

N. 0166

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXIII | Mar. 2012 | 4,20€

Intermitência Heteroclínica do Campo Magnético da Terra

ALEXANDRE RODRIGUES

Os Cubos do Príncipe

ANTÓNIO PEREIRA ROSA

Da Modelação Matemática à Simulação Computacional

SUZANA NÁPOLES E MARGARIDA OLIVEIRA



2012

**ENCONTRO
NACIONAL**

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

9, 10 e 11 de Julho
Universidade do Algarve



spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

SESSÕES TEMÁTICAS

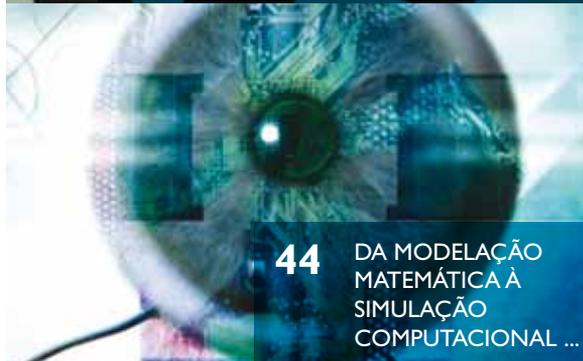
- **Álgebra e Combinatória**
- **Análise e Equações com Derivadas Parciais**
- **Geometria e Topologia**
- **Matemática nas Ciências e Tecnologia**
- **Sistemas Dinâmicos**
- **História da Matemática**
- **Probabilidades e Estatística**
- **Optimização e Investigação Operacional**

Submissão de comunicações
enspm12@spm.pt

www.enspm12.spm.pt



26 ENSINAR COMPETÊNCIAS GERAIS...



44 DA MODELAÇÃO MATEMÁTICA À SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL ...



38 SUCESSÕES E FRAÇÕES CONTÍNUAS

30 OS CUBOS DO PRÍNCIPE



54 PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO 1.º CICLO

- 02 EDITORIAL** | *Rogério Martins*
- 03 ATRACTOR**
Projecções num triângulo
- 06 RECREIO** | *Jorge Nuno Silva*
Exomatemática
- 08 CANTO DÉLFICO** | *Amílcar Branquinho*
À procura da harmonia
artigo de capa
- 12 INTERMITÊNCIA HETEROCLÍNICA DO CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA**
Alexandre Rodrigues
- 20 NA LINHA DE FRENTE** | *Fábio Chalub*
Há muito tempo para a evolução
- 22 APANHADOS NA REDE** | *António Machiavelo*
Problemas potencialmente perigosos
- 25 BARTOON** | *Luis Afonso*
- 26 ENSINAR CAPACIDADES GERAIS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO É UMA SUBSTITUIÇÃO, NEM UM COMPLEMENTO VIÁVEL A ENSINAR MATEMÁTICA**
John Sweller, Richard Clark e Paul Kirschner
- 30 OS CUBOS DO PRÍNCIPE**
António Pereira Rosa
- 35 PERGUNTAS SIMPLES, RESPOSTAS SURPREENDENTES** | *Manuel Silva e Pedro J. Freitas*
A Geometria segundo Paul Erdős
- 38 SUCESSÕES E FRAÇÕES CONTÍNUAS**
João Carreira Paixão
- 44 DA MODELAÇÃO MATEMÁTICA À SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL: UMA EXPERIÊNCIA NO ÂMBITO DA FORMAÇÃO CONTÍNUA DE PROFESSORES**
Suzana Nápoles e Margarida Oliveira
- 51 NOVAS HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA ANTIGA** | *Bernardo Mota*
Apolónio e os *Elementos* de Euclides - 2.ª parte
- 54 PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO 1.º CICLO: PARA COMEÇAR, A ESTIMATIVA NÃO É BOA.**
Carlos Grosso
- 58 NOTÍCIAS**
- 64 CARTAS DA DIRECÇÃO** | *Miguel Abreu*
Matemática do Planeta Terra 2013



ROGÉRIO MARTINS
Universidade Nova
de Lisboa
roma@fct.unl.pt

QUANTIDADES POUCO INTUITIVAS

A matemática pode ajudar no Euromilhões!

É frequente encontrarmos quantidades que, por serem mesmo muito grandes ou muito pequenas, fogem à nossa intuição e em função das quais devemos formar uma opinião ou fazer escolhas. Por exemplo, quando jogamos num jogo do tipo do Euromilhões estamos a comprar a possibilidade de ganhar, com probabilidade incrivelmente pequena, um prémio tão grande que é difícil comparar com os montantes com os quais lidamos no dia-a-dia. Fenómeno semelhante acontece quando contratamos um seguro, pagando para alguém assumir os custos de certos momentos desagradáveis que ocorrem com uma probabilidade muito pequena mas que podem ter custos altíssimos. De certa forma, do ponto de vista matemático estes dois processos são análogos. Quando jogamos, pagamos para criar picos de sorte na nossa vida e quando contratamos um seguro, pagamos para nos cortarem os picos de azar.

Estes são bons exemplos do que o conhecimento matemático pode fazer pelo cidadão comum. Quem estudou matemática tende a perceber que jogar no Totoloto não é o melhor investimento para o seu dinheiro, os outros tendem a justificar as suas apostas com o exemplo do primo do barbeiro de um amigo que ganhou o primeiro prémio só com uma chave. Segundo Monique Lloyd, a lotaria é um imposto sobre pessoas que se deram mal com a matemática. Observe-se que o que se pretende aqui não é que o cidadão calcule a probabilidade de ganhar mas sim que tenha uma ideia do conceito de esperança matemática ou valor esperado de uma variável aleatória, conceito que ajuda a ganhar alguma intuição para compreender o fenómeno. De facto, como quase sempre, o conhecimento matemático acaba por jogar o seu papel de uma forma determinante mas discreta. A matemática pode, de facto, ajudar no Euromilhões, pode ajudar o jogador a ficar com

uma ideia mais clara do que pode esperar (em média) da sua aposta.

Não pretendo fazer aqui a condenação do jogo, pois há muitas outras razões para apostar além do puro investimento. Quando jogamos, compramos também a ilusão e a esperança. No caso dos Jogos Santa Casa, uma parte dos lucros reverte para obras de caridade, não é o caso de muitos outros que vão aparecendo por vezes de uma forma disfarçada e que se vão generalizando nos meios de comunicação social. Também os seguros, para além do facto puramente racional de evitarem situações tão graves que arruinariam a nossa vida, tiram-nos alguma ansiedade no dia-a-dia. Contudo, quando observo o sucesso de alguns jogos de azar ou a facilidade com que são vendidos muitos seguros que cobrem em muitos casos situações já cobertas por outros ou situações em que o seguro pode facilmente lidar com o risco, fico com a impressão de que é ainda possível fazer melhor ao ensinar matemática.

Curiosamente, a utilidade da investigação matemática no desenvolvimento de soluções que se reflitam na vida real tem de certa forma uma natureza semelhante: uma situação em que sai algo novo do trabalho de investigação de um matemático com consequências diretas na resolução de um problema tecnológico, financeiro ou algo do mundo real, é um fenómeno relativamente raro. Em contrapartida, quando a matemática cria uma nova solução, é frequente ter consequências gigantes, dadas as vantagens humanas ou financeiras e dada a generalidade em que normalmente é aplicada, pensemos por exemplo na criptografia de chave pública. Assim também, quando há que tomar uma decisão política de financiar mais ou menos a ciência fundamental, em particular a matemática, está em causa a boa avaliação de quantidades pouco intuitivas, o que leva a que muitas vezes a matemática seja prejudicada em detrimento de outras áreas supostamente mais perto das aplicações.

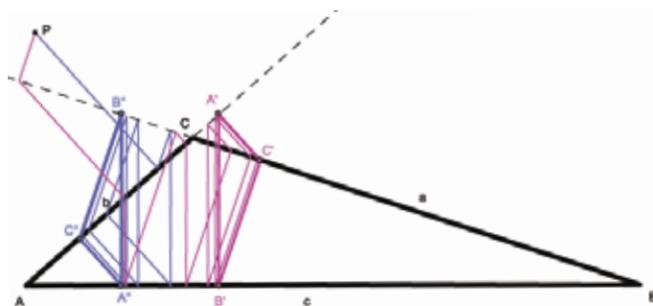
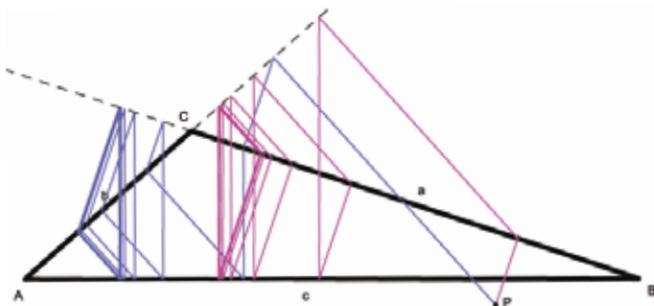
No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site www.atorator.pt. Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para atorator@atorator.pt

PROJECÇÕES NUM TRIÂNGULO

“Para um ser completamente imóvel, não haveria nem espaço nem geometria.”

