$ pertencente à esfera é o ponto P' que resulta da interseção da reta SP com o plano α .

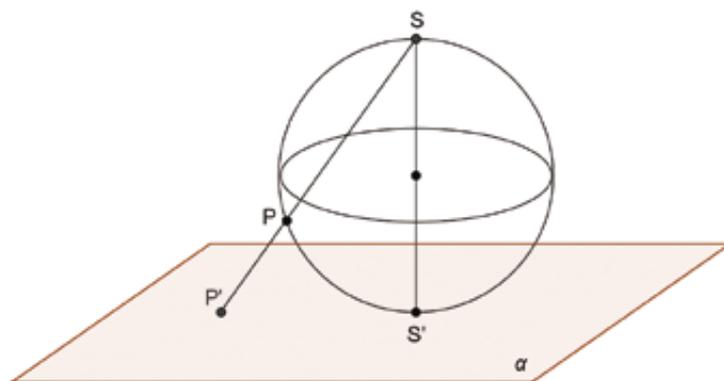


Figura 1: Definição de projeção estereográfica

A projeção estereográfica, como já foi referido anteriormente, é dotada de três propriedades que a tornam peculiar e útil na medida em que tem aplicações em variadas áreas do conhecimento como, por exemplo, em astronomia. Apresentamo-las de seguida dividindo a primeira propriedade em duas partes (*A* e *B*) para facilitar a exposição.

- ▶ **Propriedade A:** Círculos na superfície esférica que passem pela origem (ponto *S*) projetam-se como retas no plano (α);
- ▶ **Propriedade B:** Círculos na superfície esférica que não passem pela origem são projetados como círculos no plano;
- ▶ **Propriedade C:** Ângulos entre curvas da superfície esférica são preservados quando essas mesmas curvas são projetadas no plano.
- ▶ **Propriedade D:** Quando a esfera roda em torno do eixo SS' , os objetos projetados no plano α vão também sofrer uma rotação de centro em S' com a mesma amplitude.

É fácil de verificar que a propriedade *A* é verdadeira. Basta para isso reparar que qualquer ponto que fique sobre um círculo que passe por *S*, digamos *C*, vai gerar um conjunto de retas (que passam por *S* e por cada um dos pontos de *C*) que pertencem ao plano definido por *C*. Como a interseção de dois planos é uma reta, a projeção do círculo *C* é a reta que resulta da interseção do plano definido por *C* com o plano α .

Para demonstrar a propriedade *B* começamos por observar que, dado um círculo *C* da superfície esférica que não passe por *S*, todas as retas da projeção que saem de *S* e passam por todos os pontos do círculo formam um cone circular com vértice em *S*. O círculo *C* pode ser obtido como secção desse cone com o próprio plano que contem *C*, e a sua projeção, *C'*, é a secção desse cone com o plano de projeção. No que se segue iremos demonstrar que *C'* é um círculo no plano de projeção provando e utilizando um resultado que identifica as secções circulares de um cone circular. Na verdade, se o círculo *C* for paralelo ao plano de projeção, o cone definido pelas retas de projeção e por *C* é um cone circular reto, e um argumento direto que utiliza semelhanças de triângulos permite concluir que *C'* é um círculo. Mas, no caso geral, esse cone é oblíquo, e os argumentos tornam-se mais elaborados.

Iniciamos então a prova de *B* enunciando um resultado auxiliar:

Lema: *Sejam M e N dois pontos de um círculo inscrito na esfera e M' e N' a projeção estereográfica de M e N respetivamente. Então $\widehat{SMN} = \widehat{S'N'M'}$ e $\widehat{SNM} = \widehat{S'M'N'}$. (ver figura 2)*

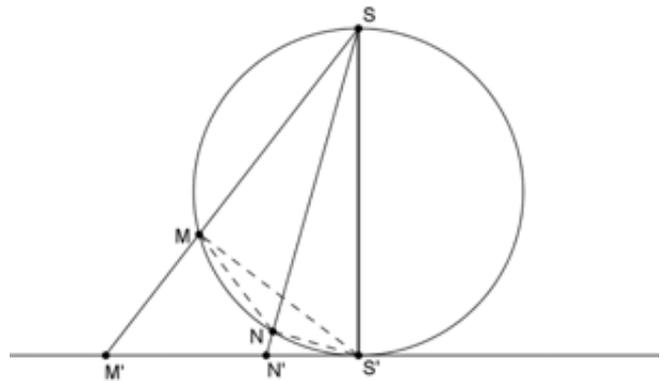


Figura 2: $\widehat{SMN} = \widehat{S'N'M'}$ e $\widehat{SNM} = \widehat{S'M'N'}$

De facto, os triângulos $[SMS']$ e $[SS'M']$ são semelhantes porque são ambos retângulos e têm o ângulo MSS' em comum logo:

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{SS'}} = \frac{\overline{SS'}}{\overline{SM'}} \Leftrightarrow \overline{SM} \times \overline{SM'} = (\overline{SS'})^2.$$

Os triângulos $[SNS']$ e $[SS'N']$ também são semelhantes por serem retângulos e terem o ângulo NSS' em comum. Logo, seguindo um raciocínio análogo ao anterior, a seguinte igualdade $\overline{SN} \times \overline{SN'} = (\overline{SS'})^2$ também é verdadeira.

Assim, $\overline{SM} \times \overline{SM'} = \overline{SN} \times \overline{SN'}$, ou seja,

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{SN'}} = \frac{\overline{SN}}{\overline{SM'}}$$

Desta última equação conclui-se que os triângulos $[SMN]$ e $[SN'M']$ são semelhantes e têm um ângulo em comum, o ângulo MSN , logo $\widehat{SMN} = \widehat{S'N'M'}$ e $\widehat{SNM} = \widehat{S'M'N'}$, que era o que se pretendia provar.

Voltando à propriedade *B*, se o círculo não passar pela origem da projeção, então podemos assumir que o plano que passa por SS' e pelo centro do círculo dado, é o plano SMN onde $[MN]$ é um diâmetro do círculo que pretendemos projetar (ver figura 2). Como já foi mencionado anteriormente, todas as retas da projeção que saem de *S* e passam por todos os pontos do círculo formam um cone circular com vértice em *S*.

Enquanto que num cone reto só é possível obter secções circulares fazendo cortes paralelos à base, num cone oblíquo (cone cujo vértice não está verticalmente oposto ao centro

da base) existem duas formas distintas de se obter secções circulares. Uma delas é, tal como no cone reto, fazendo cortes paralelos à base. Para obter a segunda forma é necessário recordar o seguinte facto: dado um círculo de diâmetro $[AB]$, se $[CD]$ for perpendicular a $[AB]$ onde C é um ponto arbitrário desse círculo, e $D \in [AB]$ (ver figura 3), então a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\overline{AD} \times \overline{DB} = \overline{CD}^2 \quad (1)$$

Reciprocamente, se a igualdade anterior for verdadeira então C pertence a um círculo de diâmetro $[AB]$.

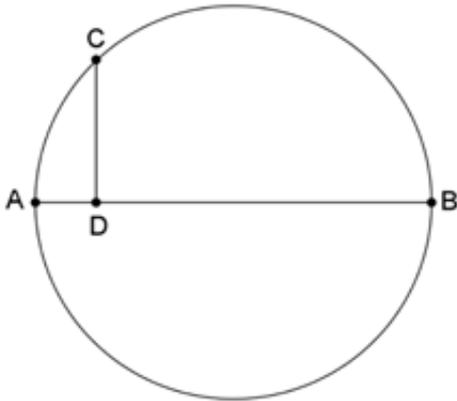


Figura 3: $\overline{AD} \times \overline{DB} = \overline{CD}^2$

Consideremos agora um cone circular oblíquo tendo o ponto A como vértice e $[BC]$ como diâmetro da base. Vamos assumir que a reta BC passa pelo pé da perpendicular do ponto A em relação à base, tal como mostra a figura 4.

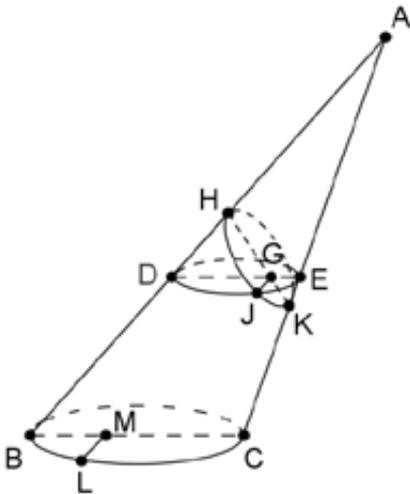


Figura 4: Cone oblíquo

De seguida, secciona-se o cone, através de um plano normal ao plano ABC , ao longo da reta HK , com H e K a pertencerem à superfície do cone, e de modo a que $A\hat{H}K = A\hat{C}B$ e $A\hat{K}H = A\hat{B}C$. A secção obtida vai ser a curva HJK .

Queremos provar que a curva HJK é um círculo e assim obter a segunda forma de seccionar um cone oblíquo de modo a obter um círculo.

Assim, considere-se um ponto qualquer J da curva HJK e um ponto qualquer L da circunferência da base do cone. Desenham-se os segmentos $[JG]$ e $[LM]$ perpendiculares ao plano ABC . Como estes dois segmentos são perpendiculares a ABC então vão ser paralelos entre si.

De seguida desenha-se o segmento $[DE]$ a passar por G e paralelo a $[BC]$ e constrói-se a secção do cone gerada pelo plano que passa por $[DE]$ e $[JG]$. Esta secção vai ser paralela à base do cone porque $[DE]$ é paralelo a $[BC]$ e $[JG]$ é paralelo a $[LM]$, logo trata-se de um círculo (círculo DJE).

Pela propriedade (1), a seguinte igualdade é verdadeira para o círculo DJE :

$$\overline{DG} \times \overline{GE} = \overline{JG}^2 \quad (2)$$

Por outro lado, como $A\hat{H}K = A\hat{C}B = A\hat{E}D$ (pois $[DE] \parallel [BC]$) e $A\hat{K}H = A\hat{B}C = A\hat{D}E$ (pela mesma razão), temos que $H\hat{D}G = E\hat{K}G$ e $D\hat{H}G = K\hat{E}G$. Destas igualdades conclui-se que os triângulos $[EGK]$ e $[HGD]$ são semelhantes.

Assim,

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{GK}} \leftrightarrow \overline{GD} \times \overline{GE} = \overline{HG} \times \overline{GK}.$$

Pela equação (2) obtemos

$$\overline{HG} \times \overline{GK} = \overline{JG}^2 \quad (3)$$

Como a equação (3) é da mesma forma da equação (1) e esta igualdade é válida para qualquer ponto da curva HJK e qualquer segmento HK , conclui-se que a curva HJK é um círculo.

Todas as secções do cone paralelas a HJK vão também ser secções circulares

Para concluirmos, e com referência à figura 2, aplicamos o resultado que acabámos de demonstrar tomando, por exemplo, o círculo C como base do cone de projecção e tomando uma secção do cone, digamos C'' , obtida com um plano paralelo ao plano de projecção e que corte o cone acima do ponto M . Pelo que foi provado acima, C'' será um círculo, e logo também o será C' , sendo uma secção paralela a C'' do mesmo cone.

De seguida vamos demonstrar a propriedade C , de que os ângulos entre curvas da superfície esférica são preservados

quando essas curvas são projetadas estereograficamente no plano. O ângulo entre duas curvas de uma superfície esférica define-se como sendo o ângulo entre as tangentes a essas curvas no ponto onde elas se intersectam.

Assim, sejam t_1 e t_2 retas tangentes à esfera num ponto P e α o ângulo entre elas. Sejam t'_1 e t'_2 as projeções de t_1 e t_2 respectivamente e α' o ângulo formado por elas (ver figura 5). Queremos provar que $\alpha = \alpha'$.

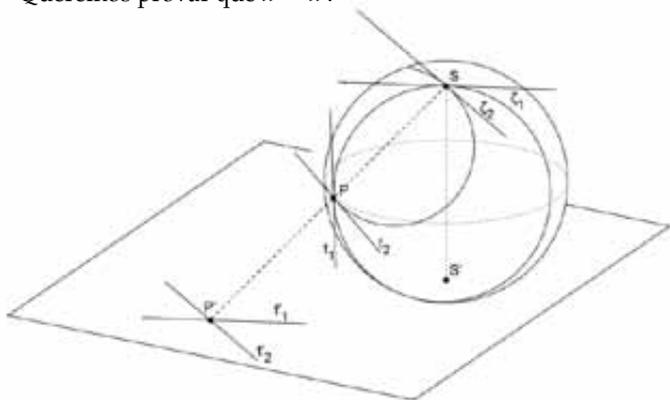


Figura 5: Conservação dos ângulos

A interseção do plano formado pelas semirretas com origem em S e que passam todos os diferentes pontos de t_1 com a esfera é um círculo que passa por S , então t_1 projeta-se na t'_1 que passa por P' (projeção estereográfica de P). τ_1 , a tangente ao círculo em S , é paralela a t'_1 porque todas as tangentes em S são paralelas ao plano da projeção. Analogamente, o plano definido por t_2 e S intersecta a esfera noutro círculo que passa por S e tem a tangente τ_2 que é paralela a t'_2 . Então, o ângulo α' entre t'_1 e t'_2 é igual ao ângulo entre τ_1 e τ_2 (porque os lados dos ângulos são paralelos dois a dois), que por sua vez é igual a ângulo entre t_1 e t_2 , porque os ângulos entre os dois círculos da superfície esférica nos pontos de interseção P e S são iguais. Para nos convenceremos deste facto, chegará observar que o plano que corta perpendicularmente o segmento PS no seu ponto médio é plano de simetria para os dois círculos. Logo, $\alpha = \alpha'$ como queríamos provar.

Por fim, em relação à propriedade D , a sua veracidade pode ser facilmente demonstrada se repararmos no facto de que a projeção M' de qualquer ponto M da esfera é um ponto pertence a um plano que passa por SS' e quando a esfera roda φ° , a reta relativa à interseção desse plano com o plano da projeção também roda φ° , ou seja M rodou φ° em torno do eixo SS' .

UM POUCO DE HISTÓRIA...

A referência mais antiga da projeção estereográfica remonta à obra de Ptolomeu *Planisphaerium*. Ptolomeu foi um cientista grego do séc. II a.C. e que descreveu, nesta obra, um instrumento que conseguia determinar as coordenadas das estrelas. Esse instrumento, que era o astrolábio, utilizava a projeção estereográfica na sua construção. As propriedades desta projeção referidas anteriormente estão enunciadas na obra *Planisphaerium* mas sem as respectivas demonstrações.

A demonstração mais antiga e completa das propriedades A e B da projeção estereográfica foi escrita por Ahmad Al-Fergani, um cientista do séc. IX nascido em Fergana (Ásia Central) e que trabalhou em Bagdad. No capítulo I da sua obra *Construindo o Astrolábio* é-nos apresentada a teoria da projeção estereográfica. O Lema e as propriedades A e B apresentados neste artigo estão na obra de Al-Fergani. A demonstração da proposição B de Al-Fergani é muito parecida com a demonstração da 5ª proposição do tratado sobre cónicas de Apolónio de Perga, geômetra grego da escola de Alexandria do Séc. III d.C., onde se descreve o segundo conjunto de secções circulares de um cone oblíquo.

Na Idade Média, a projeção estereográfica era conhecida como a “projeção do astrolábio”. O termo “projeção estereográfica” foi utilizado pela primeira vez por um jesuíta chamado François d’Aguilon no início do séc. XVII. A palavra estereográfica deriva do grego e é a junção das palavras: sólido e desenho, ou seja, é a geometria que desenha sólidos (no plano).

O ASTROLÁBIO

O astrolábio é um instrumento astronómico que resolve problemas relacionados com o a medição do tempo e com a posição do Sol e das estrelas. O nome “astrolábio” vem do grego *aster*, que significa estrela, e *lambanein*, que possui vários significados: tomar, capturar, colher, apreender, compreender. Juntando as duas palavras, astrolábio significa compreender as estrelas.

O astrolábio é portátil, achatado e de forma circular, com cerca de 15 cm de diâmetro, no entanto esta dimensão pode variar. O corpo principal deste instrumento chama-se madre. A madre é composta por duas partes: um disco sólido, que define a parte de trás do astrolábio e um anel graduado à volta da madre, chamado rodela, com o mesmo diâmetro da madre e que define a parte da frente.

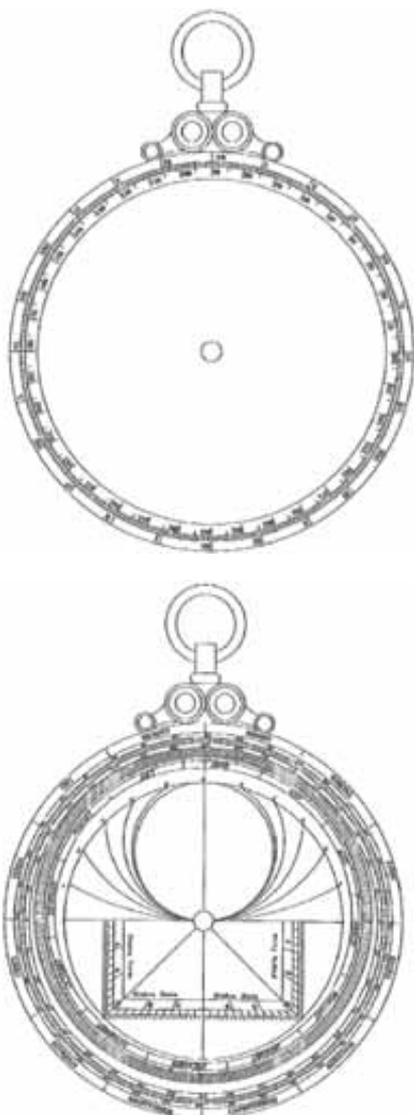


Figura 6: Em cima, a frente de uma madre.
Em baixo, a parte de trás.