Henri Poincaré, *O valor da Ciência* (1908)

Fixemos no plano um ponto P e um triângulo \mathcal{T} com lados a, b, c e tracemos o trajecto de P até cada um dos lados de \mathcal{T} , começando por visitar o lado a , de seguida b e depois c , seguindo sempre pelo caminho mais curto. A partir deste último ponto em c podemos iterar o processo, respeitando a ordem alfabética das etiquetas dos lados. Ao fim de várias experiências, mudando o ponto inicial, suspeitamos que existe uma figura limite, \mathcal{T}_{abc} , que é outro triângulo e que não varia com o ponto de partida P . Uma inspecção mais cuidada levou-nos mesmo a conjecturar que este triângulo limite é semelhante ao original. Além disso, se alterarmos a ordem com que a trajectória toca os lados do triângulo inicial, de a, b, c para b, a, c , continua a existir um triângulo limite que parece congruente com \mathcal{T}_{abc} e ter o mesmo circuncentro.

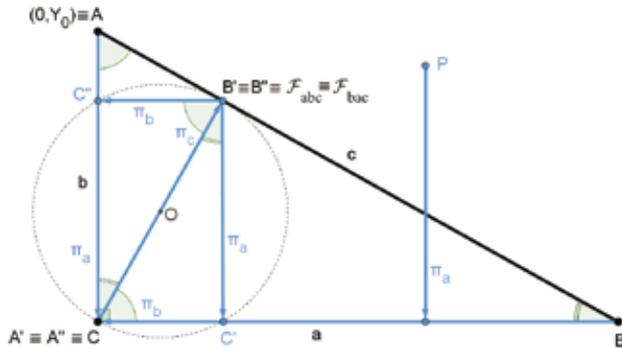


Para provarmos as propriedades que as figuras sugerem, podemos fixar um lado do triângulo original e, para cada ponto P , tomar apenas nota do traço que o percurso de P deixa nesse lado. Desse modo, o processo acima descrito para a ordem a, b, c corresponde à iteração da aplicação $\phi_{abc} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi_{abc} = \pi_c \circ \pi_b \circ \pi_a$, onde π_a, π_b e π_c são as projecções ortogonais nos lados a, b e c . E a existência de um ponto fixo atrator de ϕ_{abc} é equivalente à presença do triângulo limite \mathcal{T}_{abc} .

Comecemos por analisar um caso particular, quando \mathcal{T} é um triângulo rectângulo de vértices A, B e C com $\hat{C} = \angle(ACB) = \frac{\pi}{2}$. Podemos supor que o lado a está no eixo dos x 's, b no eixo dos y 's e c contido na linha que passa em $(0, Y_0)$ com direcção dada pelo vector $(-\cos(\hat{B}), \sin(\hat{B}))$, onde

$Y_0 = |b| = |a| \operatorname{tg}(\hat{B})$ e \hat{B} é o ângulo de \mathcal{T} no vértice B . Assim, fixado $P = (P_1, P_2)$, temos

$$\begin{aligned} \phi_{abc}(P) &= \pi_c \circ \pi_b \circ \pi_a(P) = \pi_c \circ \pi_b(P_1, 0) = \pi_c(0, 0) \\ &= Y_0 \cos(\hat{B}) (\operatorname{sen}(\hat{B}), \cos(\hat{B})) \\ &= |a| \operatorname{sen}(\hat{B}) (\operatorname{sen}(\hat{B}), \cos(\hat{B})). \end{aligned}$$



Este ponto, que designamos por \mathfrak{F}_{abc} pertence ao lado c e é independente de P . Os pontos $A' = C = (0, 0)$, $B' = \mathfrak{F}_{abc}$ e $C' = \pi_a(\mathfrak{F}_{abc}) = (|a| \operatorname{sen}^2(\hat{B}), 0)$ são os vértices de um novo triângulo \mathcal{T}_1 que podemos comparar com \mathcal{T} . Como as projecções são ortogonais, $\angle(A'C'B') = \frac{\pi}{2} = \hat{C}$. Além disso, $\angle(B'A'C') = \angle(B'A'B) = \hat{A}$, e portanto os triângulos \mathcal{T} e \mathcal{T}_1 são semelhantes, com razão de semelhança igual a $\frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|a| \operatorname{sen}^2(\hat{B})}{|a| \operatorname{tg}(\hat{B})} = \operatorname{sen}(\hat{B}) \cos(\hat{B})$. O quociente entre as áreas de \mathcal{T} e \mathcal{T}_1 é igual a $\frac{|A'C'|^2}{|AC|^2} = (\operatorname{sen}(\hat{B}) \cos(\hat{B}))^2$, valor que depende apenas dos ângulos de \mathcal{T} e atinge o máximo, igual a $\frac{1}{4}$ quando $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$, ou seja, quando \mathcal{T} é isósceles.

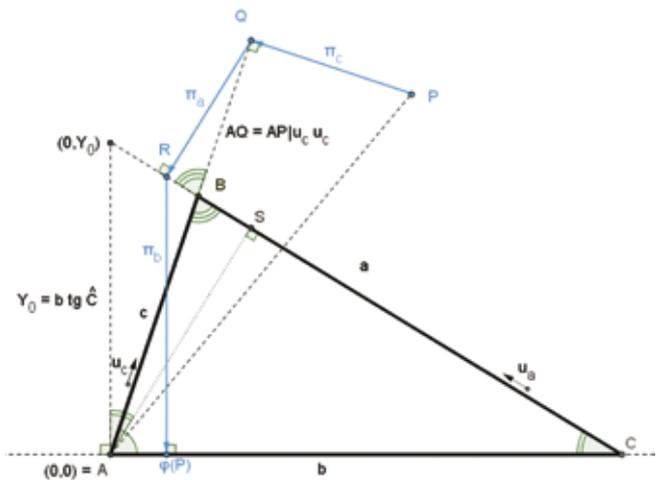
Se mudarmos a ordem com que os lados do triângulo inicial são visitados pelo ponto P , de abc para bac , um argumento idêntico prova que ϕ_{bac} também tem um ponto fixo atrator global, digamos \mathfrak{F}_{bac} no lado c de \mathcal{T} . De facto, \mathfrak{F}_{bac} coincide com \mathfrak{F}_{abc} ; porém, as suas imagens por π_b e $\pi_a \circ \pi_b$ constroem um triângulo limite distinto, digamos \mathcal{T}_2 , cujos vértices são $A'' = C = (0, 0)$, $B'' = B' = \mathfrak{F}_{abc}$ e $C'' = \pi_b(\mathfrak{F}_{abc}) = (0, |a| \operatorname{sen}(\hat{B}) \cos(\hat{B}))$. O triângulo \mathcal{T}_2 é semelhante a \mathcal{T} , logo semelhante a \mathcal{T}_1 . Além disso, como \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 têm um lado em comum – $A'B'$ do primeiro, $A''B''$ do segundo –, concluímos que \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 são congruentes. A rotação de 180 graus em torno do ponto $O = \frac{\mathfrak{F}_{abc}}{2}$ envia um triângulo no outro.

Observe-se ainda que, como O é o ponto médio das hipo-

tenusas de \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 , é o circuncentro comum a estes dois triângulos.