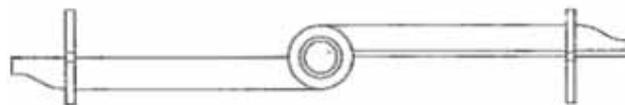
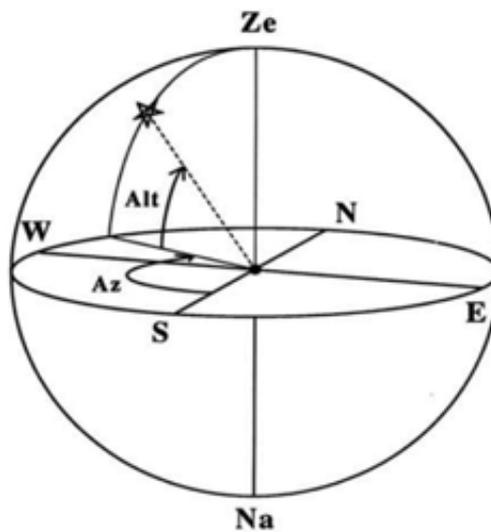


Figura 7: Alidade



LEGENDA
Ze- Zénite
Na- Nadir
Alt- Altura
Az- Azimute

Figura 8: Sistema horizontal de coordenadas

denadas é composto pelo plano do horizonte e pelo eixo perpendicular ao plano e que passa pelo zénite (ponto da esfera celeste que está verticalmente acima do observador) e pelo nadir (ponto diametralmente oposto ao zénite). A orientação deste eixo é no sentido nadir – zénite. A origem do sistema horizontal é o ponto cardeal sul orientado no sentido da rotação dos ponteiros do relógio.

Com este sistema são necessários apenas dois ângulos, ou seja, duas coordenadas, para definir inequivocamente um ponto da esfera celeste. A primeira coordenada é a *altura* e a segunda denomina-se por *azimute* (amplitude do ângulo medido horizontalmente entre o ponto cardeal sul e o objeto celeste).

A primeira coordenada é obtida através do astrolábio segurando-o na vertical por um anel e fazendo alinhar a alidade com o corpo celeste. Depois da alidade estar alinhada fazemos a leitura da altura através da rodela presente na madre.

A segunda coordenada descobre-se através da parte de trás da madre. Nesta é fixado um disco que gira em torno do

Outra componente muito importante do astrolábio é a alidade (figura 7). A alidade girava em torno do centro do astrolábio (centro da madre) e servia para encontrar a altura dos astros, ou seja, a amplitude do ângulo que o corpo celeste faz com o plano do horizonte (plano tangente à Terra no ponto onde o observador se encontra).

Para identificar um objeto na esfera celeste (considera-se que o céu é uma enorme esfera sobre a qual estão fixadas as estrelas e tem como centro a Terra), é necessário definir um sistema de coordenadas. Um dos mais utilizados por aqueles que observam os céus é o *Sistema Horizontal de Coordenadas*, figura 8 (para mais pormenores, ver [7]). Este sistema de coor-

centro denominado lâmina. A lâmina possui vários círculos desenhados que são a projeção estereográfica do equador celeste (círculo que se obtém intercetando o plano definido pelo equador terrestre e a esfera celeste); dos trópicos de Câncer e Capricórnio celestes, que são dois círculos paralelos ao equador celeste e tangentes à eclíptica (círculo que é descrito pelo movimento aparente do Sol ao longo do ano); do horizonte (círculo que se obtém intercetando o plano do horizonte e a esfera celeste) e das almucântaras (círculos da esfera celeste paralelos ao horizonte). A lâmina possui também a projeção estereográfica do zénite e dos azimutes (círculos perpendiculares ao horizonte e que passam pelo zénite).

Pelas propriedades *A* e *B*, estes círculos da esfera celeste projetam-se como círculos ou segmentos de reta. Por norma, o pólo sul celeste é escolhido para origem da projeção, e o plano do equador para plano da projeção logo, o equador e os trópicos são desenhados na lâmina através de círculos concêntricos. O Trópico de Capricórnio é o círculo que delimita a lâmina do astrolábio. Os azimutes são projetados como círculos que passam pelo zénite e são perpendiculares ao horizonte.

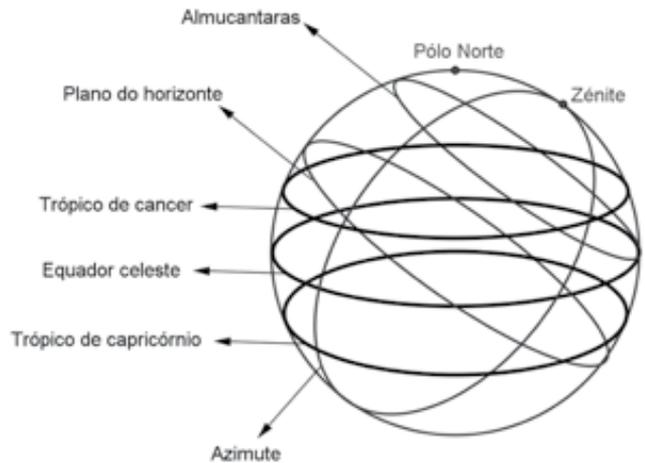


Figura 9: Esfera celeste e os seus principais elementos.

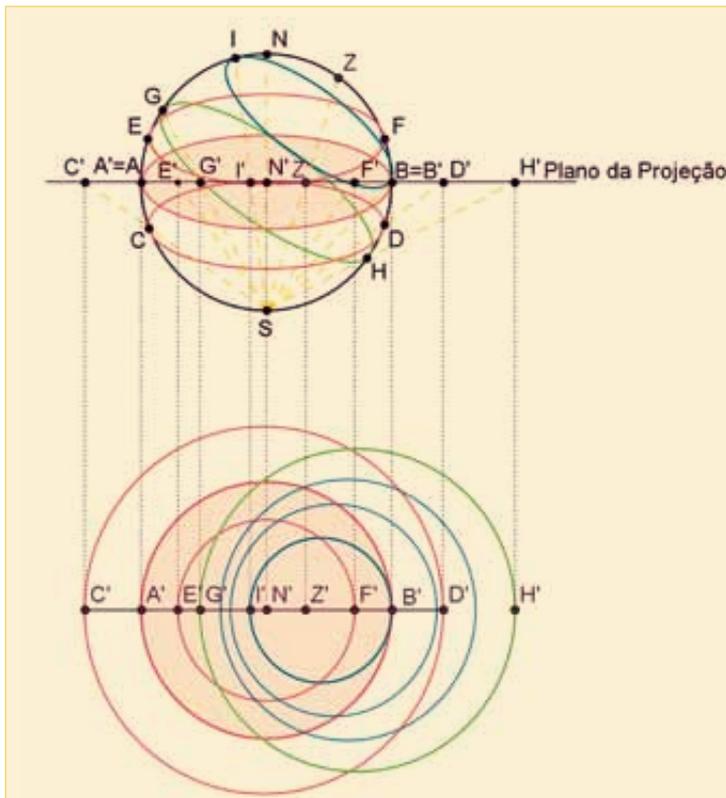


Figura 10: Construção da lâmina de um astrolábio. Alguns elementos da esfera celeste (figura acima) são projetados estereograficamente em círculos da mesma cor no plano equatorial (figura abaixo). Em particular, o plano do horizonte tem cor amarela, a almucântara tem cor verde (no plano de projeção são representadas mais duas almucântaras que não foram desenhadas na figura acima para não tornar o desenho demasiado complicado). Por fim, o equador e os trópicos têm cor violeta. O plano da projeção é, por conveniência gráfica, o plano equatorial paralelo ao plano tangente à esfera no polo norte celeste *N*. Como observado na introdução, as propriedades da projeção estereográfica continuam a ser válidas.

Na lâmina ainda podemos encontrar as linhas horárias que servem para determinar as horas e são traçadas por de baixo do horizonte.

Por cima da lâmina encaixa-se a rede, um disco circular, o mais entalhado possível para deixar ler as indicações da lâmina que se encontram por baixo. A rede dava a projeção da eclíptica (que se encontra dividida em doze partes iguais que são as constelações do zodíaco) e das estrelas fundamentais com os respectivos nomes. A eclíptica aparece projetada tangente aos trópicos.

Com o astrolábio apenas é possível determinar os azimutes das estrelas que estão representadas na rede. Depois de se obter (através da alidade) a altura de uma determinada estrela, roda-se a rede em cima da lâmina até que esta (que está representada na rede) fique em cima da almucântara com a mesma altura. É a propriedade D que nos permite fazer esta rotação da rede. Após esta operação determina-se a posição exata da estrela no céu, ou seja, as suas coordenadas pois, basta ver para que azimute está a rede a apontar.

BIBLIOGRAFIA

[1] ROSENFELD, A.B.; SERGEEVA, A.D. (1977), *Stereographic Projection*, Mir Publishers Moscovo, tradução de Vitaly Kisin.

[2] THOMSON, Ron B. (1978), *Jordanus de Nemore and the Mathematics of Astrolabe: De Plana Spera*, Toronto, Pontifical Institute of Mediaeval Studies.

[3] MORRISON, James E. (2007), *The Astrolabe*, USA, Janus.

[4] JOHN, Locke (2003), *Understanding the Astrolabe*, First Edition, Brabourne Books.

[5] TARDY, Jean-Noël (1999), *Astrolabes, Cartes du ciel les comprendre et les construire*, Aix-en-Provence, Édisud.

[6] COTTER, Charles H. (1992), *The Elements of Navigation and Nautical Astronomy*, Brown, Son & Ferguson Ltd, Glasgow.

[7] VELOSO, Eduardo (1991), "Algumas noções elementares de astronomia"; Série: *Descobrimentos, Astronomia e Educação Matemática* N°1; 1ª Edição; APM; 1991.

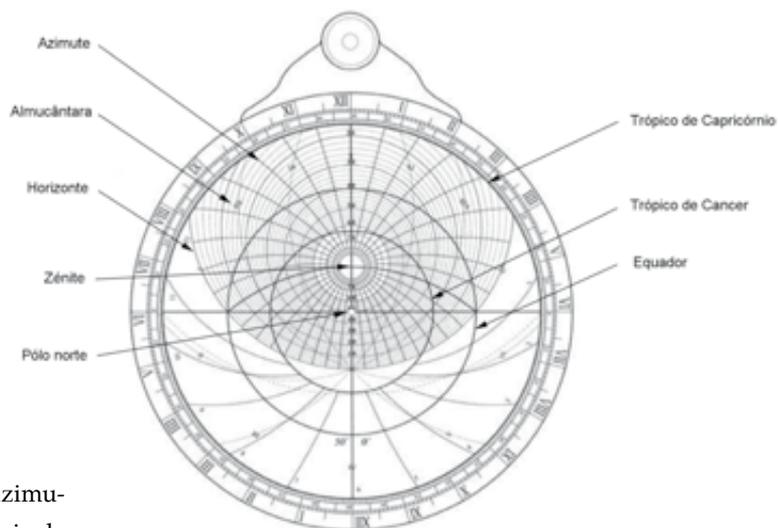


Figura 11: Lâmina do astrolábio



Figura 12: Rede

[8] JAMIESON, Laura; MONTERO, Maria; *Stereographic Projection, Chaucer and the Astrolabe*.

<http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m309-01a/montero/math-309project.html>.

[9] SILVA, Alexandre (2011), *Projeção Estereográfica Propriedades e Aplicações*, Tese de Mestrado em Matemática para Professores, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

SOBRE O AUTOR

Alexandre Mena e Silva é professor do 3.º ciclo e secundário do Colégio de S.Tomás em Lisboa. Licenciou-se em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciência da Universidade de Lisboa, em 2002, e concluiu em 2011, também nesta universidade, o Mestrado em Matemática para Professores. Este artigo surge na sequência da sua dissertação "Projeção Estereográfica, Propriedades e Aplicações" no âmbito do mestrado sob orientação do Prof. Doutor Henrique de Sousa Leitão.



ANTÓNIO MACHIAVELO
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

MATEMÁTICA E MALABARISMO

O malabarismo é uma arte que poucas pessoas associariam à matemática. Há, no entanto, entre estas duas atividades humanas muito mais relações do que se possa suspeitar à primeira vista. Enquanto o malabarismo oferece à matemática problemas combinatórios interessantes, a matemática deu já ideias para novos truques, ajudando a estabelecer uma classificação profícua dos padrões malabares e a combinar movimentos de formas originais.

A mais antiga evidência de atividades malabares remonta ao Antigo Egito, a uma pintura contida num túmulo de um príncipe egípcio desconhecido. Data do Império Médio, que decorreu do início da 11^a dinastia ao fim da 13^a dinastia, ou seja, entre os anos 2055 A.E.C.¹ e 1650 A.E.C., período do qual, curiosamente, datam também alguns dos textos matemáticos mais antigos que se conhecem, como o chamado papiro de Moscovo e o documento do qual o papiro de Rhind foi copiado. Esta coincidência cronológica é certamente apenas circunstancial.

Também talvez não seja mais do que uma coincidência que um dos grandes matemáticos persas do séc. X, Abū Sahl al-Qūhī² tenha sido um famoso malabarista, conhecido pelas suas manipulações de garrafas de vidro no mercado de Bagdad, antes de se dedicar à matemática³. Mais recentemente, há alguns exemplos de notáveis matemáticos com paixões malabares, dentre os quais se destacam:

Claude Shannon (1916–2001), que deu contribuições decisivas para o desenvolvimento das comunicações eletrónicas e é considerado o fundador da teoria da informação,

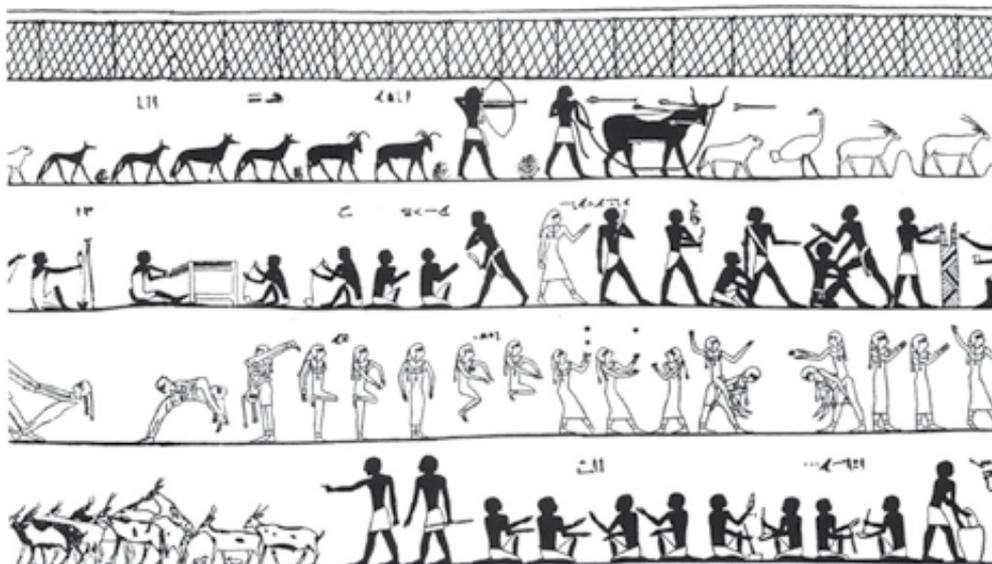


Figura 1: Pintura tumular egípcia com cerca de 4000 anos, mostrando mulheres fazendo malabarismo

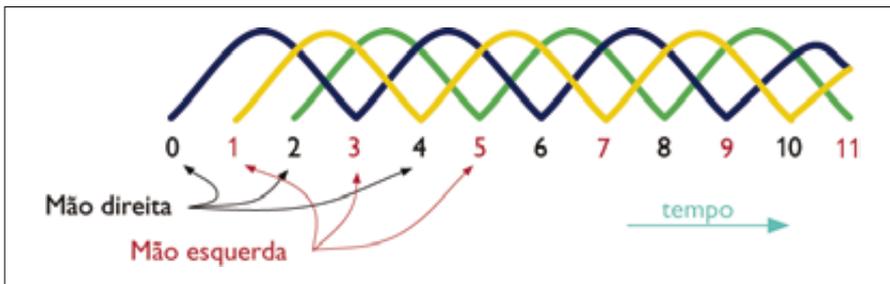


Figura 2: O movimento
33333333...

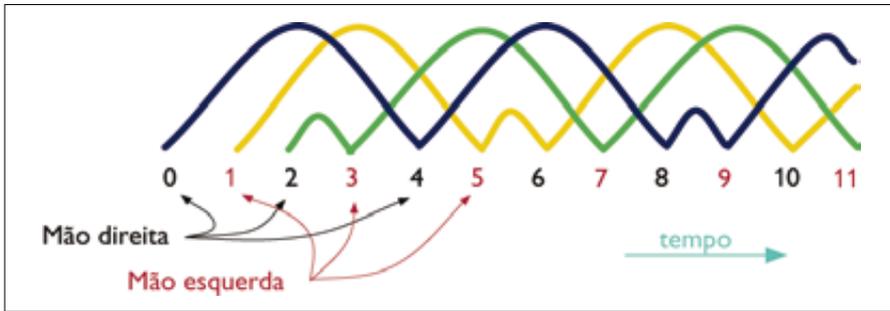


Figura 3: O movimento
441441...

tinha por passatempos tocar clarinete, jogar xadrez, andar de monociclo⁴ e o malabarismo; Ronald Graham (n. 1935), um dos principais arquitetos do desenvolvimento da matemática discreta no séc. XX, e que foi presidente da Sociedade Americana de Matemática de 1993 a 1994, foi também presidente da International Jugglers' Association em 1972; David Eisenbud (n. 1947), que foi diretor do Mathematical Sciences Research Institute (MSRI), de 1997 a 2007, e presidente da Sociedade Americana de Matemática, de 2003 a 2005, tem por passatempos a música (flauta e canto) e o malabarismo; Allen Knutson⁵ (n. 1969), galardoado com o prémio Levi L. Conant em 2005, juntamente com Terence Tao, e atualmente no departamento de Matemática da Universidade de Cornell, foi detentor do recorde mundial de 12 bolas em malabarismo a “quatro mãos”, isto é, envolvendo duas pessoas, de 1990 a 1995 (o atual recorde é 13).

O que talvez já não seja uma coincidência é que na década de 1980/90 vários malabaristas com fortes pendores matemáticos inventaram uma notação para descrever certos movimentos malabares que revolucionou esta arte mult milenar. Apelidada de *site-swap*, ou notação transposicional, é um instrumento extremamente útil para comunicar e descobrir novos movimentos, facilitando ainda a aprendizagem, uma vez que torna possível decompor, de um modo natural e sistemático, sequências complicadas em componentes mais acessíveis que podem ser treinadas à parte.

No caso mais simples (conhecido por *vanilla site-swap*), o único que aqui será descrito, a notação transposicional aplica-se apenas a sequências malabares que satisfazem os três requisitos seguintes:

- 1) os objetos são lançados alternadamente pela mão direita e pela mão esquerda;
- 2) no máximo um objeto é lançado a cada instante;
- 3) a sequência de lançamentos é periódica.

A ideia é concentrar toda a informação de um padrão malabar deste tipo, a que chamaremos *simples*, numa sequência de números que dá a sucessão das ações de cada uma das mãos, alternadamente, em que cada ação se resume a lançar ou não um objeto, dando-se apenas a indicação de quantas ações haverá desde o lançamento até à receção do objeto, sendo ambas contabilizadas. Os números de um padrão malabar são designados “alturas”, uma vez que quanto maior for o número, mais tempo o objeto terá de ficar no ar antes de ser recapturado, e portanto mais alto terá de ser lançado.

Por exemplo, a figura 2 representa o padrão 3 em que cada uma das mãos lança um objeto que é apanhado pela outra mão três “tempos” à frente. A figura 3, por seu

¹ A.E.C. significa “Antes da Era Comum” — ver http://en.wikipedia.org/wiki/Common_Era.

² Mais exatamente: ابو سهل كوهي

³ Ver Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer, 1986, p. 79.

⁴ Foi mesmo um dos membros fundadores da Associação Americana de Monociclismo.

⁵ Que no passado mês de julho participou na Escola de Verão do programa *Novos Talentos em Matemática* da Fundação Calouste Gulbenkian.

lado, ilustra o padrão malabar **441**, em que uma das mãos (a direita, por exemplo) lança um objeto que é recapturado quatro “momentos” mais tarde, de seguida a outra mão lança um outro objeto que será também recapturado quatro “tempos” depois, após o que a primeira mão lança um terceiro objeto que é apanhado logo no momento imediatamente seguinte, e tudo se repete ciclicamente. Em ambos os esquemas, cada uma das linhas coloridas representa um objeto distinto. Para ver os movimentos correspondentes a estes padrões, consultar a *site* Juggling Lab, no endereço <http://jugglinglab.sourceforge.net>, seguindo depois o link Full applet.

Uma das vantagens desta notação é a de permitir obter uma relação entre diferentes padrões, como ilustrado na figura 4, onde se permutam dois lançamentos consecutivos, um de altura m e outro de altura n . Como é fácil ver, essa troca origina novos lançamentos de alturas $n + 1$ e $m - 1$. Isto significa, em particular, que se $XmnY$ é um determinado padrão malabar, onde X e Y designam sequências (eventualmente vazias) de números, então $X(n + 1)(m - 1)Y$ também é um padrão malabar (é daqui que vem o nome *site-swap*). Observe-se que isto define uma operação (unária) no conjunto das sequências malabares que é involutiva (ou seja, é a sua própria inversa), e que por conseguinte pode ser usada para decidir se uma dada sequência é ou não uma sequência malabar, isto é, se corresponde a um padrão malabar. Por exemplo:

$$56612 \rightsquigarrow 56252 \rightsquigarrow 56234 \rightsquigarrow 53534 \rightsquigarrow 44444,$$

mostra que a sequência **56612** é malabar, uma vez que é fácil ver que **4** é malabar (desenhe o diagrama correspondente) e, mais, que envolve quatro objetos. Esta operação de permuta de movimentos consecutivos pode ser usada para mostrar o seguinte resultado: o número de objetos envolvidos num padrão malabar é igual à média aritmética dos respetivos números.

A notação trasposicional tem ainda a vantagem de permitir classificar e contar todos os padrões malabares do tipo aqui considerados. Nomeadamente, tem-se que uma sequência de p números, n_1, n_2, \dots, n_p , é um padrão malabar simples se e só se os restos dos números $i + n_i$, quando divididos por p , forem todos os números de 0 a $p-1$. O número de sequências malabares simples com b objetos e de período p é dado por

$$\frac{1}{p} \sum_{d|p} \mu \left(\frac{p}{d} \right) \left((b+1)^d - b^d \right),$$

onde μ é a função de Möbius⁶. Por exemplo, há exatamente 12 padrões com três objetos e cujo período é 3, designadamente: **423, 441, 504, 522, 531, 621, 603, 630, 711, 720, 801, 900**.

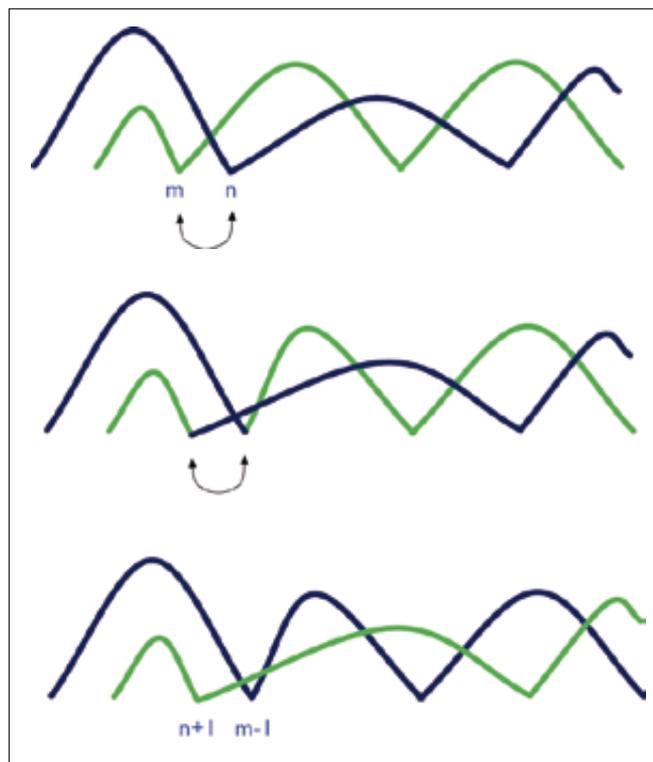


Figura 4: Permuta de dois lançamentos consecutivos

Para demonstrações destes resultados e para saber mais sobre este assunto, consultar o artigo “Juggling Drops and Descents”, de Joe Buhler, David Eisenbud, Ron Graham e Colin Wright, no *The American Mathematical Monthly*, Vol. 101, n.º 6 (June–July, 1994), pp. 507–519, ou o livro *The Mathematics of Juggling* de Burkard Polster (Springer, 2003). Para mais detalhes sobre malabarismo, consultar as páginas SiteSwaps, How To Write Down A Juggling Pattern: A Guide For The Perplexed, <http://juggling.org/help/siteswap/ssintro> e Juggling Information Service, <http://juggling.org>.

Recentemente, Allen Knutson, Thomas Lam e David Speyer encontraram uma aplicação do malabarismo à Geometria Algébrica. Ver “Positroid Varieties: Juggling and Geometry”, disponível em <http://arxiv.org/pdf/1111.3660.pdf>. Há assim uma relação simbiótica entre a matemática e o malabarismo: enquanto a primeira fornece à segunda modos de descrever os possíveis padrões e formas de os combinar em arranjos originais, a segunda inspira construções novas e problemas interessantes a explorar. Quem diria...

⁶Ver http://en.wikipedia.org/wiki/Mobius_function.

Ações de Formação MATEMÁTICA



Informações/Marcações

Centro de Formação SPM
Av. da República, 45-3^oEsq.
1050-187 Lisboa
Telf.: 217 986 354
Telm.: 96 000 90 45
Email: formacao@spm.pt

Consulte o nosso preçário com descontos
para grupos em www.formacao.spm.pt

METAS CURRICULARES 1^o E 2^o CICLO
METAS CURRICULARES 2^o E 3^o CICLO
METAS DE GEOMETRIA COM O GEOGEBRA
SIMETRIAS NO PLANO: ESTUDO INTERATIVO
GEOGEBRA 3D¹
APLICAÇÕES DO GEOGEBRA¹
APLICAÇÕES E MODELAÇÃO MATEMÁTICA COM O
GEOGEBRA¹
ESTATÍSTICA NO EXCEL ^{1 / 3}
MATEMÁTICA NO EXCEL / COMPLEMENTOS¹
APLICAÇÕES DA TI-NSPIRE / COMPLEMENTOS²
APLICAÇÕES DA TI-NSPIRE - NAVIGATOR²
ENSINAR E APRENDER COM O MOODLE /
COMPLEMENTOS³
ELEMENTOS DE EUCLIDES ATRAVÉS DO GEOGEBRA
PROJETOS LÚDICOS
É DIVERTIDO RESOLVER PROBLEMAS!
TREINADOR OLÍMPICO: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DE OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA
QUESTÕES DE MATEMÁTICA ELEMENTAR⁴
MATERIAIS DIDÁTICOS⁴
ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS⁴
APLICAÇÕES DO CABRI 3D

Todas as formações estão disponíveis no formato de
25 horas (1 crédito) ou 15 horas (0,6 créditos)

¹Disponível também como Oficina de Formação Online
de 30 horas (1,2 créditos)

²Disponíveis também para os Grupos de Física e Química

³Disponíveis para todos os Grupos Disciplinares

⁴Disponíveis para os Grupos 100, 110 e 230



Os Jogos no Ensino da Matemática

ANA JÚLIA VIAMONTE

ISEP - INSTITUTO POLITÉCNICO DO PORTO

ajv@isep.ipp.pt

O insucesso escolar da matemática é hoje em dia muito estudado e é do conhecimento geral que um dos fatores que mais contribuem para este insucesso é a falta de interesse dos alunos na aprendizagem.

A introdução de jogos no ensino/aprendizagem é uma “arma” poderosa no combate a este flagelo da indiferença, não só porque motiva os alunos mas também porque introduz regras a cumprir e estimula a cooperação e a sociabilização dos alunos. Este trabalho pretende ser uma reflexão sobre o jogo no contexto educativo, e apresentam-se vários jogos que podem ser usados em várias idades e em contexto de sala aula. Os jogos apresentados pretendem apenas ser um fator motivador para a aprendizagem da matemática e não o objetivo do ensino. Pretende-se que o aluno veja a matemática de uma forma lúdica e integrada no seu mundo.

1. INTRODUÇÃO

Hoje fala-se muito na dificuldade na aprendizagem da matemática, só que este facto passa muitas vezes pelo medo prévio para com o ensino da matemática. É comum ouvirmos os pais a desculpar a falta de estudo e as fracas notas dos filhos a matemática dizendo “*eu também tinha dificuldades a matemática...*” Segundo Júlia Borin, “outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos dos nossos alunos que temem a matemática e se sentem incapacitados para a aprender. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente aos seus processos de aprendizagem.”¹

Este fenómeno que considera ser comum ter dificuldades a matemática ainda é o pior inimigo do professor, pois só aprende quem se predispuer a isso e se os alunos se consideram logo à partida incapazes de aprender, então o professor não só tem de transmitir conhecimentos, mas também de mudar mentalidades. No livro de *Didáctica da Matemática*, de Maria Elfrida Ralha, da Universidade Aberta (pág. 78), aparece: “Alguns alunos e cidadãos em geral veem a matemática como uma área muito difícil e só compreensível para alguns.” É necessário repensar a forma de ensinar matemática de modo a vencer este complexo e é nesse contexto que a introdução de jogos pode motivar o aluno a abrir-se à aprendizagem da matemática, pois o jogo é uma ferramenta que pode ser usada para tornar a aprendizagem mais divertida. “Os jogos são tão antigos como a humanidade. O ato de jogar desde sempre acompanhou a civilização. Em todas as civilizações que existiram e existem encontram-se atividades lúdicas. Os jogos constituem uma das facetas incontornáveis da cultura humana. (...) As razões profundas que levam a que todas as civilizações desenvolvam jogos são ainda desconhecidas, mas é consensual o seu interesse cultural e educacional”, in *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos*, – João Pedro Neto e Jorge Nuno Silva, Gradiva.

Um jogo não só implica um conjunto de regras que têm de ser respeitadas, como também tem de ser jogado em grupo. Assim, ao introduzirmos os jogos na sala de aula não só estamos a introduzir um fator motivador da aprendizagem, mas também a fomentar a sociabilização e a introduzir regras a cumprir. Estes aspetos são fundamentais para o desenvolvimento intelectual, emocional, afetivo e social dos nossos alunos. Segundo Àngel Alsina, o jogo “quer seja livre ou estruturado, é uma fase necessária, que faz a ponte entre a fantasia e a realidade e promove, por isso, em simultâneo, o desenvolvimento social e intelectual, numa fase eminentemente lúdica do desenvolvimento infantil” (Àngel Alsina, 2004, *Desenvolvimento de Competências Matemáticas com Recursos Lúdico-manipulativos*, Porto Editora, pág. 6).

¹ Segundo Júlia Borin, 1996, in *Jogos e Resolução de Problemas: uma Estratégia para as Aulas de Matemática*, São Paulo – SP: IME-USP, 1996, retirado de *Jogos Matemáticos como um Recurso Didático*, de Jeniffer de Oliveira Rodrigues e Sandra Mara Ricci.

Associar jogos e matemática pode tornar certos conceitos mais claros e atrativos pois, embora um jogo possa ser um simples desafio entre colegas, é através do jogo que se consegue atingir diferentes modos de aquisição de conhecimento. Quando as atividades são bem orientadas, o jogo permite desenvolver a criatividade, a imaginação, o raciocínio lógico, a organização e a sociabilização, a atenção e a concentração dos nossos alunos.

Quando se fala em jogos matemáticos temos de considerar dois tipos de jogos:

► **Jogos de cálculo** – Envolvem a utilização das quatro operações e, por isso, promovem o desenvolvimento de estratégias de cálculo. Desenvolvem a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito dos alunos de uma forma lúdica. São jogos que têm relação direta com os conteúdos ensinados no 1.º ciclo, que relacionam os conceitos, e que levam os alunos a refletir sobre a eficácia do que é proposto.

► **Jogos de estratégia** – A prática de certos tipos de jogos de tabuleiro estimula o pensar e é, sem dúvida, um passo para ganhar destreza com tópicos de matemática. Começamos por jogar simplesmente por jogar, mas depressa passamos para um jogar pensado, numa busca das melhores decisões para atingir o objetivo do jogo. Nessa procura de melhorar e aperfeiçoar o modo como jogamos, desenvolvem-se as competências de concentração, de visualização, de pensar primeiro e agir depois, de pesar as opções e de memorização, entre tantas outras. A tabela seguinte mostra os jogos do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos² realizados em 2012 pela Associação LUDUS e a sua distribuição pelos diversos ciclos de ensino básico e secundário.

	1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB	SEC
SEMÁFORO	X			
GATOS & CÃES	X	X		
OURI	X	X	X	
HEX		X	X	X
RASTROS			X	X
AVANÇO				X

Há muitos jogos e é difícil proceder à sua classificação, uma vez que pelas suas características um jogo pode integrar mais do que um tipo. O jogo deve ser introduzido logo no ensino pré-escolar, mas em contexto de sala de aula parece-me que só devem ser utilizados jogos que permitam aos alunos explorar as aprendizagens que estão nesse momento a ser lecionadas.

2. A MATEMÁTICA NO ENSINO PRÉ-ESCOLAR

A introdução de alguns jogos pode ajudar a criança, na faixa dos 3 aos 5 anos, a identificar melhor as cores, os números e as formas geométricas mais elementares. No Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (DEB, 2001), destaca-se a utilização de materiais manipuláveis: “Materiais manipuláveis de diversos tipos são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular das que visam promover atividades de investigação e comunicação matemática entre os alunos. Naturalmente, o essencial é a natureza da atividade intelectual dos alunos, constituindo a utilização de materiais um meio e não um fim.” Embora as escolas se deparem frequentemente com falta de material, é possível elaborar facilmente alguns jogos para ajudar a atingir estes objetivos. Investigações conduzidas por Jean Piaget, referidas no livro *Como Ensinar Matemática no Básico e no Secundário*, de Volker Hole, pág. 39, “vieram mostrar que as crianças até à idade de onze ou doze anos, para chegarem a assimilar certas experiências e conhecimentos, necessitam de lidar, concretamente, com os objetos e de os manusear”. Dentro dos vários jogos possíveis, saliento dois que me parecem importantes pois não só trabalham as cores e os números como também fazem a ligação ao mundo que nos rodeia. O primeiro é o Jogo dos Números e Cores onde é elaborado um cartaz que no centro contém imagens de frutos ou flores de cores diferentes e em número diferente. O objetivo deste jogo é a criança identificar a cor e o número de objetos que aparecem em cada imagem, e podem ser usadas várias cores e diferentes números conforme as idades das crianças a que se destina o jogo: 3, 4 ou 5 anos. Ganha a criança que mais rapidamente acertar no número de objetos e nas cores. O outro que eu aqui saliento é o Jogo das Formas Geométricas no qual também é elaborado um cartaz que contém imagens do mundo em que vivemos. O objetivo deste jogo é a

criança identificar as formas geométricas que aparecem em cada imagem. O facto de se utilizarem imagens do mundo em que vivemos permite que a criança comece a sensibilizar-se para o facto de a matemática estar em tudo o que nos envolve. Neste jogo ganha a criança que mais rapidamente identificar as várias formas geométricas existentes na figura proposta. É importante levar a criança a descobrir as cores, os números e as formas geométricas no mundo que a rodeia, pois só assim podemos proporcionar-lhe atividades que vão ao encontro do seu mundo e da sua história pessoal, permitindo-lhe uma integração das suas aprendizagens no seu dia-a-dia.

3. A MATEMÁTICA NO 1.º CICLO

No 1.º ciclo são introduzidas as operações básicas de adição e subtração, numa primeira fase, e de multiplicação e divisão, numa fase posterior. A introdução de jogos nestas fases permite consolidar melhor as aprendizagens e de uma forma mais fácil porque mais lúdica. Um jogo muito simples que pode ser utilizado logo no 1.º ano é o Quadrado Semimágico. O jogo do quadrado mágico está descrito num antigo livro chinês, datado do período Han, chamado *Lo Shu (Livro do Rio)*, e está relacionado com mitos e lendas.³ Em cada um dos pequenos quadrados será colocado um número de 1 a 9 de modo a não haver repetições de números. A soma de cada linha, coluna ou diagonal terá de ser 15. Existem oito combinações de três dígitos cuja soma é 15. Este jogo consiste numa tabela com nove posições, em que algumas podem já conter números, e onde é necessário colocar os números que faltam de modo a que as somas por linhas e colunas sejam iguais. Existem várias formas de jogar que diferem apenas no grau de dificuldade. Outro jogo deste tipo, mas que implica já um maior raciocínio é o Soma 9 (ou Soma 10 ou Soma 11 ou Soma 12). Nestes jogos o aluno tem de colocar os números 1, 2, 3, 4,

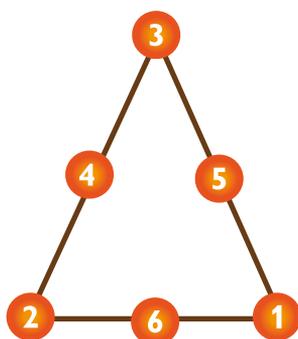


Figura 1

5, 6 de forma a que a soma dos números colocados em cada lado do triângulo seja igual a 9 (ou 10 ou 11 ou 12) (ver fig. 1). Para tornar o jogo acessível aos alunos do 1.º ano, podem ser previamente fornecidas as posições de um ou dois números e os alunos só terão de colocar os restantes.