Seja agora \mathcal{T} um triângulo qualquer de lados a, b, c e ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ nos vértices A, B e C , respectivamente. Podemos supor, como anteriormente, que $A = (0, 0)$, o lado $c = AB$ passa por $(0, 0)$ com inclinação determinada por \hat{A} , o lado $b = AC$ está no eixo dos x 's e $a = BC$ está contido na linha que passa em C e cruza o eixo dos y 's no ponto $(0, Y_0)$, onde $Y_0 = |b| \operatorname{tg}(\hat{C})$. Se $u_a = \frac{\vec{CB}}{\|\vec{CB}\|} = (-\cos(\hat{C}), \operatorname{sen}(\hat{C}))$ e $u_c = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = (\cos(\hat{A}), \operatorname{sen}(\hat{A}))$, então, identificando qualquer ponto X com o seu vector de posição AX , temos, para cada ponto $P = (P_1, P_2)$ do plano,

$$\begin{aligned} \pi_c(P) &= AQ = AP|u_c u_c \\ \pi_a(Q) &= AR = AS + SR = AS + AQ|u_a u_a = \\ &= AS + (AP|u_c u_c)|u_a u_a = \\ &= Y_0 \cos(\hat{C}) (\operatorname{sen}(\hat{C}), \cos(\hat{C})) + (AP|u_c) (u_c|u_a) u_a = \\ &= (Y_0 \operatorname{sen}(\hat{C}) \cos(\hat{C}), Y_0 \cos^2(\hat{C})) + \\ &\quad + (P_1 \cos(\hat{A}) + P_2 \operatorname{sen}(\hat{A})) \cos(\hat{B}) (-\cos(\hat{C}), \operatorname{sen}(\hat{C})) \\ \pi_b(R) &= (Y_0 \operatorname{sen}(\hat{C}) \cos(\hat{C}) - (P_1 \cos(\hat{A}) + \\ &\quad + P_2 \operatorname{sen}(\hat{A})) \cos(\hat{B}) \cos(\hat{C}), 0) \\ &= \pi_b \circ \pi_a \circ \pi_c(P) = \phi_{cab}(P). \end{aligned}$$



Se restringirmos o domínio de $\phi = \phi_{cab}$ à linha que contém o lado b , que é o eixo dos x 's, ficamos com uma dinâmica mais simples, pois trata-se de iterar a aplicação real de variável real

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow Y_0 \operatorname{sen}(\hat{C})\cos(\hat{C}) - \cos(\hat{A})\cos(\hat{B})\cos(\hat{C}) x.$$

A equação $f(x) = x$ tem uma única solução,

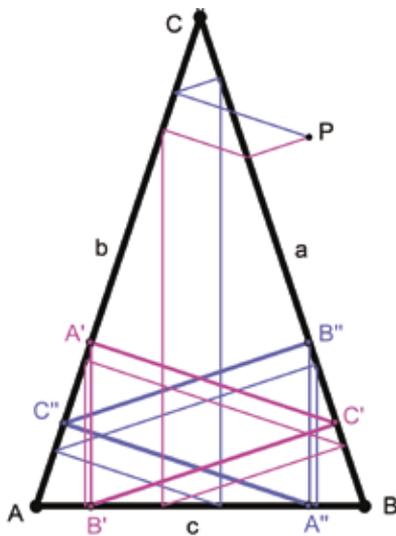
$$x_1 = \frac{Y_0 \operatorname{sen}(\hat{C})\cos(\hat{C})}{1 + \cos(\hat{A})\cos(\hat{B})\cos(\hat{C})}$$

que é a abscissa do único ponto fixo, digamos \mathcal{G}_{cab} , de φ no lado b do triângulo \mathcal{T} . E este ponto é um atractor global. De facto, dado $x \in \mathbb{R}$, existe ξ tal que

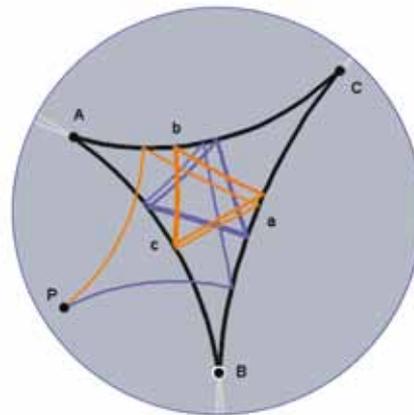
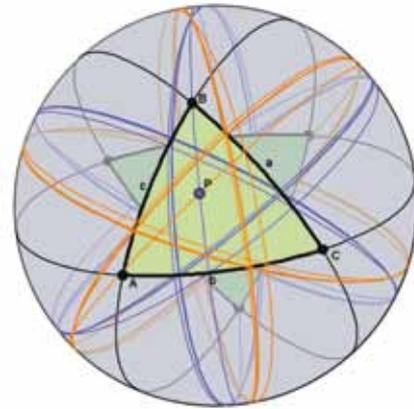
$$\begin{aligned} f(x) - x_1 &= f(x) - f(x_1) = f'(\xi)[x - x_1] = \\ &= -\cos(\hat{A})\cos(\hat{B})\cos(\hat{C})[x - x_1] \end{aligned}$$

valor que é zero, como já sabíamos, no caso em que \mathcal{T} é um triângulo rectângulo. Se \mathcal{T} não é rectângulo, note-se que a função $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto -\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)$ restrita ao conjunto $\{(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^+)^3: \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$ atinge um mínimo, igual a $-\frac{1}{8}$, quando $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, e um máximo, igual a 1, se $\pi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Contudo, como nenhum ângulo do triângulo \mathcal{T} vale π , podemos garantir que $-\frac{1}{8} \leq \cos(\hat{A})\cos(\hat{B})\cos(\hat{C}) < 1$. E portanto a órbita $(\varphi^n(P))_{n \in \mathbb{N}}$ de qualquer ponto P converge para \mathcal{G}_{cab} .

O triângulo limite \mathcal{T}_1 , com vértices $A' = \mathcal{G}_{cab}$, $B' = \pi_c(\mathcal{G}_{cab})$ e $C' = \pi_a \circ \pi_c(\mathcal{G}_{cab})$, é semelhante ao inicial (mas rodado de 90 graus); e o quociente entre as áreas de \mathcal{T} e \mathcal{T}_1 depende apenas dos ângulos de \mathcal{T} . Cálculos análogos mostram que φ_{acb} também tem um ponto fixo atractor global, digamos \mathcal{G}_{acb} no lado b de \mathcal{T} , cujos iterados por π_a e $\pi_c \circ \pi_a$ constroem um novo triângulo \mathcal{T}_2 que é congruente com \mathcal{T}_1 (mas rodado de 180 graus) e tem o mesmo circuncentro.¹



Podemos generalizar o estudo anterior de vários modos, mas nem todas as propriedades descritas anteriormente sobrevivem neste cenário mais geral. Por exemplo, podemos considerar outros arranjos periódicos das etiquetas dos lados do triângulo; ou usar projecções não ortogonais; ou ainda utilizar projecções cujos ângulos variem com o lado do triângulo; ou, em vez de um triângulo, começar com outro polígono. Além disso, o mesmo problema pode ser endereçado em superfícies não planas, e aqui esperam-se novidades pois, por exemplo, numa esfera não há triângulos semelhantes distintos. O programa *Cinderella* permite transcrever facilmente as figuras planas para uma esfera ou para o (modelo de Poincaré do) plano hiperbólico, ajudando a conjecturar sobre o comportamento assintótico desta dinâmica quando actua num mundo com curvatura não nula.



¹Alguns dos detalhes omitidos neste texto podem ser lidos na página <http://www.atractor.pt/mat/projecoes/> do site do Atractor.



JORGE NUNO SILVA
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

EXOMATEMÁTICA

Na última frase do capítulo 13 do mais recente livro de Jorge Buescu [1] pode ler-se “...como poderia ser a matemática de outro planeta.” Buescu refere-se à descoberta pelo Ocidente da matemática desenvolvida pelo Japão durante o período de isolamento voluntário – o período Edo – entre 1603 e 1868. As verdades matemáticas são universais, mas a matemática produzida por diferentes grupos culturais pode ser bem variada e surpreender-nos.

Os *Sangaku* são problemas que eram tradicionalmente pendurados em templos japoneses no período referido. As ilustrações destes desafios são estranhamente apelativas. Reconhecemos imediatamente que se trata de geometria, as mais das vezes plana, e que se procura soluções elementares, no sentido técnico do termo “elementar” (não fazer apelo a conceitos matemáticos despropositadamente sofisticados). A possível utilização didáctica destes problemas é natural, dado o nível de conceitos envolvidos. Contudo, é bom ter presente que “elementar”, em matemática, não significa “fácil”!

Fukagawa [3], um professor de matemática, vagueou pelo Japão procurando estes problemas no final do século XX. Uma incursão que teve o mérito de chamar a atenção geral para esta jóia do passado.

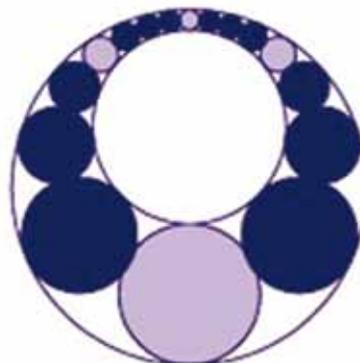
Em português, felizmente, dispomos de uma obra totalmente dedicada aos *Sangaku*, da autoria de Antonieta Constantino [2]. Esta especialista tem também publicado vários artigos sobre o tema nas páginas do *Jornal de Matemática Elementar*.