Outro jogo que permite explorar as operações básicas de uma forma divertida é O Labirinto. Neste jogo começa-se de um número que está no canto inferior esquerdo (fundo verde) de um tabuleiro com números, e realizando sucessivamente o mesmo conjunto de operações, que tem de ser definido à partida, pretende-se chegar ao número que está no canto superior direito (fundo vermelho) do mesmo tabuleiro. Por vezes há mais do que uma opção de escolha, só que algumas não permitem atingir o número pretendido. Ganha o jogador que estabelecer o percurso num menor tempo. Por exemplo, partindo do número 16 (no canto inferior esquerdo) e executando sucessivamente as operações +7 e -6, chegar ao número 21 (no canto superior direito), (ver fig. 2).

27	20	26	13	13	15	21
21	19	17	16	16	27	16
25	16	16	25	20	21	16
16	18	18	19	26	16	13
16	24	26	18	16	14	10
17	23	18	20	16	13	9
16	14	16	21	27	13	8

Figura 2: O Labirinto

4. A MATEMÁTICA NOS 2.º E 3.º CICLOS

Nos 2.º e 3.º ciclos os programas de matemática são extensos e os alunos devem ter outro tipo de raciocínio e desenvolver outras competências. Os jogos a inserir nestas fases devem ser jogos com regras simples para que não se perca muito tempo a explicar o jogo e devem ser jogos que permitam desenvolver e explorar os conceitos que estão a ser apreendidos nas aulas e que explorem o fator social, tão importante hoje em dia nas nossas escolas.

² <http://ludicum.org/cnjml/>

³ Santos, C. P., Neto, J. P., & Silva, J. N. (2007). *Os Quadrados Latinos + Jogo 'Hexágono Mágico' – Coleção Jogos com História* (vol. 10), jornal Público e revista Visão, pág. 28.

Nestes ciclos de ensino dois temas que são muito importantes, e nos quais por vezes os alunos têm dificuldades, são o teorema de Pitágoras e os casos notáveis da multiplicação. Um *quiz online* que pode ser utilizado na aula para explorar estes temas é o Pitágoras⁴. O Pitágoras pode ser jogado apenas por um jogador, mas também por vários, ganhando aquele que obtiver maior pontuação e, em caso de empate, vence o que terminar o jogo em menor tempo. Existem perguntas com graus de dificuldade diferentes: 1, 2 e 3 que dão 1, 2 e 3 pontos, respetivamente. O jogador apenas pode responder a quatro perguntas de cada grau. O objetivo do jogo é responder a 10 perguntas e obter a maior pontuação possível. As perguntas de grau 1 estão relacionadas com a história e o enunciado do teorema de Pitágoras e são de escolha múltipla. Por exemplo, a que triângulos se pode aplicar o teorema de Pitágoras? a) Todos, b) Retângulos, c) Equiláteros. Ou então, Pitágoras fundou: a) um hospital, b) uma escola, c) uma orquestra. As perguntas de grau 2 e grau 3 são de desenvolvimento, sendo que as primeiras têm como objetivo determinar o comprimento de catetos ou hipotenusas de alguns triângulos retângulos e as de grau 3 incidem no cálculo de áreas e perímetros de várias figuras geométricas.

O Jogo dos Polinómios é idêntico ao Pitágoras, pois tem as mesmas regras só que aqui as perguntas de grau 1 estão relacionadas com o desenvolvimento dos casos notáveis, por exemplo, efetuar e simplificar $(2x - 3)^2 - (2x + 3)^2$ ou $(2x + 7)(2x - 7)$. As perguntas de grau 2 têm como objetivo fatorização de polinómios, por exemplo, escrever o polinómio como um produto de fatores: $2x^4 - 8x^2$. E as perguntas de grau 3 têm como objetivo a simplificação de expressões. Este jogo permite explorar de uma forma leve e divertida um assunto que é muito importante e que habitualmente os alunos consideram pesado e no qual têm muitas dificuldades.

Um jogo possível é o Jogo do 24, cujo objetivo principal é desenvolver nos alunos a capacidade de cálculo mental. Também podem ser trabalhados os conceitos de múltiplo e divisor bem como as propriedades da adição e da multiplicação. No Programa de Matemática do Ensino Básico, relativamente ao tema “Números e Operações”, no que diz respeito ao 2.º ciclo do ensino básico é referido o seguinte:

“No estudo das propriedades das operações, é de promover uma ligação estreita ao cálculo escrito, mental e com o auxílio da calculadora. Para o desenvolvimento do cálculo mental é

importante procurar contextos e combinações numéricas que suscitem a estimação do resultado das operações envolvidas antes da realização do cálculo. É também de explorar a utilização da relação entre as operações e suas propriedades. O trabalho com o cálculo mental (exato e aproximado) deve merecer uma grande atenção neste nível de ensino, dada a importância de um bom domínio a este nível por parte dos alunos para o desenvolvimento da autoconfiança e do desembaraço essenciais para a resolução de problemas.”⁵

O Jogo do 24 original joga-se com cartas que equivalem a números (A-1, K-13, Q-12, J-11, cartas de números é o respetivo número). O objetivo é, dadas quatro cartas, ordenar as cartas e os sinais aritméticos (+, -, ×, :), de forma que o resultado final dê 24. Este jogo permite apenas desenvolver o raciocínio e não explora os conceitos novos que são introduzidos nestas idades, sendo muito apropriado para alunos do 2.º ciclo (5.º e 6.º anos de escolaridade). Existe também o Jogo do 24 Avançado, que é mais apropriado para alunos do 3.º ciclo ou secundário, já que integra outros números e outras operações, como por exemplo a potenciação e a radiciação, embora a finalidade seja a mesma, isto é, obter 24. O Jogo do 24 foi inventado por Robert Sun em 1988, com o objetivo de demonstrar que “... a matemática pode ser poderosa, aliciante e, acima de tudo, divertida”⁶.

Um outro jogo que é muito simples de jogar e que pode ser utilizado em contexto de sala de aula é o Números Cruzados. Este jogo é idêntico ao das palavras cruzadas, mas aqui as quadrículas são preenchidas por algarismos (em vez de letras) de modo a representarem os números que satisfazem a condições enunciadas. Para o aluno jogar tem de responder a questões cuja solução é o número a colocar nessa posição. Este jogo pode ser utilizado para treinar potências, critérios de divisibilidade, múltiplos e divisores ou até mesmo para resolver problemas de áreas e volumes. Consideremos o exemplo seguinte onde são trabalhadas as noções de divisor, múltiplo, critérios de divisibilidade e as operações com potências. Este exemplo é um problema típico de números cruzados, isto é, temos de ir resolvendo umas questões e ir preenchendo a quadrícula para encontrarmos a solução final, uma vez que algumas questões têm várias respostas possíveis (ver, por exemplo, a questão 6 horizontal)

1			2	3		4	5		6	7
		8			9				10	
	11			12			13			
14			15			16				17
18			19			20			21	

Figura 3: Jogo dos Números Cruzados

Neste nível de ensino é importante também introduzir os alunos em jogos que tenham campeonatos nacionais ou mesmo internacionais, tais como as Olimpíadas Portuguesas de Matemática, o Canguru Matemático sem Fronteiras⁷, o superImatik⁸... Este tipo de jogos tem a vantagem de permitir, aos vencedores de cada escola, uma experiência enriquecedora, que é a oportunidade de participar num concurso nacional ou internacional.

5. CONCLUSÃO

É condição necessária para que alguém aprenda que se predispõe a isso. Nesse contexto a introdução de jogos no ensino da matemática pode facilitar a aprendizagem, pois é um fator motivador. Se tivermos em atenção o peso que a sociedade, de uma forma geral, e as famílias, em particular, põem no ensino da matemática, então o uso de jogos como fator motivador pode realmente tornar-se uma “arma” poderosa para o professor. Além disso, como o jogo é constituído por um conjunto de regras a que temos de obedecer para conseguir ganhar, a introdução do jogo pode também ser um fator disciplinador. O jogo de regras que pode ser jogado em equipa fomenta também a sociabilização e a cooperação entre alunos. Num momento em que o fator disciplina é um problema em muitas escolas e em que a motivação para aprender é pouca, o uso de jogos permite utilizar o lado competitivo dos alunos para motivar para a aprendizagem.

Para que os alunos não se fiquem só pela brincadeira, mas tenham consciência de que é preciso trabalhar para se aprender, parece-me importante que não se façam apenas jogos, mas que estes sejam alternados com a resolução de fichas de exer-

Horizontais:

1. O produto de 17 pela diferença entre 7 e 4. **2.** Adicionar à soma de 58 e 10 a diferença entre esses dois números. **4.** 8 vezes a soma de 7 com 8. **6.** Um múltiplo de 19. **11.** Ao produto de 25 por 40 subtrair o produto de 20 por 6. **12.** Multiplicar por 12 o quociente da divisão de 96 por 6. **13.** Metade do quociente da divisão de 20000 por 40. **18.** Dividir a diferença entre 140 e 14 pelo quociente da divisão de 42 por 6. **19.** O maior múltiplo de 15 com três algarismos. **20.** Multiplicar a soma de 53 com 45 pela sua diferença. **21.** Dividir o produto entre 18 e 14 pela sua diferença.

Verticais:

1. O dobro da soma de 12 com 14. **3.** Dividir por 3 a diferença entre 40 e 4. **5.** Elevar ao quadrado o quociente da divisão de 30 por 6. **7.** O maior divisor de 86. **8.** A 200 subtrair o triplo da diferença entre 8 e 4. **9.** Um múltiplo de 18 inferior a 200. **10.** Um múltiplo de 130. **14.** À metade de 286 subtrair o produto de 6 por 17. **15.** O quadrado de um número inteiro. **16.** Um múltiplo de 17. **17.** O triplo de, uma dezena mais uma unidade.

cícios tradicionais. O jogo em contexto de sala de aula deve ser cuidadosamente escolhido, de forma a ser apenas um fator motivador e não o objeto de ensino. Nesse contexto parece-me importante que o jogo permita explorar as competências e os temas que estão a ser ensinados no momento. É importante também que o jogo não necessite de materiais muito diferentes daqueles que habitualmente são utilizados nas outras aulas para que o aluno não se disperse com o que não é fundamental, e que o jogo tenha regras simples para que não se perca

⁴ Ver <http://nautilus.fis.uc.pt/mn/pitagoras/pitflash1.html>

⁵ Ponte, J. P., & outros. (s.d.). Reajustamento do Programa de Matemática do Ensino Básico-Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Obtido em 20 de maio de 2009, de <http://www.dgicd.min>, pág. 35.

⁶ Torres, D. F. (3 de 2004). “O Jogo do 24 – Digressões com o Maple”. (U. D. Mat., Ed.) Obtido em 30 de outubro de 2008, de <http://www2.mat.ua.pt/delfim/delfim/artigos/jogo24.pdf>, pág. 1.

⁷ Jogo promovido pela Associação Canguru sem Fronteiras, que é uma associação de carácter internacional que reúne personalidades do mundo da matemática de 46 países. Em Portugal a organização deste concurso está a cargo do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, com o apoio da Sociedade Portuguesa de Matemática. O concurso consiste numa única prova: não existe nenhuma seleção prévia nem uma prova final. Há seis categorias, de acordo com as idades dos alunos. Ver <http://www.mat.uc.pt/cangurul>

⁸ Os objectivos deste jogo são fomentar o interesse pela prática do cálculo mental, desenvolver destrezas numéricas e de cálculo e reforçar a componente lúdica na aprendizagem da matemática. Este é um jogo de cartas em que em, cada jogada, os jogadores têm a oportunidade de ganhar cartas que, no seu verso, têm “Super-letras” ou “ Super-estrelas”. O objetivo é colecioná-las de modo a escrever SuperT. Ver, por exemplo, <http://pt.scribd.com/doc/7748074/Demonstracao-Supertmatik>

muito tempo a explicá-lo. O mesmo jogo pode até ser utilizado para explorar temas diferentes, mas é importante ir variando os jogos, senão pode tornar-se monótono para o aluno, não se conseguindo atingir o objetivo proposto de o jogo ser um fator de motivação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aharoni, R. (2006). *Aritmética para Pais, um livro para adultos sobre a matemática das crianças*. Gradiva Publicações, Lda. Temas da Matemática.

Alsina, A. (2004). *Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdico-manipulativos*, Porto Editora.

Borin, Júlia. (2004) *Jogos e Resolução de Problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. 5ª. ed. São Paulo: CAEM/IME-USP.

César de Sá, A. J. (1997). *A Aprendizagem da Matemática e o Jogo*, Associação dos Professores de Matemática.

Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (DEB, 2001).

Neto, J.P. & Silva, J.N. (2004). *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos*, Gradiva.

Ponte, J. P., & outros. (s.d.). *Reajustamento do Programa de Matemática do Ensino Básico-Ministério da Educação*, Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Obtido em 20 de maio de 2009, de <http://www.dgicd.min>.

Ralha, M. E. (2004). *Didática da Matemática*, Universidade Aberta.

Rino, J. (2004). *O Jogo, Interações e Matemática*. Associação dos Professores de Matemática.

Rodrigues, J.O. & Ricci, S. M. (1996). *Jogos Matemáticos como um Recurso Didático*.

Santos, C. P., Neto, J. P., & Silva, J. N. (2007). *Os Quadrados Latinos + Jogo "Hexágono Mágico" – Coleção Jogos com História (Vol. 10)*, jornal Público e revista Visão.

SOBRE A AUTORA

Ana Júlia Viamonte é professora coordenadora do Departamento de Matemática do ISEP – Instituto Superior de Engenharia do Porto, Politécnico do Porto. Licenciou-se, em 1985, em Matemáticas Aplicadas/Informática pela Universidade Livre do Porto, em 1996 obteve o Mestrado em Matemática Computacional no Departamento de Matemática da Universidade do Minho e, em 2003, o Doutoramento em Ciências, área de Matemática e área específica de Análise Numérica, também na Universidade do Minho. É membro do LEMA – Laboratório de Engenharia Matemática do ISEP e os seus principais interesses de pesquisa estão nas áreas de álgebra linear numérica e didática da matemática.



Visite o site da
Gazeta de Matemática.

www.spm.gazeta.pt

Para aceder à área reservada a assinantes,
solicite o seu código de subscrição através do
e-mail gazeta@spm.pt



MANUEL SILVA
Universidade Nova
de Lisboa
mnas@fct.unl.pt



PEDRO J. FREITAS
Universidade
de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

UM PROBLEMA PARA POLIMATEMÁTICOS

Estamos habituados a pensar nos grandes avanços científicos como fruto da inspiração e do suor de alguns indivíduos geniais que conseguem ver mais além trabalhando isoladamente. Talvez no futuro esta situação possa mudar e o progresso seja obtido coletivamente como resultado da soma de inúmeras pequenas contribuições.

1. A ARTE DE BEM DISTRIBUIR

A teoria da discrepância teve origem numa questão formulada por Van der Corput em 1935: será possível construir uma sequência de números reais que esteja bem distribuída no intervalo $[0,1]$? Teremos em primeiro lugar de definir o que se entende por “estar bem distribuída”. Para isso, podemos por exemplo verificar quantos dos primeiros n elementos da sequência estão contidos num dado intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$. Se a sequência estiver bem distribuída este valor deverá ser aproximadamente proporcional ao comprimento do intervalo, mais precisamente $(b - a)n$. O conceito de número normal introduzido por Émile Borel em 1909 está de algum modo implícito nesta discussão. Recorde-se que um número real se diz normal na base 10 se na sua representação decimal aparecem todas as possíveis sequências finitas de dígitos com a frequência esperada. Por exemplo, a sequência 666 deverá aparecer com frequência $\frac{1}{1000}$. Para saber mais recomendamos a consulta de [1], onde se mostra entre outras coisas a relação da teoria da discrepância com o estudo da complexidade computacional.

A noção de discrepância que vamos discutir aqui, embora relacionada com a descrita no parágrafo anterior, tem

natureza discreta. Denominamos por *hipergrafo* um par $\mathcal{H} = (V, \mathcal{A})$, em que V é um conjunto (eventualmente infinito), cujos elementos são denominados vértices, e onde $\mathcal{A} = \{A_i, i = 1, \dots, m\}$ onde $A_i \subset V$ são subconjuntos finitos de vértices, designados por (hiper)arestas. Suponhamos que, dado um hipergrafo \mathcal{H} , pretendemos colorir os seus vértices com duas cores, azul e vermelho, de modo a que todas as arestas contenham aproximadamente o mesmo número de elementos de cada cor. Escolher uma coloração do conjunto de vértices V é equivalente a definir uma função $\chi : V \rightarrow \{-1, 1\}$.

A *discrepância* de um conjunto $B \subset V$ relativamente à coloração χ é dada pela diferença em valor absoluto entre o número de elementos azuis e vermelhos. A discrepância total do hipergrafo \mathcal{H} é definida pela expressão

$$disc(\mathcal{H}) = \min_{\chi} \max_{i=1, \dots, m} \left| \sum_{x \in A_i} \chi(x) \right|.$$

O mínimo é tomado sobre todas as 2^n colorações possíveis, onde $n = |V|$.

Nem sempre é possível escolher uma coloração dos vértices para a qual todas as arestas tenham discrepância baixa.

O resultado a seguir permite obter um majorante para $\text{disc}(\mathcal{H})$ no caso em que nenhum vértice aparece repetido em demasiadas arestas.

Teorema 1 (Beck-Fiala). *Se todo o vértice $v \in V$ aparece no máximo em t arestas, então $\text{disc}(\mathcal{H}) < 2t$.*

Este resultado tem uma demonstração simples que usa álgebra linear. Seria interessante melhorar o majorante linear n por uma função com um crescimento mais lento, como por exemplo \sqrt{n} .

2. O PROBLEMA DE DISCREPÂNCIA DE ERDÖS

Por volta de 1930, o matemático húngaro Paul Erdős formulou um problema envolvendo a discrepância nos conjuntos de múltiplos dos números naturais que permanece ainda hoje em aberto. O problema proposto por Erdős é neste momento objeto de um projeto de colaboração na Internet aberto a toda comunidade matemática, com o intuito de o resolver. Estamos habituados a pensar nos grandes avanços científicos como fruto da inspiração e do suor de alguns indivíduos geniais que conseguem ver mais além trabalhando isoladamente. Talvez no futuro esta situação possa mudar e o progresso seja obtido coletivamente como resultado da soma de inúmeras pequenas contribuições. O leitor interessado poderá encontrar na Internet uma página Wiki dedicada à questão proposta por Erdős.

O hipergrafo relevante no problema proposto por Erdős tem como conjunto de vértices o conjunto dos números naturais e como arestas os conjuntos de múltiplos: $P(d, k) = \{d, 2d, \dots, kd\}$, $d, k \in \mathbb{N}$. Erdős conjecturou que usando duas cores não seria possível evitar que algum destes conjuntos de múltiplos tivesse discrepância arbitrariamente grande.

Conjetura (Erdős). *Para qualquer sequência $x_n \in \{-1, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ e $L > 0$, existem $d, k \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\left| \sum_{i=1}^k x_{id} \right| > 1?$$

3. EXEMPLOS DE SEQUÊNCIAS

Como construir uma sequência x_n com discrepância baixa nos conjuntos de múltiplos? Uma ideia que certamente não funciona é escolher uma coloração periódica, isto porque

facilmente constatamos existirem conjuntos de múltiplos arbitrariamente grandes todos da mesma cor. A procura de uma sequência equilibrada, i.e., com discrepância total baixa, terá de evitar regularidades como as repetições periódicas. A sequência pretendida não parece portanto ter uma estrutura simples.

Será boa ideia gerar a sequência procurada lançando a moeda ao ar: azul se sair cara e vermelho caso contrário? A ideia de usar um processo aleatório pode parecer à primeira vista estranha, mas muitas vezes este método permite construir objetos para os quais uma construção explícita se revelou inacessível.

No caso da sequência pretendida para o problema de discrepância de Erdős é possível mostrar que não é boa ideia lançar a moeda ao ar para decidir a cor de cada número natural. Para verificar a ineficiência do processo aleatório basta verificar que o máximo entre os valores médios das discrepâncias nos conjuntos de múltiplos pode ser muito grande.

Que outras construções explícitas de sequências binárias $x_n \in \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ não periódicas faz sentido tentar? Um exemplo de uma sequência binária não periódica fácil de definir é a sequência de Thue-Morse 01101001 \dots . Esta sequência é determinada pela paridade do número de uns na expansão binária de cada natural n . Podemos definir um processo iterativo simples para obter esta sucessão: em cada passo juntamos ao bloco inicial x o bloco contrário \bar{x} que se obtém substituindo em x cada zero por um e cada um por zero. Obtemos assim sucessivamente: 0, 01, 0110, 01101001. O leitor interessado pode encontrar mais informação sobre esta curiosa sequência redescoberta diversas vezes em vários contextos. Se eu escolher um bloco de comprimento arbitrariamente grande algures no meio desta sequência, não será possível adivinhar qual é o elemento que irá aparecer a seguir. A sequência de Thue-Morse tem no entanto discrepância $n^{\log_4(3)}$ nos conjuntos de múltiplos. Podemos experimentar outras sequências com este tipo de comportamento pseudo-aleatório. Por exemplo, a sequência binária dos restos da divisão por 3 dos números primos $p \geq 5$: 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots . Também neste caso, adivinhar qual o próximo resto é algo que não pode ser obtido facilmente a partir dos restos anteriores.

Podemos, para simplificar o problema, considerar sequências $x_n \in \{-1, 1\}$ (completamente) multiplicativas, para as quais $x_{mn} = x_m x_n$ para qualquer $n, m \in \mathbb{N}$. Neste caso para avaliar

a discrepância nos conjuntos de múltiplos basta determinar as somas parciais $\sum_{i=1}^n x_i$. Isto porque

$$\left| \sum_{i=1}^n x_{id} \right| = |x_d| \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n x_i \right|.$$

Existe além disso alguma evidência empírica de que a haver uma sequência equilibrada esta deverá ser aproximadamente multiplicativa. Para definir uma sequência multiplicativa basta escolher a cor x_p onde p é um número primo. Um exemplo clássico de função completamente multiplicativa é a sequência de Liouville, a qual toma o valor -1 no conjunto dos números primos. Para cada natural n o valor da sequência de Liouville depende da paridade do número de fatores primos contados com a respetiva multiplicidade.

Encontrar um majorante para as somas parciais da função de Liouville é um problema clássico em teoria de números. É possível mostrar que o módulo da soma dos primeiros n primeiros termos da sequência de Liouville excede $C \cdot \sqrt{n}$ para infinitos valores de n .

Podemos tentar usar um algoritmo guloso (*greedy*) para construir uma sequência multiplicativa: escolhendo para cada número primo entre os valores 1 e -1 aquele que garante menor discrepância nos conjuntos de múltiplos.

A melhor sequência conhecida para o problema de Erdős tem discrepância da ordem de $\ln n$. Começamos por escrever o número n na base 3 (onde usamos 3 dígitos 0, 1 e 2). Por exemplo, $13 = 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2$, logo escreve-se 212 na base 3.

Para definir a nossa sequência definimos $x_n = 1$ se o último dígito não nulo da representação ternária de n é 1 e $x_n = -1$ se for 2. Esta sequência é completamente multiplicativa e é possível mostrar que as somas parciais até n não excedem $\ln_3(n) + 1$, o que corresponde à sua discrepância.

Tratando-se de um problema em aberto que já resistiu 80 anos, não podemos saber quais as ferramentas para o resolver.

Se não conseguirmos resolver um problema, podemos tentar resolver um outro mais simples ou pelo menos relacionado com o primeiro. Existem diversas variantes naturais para o problema proposto por Erdős. Podemos considerar três ou mais cores em vez de apenas duas. A definição de discrepância neste caso deverá ser o afastamento relativamente a $1/3$ da frequência relativa dos elementos de cada uma das cores nos conjuntos de múltiplos. Uma outra variante seria considerar funções f que tomam valores em $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = 1$. Ao considerar variantes do problema procuramos desta forma obter um melhor entendimento do problema original. Até aqui a questão sugerida por Erdős resiste a todos os ataques. Convidamos o leitor a juntar-se na busca coletiva da solução deste problema.

REFERÊNCIAS

[1] Bernard Chazelle, *The Discrepancy method: Randomness and Complexity*





XXVII Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática

ANTÓNIO SALGUEIRO

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

ams@mat.uc.pt

Este ano Portugal participou
 mais uma vez nas Olimpíadas
 Ibero-Americanas de Matemática,
 cuja 27.^a edição decorreu na cidade
 de Cochabamba, na Bolívia,
 entre 29 de setembro a 6 de outubro.

Vieram até ao “Coração da América” 18 delegações de língua oficial portuguesa e espanhola (Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Costa Rica, El Salvador, Equador, Espanha, Guatemala, México, Nicarágua, Panamá, Paraguai, Perú, Porto Rico, Portugal e Uruguai), trazendo cada uma quatro estudantes, e, na maioria dos casos, um líder e um vice-líder. A delegação de Portugal era composta pelos estudantes:

- ▶ **POR 1:** David Pires Tavares Martins, aluno do 10.º ano em Mirandela;
- ▶ **POR 2:** Luís Pedro Lopes Duarte, aluno do 11.º ano em Alcains;
- ▶ **POR 3:** Miguel Miranda Ribeiro Moreira, aluno do 10.º em Lisboa;
- ▶ **POR 4:** Miguel Martins dos Santos, aluno do 11.º ano em Alcanena.

O líder António Salgueiro e o vice-líder Paulo Antunes, ambos do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, faziam também parte da comitiva.

A seleção destes quatro estudantes foi feita com base nos resultados obtidos nos estágios do Projecto Delfos, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, onde foi feita a preparação das equipas internacionais, bem como nas pontuações obtidas nas edições deste ano das Olimpíadas

das Internacionais de Matemática e nas Olimpíadas de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa.

Os líderes chegaram a Cochabamba no dia 29 de setembro, onde receberam uma lista de 36 problemas enviados por alguns dos países (Argentina, Bolívia, Colômbia, Costa Rica, México, Porto Rico, Portugal e Venezuela). Nos dias seguintes, depois de resolver estes problemas e de discutir as suas soluções, o júri internacional, composto pelos líderes dos países presentes, selecionou seis problemas para a prova, e elaborou os respetivos critérios de correção. Os líderes de Portugal e do Brasil traduziram a prova para português.

Entretanto, no dia 30 de setembro, chegaram os estudantes das diversas delegações, juntamente com os vice-líderes, e foram alojados num retiro na localidade de Vinto, a 20 quilómetros de Cochabamba. Foi aí que os 72 alunos realizaram as duas provas, cada uma composta por três problemas e com a duração de 4h30m. Na primeira hora de cada dia, os estudantes podiam esclarecer as suas dúvidas relativamente aos enunciados, que, consoante a sua pertinência, eram ou não respondidas pelo júri internacional, que se deslocou a Vinto para este efeito.

Apenas depois da realização das provas foram permitidos os contactos entre os líderes e os restantes elementos das delegações. Os vice-líderes juntaram-se aos líderes em Cochabamba, para em conjunto corrigirem as provas. Cada resolução foi classificada com um valor entre 0 a 7 pontos, obtido através de um consenso entre o júri de cada problema e o líder e vice-líder de cada país. Os resultados obtidos pelos portugueses foram os melhores de sempre, tendo o total de 136 pontos superado largamente o anterior recorde de 108 pontos.

Com estes excelentes resultados, e muito homogéneos, Portugal conseguiu alcançar o 2.º lugar na classificação por países. Em primeiro lugar ficou o outro país presente de língua portuguesa, o Brasil.

Participante \ Questão	Q. 1	Q. 2	Q. 3	Q. 4	Q. 5	Q. 6	Total	Posição
POR 1 DAVID MARTINS	7	7	7	7	6	4	38	7.º lugar
POR 2 LUÍS DUARTE	7	2	7	7	7	0	30	16.º lugar
POR 3 MIGUEL MOREIRA	7	1	7	7	7	7	36	8.º lugar
POR 4 MIGUEL SANTOS	7	4	0	7	7	7	32	12.º lugar

Posição	País	Pontuação
1	Brasil	150
2	PORTUGAL	136
3	Perú	135
4	Argentina	110
5	Costa Rica	107
6	México	106
7	Espanha	103
8	Chile	93
9	Colômbia	90
10	El Salvador	88
11	Equador	72
12	Guatemala	66
13	Uruguai	61
14	Nicarágua	60
15	Bolívia	59
16	Paraguai	52
17	Panamá	50
18	Porto Rico	34

Classificação por países

Devido a esta pontuação, foi também atribuída a Portugal a Taça Porto Rico, destinada ao país cujas pontuações mais melhoraram nos últimos três anos. Após o apuramento dos resultados, o júri internacional reuniu-se para decidir a partir de que pontuação seriam atribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze, cumprindo a regra de que cerca de metade dos

estudantes deveriam receber uma medalha, e que os números de medalhas de ouro, prata e bronze estão aproximadamente na razão 1:2:3. Tendo isto em conta, o júri decidiu atribuir a medalha de bronze a partir dos 22 pontos, a medalha de prata a partir dos 27 pontos e a medalha de ouro a partir dos 38 pontos. Aos estudantes que não recebessem nenhuma medalha, mas resolvessem um problema completo seria atribuída uma menção honrosa. Deste modo, o David Martins recebeu uma medalha de ouro, e o Luís Duarte, o Miguel Moreira e o Miguel Santos receberam uma medalha de prata.

Durante as Olimpíadas ainda houve um pouco de tempo para conhecer alguns locais da cidade de Cochabamba, como o Palácio Portales, o Museu de História Natural e o Cristo de la Concórdia, bem como as catedrais de Cochabamba e Quillacollo. Após a cerimónia de encerramento, as várias delegações começaram a regressar aos seus países, levando orgulhosamente as suas medalhas. A delegação portuguesa realizou no regresso o percurso inverso da ida, passando pelas cidades de Santa Cruz, Lima e Amesterdão, num total de 40 horas de viagem em cada sentido, mas já a pensar nas próximas Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática que decorrerão em 2013, no Panamá.

SOBRE O AUTOR

António Salgueiro doutorou-se em Matemática na Universidade Paul Sabatier, em 2004. É professor auxiliar no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, onde realiza investigação sobre variedades tridimensionais e teoria de nós. É também presidente da Comissão de Problemas das Olimpíadas Portuguesas de Matemática e membro do Projecto Delfos.



1: David Martins, vencedor de uma medalha de ouro.

2: A delegação portuguesa, com as quatro medalhas e a Taça Porto Rico. Da esquerda para a direita: Paulo Antunes, David Martins, Luís Duarte, Miguel Moreira, Miguel Santos e António Salgueiro.



BERNARDO MOTA
Universidade de Lisboa
bernardomota@campus.ul.pt

A MATEMÁTICA DO LUAR, DE PLUTARCO A KEPLER

Que a iluminação da Lua é causada por reflexão da luz do Sol é hoje conhecimento comum. O fenómeno, contudo, não é evidente, e a sua explicação requer uma teoria formulada matematicamente que demorou séculos a impor-se e a tornar-se convincente.

No século I, Plutarco escreveu uma miscelânea (os *Moralia*, ou *Obras Morais*) onde incluiu um singular opúsculo intitulado “Sobre a Face Visível no Orbe da Lua”. Neste diálogo imaginado, um grupo de amigos discute a natureza da Lua e das suas manchas, a posição deste astro no Universo e demais assuntos relacionados. A tradição matemática não é ignorada: aí aflora o nome de Hiparco, o maior astrónomo grego anterior a Ptolomeu, aí se cita o “Sobre os Tamanhos e Distâncias do Sol e da Lua”, de Aristarco de Samos, aí se discute a primeira proposição da catóptrica euclidiana.

A páginas tantas, um dos intervenientes, Lúcio, coloca um interessante problema de ótica e astronomia que pode resumir-se assim: assumindo que a reflexão se faz em ângulos iguais e que os raios do Sol se refletem na Lua como num espelho, há pontos na superfície desta que teoricamente não deveríamos ver iluminados (ver fig. 1).

O problema, que ficou conhecido como o problema da meia-lua, é referido por outros autores, como Cleomedes (“Sobre os Movimentos Circulares dos Corpos Celestes”, 2.4.103), e permaneceu sem solução durante muitos séculos. Trata-se, afinal de contas, de determinar a constituição da Lua e explicar a natureza da sua iluminação. Terá a Lua uma natureza etérea, ou será semelhante à Terra? Terá uma superfície polida ou rugosa? Reflete a luz do Sol ou emite luz quando aquecida, tal como um pedaço de metal em brasa? Se a luz do Sol é refletida na Lua, como explicar que possamos ver metade do seu disco totalmente iluminado durante a fase de meia-lua?

Alguns autores sugeriram que a lei da igualdade dos ângulos de incidência e reflexão estaria errada. Outros, que a teoria da reflexão da luz do Sol na Lua estaria correta, devendo ser complementada de alguma forma. O mesmo Lúcio indica como, ao prosseguir o seu raciocínio (ver página seguinte).

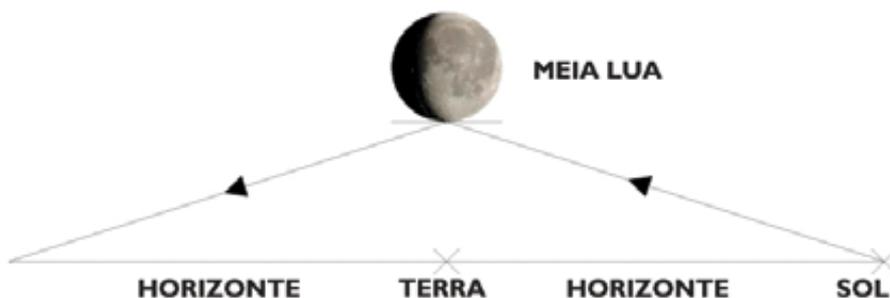


Figura 1: Plutarco, “Sobre a Face Visível no Orbe da Lua”, 929 F-930 A: uma interpretação possível.

“Admitamos, no entanto, por cortesia para com a tão amada geometria, que aquela lei é válida. Em primeiro lugar, é lícito pensar que se aplica apenas a espelhos perfeitamente polidos. A Lua, por sua vez, possui tantas irregularidades e rugosidades, que os raios provenientes de um corpo enorme embatem em relevos de considerável dimensão que recebem contrarreflexos e difusões de luz uns dos outros, refletindo e entrelaçando-se por toda a parte. A reflexão mistura-se com a própria reflexão, que chega até nós como se fosse refletida em muitos espelhos. Em segundo lugar, mesmo que assumamos que as reflexões na superfície da Lua se fazem em ângulos iguais, não é impossível que os raios, ao percorrerem um tão grande intervalo, sofram fraturas e deflexões, misturando e desviando a luz. Alguns provam mesmo, por meio de um desenho, que muitos dos raios [provenientes da Lua] chegam à Terra ao longo de uma reta traçada a partir da curvatura mais afastada de nós; contudo, não foi possível construir a figura geométrica enquanto falava e diante de tantos ouvintes.”

O primeiro argumento acrescenta, ao conceito de reflexão especular em superfícies planas, o conceito de reflexão difusa em superfícies rugosas. O segundo indica que a distância pode distorcer a direção dos raios enviados para a Terra, parecendo aludir a algum tipo de refração causada pela atmosfera da Terra. O argumento final não resolve a dificuldade principal, mas realça que a lei da reflexão, por si só, assegura *alguma* reflexão da luz do Sol na Lua. O texto sugere uma demonstração matemática, mas subtrai-a à nossa curiosidade. Kepler, que leu e comentou profusamente o opúsculo de Plutarco, supriu a lacuna com uma prova, que pode parafrasear-se assim (ver fig. 2): “Há sempre um ponto na meia-lua no qual a luz do Sol é refletida para a Terra. Una-se S, T e L (os centros do Sol, da Terra e da Lua); com centro L e raio LT, descreva-se um círculo; bisseste-se o arco CT em D; una-se D e L; I é o ponto procurado.”