São do livro de Antonieta Constantino os seguintes problemas. Nos dois primeiros sugerimos a utilização da transformação geométrica *inversão numa circunferência*. Esta transformação revela-se útil em muitos dos referidos problemas, nomeadamente quando surgem círculos e tangências... No terceiro, o recurso a uma transformação afim pode ajudar...

Entre duas circunferências não concêntricas (à esquerda) há

uma cadeia de dezasseis círculos tangentes entre si e às duas circunferências. Se os raios destes círculos forem r_1, \dots, r_{16} , mostre que

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_9} = \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_{13}}.$$

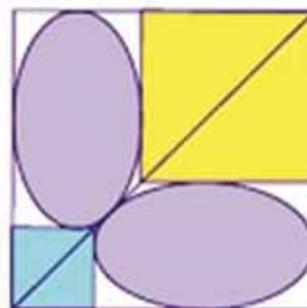
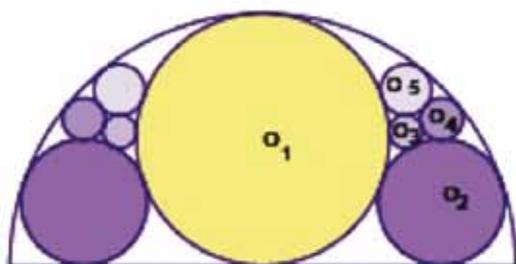


Com as tangências e a notação da figura, mostre que, se o raio da semicircunferência envolvente for r e os dos círculos O_i forem r_i , se tem

$$r_1 = \frac{r}{2}, r_2 = \frac{r}{4}, r_3 = \frac{r}{15}, r_4 = \frac{r}{12}, r_5 = \frac{r}{10}.$$

Num quadrado encontram-se duas elipses e dois quadrados, de acordo com a figura. Se os lados dos quadrados internos forem m, n , mostre que a área de cada elipse é

$$\frac{\pi}{2}mn.$$

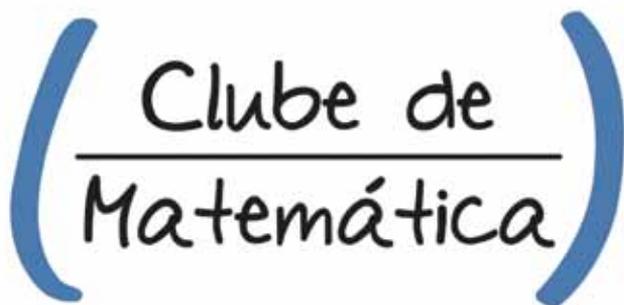


REFERÊNCIAS

[1] Buescu, Jorge, *Casamentos e Outros Desencontros*, Gradiva 2011.

[2] Constantino, Antonieta, *Sangaku*, Ludus 2009.
http://www.readontime.com/ISBN=9789899587847_2

[3] Fukagawa H. & Pedoe, D., "Japanese Temple Geometry Problems – Sangaku," Winnipeg, Manitoba, Canada: Charles Babbage Research Foundation 1989.



SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

VISITE O CLUBE DE MATEMÁTICA

DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

- ✓ ARTIGOS DE OPINIÃO
- ✓ ENTREVISTAS
- ✓ PROBLEMAS
- ✓ HISTÓRIAS
- ✓ PASSATEMPOS
- ✓ PRÉMIOS

TUDO ISTO E MUITO MAIS EM WWW.CLUBE.SPM.PT





AMÍLCAR BRANQUINHO
Universidade de
Coimbra
ajplb@mat.uc.pt

À PROCURA DA HARMONIA

Caro Leitor,

A nossa natureza tende a aceitar como adquirido tudo aquilo que está ao alcance de um clique. Os títulos das notícias sobrepõem-se ao conteúdo e passam a ser eles mesmo a notícia. A matemática não escapa à voragem dos dias em que vivemos, para tal basta ler manuais e programas de Matemática dos vários níveis de ensino em Portugal.

Que fazer quando um tema em estudo, neste caso de matemática, é demasiado difícil? Deixá-lo a outra pessoa não parece ser a forma mais adequada! Podemos tentar adivinhar a sua solução por meio de observações, e a demonstração virá de seguida. Isto foi o que disse Stieltjes a Hermite a propósito do seu estudo sobre frações contínuas.

Deixamos duas questões que devem guiar o professor no trabalho diário com os seus alunos. Conseguirá um aluno encontrar propriedades de forma prática? Conseguirá ele construir modelos que demonstrem essas propriedades?

Numa altura em que o *Projecto Delfos* cumpre 10 anos queremos falar um pouco sobre a *Resolução de Problemas*, pois é um assunto de grande importância para o avanço da matemática e também da sua compreensão e aprendizagem.

O saber fazer matemática está intimamente relacionado com a habilidade em resolver problemas, encontrar demonstrações, criticar argumentos, usar a linguagem matemática com desenvoltura, reconhecer conceitos matemáticos em situações concretas, saber dosear a ansiedade para apreciar gostosamente o caminho percorrido. O dar-se conta de que a obtenção da solução não é o mais importante, mas sim o caminho que o leva a ela.

A habilidade em resolver problemas é fundamental na formação do estudante e deve ser potenciada.

A resolução de problemas é assim uma actividade primordial na disciplina de Matemática, e ainda que não seja o seu único objectivo, é seguramente um elemento pedagógico a ter em conta.

Um problema matemático é uma situação que tem como objectivo uma meta e que pressupõe obstáculos e muita determinação para os superar.

Assim, aprender a resolver problemas e aceitar que há várias respostas a uma mesma pergunta, bem como formas de o atacar, constitui uma parte fundamental tanto da educação como do processo de aprendizagem da matemática.

As vantagens deste processo na aprendizagem e no ensino da matemática são notórias sob diversos pontos de vista, que não vamos enumerar, para além da autonomia de processos que transcendem a própria matemática.

Neste canto vamos falar do conceito de número real, sua representação em fracção contínua e terminaremos com um exemplo de matemática da nossa vida quotidiana.

Fracções contínuas. Seja x um número real. Definimos a sua *parte inteira*, $\lfloor x \rfloor$, como o maior inteiro menor do que ou igual a x , e $\{x\}$ como a sua *parte fraccionária* $x - \lfloor x \rfloor$. Temos então $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, onde $0 \leq \{x\} < 1$, $x \in \mathbb{R}$, e $\{x\} = 0$ se, e somente se, x é um inteiro. Tomemos $x_0 = x$, $a_0 = \lfloor x \rfloor$,

e $x_1 = 1/\{x\}$; se x não é um inteiro, então $x = a_0 + 1/x_1$, com $x_1 > 1$. Repetindo o processo com x_1 , então $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$ e $x_2 = 1/\{x_1\}$, sempre que x_1 não é um inteiro, obtendo-se $x = a_0 + 1/(a_1 + 1/x_2)$, com $x_2 > 1$. De uma forma geral, tomando $a_n = \lfloor x_n \rfloor$ e $x_{n+1} = 1/\{x_n\}$, verificando sempre que x_n não é um inteiro, obtemos a *fracção contínua finita* para x

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x_{n+1}}}}}, \text{ com } x_{n+1} > 1.$$

Os números a_1, \dots, a_n são todos inteiros positivos e são denominados *denominadores parciais*, e a_0 é um inteiro. Observe-se que os numeradores parciais são todos iguais a 1. Como a notação apresentada para fracção contínua finita de x ocupa demasiado espaço, vamos usar a notação mais compacta $x = [a_0; a_1, \dots, a_n, x_{n+1}]$. O processo descrito termina se x_{n+1} for um inteiro e neste caso $[a_0; a_1, \dots, a_n, x_{n+1}]$ será designada por *expansão em fracção contínua simples* de x . Fica claro que uma fracção contínua simples é um número racional. Reciprocamente, todo o número racional x admite uma representação em fracção contínua simples, aplicando o algoritmo que acabámos de descrever. De facto, escrevendo $x = a_0 + p/q$, com $p < q$, então aplicando o *algoritmo de Euclides* a $r_0 = q$ e $r_1 = p$ obtemos a sucessão, $(r_k), k = 0, 1, \dots, N$ dada por $r_{n-1} = a_n r_n + r_{n+1}$, $0 < r_{n+1} < r_n$, onde a_n são os denominadores parciais da fracção contínua para x . A sucessão de números inteiros positivos (r_k) é decrescente, e portanto existe um inteiro N tal que $r_{N+1} = 0$, pelo que a fracção é simples.

O que acontece quando x_n não é um inteiro qualquer que seja n ? Neste caso o número real, x , é representado por uma *fracção contínua infinita* $x = [a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$. Uma secção finita desta fracção $\pi_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ será designada por *aproximante* da fracção contínua. Cada aproximante, $\pi_n = p_n/q_n$, é um número racional, e os inteiros p_n e q_n são funções polinomiais com coeficientes constantes, nas variáveis a_0, a_1, \dots, a_n .