Os parágrafos acima citados ilustram a complexa discussão milenar sobre a relação entre física e matemática, que ainda se mantém, e apontam para a existência de uma física-matemática na Antiguidade que hoje é habitual considerar não ter existido. Mais ainda, mostram como, na Antiguidade, a matemática era chamada a explicar o fenômeno da iluminação da Lua. Porém, nada disto é tão relevante como realçar a forma como Kepler reagiu ao texto de Plutarco, e que é representativa da forma como todos nós olhamos para a ciência antiga. Pensamos que ela incluía argumentos que se perderam e que temos de reconstituir a partir do nada. No entanto, se percorrermos os tratados antigos especificamente dedicados à catóptrica, encontramos demonstrações que podem ter servido para complementar os argumentos que surgem em tratados elementares de astronomia. Indicá-las fica para a próxima vez. Nesta folha de papel é impossível, pela tradicional razão em matemática: falta de espaço.

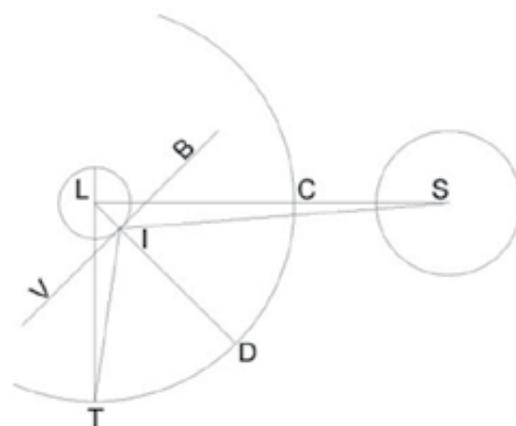


Figura 2: Plutarco, “Sobre a Face Visível no Orbe da Lua”, 930E: a interpretação de Kepler.

REFERÊNCIAS

O comentário de Kepler a Plutarco não se encontra traduzido para qualquer língua moderna. A edição de referência do original (escrito em Latim) é esta: W. von Dyck; M. Caspar (hrsg.), *Johannes Kepler. Gesammelte Werke*, vol. 11.2, München, Bayerische Akademie der Wissenschaften, 1993, pp. 410-436, esp. 418). Eu próprio me entusiasmei com o texto de Plutarco e traduzi-o para português. A edição pode ser descarregada gratuitamente no endereço eletrônico seguinte: https://bdigital.sib.uc.pt/jspui/bitstream/123456789/36/3/sobre_a_face_visivel_no_orbe_da_lua.pdf.



Publicado originalmente no jornal Público, em 26/09/2012. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR:

Rogério Martins Universidade Nova de Lisboa

VICE-DIRETOR:

Alessandro Margheri Universidade de Lisboa

CONSELHO EDITORIAL:

Afonso Pedrosa Pinto E. S./3 S. Pedro Vila Real • António Rosa E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho • Elisabete Rodrigues E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • Graciano de Oliveira Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • Henrique Leitão Universidade de Lisboa • João Filipe Queiró Universidade de Coimbra • José Francisco Rodrigues Universidade de Lisboa • José Miguel Rodrigues de Sousa E. S. Felismina Alcântara • Lina Fonseca Escola Superior de Educação de Viana do Castelo • Maria do Céu Pinto Universidade de Coimbra • Manuel Domingos Oliveira Cadete Universidade Agostinho Neto • Paulus Gerdes Universidade Eduardo Mondlane, Moçambique • Raquel Escórcio antiga professora na E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • Teresa Almada Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • Juan-Miguel Gracia Universidad del País Vasco, Espanha

ASSISTENTE EDITORIAL:

Sílvia Dias SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

Dossier – Comunicação e imagem

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB:

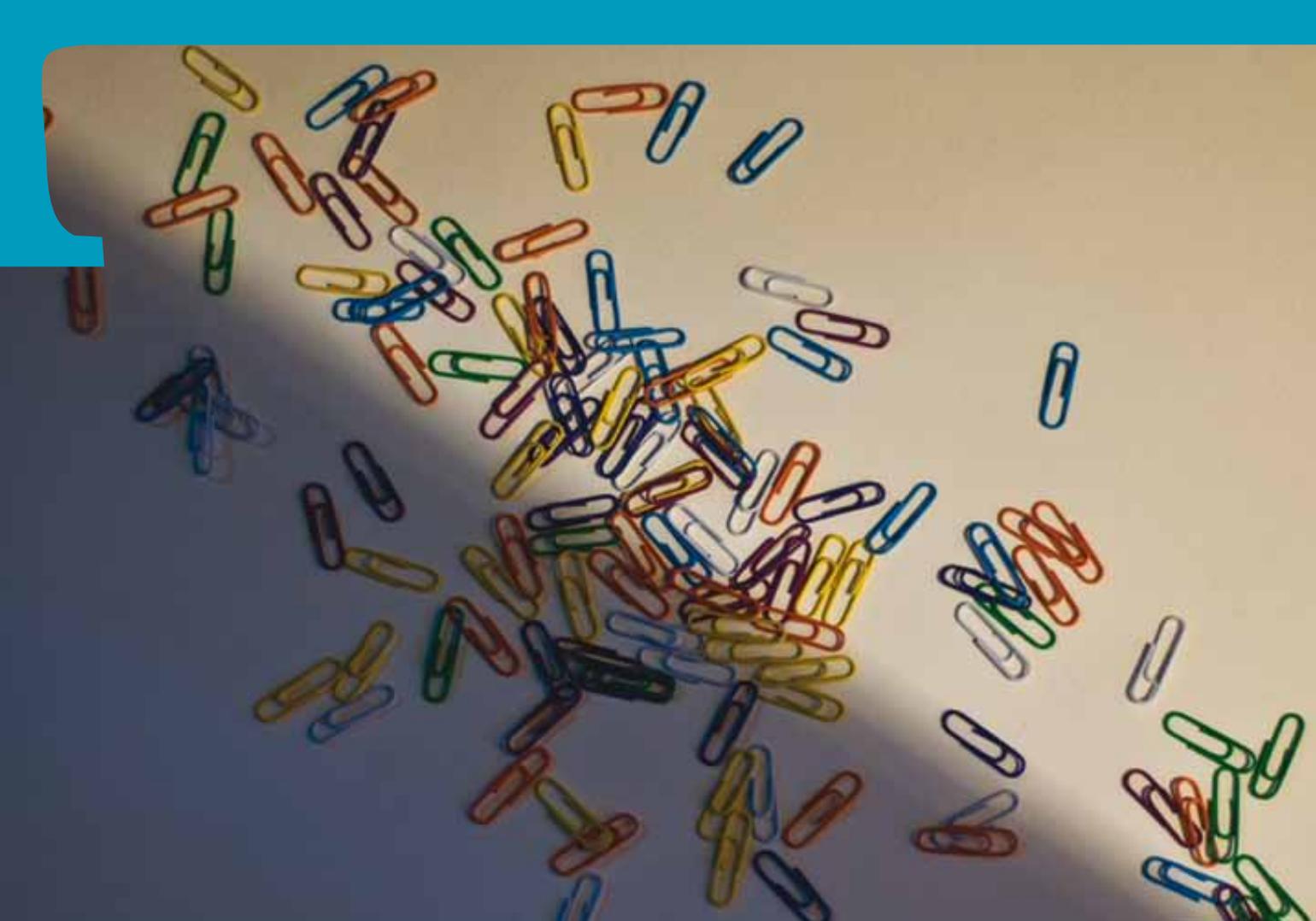
Sílvia Dias SPM

PROPRIEDADE:

Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3^o Esq. 1050-187 Lisboa
Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

TIRAGEM 1500 Exemplares

ISSN 0373-2681 • ICS 123299 • DEPÓSITO LEGAL: 159725/00



A Regressão Linear Simples no Ensino Secundário

HELENA RIBEIRO^a, MARIA ALICE MARTINS^b E RUI SANTOS^c

^a helena.ribeiro@ipleiria.pt, ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE LEIRIA

^b martinsalice69@gmail.com, AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ARTUR GONÇALVES DE TORRES NOVAS

^c rui.santos@ipleiria.pt, ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE LEIRIA

Neste artigo iremos focar a atenção no erro mais comum que detetamos em manuais por nós consultados, o da utilização da mesma reta de regressão, obtida pelo método dos mínimos quadrados, para estimar um valor de x condicionado a um dado valor de y bem como para estimar um valor de y condicionado a um valor de x quando, corretamente, dever-se-iam utilizar duas retas distintas (exceto em alguns casos muito particulares onde as duas retas são análogas). Este erro será exemplificado utilizando um *software* (que é *freeware*) frequentemente utilizado no ensino da geometria no ensino básico e secundário, o *GeoGebra*, e que é uma potencial ferramenta no ensino da regressão linear, bem como de outros temas da Estatística.

A pesar de a Estatística desempenhar, cada vez mais, um lugar de destaque na disciplina de Matemática, quer ao nível do ensino básico quer ao nível do ensino secundário, os materiais disponíveis para o ensino e a compreensão dos conceitos mais elementares desta área nem sempre são os mais apropriados (apesar de contributos extremamente bem sucedidos pela literacia estatística, como ilustra o premiado projeto ALEA – Ação Local de Estatística Aplicada – que pode ser consultado em <http://www.alea.pt>).

1. REGRESSÃO LINEAR NO PROGRAMA DO ENSINO SECUNDÁRIO

No programa de Matemática A do 10.º ano (ensino secundário) a terceira unidade a ser lecionada é a Estatística (cf. Silva *et al.*, 2001). Nesta fase os alunos já possuem algumas noções que adquiriram no 3.º ciclo do ensino básico e já realizaram pequenos trabalhos, no entanto, é a primeira vez que se fará referência a distribuições bidimensionais, sendo efetuada uma abordagem gráfica e intuitiva. Deste modo, os tópicos que fazem parte do programa são:

- ▶ Diagrama de dispersão, explorando o conceito de dependência estatística;
- ▶ Ideia intuitiva de correlação: exemplos gráficos de correlação positiva, negativa ou nula;
- ▶ Coeficiente de correlação e sua variação;
- ▶ Definição de centro de gravidade de um conjunto finito de pontos, sua interpretação física;
- ▶ Ideia intuitiva de reta de regressão, sua interpretação e limitações.

O programa sugere as seguintes indicações metodológicas: introdução ao estudo dos dados bivariados, generalizando o estudo de uma única variável e destacando a representação gráfica sob a forma de diagrama de dispersão ou diagrama de pontos. Com base nesta representação, pretende-se identificar a existência de uma associação linear entre as duas variáveis em estudo, utilizando uma medida que quantifica o grau de associação – o coeficiente de correlação, assim como apresentando um modelo matemático que permitirá, conhecido o valor de uma das variáveis, obter uma estimativa para o valor da outra variável. Os recursos propostos a utilizar no ensino desta temática são:

- ▶ “Papel e lápis” para a construção do diagrama de dispersão (nuvens de pontos);
- ▶ Calculadora gráfica ou computador para visualizar o diagrama de dispersão, desenhar a reta de regressão, calcular o coeficiente de correlação e encontrar o modelo matemático (função polinomial de grau 1) que caracterize a relação entre as duas variáveis.

Desta forma, no 10.º ano de escolaridade é transmitida uma ideia intuitiva de reta de regressão, tentando explorar

a sua interpretação e as suas limitações. Apesar de não ser objetivo deste nível de ensino explicar formalmente a reta obtida, é transmitida a ideia pela qual ela é determinada – corresponde à reta que faz com que a soma dos quadrados das distâncias de cada ponto da nuvem à reta seja mínima (**método dos mínimos quadrados**), sendo esta reta unicamente determinada recorrendo a uma calculadora.

2. O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Consideremos um conjunto de dados (x_i, y_i) , com $i = 1, \dots, n$, para o qual se pretende ajustar a reta

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad (1)$$

onde y_i representa a variável dependente ou endógena (que o modelo pretende explicar o comportamento), x_i a variável independente ou exógena (que será uma variável explicativa para a modelação de y_i), ε_i a variável erro (que é uma variável aleatória com algumas características fundamentais para a fiabilidade da inferência estatística associada à regressão) e β_0 e β_1 os parâmetros da regressão. A reta estimada será da forma

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \quad (2)$$

onde \hat{y}_i , $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ representam, respetivamente, os estimadores (ou estimativas, para as quais, ao longo deste texto, iremos utilizar igual representação) de y_i , β_0 e β_1 . Desta forma, os erros ε_i correspondem à diferença entre os valores observados para y_i e os valores estimados, *i.e.*

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i. \quad (3)$$

O método habitualmente utilizado para estimar os parâmetros da reta é o **método dos mínimos quadrados** que determina os estimadores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ que minimizam a soma dos quadrados dos erros, *i.e.* que minimizam

$$f(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2. \quad (4)$$

Para determinar o mínimo de $f(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ teremos

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \\ \frac{\partial f(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \hat{\beta}_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{s_y}{s_x} r_{xy} \end{cases}, \quad (5)$$

onde:

- ▶ \bar{y} e \bar{x} representam as médias de y e x ;
- ▶ s_y e s_x representam os desvios padrão de y e x ;
- ▶ s_{xy} representa a covariância entre x e y ;
- ▶ r_{xy} o coeficiente de correlação entre x e y .

O determinante da matriz Hessiana é igual a $4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - 4(\sum_{i=1}^n x_i)^2 = 4n^2 s_x^2$ que é positivo (desde que x_i não assumam sempre o mesmo valor). Assim sendo, a matriz Hessiana é definida positiva e os valores determinados em (5) correspondem efetivamente ao mínimo pretendido.

Desta forma, nas equações presentes em (5) temos as fórmulas dos estimadores dos mínimos quadrados de β_0 e β_1 com os quais podemos, recorrendo à reta de regressão (2), obter estimativas para y conhecendo um valor específico de x . As propriedades da inferência estatística resultante desta aplicação dependem das características dos resíduos (variável ε). Contudo, uma vez que esta abordagem não é efetuada no ensino secundário, sublinhamos apenas que os estimadores assim obtidos gozam de excelentes propriedades (não enviesamento, eficiência e consistência) caso a variável ε satisfaça determinadas características (nomeadamente, normalidade, independência e homocedasticidade). Para mais informações acerca das propriedades dos estimadores, pode ser consultado, por exemplo, Montgomery *et al.* (2006).

Algumas propriedades da regressão são exploradas no ensino secundário, como, por exemplo, o facto de a **soma dos erros ser nula**, $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0$, pois

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = n(\bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{x}) = 0, \quad (6)$$

tendo em conta que $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$ (cf. equação (5)), e a reta estimada **passar sempre pelo centro de gravidade dos dados** (\bar{x}, \bar{y}) uma vez que, utilizando (2) e (5), se obtém

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} + \hat{\beta}_1 \bar{x} = \bar{y}, \quad (7)$$

logo, quando $x = \bar{x}$, teremos $y = \bar{y}$. Estas e outras propriedades da regressão linear simples podem ser analisadas em Murteira (1993), Reis (1998), Martins (2005), Pestana e Velosa (2009), entre outros.

Contudo, salientemos que a reta obtida pelo método dos mínimos quadrados para estimar y em função de x e a reta obtida para estimar x em função de y **não são, em geral, idênticas**.

3. A REGRESSÃO LINEAR INVERSA

Podemos utilizar fórmulas análogas às apresentadas em (5) para efetuarmos a regressão de x em função de y obtendo

$$\hat{x}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 y_i, \quad (8)$$

onde $\hat{\alpha}_0 = \bar{x} - \hat{\alpha}_1 \bar{y}$ e $\hat{\alpha}_1 = \frac{s_x}{s_y} r_{xy}$. Invertendo a reta (i.e. resolvendo em função de y_i e trocando os papéis desempenhados pelas variáveis), obtemos

$$\tilde{y}_i = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_i. \quad (9)$$

Os estimadores de β_0 e β_1 assim obtidos, supondo $r_{xy} \neq 0$ (pois caso $r_{xy} \approx 0$ a reta de regressão não terá qualquer sentido), serão dados por:

$$\tilde{\beta}_0 = -\frac{\hat{\alpha}_0}{\hat{\alpha}_1} = -\frac{\bar{x} - \hat{\alpha}_1 \bar{y}}{\hat{\alpha}_1} = \bar{y} - \tilde{\beta}_1 \bar{x} \text{ e } \tilde{\beta}_1 = \frac{1}{\hat{\alpha}_1} = \frac{s_y}{s_x} r_{xy}^{-1}. \quad (10)$$

As retas (2) e (9) são coincidentes se e só se $\hat{\beta}_0 = \tilde{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1 = \tilde{\beta}_1$ que, recorrendo às equações (5) e (10) só se verifica quando

$$r_{xy} = 1 \vee r_{xy} = -1. \quad (11)$$

Assim sendo, ambas as retas passam pelo mesmo ponto (\bar{x}, \bar{y}) , mas só se obtém a mesma reta (retas coincidentes) utilizando os dois métodos se o módulo da correlação for unitário (sendo os erros, nestes casos, todos nulos, uma vez que a reta passa precisamente por todos os pontos). Deste modo, a reta de regressão de y em função de x , determinando os parâmetros da reta $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ que minimizam $\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$, será distinta (exceto se $|r_{xy}| = 1$) da reta obtida quando efetuamos uma regressão de x em função de y , determinando os parâmetros da reta $\hat{x}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 y_i$ que minimizam $\sum_i (x_i - \hat{x}_i)^2$. Esta diferença resulta da forma como definimos os erros nas duas regressões, pois enquanto na primeira os erros são medidos

paralelamente ao eixo das ordenadas (o erro é definido pela diferença entre o valor observado de y e o seu valor estimado condicionalmente a x , $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$, cf., ilustra o primeiro gráfico da figura 1), na segunda os erros são medidos paralelamente ao eixo das abcissas (o erro é definido pela diferença entre o valor observado x e o seu valor estimado pela regressão em função de y , $\varepsilon_i = x_i - \hat{x}_i$, cf. segundo gráfico da figura 1). Desta forma, será erróneo utilizar a regressão de y em função de x para efetuar previsões para x quando conhecemos um determinado valor para y e, apesar de em algumas aplicações a diferença das duas retas poder ser diminuta, existem outras situações em que o erro pode assumir valores elevados. Há, contudo, determinadas situações específicas para as quais se justifica a necessidade de utilização de regressão inversa, como ilustram alguns modelos de calibração (cf. Brown, 1993).