Teorema 1. *Sejam $p_0 = a_0, p_1 = a_0 a_1 + 1, q_0 = 1, q_1 = a_1$, e as sucessões (p_k) e (q_k) definidas por $p_{k+1} = a_{k+1} q_k + p_k, q_{k+1} = q_k, k = 1, 2, \dots$. Então o aproximante de or-*

dem $n, \pi_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$, é dado por p_n/q_n .

Como aplicação deste teorema mostra que:

- 1) $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ for $n \geq 0$.
- 2) $\pi_{n-1} - \pi_n = (-1)^n / (q_n q_{n-1})$ for $n \geq 1$.
- 3) $\pi_0 < \pi_2 < \pi_4 < \dots$ e $\pi_1 > \pi_3 > \pi_5 > \dots$.

Os próximos teoremas dizem-nos que os aproximantes da fracção contínua de x convergem para x .

Teorema 2. *Se (p_n/q_n) a sucessão dos aproximantes da fracção contínua para x , então*

$$1/(q_n + q_{n+1}) < |q_n x - p_n| \leq 1/q_{n+1},$$

e se x é um número irracional, então a sucessão dos aproximantes, (p_n/q_n) , de x convergem para x . Além disso, $|x - p_n/q_n| < 1/(q_n^2), n \geq 0$.

Teorema 3. *Todo o aproximante p_n/q_n com $q_n > 1$ e $n \geq 2$ é uma melhor aproximação de x , i.e. para todo o a e b com $1 \leq b \leq q_n$ e $a/b \neq p_n/q_n$ então $|bx - a| > |q_n x - p_n|$.*

Exemplos.

Seja $x = \sqrt{2}$, então $a_0 = 1$ e $x_1 = 1/(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1$, logo $\sqrt{2} = 1 + 1/(1 + \sqrt{2})$. Desta forma obtemos a fracção contínua infinita, $\sqrt{2} = [1; 2, \dots, 2, \dots]$. Os denominadores parciais, com a excepção de a_0 são iguais a 2, pelo que a *fracção contínua* se diz *periódica*.

Verifica que a fracção contínua para o número de ouro, $(\sqrt{5} + 1)/2$, é dada por $[1; 1, \dots, 1, \dots]$.

Deixamos-te um **exercício**: Sabendo que uma fracção contínua com período N é tal que $a_k = a_{k+N}$, para $k \geq 0$, mostra que ela representa

$$x = \frac{p_{N-1} - q_{N-2} + \sqrt{(p_{N-1} - q_{N-2})^2 + 4p_{N-2}q_{N-1}}}{2q_{N-1}}$$

onde p_k e q_k satisfazem as relações de recorrência do teorema 1.

À procura da melhor folha. Esta é uma experiência descrita pelo saudoso professor Miguel de Guzmán no texto “Experimentos de Geometria” que pode ser consultado no Material de Apoio do Projecto Delfos em <http://www.mat.uc.pt/~delfos/>.

Como resposta à pergunta “De que forma podemos cortar uma folha de papel?”, temos a seguinte actividade que mostra como os dois números que introduzimos atrás estão intima-

mente ligados à ideia de harmonia, muito de acordo com o pensamento da Escola Pitagórica.

Obviamente que isto depende do que quisermos fazer com ela. De qualquer forma, podemos pensar em cortá-la em rectângulos cujos lados mantenham a mesma proporção do inicial. Desta maneira conservariam a forma inicial. Assim, se quiséssemos continuar com o processo, obteríamos quatro rectângulos com a mesma forma, etc. Resumindo, ao partir em dois não saímos do mesmo aspecto de rectângulo.

A pergunta que temos obrigatoriamente de formular é: Existe algum rectângulo com esta propriedade?

As folhas que usualmente temos à nossa frente têm dimensões $21 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm}$. A proporção entre o lado maior e o menor é $29,7/21 = 1,41$. Se dividirmos a folha ao meio pelo lado maior obtemos duas folhas de dimensões $14,85 \text{ cm} \times 21 \text{ cm}$, cuja proporção é $21/13,85 = 1,41$, o que é curioso!

Enviaram-nos há algum tempo um ofício numa folha diferente da anterior com dimensões $21,5 \text{ cm} \times 31,5 \text{ cm}$. Ao verificarmos se se tem a mesma propriedade, começámos por analisar as proporções entre os seus lados, i.e. $31,5/21,5 = 1,46$. Agora se dividirmos a folha ao meio pelo lado maior obtemos duas folhas de dimensões $15,75 \text{ cm} \times 21,5 \text{ cm}$, cuja proporção é $21,5/15,75 = 1,36$. Desta forma vemos que não tem a mesma propriedade da anterior. Se repetirmos este processo uma vez mais, obtemos quatro folhas de dimensões $10,75 \text{ cm} \times 15,75 \text{ cm}$, cuja proporção entre o lado maior e o menor é $1,46$.

Conseguirás explicar este facto?

A folha em que normalmente escrevemos está feita desta forma com toda a intenção. Estas dimensões especiais designam-se por A4. As dimensões da folha do ofício que nos enviaram não cumprem esta proporção. Observa que a proporção encontrada na de tamanho A4 é $1,41$. Isto diz-te alguma coisa? O número é aproximadamente igual a $1,4142135 \dots$

De facto, considera um rectângulo de dimensões $a \times b$ tal que cortando-o em duas partes (cf. linha de pontos da figura 1) resultam dois rectângulos com lados na mesma proporção, i.e. a razão entre o lado maior e o menor deve ser a mesma nos rectângulos.

Assim, teremos $b/a = a/(b/2)$, pelo que $b^2 = 2a^2$, portanto, $b/a = \sqrt{2}$.

Fica assim desfeito o mistério.

Supõe agora, uma folha rectangular com outra propriedade. Ao retirar-lhe um quadrado, como se mostra na figura 1 da direita, ficamos com um rectângulo com a mesma proporção do rectângulo inicial. Qual deve ser a proporção d/c neste caso? Analisa a figura. Parece fácil?

Temos então, $d/c = c/(d - c)$. Assim, $d^2 - cd - c^2 = 0$ e portanto $d/c = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1.61803 \dots$

Quando os comprimentos se comportam como c e d , i.e. o maior comprimento, d , está para o menor, c , assim como este está para a diferença $d - c$, dizemos que c é a secção áurea de d . Os gregos pensavam, não sem justificação, que o rectângulo com estas proporções é particularmente agradável à vista, e desde os artistas gregos que se utiliza esta proporção, na arquitectura, na escultura, até no ecrã dos nossos computadores. O rectângulo assim construído designa-se por *rectângulo áureo* e o triângulo isósceles tal que os seus lados maiores são iguais e o desigual, mais pequeno, é a secção áurea deles, designa-se por *triângulo áureo*.

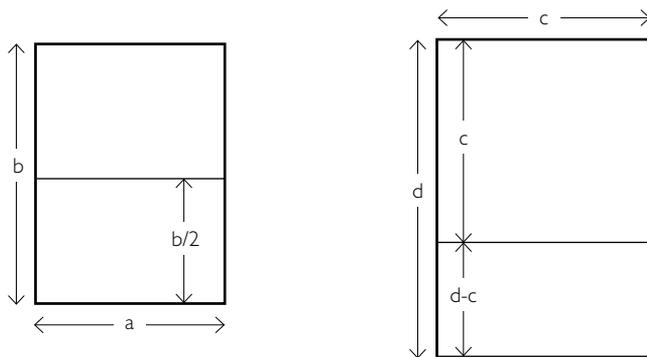


Figura 1: Papel A4 e folha

Deixamos-te um desafio: Analisa num triângulo áureo a medida dos seus ângulos. O que acontece quando o cortas ao longo da bissetriz de um dos ângulos iguais?

TI-*nspire*TM CX

Matemática e Ciências agora a

CORES!

Visualize conceitos matemáticos interactivamente e a cores com as novas unidades portáteis TI-*nspire* CX. Estabeleça ligações com o mundo real utilizando as suas próprias imagens.

Com **todas as funcionalidades da tecnologia TI-Nspire** e ainda:

- Ecrã retro-iluminado e a CORES
- Bateria recarregável incluída
- 115 MB de memória total
- Software de computador incluído para Professores e Alunos.

Mais informações em
education.ti.com/portugal



TI-Nspire CX autorizado
nos Exames Nacionais do
Ensino Secundário

 TEXAS
INSTRUMENTS

A Sua Experiência. A Nossa Tecnologia. O Sucesso Dos Seus Estudantes.



As mudanças da intensidade do campo magnético da Terra (excursões geomagnéticas) geram frequentemente auroras polares. Trata-se de um fenómeno óptico, que decorre do impacto de ventos solares e poeiras espaciais, reencaminhadas pelo campo magnético da Terra. Normalmente, são visíveis em altas latitudes.

Intermitência Heteroclínica do Campo Magnético da Terra

ALEXANDRE RODRIGUES

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

alexandre.rodrigues@fc.up.pt

Existem evidências geológicas de que o pólo magnético da Terra muda de orientação de tempos a tempos, assumindo um comportamento aparentemente caótico. Modelar a variação do campo geomagnético está longe de ser um assunto completamente compreendido. Alguns físicos acreditam que redes heteroclínicas estruturalmente estáveis são o conceito matemático responsável pela dinâmica do campo magnético da Terra. Este artigo aborda, de uma forma acessível, um modelo matemático que explica as mudanças de polaridade do campo geomagnético e é destinado a qualquer leitor curioso, que não possua, necessariamente conhecimentos muito especializados de matemática. A exposição dá a conhecer um dos assuntos que mais tem despertado a atenção no âmbito do geomagnetismo e, no final, é complementada com simulações numéricas.

1. INTRODUÇÃO

A Terra comporta-se como um íman de proporções gigantes, em redor da qual existem curvas de força fechadas com a mesma intensidade do campo magnético. A magnitude do campo geomagnético foi medida pela primeira vez por K. F. Gauss em 1835 e tem sido analisada repetidamente desde então, observando-se um decaimento linear dessa intensidade a uma taxa de 5% por século [12]. De uma forma geral, a história do campo magnético da Terra pode ser descrita grosseiramente como um *dipolo axial*, onde o pólo Norte geográfico se localiza bastante próximo do pólo Norte magnético como esquematizado na figura 1 (a) – é esta proximidade que promove o bom funcionamento da bússola: o magneto setentrional da agulha magnética da bússola determina o norte da Terra por ser atraído pelo pólo sul magnético do planeta.

Em cada ponto da superfície do planeta Terra, a amplitude do ângulo entre o vector que aponta para o norte magnético (determinado pela bússola) e o vector que aponta para o norte geográfico é habitualmente designada por *declinação magnética*. Esta amplitude depende da região da superfície da Terra; por exemplo, em Portugal, a declinação magnética é de cerca de 7 graus, no Canadá é de cerca de 40 graus e na Finlândia a declinação magnética é praticamente nula. Esta declinação magnética vai variando ao longo do tempo. Na navegação, é usual construir-se cartas com as linhas *isogónicas* (ou *isopóricas*) contendo curvas de nível com a mesma declinação magnética e que são actualizadas periodicamente¹ – figura 1 (c).

¹Para o leitor mais curioso, sugere-se a consulta do site <http://geomag.usgs.gov/movies/movies/index.php> onde se pode ver a evolução da declinação magnética na superfície da Terra nos últimos 400 anos.

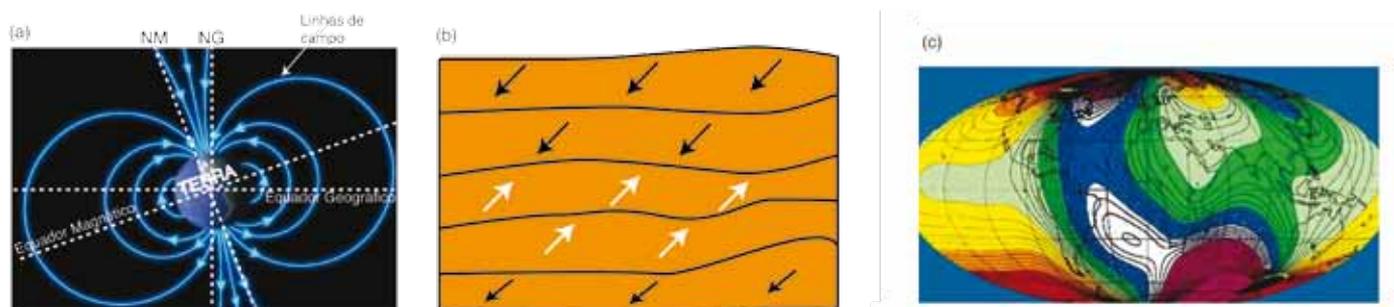


Figura 1: (a) Esquema do campo magnético da Terra aproximado a um modo axial dipolar; NG – Norte Geográfico; NM – Norte Magnético. O eixo de rotação da Terra passa pelo Pólo Norte Geográfico. (b) Esquema de uma rocha de origem vulcânica com várias camadas de lava que, após o arrefecimento, gravou a polaridade do campo magnético da Terra ao longo dos tempos. Alguns autores apelidam estas rochas de fósseis magnéticos. (c) Carta isogónica da Terra (2000): as linhas da carta representam curvas com a mesma declinação magnética. As cores mais densas representam declinações magnéticas mais acentuadas.

O porquê destas variações da intensidade do campo magnético da Terra é um problema que ainda não está completamente resolvido, mas pensa-se que a razão se prende com a existência de movimentos cíclicos dos fluidos com componentes magnéticas no interior da Terra.

Da análise de algumas rochas basálticas – ver figura 1 (b), há várias evidências que apontam ter havido mudanças na polaridade do campo magnético da Terra ao longo dos tempos, sugerindo mesmo que o pólo norte geomagnético tem mudado de orientação de tempos a tempos, de uma forma bastante irregular, com intervalos médios de permanência numa dada polaridade de 250.000 anos². Designaremos estas mudanças de polaridade do campo magnético por reversões do campo geomagnético, cujos efeitos na vida no planeta ainda não foram devidamente estudados.

Para o decorrer da exposição convém lembrar, de um modo breve, as noções de grupo de Lie e de Equivariância, os quais constituem um pre-requisito essencial para a compreensão dos capítulos que se seguem. Uma boa abordagem sobre estes conceitos pode ser encontrada no livro [5].

Grupos de Lie e Equivariância. Um grupo de Lie é um subgrupo fechado de $GL(\mathbf{R}^n)$, o conjunto dos endomorfismos invertíveis de \mathbf{R}^n . Se Γ é um grupo de Lie, um campo de vectores f , definido em \mathbf{R}^n , diz-se *equivariante* ou *simétrico* por Γ se

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad f(\gamma x) = \gamma f(x).$$

Em geral, vai denominar-se o grupo de Lie pelo nome do grupo abstracto, ao qual é isomorfo. Teoricamente, poderá causar alguma confusão mas, na prática, é bastante útil e intuitivo. Por exemplo, o conjunto $\{I_n, -I_n\}$, munido da multiplicação usual de matrizes, é um subgrupo fechado de $GL(\mathbf{R}^n)$. Logo, $\{I_n, -I_n\}$ é um grupo de Lie e será frequentemente chamado de $\mathbf{Z}_2 = \{-1, 1\}$, uma vez que são isomorfos, como grupos abstractos. Um outro exemplo é o grupo das rotações do plano e que será denotado por $\mathbf{SO}(2)$.

2. MODELO MATEMÁTICO PARA AS REVERSÕES

O mecanismo responsável pelas reversões do campo magnético da Terra ainda não é bem compreendido, sendo um dos assuntos mais estudados neste momento por várias equipas de investigação espalhadas pelo mundo³.

Vários modelos matemáticos tentam descrever o fenómeno, sendo o mais plausível o modelo do *geodínamo*, construído no contexto das equações da magnetohidrodinâmica.

Neste modelo, explica-se como é que a Terra gera e mantém o campo magnético sob a acção de um campo de velocidades (gerado pelo movimento dos líquidos férricos no interior do planeta). Encontrar explicitamente as soluções gerais para este modelo é um problema em aberto.

M. Krupa [10], em 1996, propôs um modelo no qual as reversões do campo magnético da Terra são explicadas recorrendo aos conceitos de *ciclos* e *redes heteroclínicas* associados a modos de simetria dipolares e quadripolares.

Com base nesta ideia e em anteriores trabalhos de Proctor [11], Melbourne, Proctor e Rucklidge [12] propuseram, em 2001, um modelo no qual acoplam dinamicamente diferentes *modos de simetria*. Entenda-se por *modo de simetria* um campo de vectores tangente à esfera bidimensional $\mathbf{S}^2 \subseteq \mathbf{R}^3$, a qual pretende representar a esfera terrestre, e que é simétrico/anti-simétrico relativamente ao eixo polar e ao plano equatorial.