Os modelos de calibração estatística (ou, por vezes, denominados por previsão inversa) são muito utilizados em química, engenharia, bioestatística e podem ser extremamente úteis em algumas aplicações. Contudo, estas aplicações são caracterizadas por contextos distintos dos que previamente referimos. Consideremos, então, que a variável y é medida através de processo complicado (muitas vezes fora do nosso alcance), dispendioso (em termos de tempo e/ou monetariamente) mas que os seus resultados são extremamente precisos (sem erros ou com erros negligenciáveis em relação aos erros de medição da variável x). A variável x é medida por um processo simples, rápido, e económico mas que tem pouca precisão (obtemos valores aproximados). O objetivo é estimar novos valores de y para alguns valores de x conhecidos. Neste contexto, os erros a ter em conta no método de regres-

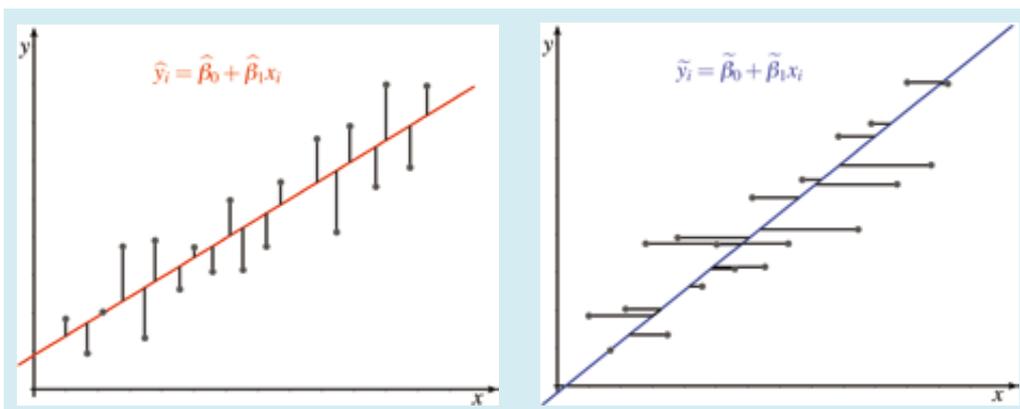


Figura 1: Definição dos erros na regressão linear

são linear deverão ser $\varepsilon_i = x_i - \hat{x}_i$ (pois $y_i - \hat{y}_i \approx 0$) estimando-se a regressão $\tilde{y}_i = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_i$ utilizando os estimadores apresentados na equação (10). Com esta regressão podemos estimar novos valores para y condicionados a valores conhecidos de x . Os estimadores assim obtidos, sob determinadas condições, gozam igualmente de boas propriedades. Osborne (1991) faz uma apresentação histórica da evolução destes métodos, incluindo alguma discussão sobre a problemática inerente à sua utilização.

Contudo, estes contextos específicos nos quais a utilização da calibração é frequentemente utilizada, não são abordados no ensino secundário.

4. ESTIMAÇÃO DE Y CONDICIONADO A X = X₀

Consideremos que se pretende estimar o valor de y quando x assume o valor x_0 . Recorrendo à equação (2), regressão de y em função de x , obtemos

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 = \bar{y} - \frac{s_y}{s_x} r_{xy} \bar{x} + \frac{s_y}{s_x} r_{xy} x_0 \\ &= \bar{y} + \frac{s_y}{s_x} r_{xy} (x_0 - \bar{x}),\end{aligned}\quad (12)$$

e recorrendo à equação (9), função inversa da regressão de x em função de y , obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_0 = \bar{y} - \frac{s_y}{s_x} r_{xy}^{-1} \bar{x} + \frac{s_y}{s_x} r_{xy}^{-1} x_0 \\ &= \bar{y} + \frac{s_y}{s_x} r_{xy}^{-1} (x_0 - \bar{x}).\end{aligned}\quad (13)$$

A distância entre as duas estimativas obtidas é dada por $|\hat{y} - \tilde{y}| = \frac{s_y}{s_x} |x_0 - \bar{x}| |r_{xy} - r_{xy}^{-1}|$, (14) que depende do quociente entre o desvio padrão de y e o de x , da distância entre x_0 e \bar{x} [o que era espectável uma vez que ambas as retas passam no ponto (\bar{x}, \bar{y})] e da distância entre r_{xy} e r_{xy}^{-1} (que será nula se $|r_{xy}| = 1$, isto é, quando a relação linear é perfeita e as duas retas de regressão são coincidentes).

Conforme claramente ilustram os quatro exemplos retratados na figura 2, onde são apresentadas as duas retas obtidas utilizando conjuntos distintos de 200 observações (recorrendo ao *software GeoGebra*), com coeficiente de correlação igual a 0.95, 0.90, 0.80 e 0.70, podemos constatar a distinção entre as duas retas, a diferença entre o valor estimado de y obtido pelas duas retas quando x assume o valor x_0 , bem como o aumento desta distância com a diminuição da correlação entre x e y e/ou o afastamento de x_0 relativamente a \bar{x} .

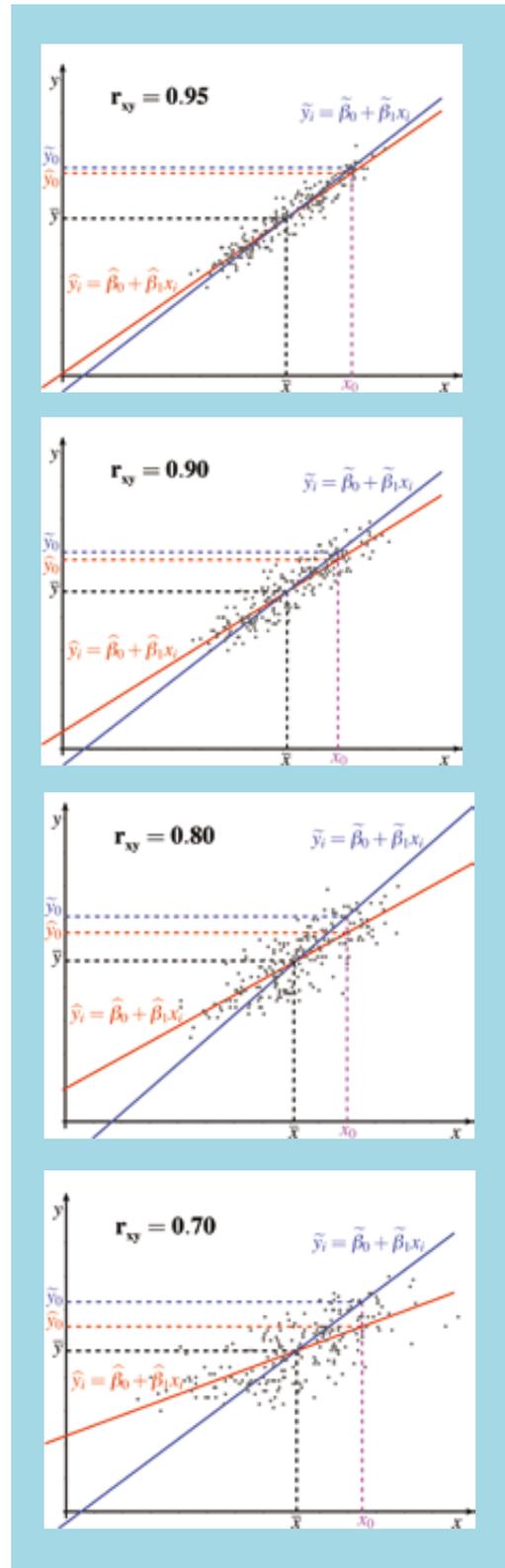


Figura 2: Regressão de y em função de x versus regressão de x em função de y

5. O GEOGEBRA NO ENSINO DA REGRESSÃO LINEAR

Gráficos análogos aos representados na figura 2 podem ser construídos em sala de aula com recurso ao *software GeoGebra*, tendo a vantagem de poderem ser dinâmicos, isto é, ao alterarmos um ponto (ou um conjunto de pontos) visualizarmos imediatamente as consequentes alterações no coeficiente de correlação e nas retas estimadas, bem como ao mudarmos a coordenada x_0 percebermos as consequentes implicações no valor de y estimado. Para este fim, no *GeoGebra*, podemos exibir a Folha de Cálculo e utilizar as duas primeiras colunas (A e B) para definir as coordenadas dos pontos a utilizar para a regressão linear. Com os pontos definidos podemos criar uma lista de pontos (basta selecionar as coordenadas e, utilizando o botão do lado direito do rato, selecionar “Criar lista de pontos”). Desta forma será criada a lista1 (nome atribuído automaticamente pelo *GeoGebra*, mas que pode ser facilmente alterado nas propriedades da lista de pontos) que contém os n pontos que correspondem ao nosso conjunto de dados (x_i, y_i) . Podemos de seguida determinar o coeficiente de correlação, através do comando `CoefficienteCorrelação[lista1]`; a reta de regressão de y em função de x de acordo com a equação (2), recorrendo ao comando `RetadeRegressão[lista1]` e, no mesmo gráfico, representar a reta de regressão de x em função de y [cf. equação (9)] utilizando o comando `RegressãoLinearX[lista1]`. As duas retas podem ser representadas por cores diferenciadas de forma a podermos distingui-las facilmente. Assim, ao ser alterado um ou mais pontos da lista1, quer o coeficiente de correlação quer as retas serão automaticamente ajustadas à nova nuvem de pontos, o que permitirá visualizar facilmente a diferença entre as duas retas, que a sua interseção se verifica sempre no ponto (\bar{x}, \bar{y}) , bem como observar as alterações no coeficiente de correlação. Em sala de aula, pode explorar-se a sensibilidade do coeficiente de correlação, bem como da reta ajustada, a alterações das coordenadas dos pontos, em particular à existência de pontos mais afastados (*outliers* e/ou observações influentes). Caso pretendamos analisar igualmente os valores estimados para y para um dado valor de x , basta definir um ponto A [de coordenadas $(x_0, 0)$] no eixo das abcissas e construir os segmentos de reta paralelos ao eixo das ordenadas que liguem o ponto A a cada uma das retas estimadas (sejam P_1 e P_2 os pontos das retas com abcissa x_0). As ordenadas dos pontos P_1 e P_2 cor-

respondem às estimativas obtidas com cada uma das retas (valores \hat{y}_0 e \tilde{y}_0 representados nos gráficos da figura 2). Para melhor visualizar o valor das estimativas obtidas podemos criar segmentos de retas paralelos ao eixo das abcissas que liguem P_1 e P_2 ao eixo das ordenadas (de forma análoga à apresentada nos gráficos da figura 2). Com esta construção, caso alteremos a abcissa x_0 do ponto A , as estimativas obtidas serão automaticamente ajustadas, permitindo, desta forma, observar as suas diferenças quando utilizamos valores para x_0 mais próximos ou mais afastados de \bar{x} .

De referir que, no ensino da Estatística, a utilidade do *GeoGebra* não se restringe à regressão linear, pois este *software* pode igualmente ser utilizado no ensino de outros temas da Estatística, uma vez que permite determinar a média, mediana, moda, variância, desvio padrão e os quartis, bem como construir tabelas de frequências e representar alguns gráficos, tais como o diagrama de caule e folhas, o gráfico de barras, o gráfico de pontos, o histograma e o diagrama de extremos e quartis. Por este motivo, o *GeoGebra* é uma ferramenta que pode perfeitamente ser utilizada com sucesso no ensino dos conceitos elementares de Estatística, quer no ensino secundário quer no ensino básico. Por outro lado, o facto de este *software* possibilitar efetuar uma construção dinâmica, tais construções permitem a exploração da sensibilidade de algumas medidas (como, por exemplo, das medidas de tendência central ou das medidas de dispersão) a variações do valor de uma ou mais observações.

6. MANUAIS ADOPTADOS NO ENSINO SECUNDÁRIO

Em diversos manuais adotados no ensino secundário é utilizada a mesma reta de regressão para estimar o valor de y quando conhecemos um valor de x (condicionado a $x = x_0$) e para estimar o valor de x em função de um valor específico da variável y ($y = y_0$), o que não deveria ocorrer pelas razões previamente apontadas (não iremos incluir estes manuais nas referências bibliográficas uma vez que é nosso objetivo contactar diretamente com os autores desses manuais). Esta confusão parece derivar do desconhecimento de que as retas são distintas. Sublinhemos que, dos manuais por nós consultados, há um que apresenta corretamente este tema e, partindo de um exemplo simples, explica aos alunos a razão pela qual não devem usar a mesma reta de regressão em ambos os casos, referindo:

“A recta de regressão, de equação $y = 0,797x + 121,282$, foi construída para, dado o peso x , em kg, de um jogador prever a altura y , em cm, do mesmo (. . .). Os erros cometidos, relativamente aos valores de y medidos e os valores previstos são os comprimentos dos segmentos de recta assinalados na figura (. . .). A equação da recta de regressão é determinada, utilizando ferramentas matemáticas, de forma a minimizar a acumulação destes comprimentos (...). Percebe-se assim, que é possível utilizar a equação desta recta para prever valores da altura dado o valor do peso, mas, no entanto não se pode utilizar esta equação para prever o valor do peso dado o valor da altura”

[Negra & Martinho, 2010, pp.181-182]

Mesmo quando no desenvolvimento teórico nada é referido acerca da distinção entre estas duas retas, diversos manuais apresentam exercícios para estimar um valor de x condicionado a um valor de $y = y_0$ utilizando a regressão de y em função de x como se as duas regressões fornecessem o mesmo resultado (de facto, tudo leva a crer que alguns dos autores de manuais escolares desconheçam as diferenças entre as duas retas obtidas). É, por este motivo, igualmente do desconhecimento de alguns professores do ensino secundário a existência das referidas diferenças, razão pela qual é importante divulgá-las de forma a serem efetuadas as correções necessárias nos manuais, bem como alertar e clarificar o corpo docente para esta situação.

Por outro lado, pretendemos igualmente salientar que a exploração de exemplos dinâmicos em *GeoGebra*, *software* já utilizado por muitos docentes em diversos contextos da Matemática, torna intuitiva a diferença entre os dois métodos. O cálculo das duas retas é automático e, alterando os valores da nossa amostra (presentes na folha de cálculo do *GeoGebra*), permite visualizar a consequente alteração (sensibilidade) das retas, bem como dos valores estimados pelos dois modelos, razão pela qual nos parece uma ferramenta adequada para o ensino da regressão linear, permitindo atingir com sucesso todos os objetivos estipulados no programa de Matemática do ensino secundário.

Agradecimentos:

Este trabalho foi financiado por Fundos Nacionais através da FCT — Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do projeto PEst-OE/MAT/UI0006/2011 e pelo Instituto Politécnico de Leiria.

REFERÊNCIAS

Brown, P.J. (1993). *Measurement, Regression, and Calibration*, Oxford University Press.

Martins, M.E.G. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Sociedade Portuguesa de Estatística, Lisboa.

Montgomery, D.C., Peck, E.A. and Vining, G.G. (2006). *Introduction to Linear Regression Analysis*, 4th Ed., Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons.

Murteira, B. (1993). *Análise exploratória de dados - Estatística Descritiva*, McGraw-Hill, Lisboa.

Negra, C. e Martinho, E. (2010). *Matemática A – 10.º ano Volume 2*, Santillana, Carnaxide.

Osborne, C. (1991). “Statistical Calibration: A Review”, *International Statistical Review* 59, n.º 3, pp. 309–336.

Pestana, D.D. e Velosa, S.F. (2009). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Vol. 1, 3.ª ed., Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

Reis, E. (1998). *Estatística Descritiva*, Edições Sílabo, Lisboa.

Silva, J.C., Fonseca, M.G., Martins, A.A., Fonseca, C.M.C. e Lopes, I.M.C. (2001). *Programa de Matemática A - Ensino Secundário*, ME-DES, Lisboa.

PÁGINAS DA INTERNET

ALEA — www.alea.pt

SOBRE OS AUTORES

Alice Martins é licenciada em Matemática (ramo educacional) pela FCT-UC e mestre em Educação e Tecnologia em Matemática no IPEiria. É docente de Matemática no Agrupamento de Escolas Artur Gonçalves de Torres Novas.

Helena Ribeiro é licenciada em Matemática (ramo educacional) pela FCT-UC e doutorada em Matemática pelo IST-UTL. É docente no Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria e membro do CEMAT — Centro de Matemática e Aplicações.

Rui Santos é licenciado em Matemática Aplicada à Economia e Gestão pelo ISEG-UTL e doutorado em Probabilidades e Estatística pela FCUL. É docente no Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria e membro do CEAUL — Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa.

JÁ ARRANCARAM AS 31.^{AS} OLIMPIADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

Depois de um ano letivo em que Portugal superou todas as expectativas nas competições internacionais de matemática, chegou o momento de preparar terreno para mais uma edição das Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM). A primeira etapa desta competição, que no ano passado reuniu cerca de 58 mil participantes, decorreu no dia 7 de novembro. Nesta primeira eliminatória participaram cerca de mil escolas inscritas nas diferentes categorias - Categorias Júnior (6.º e 7.º anos), A (8.º e 9.º anos) e B (10.º, 11.º e 12.º anos). No mesmo dia realizou-se também a prova única das Pré-Olimpíadas (5.º ano). No dia 9 de janeiro, na segunda eliminatória da competição, serão apurados os finalistas que, entre 14 e 17 de março, disputarão o ouro, a prata e o bronze na Escola Básica e Secundária de Albufeira, a escola anfitriã da final nacional desta 31.ª edição das OPM. Um bom resultado na final pode garantir o acesso a um lugar nas equipas que representarão Portugal nas competições internacionais.

MAIO É MÊS DE MINI-OLIMPIADAS

Os mais novos terão também oportunidade de participar nas OPM no próximo mês de maio, altura em que se realizará a prova única das Mini-Olimpíadas, dirigidas aos 3.º e 4.º anos. As inscrições podem ser efetuadas até 30 de abril de 2013 no site <http://mopm.mat.uc.pt/MOPM/index.php>.



COLÓQUIO EM LISBOA CELEBRA OBRA DE BENTO DE JESUS CARAÇA

Bento de Jesus Caraça foi um dos maiores nomes da cultura científica portuguesa na primeira metade do séc. XX e a ele se deve a publicação de várias obras de divulgação de ciência. Para comemorar os 70 anos da publicação dos célebres *Conceitos Fundamentais da Matemática*, a SPM, em conjunto com a Fundação Mário Soares, organizou o colóquio “Os 70 anos dos *Conceitos Fundamentais da Matemática* de Bento de Jesus Caraça”. O encontro, que decorreu no dia 25 de outubro no Instituto para a Investigação Interdisciplinar da Universidade de Lisboa, contou com a presença de diversos oradores cujas contribuições incidiram sobre a vida e a obra de Bento de Jesus Caraça, um dos fundadores da SPM. Esta iniciativa do Seminário Nacional de História da Matemática da SPM contou com o apoio do Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais e da Fundação Calouste Gulbenkian.