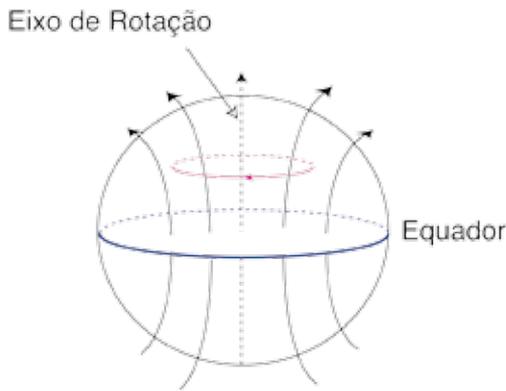
Na terminologia de Holme [9], os modos de simetria são classificados em quatro grupos:

- axiais dipolares – D_a , onde as soluções são anti-simétricas relativamente ao plano equatorial e equivariantes por rotações de π em torno do eixo polar;
- axiais quadripolares – Q_a , onde as soluções são simétricas relativamente ao plano equatorial e equivariantes por rotações de π em torno do eixo polar;
- equatoriais dipolares – D_e , onde as soluções são simétricas relativamente ao plano equatorial e anti-simétricas por rotações de π em torno do eixo polar;
- equatoriais quadripolares – Q_e , onde as soluções são anti-simétricas relativamente ao plano equatorial e anti-simétricas por rotações de π em torno do eixo polar – este modo de simetria nunca foi encontrado nos campos magnéticos de nenhum planeta (Gubbins [6]).

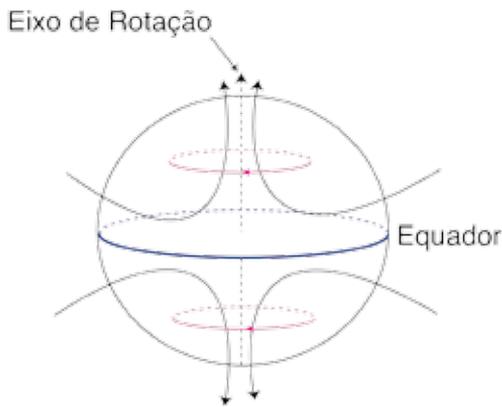
Fundamentalmente, o modelo descrito em [12] assenta no facto de o campo magnético da Terra, denotado por $B(r, t)$ por depender da posição espacial $r \in \mathbf{R}^3$ e temporal $t \in \mathbf{R}$, poder ser escrito da forma:

$$B(r, t) = y_1(t)D_e^1(r) + y_2(t)D_e^2(r) + x_2(t)Q_a(r) + x_3(t)D_a(r), \quad (1)$$

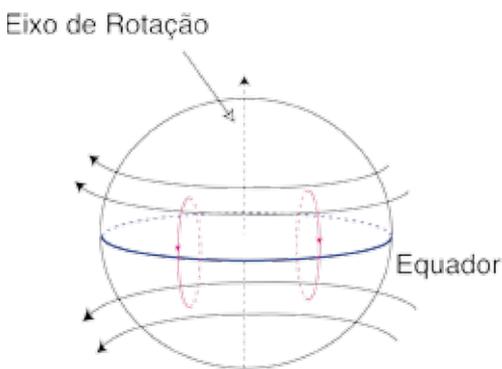
onde $r = (||y_1, y_2||, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Os modos $D_e = (D_e^1, D_e^2)$, Q_a e D_a são modos de simetria: modo equatorial dipolar, axial quadripolar e axial dipolar, respectivamente (ver figura 2). Basicamente, a equação (1) diz que o campo magnético pode



(a)



(b)



(c)

Figura 2: (a) Modo axial dipolar D_a ; (b) Modo axial quadripolar Q_a ; (c) Modo equatorial dipolar D_e .

ser escrito como combinação independente dos diferentes modos de simetria, facto demonstrado por Gubbins [6].

Os autores de [12] concentraram a sua análise na dinâmica das funções $y_1(t)$, $y_2(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$, vulgarmente designadas por funções de *amplitude*, as quais só dependem da variável tempo.

Com base em evidências experimentais observáveis, os autores de [12] assumiram que o campo de vectores (em \mathbf{R}^4), definido pelas funções de amplitude, é equivariante pela acção dos elementos do grupo de Lie $\Gamma \cong \mathbf{SO}(2) \oplus \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$. Assuma-se a representação usual de $\mathbf{SO}(2)$ nas duas primeiras coordenadas de \mathbf{R}^4 e a de $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ gerada pelas aplicações lineares:

$$\zeta_1(y_1, y_2, x_2, x_3) = (y_1, y_2, -x_2, x_3)$$

e

$$\zeta_2(y_1, y_2, x_2, x_3) = (y_1, y_2, x_2, -x_3).$$

Na teoria de campos de vectores simétricos, mostra-se que um campo de vectores que tenha grupo de simetrias Γ e que seja um polinómio de grau 3 tem a forma:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1(\mu_1 - (y_1^2 + y_2^2) + A_{12}x_2^2 + A_{13}x_3^2) - \omega y_2 \\ \dot{y}_2 = y_2(\mu_1 - (y_1^2 + y_2^2) + A_{12}x_2^2 + A_{13}x_3^2) + \omega y_1 \\ \dot{x}_2 = x_2(\mu_2 + A_{21}(y_1^2 + y_2^2) - x_2^2 + A_{23}x_3^2) \\ \dot{x}_3 = x_3(\mu_3 + A_{31}(y_1^2 + y_2^2) + A_{32}x_2^2 - x_3^2) \end{cases} \quad (2)$$

onde A_{ij} , μ_i e ω são constantes reais. Para um campo que não seja polinomial há termos de grau mais alto que não irão ser relevantes para a dinâmica. A admissão do grupo de simetrias na equação (2) favorece a ocorrência de ciclos e redes heteroclínicos no fluxo associado (Field [4]).

3. CICLOS E REDES HETEROCLÍNICOS

Para que a exposição fique completa, explicita-se nesta secção o conceito de rede heteroclínica em \mathbf{R}^n . Uma descrição primorosa sobre redes heteroclínicas pode ser encontrada em Field [4].

Admita-se que ζ é um conjunto invariante pelo fluxo $\Phi_t(x)$ da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Associado ao con-

²Várias evidências sugerem que a última reversão ocorreu há mais de 700.000 anos.

³Diversas correntes de opinião defenderam a queda de um meteorito como o responsável pelas reversões do campo magnético da Terra.

junto ζ , define-se o conjunto $W^s(\zeta)$ como sendo o conjunto dos pontos de \mathbf{R}^n onde começam as soluções cujas trajetórias se aproximam de ζ quando $t \rightarrow +\infty$, o qual possui a estrutura de variedade e será designado por *variedade estável* associada a ζ . Analogamente se define a *variedade instável* de ζ , denotada por $W^u(\zeta)$, como sendo o conjunto dos pontos de \mathbf{R}^n onde começam as soluções cujas trajetórias se aproximam de ζ quando $t \rightarrow -\infty$.

Mais formalmente, denotando por d a métrica euclidiana em \mathbf{R}^n , as variedades estável e instável associadas a ζ são definidas por:

$$W^s(\zeta) = \{x \in \mathbf{R}^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Phi_t(x), \zeta) = 0\}$$

e

$$W^u(\zeta) = \{x \in \mathbf{R}^n : \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\Phi_t(x), \zeta) = 0\}.$$

Os casos mais interessantes dizem respeito a conjuntos invariantes ζ tais que $W^s(\zeta) \neq \{\zeta\}$ e $W^u(\zeta) \neq \{\zeta\}$, os quais irão ser designados por *selas invariantes*. O caso mais simples de sela invariante é o de um ponto de equilíbrio como ilustrado na figura 3(a).

Dadas duas selas invariantes ζ_n e ζ_m , se $W^u(\zeta_n) \cap W^s(\zeta_m) \neq \emptyset$, dizemos que existe uma ligação heteroclínica de ζ_n para ζ_m . No caso de $\dim[W^u(\zeta_n) \cap W^s(\zeta_m)] > 1$, essa ligação heteroclínica corresponde a uma união de curvas solução do sistema inicial que se aproximam de ζ_n no passado e de ζ_m no futuro. Na figura 3(b) é dado um exemplo de uma ligação heteroclínica bidimensional.

Um *ciclo heteroclínico* é dado pela união de um conjunto finito ordenado de selas invariantes $\mathcal{A} = \{\zeta_i, i = 1, \dots, n\}$ para o qual existe um ciclo de ligações heteroclínicas entre elas, isto é, existe uma ligação heteroclínica de ζ_j para ζ_{j+1} ,

para todo $j = 1, \dots, n - 1$ e de ζ_n para ζ_1 [ver exemplo na figura 3(c)]. Uma *rede heteroclínica* é uma união conexa de ciclos heteroclínicos tal que, para qualquer par de selas na rede, existe uma sequência de soluções da equação a uni-las.