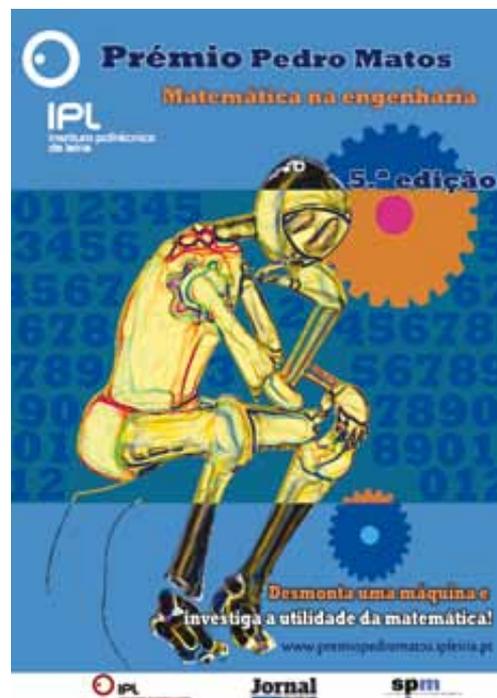


MATEMÁTICA PARA MIÚDOS E GRAÚDOS NA SIC NOTÍCIAS E NA SIC K

Estreou no passado dia 13 de outubro, na SIC Notícias, o “Isto é Matemática”, um programa inovador e dinâmico, conduzido por Rogério Martins, diretor da *Gazeta*, em que este mostra de forma clara e simples como a matemática faz parte de tudo aquilo que nos rodeia. Um novo episódio pode ser visto todos os sábados às 20h50, na SIC Notícias, e revisito noutros horários ao longo da semana (domingos, às 8h50, terças-feiras, às 15h50, quartas-feiras, às 4h30 e sextas-feiras, às 9h50). Entretanto, o “Isto é Matemática” passou também a ser transmitido no canal SIC K, dirigido a um público mais jovem, às quintas-feiras pelas 16h50, e também com várias repetições durante a semana. Os cibernautas podem ainda acompanhar o programa no canal do “Isto é Matemática” no YouTube, em <http://www.youtube.com/user/istoematematica>, e ficar a par de todas as suas novidades na página facebook.com/istoematematica. Este é um projeto da SPM, produzido pela Sigma 3, com o apoio do COMPETE e do Ciência Viva.

INSCRIÇÕES ABERTAS PARA PRÉMIO PEDRO MATOS

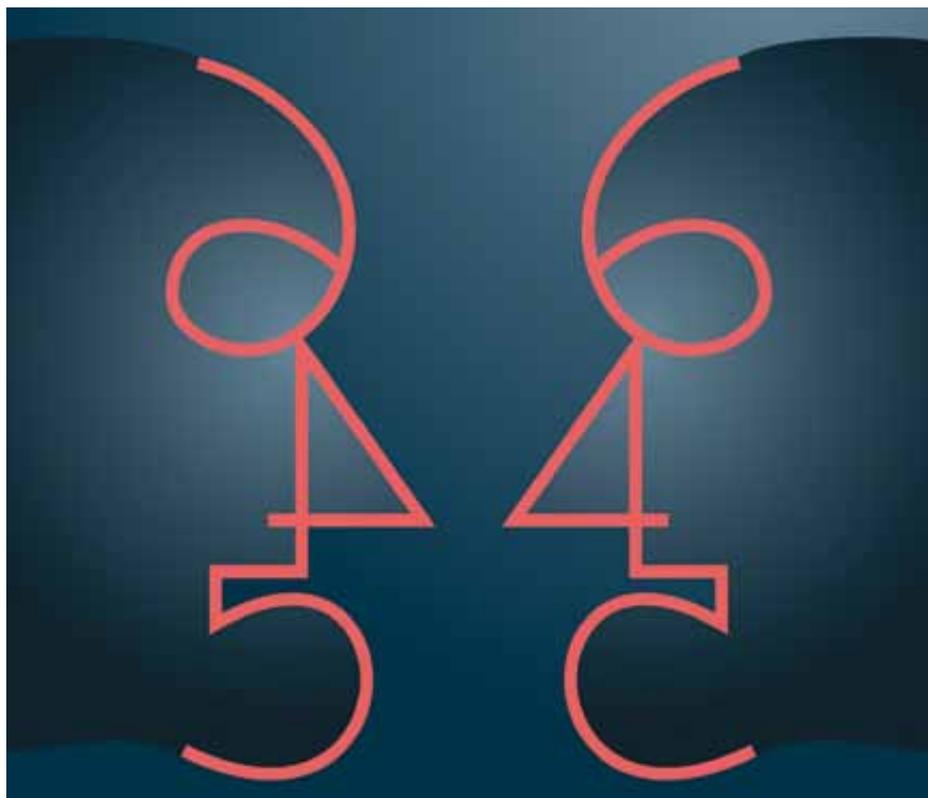
A SPM apoia mais uma edição do Prémio Pedro Matos, uma iniciativa dirigida a estudantes do ensino secundário, que tem como objetivo fomentar a criatividade e o interesse pela matemática e suas aplicações, bem como descobrir jovens talentos. As inscrições para a quinta edição deste concurso estarão abertas até ao dia 17 de abril e os participantes devem entregar os seus trabalhos até 17 de maio. Os estudantes podem candidatar-se individualmente ou em grupo e podem ainda contar com a colaboração de um professor do ensino secundário, a quem caberá o papel de orientador. A entrega de prémios realizar-se-á no dia 11 de julho. Este Prémio, criado e organizado pelo Instituto Politécnico de Leiria, é uma homenagem a Pedro Manuel Amado Roque de Matos, professor e investigador de mérito da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria.





MAT-OESTE REGRESSA EM JULHO DE 2013

A “Matemática na Engenharia” será o tema em destaque na quinta edição do Mat-Oeste, organizado pelo Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria e apoiado pela SPM. Este encontro, dirigido a docentes e público em geral, decorrerá no mês de julho e promoverá a discussão e partilha de ideias no âmbito das mais diversas vertentes da matemática. Para além das atividades relacionadas com o Mat-Oeste, os participantes poderão assistir à entrega dos prémios da 5.ª edição do Prémio Pedro Matos.



DELEGAÇÃO REGIONAL SUL E ILHAS DA SPM PROMOVE “UM CONTO QUE CONTAS”

Os alunos do 1.º ao 12.º ano de escolaridade das escolas de todo o País estão convidados a participar no concurso “Um Conto que Contas”, que consiste na escrita e ilustração de um conto que envolva conteúdos matemáticos. O concurso, organizado pela Delegação Regional do Sul e Ilhas da SPM, tem como principais objetivos fomentar hábitos de leitura e de escrita, promover a articulação entre diversas áreas do saber, desenvolver a capacidade de expressão e comunicação e estimular a imaginação. Os participantes podem concorrer individualmente ou em grupo a uma de oito categorias e de acordo com os respetivos ciclos de ensino. Os contos a concurso devem ser enviados até ao dia 15 de março. Os melhores trabalhos serão premiados tendo em conta a qualidade dos conteúdos matemáticos, o domínio da língua, a originalidade, a criatividade, o encadramento lógico narrativo, etc. “Um Conto que Contas” tem o apoio da Universidade de Évora, da Fundação Luís de Molina, do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações da Universidade de Évora, do Centro de Matemática Aplicada e Tecnologias de Informação da Universidade dos Açores e da Delta Cafés. O regulamento do concurso pode ser consultado em <http://www.spmsul.uevora.pt/concurso.htm>

CONCURSO “SABER PORQUÊ” PÕE ESTUDANTES À PROCURA DE RESPOSTAS



O concurso “Saber Porquê” pretende envolver alunos e professores do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário num desafio de perguntas e respostas. No dia 10 de cada mês serão colocadas no site do Ministério da Educação e Ciência (MEC) perguntas sobre ciência a que os alunos, sob orientação de um professor, serão convidados a responder num vídeo de três minutos. Os melhores trabalhos de cada mês serão divulgados no site do MEC e na página “Saber Porquê” no Facebook. No final do ano letivo as melhores respostas a nível nacional serão premiadas. Este concurso é dinamizado pelo MEC, no âmbito do programa “O Mundo na Escola”.



MATEMÁTICA RECREATIVA EM DESTAQUE EM PONTA DELGADA NO MÊS DE ABRIL

A utilização de jogos, *puzzles* ou quebra-cabeças para o desenvolvimento do raciocínio matemático é uma prática com séculos de existência e continua a ganhar terreno na atualidade. A denominada Matemática Recreativa reúne cada vez mais adeptos e estará em destaque entre 3 e 6 de abril do próximo ano na Universidade dos Açores, em Ponta Delgada, no Recreational Mathematics

Colloquium III. Durante o encontro, diversos oradores nacionais e estrangeiros com trabalho desenvolvido na área darão o seu contributo à discussão sobre a Matemática Recreativa. Simultaneamente, a Universidade dos Açores acolherá o Board Game Studies Colloquium XVI, uma iniciativa da International Society for Board Game Studies que todos os anos reúne académicos, historiadores, matemáticos, inventores de jogos, colecionadores, entre outros, para partilha de conhecimentos sobre jogos de tabuleiro. Este colóquio, que já passou por países tão distintos como a Holanda, os Estados Unidos da América, o Brasil ou Israel, regressa agora a Portugal na sua 16ª edição. Ambos os encontros são organizados pela Universidade dos Açores e pela Associação Ludus e contam com o apoio da SPM, da Associação de Professores de Matemática, do Ciência Viva, da Fundação para a Ciência e Tecnologia e da Gradiva. Mais informações sobre estas iniciativas em <http://ludicum.org/>.



CONCURSOS ANIMAM MATEMÁTICA DO PLANETA TERRA 2013:

PLANETA MATEMÁTICO 2013

A Universidade de Coimbra está a organizar o “Planeta Matemático 2013”, um concurso dirigido a professores dos ensinos básico, secundário e superior, que tem como objetivo a conceção de um jogo de tabuleiro - o “Planeta Matemático 2013” - que apresenta questões matemáticas relacionadas com o planeta Terra. Este inclui provas de cultura, habilidade, sorte e estratégia. A elaboração do jogo será precedida de um concurso em que será selecionado um conjunto de cartões, compostos por desafios para quatro categorias distintas. A versão final do jogo terá uma edição digital e, eventualmente, uma edição em papel. A submissão de contribuições para concurso deve ser feita até ao dia 31 de janeiro. Este concurso é organizado pelo Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra (UC) e conta com o apoio do Centro de Matemática da UC e do Museu da Ciência da UC. Mais informações em <http://www.uc.pt/fectuc/dmat/divulgacao/PM2013>.

EXPOSIÇÕES MPE2013

Também no âmbito da iniciativa Matemática do Planeta Terra 2013 (MPE2013, sigla em inglês), foi lançado um desafio à escala internacional para a construção de módulos físicos ou virtuais que irão compor exposições que serão posteriormente apresentadas em museus ou escolas para divulgar o MPE2013. Os trabalhos podem ser apresentados em diferentes formatos (imagens, filmes, programas, módulos físicos) e elaborados segundo quatro temas centrais: “A planet to discover”, “A planet supporting life”, “A planet organized by humans” e “A planet at risk”. Os melhores exemplares serão premiados e expostos nos museus associados ao MPE2013. Os trabalhos devem ser submetidos a concurso até 20 de dezembro, individualmente, por equipas, instituições, escolas ou organizações sem fins lucrativos. Mais detalhes sobre esta competição podem ser consultados em <http://mpe2013.org/public-events/competitions/>.



PROJETO KLEIN EM LÍNGUA PORTUGUESA RECEBE CONTRIBUIÇÕES ATÉ 15 DE DEZEMBRO

O Projeto Klein em Língua Portuguesa convida professores e investigadores a submeterem “pequenos artigos Klein” no âmbito do “Klein Project for the 21st Century”, uma iniciativa da International Mathematical Union e da International Commission on Mathematical Instruction. Os textos, escritos em português, devem ter entre duas e quatro páginas e abordar tópicos relevantes da matemática relacionados com conhecimentos ao nível do ensino secundário ou que expliquem aplicações modernas significativas da matemática. As propostas devem ser enviadas até 15 de dezembro, em formato PDF para artigo.klein@sbm.org.br. O “Klein Project for the 21st Century” tem como objetivo editar um livro dirigido a professores, traduzido em mais de 10 línguas, sobre a importância da investigação em matemática e a sua ligação aos conteúdos lecionados ao nível do ensino secundário. Os artigos selecionados no âmbito do Projeto Klein em Língua Portuguesa poderão ser indicados para o “Klein Project for 21st Century”.

EMS MONOGRAPH AWARD DISTINGUE MONOGRAFIAS

Atribuído a cada dois anos pela European Mathematical Society, o EMS Monograph Award pretende distinguir monografias relacionadas com a matemática cujo contributo seja considerado relevante para a área. O prémio tem um valor monetário de dez mil euros e a monografia distinguida será publicada pela EMS Publishing House. Os trabalhos podem ser submetidos a concurso até 30 de junho. Mais informações em http://www.ems-ph.org/EMS_Monograph_Award.php

EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY APROVA CÓDIGO DE BOAS PRÁTICAS

O comité executivo da European Mathematical Society aprovou no mês de outubro um Código de Boas Práticas elaborado pelo Comité de Ética da sociedade. O documento em questão é composto por uma série de recomendações para autores, editores, *referees* e utilizadores de dados bibliométricos, em particular para os que se encontram estabelecidos na Europa, e também para todos os que se interessam pela publicação, disseminação e avaliação de conteúdos relacionados com a investigação em matemática. O Código de Boas Práticas está disponível para consulta em <http://www.euro-math-soc.eu/system/files/COP-approved.pdf>

DUAS MÃOS CHEIAS DE IMENSO

Escreveu Irene Lisboa um conto infantil cujo título ficou célebre: “Uma Mão Cheia de Nada, Outra de Coisa Nenhuma”. Apetece dizer, contrariando-a, que a direcção da SPM tem hoje ambas as mãos cheias de imenso.

A primeira mão está cheia. As eleições para a direcção da SPM foram em Julho passado. Foram renovados os corpos gerentes mas assegurada a continuidade do trabalho, em particular com a manutenção do presidente. A mão da anterior direcção está cheia de sucessos: a Escola de Verão de 2011, o Encontro Nacional de 2012, o Centro de Formação, o envolvimento e apoio no Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, e, na minha opinião, o mais extraordinário feito: os sucessos internacionais cada vez mais impressionantes dos nossos jovens nas Olimpíadas Internacionais. Ficamos todos orgulhosos dos nossos jovens Miguel Santos, Miguel Moreira, João Lourenço, Luís Duarte e Francisco Andrade pelas medalhas de ouro, prata, bronze e menção honrosa nas IMO. Orgulhosos sobretudo porque sabemos que estes prémios não são fruto do acaso, mas do trabalho sério e do profundo esforço que eles desenvolvem com o generoso e fundamental apoio da equipa ligada ao Projecto Delfos, da Universidade de Coimbra. E porque, 70 anos depois do comovente desabafo de Aniceto Monteiro nesta mesma *Gazeta*, temos a sua e a nossa maior vitória: “uma juventude estudiosa consagrando inteiramente a sua vida e o seu entusiasmo à matemática”.

Finalmente, tivemos a intervenção cívica da SPM nos debates sobre um dos maiores problemas do país – a Educação. Não é certamente por acaso que o anterior presidente da direcção da SPM é hoje ministro da Educação, e um grande matemático e académico, membro regular dos corpos gerentes da SPM, secretário de Estado do Ensino Superior.

Há crise? Pois há. Mas, pela primeira vez em muitos anos, há também razões para ter esperança. O valor no ponto pode ser baixo, mas a derivada é positiva.

A segunda mão, também ao contrário da de Irene Lisboa, está a transbordar. Além de pretender continuar todo o trabalho de sucesso da anterior direcção, a actual tem ideias próprias sobre o caminho que quer construir. O primeiro sucesso é já fruto do notável trabalho realizado pelo conselho editorial da *Portugaliae Mathematica*, que faz agora parte do índice ISI. Todos os matemáticos portugueses têm assim a mais forte razão para a considerar seriamente para publicação dos seus trabalhos.

Mas há mais projectos. A matemática mudou muito desde que a SPM foi fundada em 1940. Uma das facetas mais visíveis dessa transformação foi o surgimento institucional

da chamada Matemática Industrial ou Aplicada. A própria SIAM foi fundada apenas em 1951. Reconhecendo a importância crescente do envolvimento da matemática e dos matemáticos no processo de I&D *ab initio* e não apenas como ferramenta, a SPM esforçar-se-á neste biénio por reunir as entidades interessadas e envolver-se activamente neste ramo.

2013 será o ano da Matemática para o Planeta Terra (<http://mpe2013.org/>), uma actividade de âmbito global. A SPM, parceira institucional, está directamente empenhada em fazer desta ocasião uma oportunidade para aumentar a consciencialização pública do papel determinante que ela tem no planeta Terra e, portanto, nas nossas vidas. Iremos fazer muito: estão previstas participações activas em livros e conferências. A Escola de Verão 2013 terá este *leitmotiv*.

A SPM dedicará ainda mais atenção à investigação, cuja actividade teve um desenvolvimento explosivo em Portugal nos últimos 20 anos. Um dos projectos que nos enchem a segunda mão é o de criar um prémio muito significativo para jovens investigadores portugueses com trabalhos publicados de nível excepcional. O leitor certamente conhe-

cerá um prémio internacional criado nos anos 30 do século passado com estes traços. Chegou a altura de darmos este salto em Portugal.

Finalmente, e embora estritamente saia fora do biénio para o qual esta direcção foi mandatada, há uma dupla efeméride que a SPM não pode deixar de começar desde já a preparar. 12 de Dezembro de 2014 marca o 100.º aniversário do nascimento daquele que Monteiro considerava “o maior matemático português do século XX”, José Sebastião e Silva, que tão cedo nos privou da sua sabedoria e que não pode deixar de ser condignamente recordado. Exactamente um ano depois, a 12 de Dezembro de 2015, celebra-se o 75.º aniversário da fundação da SPM. A próxima direcção terá assim muitos motivos para celebrar todo esse ano e, seja ela qual for, encontrará já muito trabalho feito.

Temos assim, para dois anos, duas mãos cheias de imenso. São projectos ambiciosos? Sem dúvida. Mas sabiamente dizia já Miguel Ângelo que o problema não é termos objectivos elevados e não os atingirmos: é termos objectivos baixos e atingirmo-los.

Já é sócio da SPM?

Conheça as vantagens e saiba como aderir em www.spm.pt ou através do número 217 939 785



M Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: gazeta@spm.pt.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2012

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para imprensa@spm.pt

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

NOVIDADES!

Livros Instituto
Superior Técnico