Numa esfera de dimensão 3, um ponto de equilíbrio p_0 (do tipo sela) para o qual $df(p_0)$ tenha valores próprios complexos não reais diz-se uma *sela-foco* – figura 3(d). Em qualquer vizinhança de uma sela-foco ou de uma solução periódica não trivial, soluções próximas tendem a espiralar em torno dela, razão pela qual estas selas vão ser designadas, daqui por diante, por *selas de rotação* – mais detalhes poderão ser encontrados em [2] e em [16].

4. QUEBRA DE SIMETRIA

O fluxo associado à equação (2) possui uma esfera tridimensional de raio positivo R , denotada por \mathbf{S}^3 , e que verifica as seguintes condições:

- é invariante pelo fluxo (trajetórias que comecem em \mathbf{S}^3 permanecem em \mathbf{S}^3);
- atrai todas as trajetórias não estacionárias.

Para um conjunto *grande*⁴ de valores das constantes da equação (2) existe, dentro de \mathbf{S}^3 , uma rede heteroclínica assintoticamente estável⁵ associada a quatro selas-foco da forma $(0, 0, \pm R, \pm R)$ e uma solução periódica. As ligações heteroclínicas que envolvem a solução periódica têm dimensão 2 e as outras têm dimensão 1.

As ligações heteroclínicas que envolvem a solução periódica separam \mathbf{S}^3 em quatro ciclos heteroclínicos distintos, constituindo barreiras impenetráveis à passagem de trajetórias, razão pela qual cada solução apenas se aproxima de um e um só ciclo. Como se poderá ver mais adiante, com este modelo não se consegue explicar as reversões do campo magnético. Na verdade, admitir $\Gamma \cong \mathbf{SO}(2) \oplus \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ como o

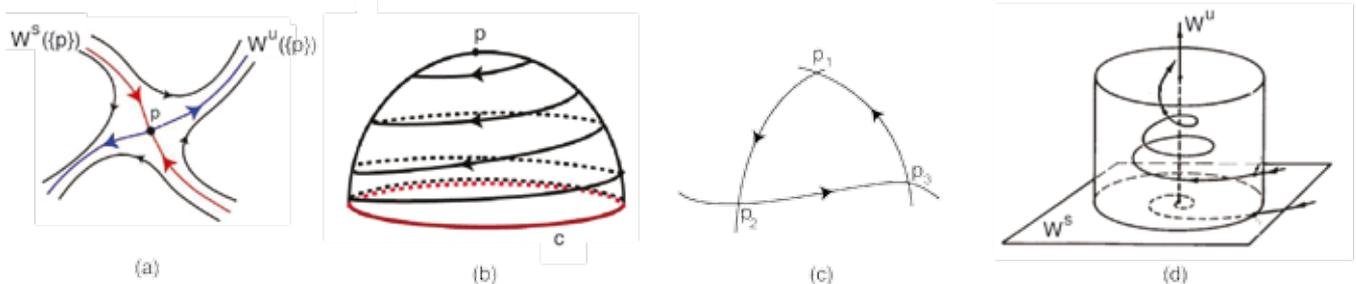


Figura 3: (a) Ponto de equilíbrio tipo sela; (b) Ligação heteroclínica do ponto de equilíbrio P para a solução periódica c ; (c) Ciclo heteroclínico associado a três pontos de equilíbrio (as selas estão ligadas de forma cíclica); (d) Sela-foco como uma sela de rotação.

grupo de simetrias do modelo é uma abordagem irrealista do problema, porém absolutamente necessária para a análise da geometria do fluxo da equação diferencial.

A solução encontrada em [12] foi a de quebrar *todas* as simetrias da equação diferencial (2), adicionando-lhe termos extra (com norma arbitrariamente pequena), os quais podem ser explicados por heterogeneidades da convecção dos movimentos no interior da Terra⁶.

Para o fluxo assimétrico, garante-se a permanência de uma cópia deformada de S^3 , na qual existe uma rede heteroclínica associada às mesmas selas do sistema não perturbado. Todas as ligações heteroclínicas de (2) com dimensão 1 mantêm-se mas as que no fluxo original tinham dimensão 2, genericamente passam a ser *transversais*. A transversalidade, conjugada com o facto das selas da rede serem de rotação, garante a existência de *comutação heteroclínica* perto da rede. Este fenómeno, estudado por Aguiar *et al* [2], é caracterizado pela existência de trajectórias que visitam as vizinhanças das selas, seguindo de perto qualquer sequência infinita de ligações heteroclínicas da rede por qualquer ordem pré-determinada – a prova pode ser consultada em Rodrigues [13, 14].

5. EXPLICAÇÃO ANALÍTICA DAS REVERSÕES

A existência de *comutação heteroclínica* perto da rede implica a existência de uma infinidade de soluções da equação perto

de qualquer sequência de ligações heteroclínicas. Na figura 4, está representada a evolução das componentes y_1 , y_2 , x_2 e x_3 de uma trajectória com condição inicial perto da rede. Como se pode observar, a componente x_3 de qualquer solução poderá mudar o sinal várias vezes (podendo ser uma infinidade num tempo infinito). Tendo em conta que x_3 é o coeficiente do modo axial dipolar na equação (1), conclui-se daqui a existência de soluções do modelo que conduzem a mudanças da polaridade do campo magnético.

Com os parâmetros que os autores de [13] e [14] consideraram, da análise das séries temporais da figura 4 explica-se geometricamente o porquê de o campo geomagnético ser essencialmente axial dipolar; note-se que para quase todas as trajectórias, o tempo que estas passam perto do equilíbrio $(0, 0, \pm R, 0)$ é significativamente menor do que o que passa perto de $(0, 0, 0, \pm R)$. Observando a equação (1), isto implica que genericamente o campo B é dominado pela parcela correspondente ao modo axial dipolar.

A duração das reversões é, em geral, bastante curta comparada com o tempo durante o qual o campo magnético mantém

⁴Em termos de medida.

⁵Soluções próximas da rede são atraídas para ela.

⁶O termo adicionado quebra todas as simetrias, mas mantém invariante o plano onde se encontram as ligações unidimensionais.

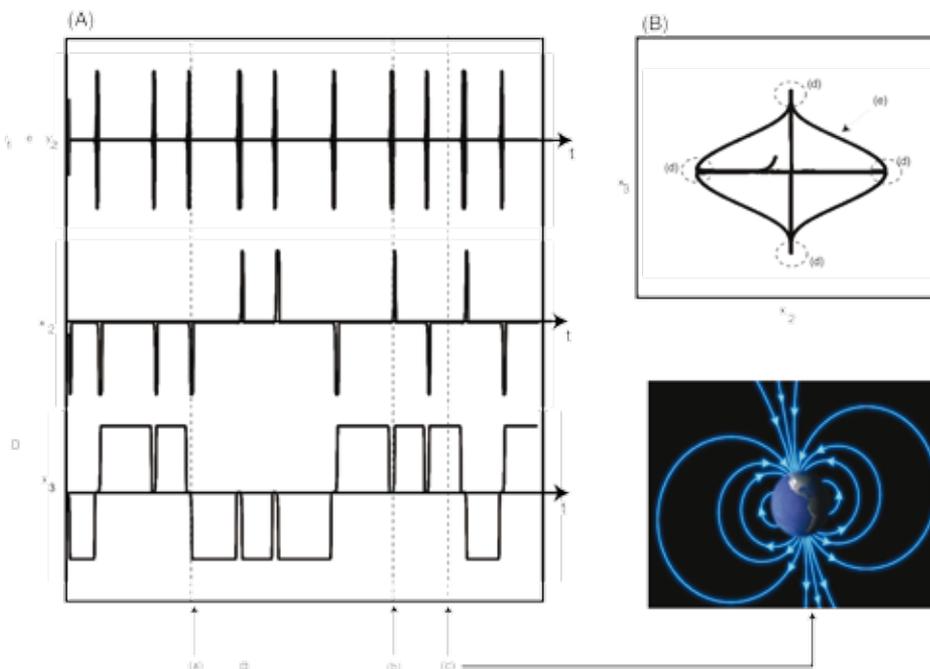


Figura 4: (A) séries temporais da solução do sistema perturbado com condição inicial $(-0.5000, 0.0116, -0.1623, -0.2781)$ onde $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.2$, $\mu_3 = 0.3$, $A_{12} = A_{21} = -0.33333$, $A_{13} = A_{31} = -0.5$, $A_{23} = A_{32} = -0.16667$, $\omega = 1$, $\epsilon_1 = 0.12$, $\epsilon_2 = 0.1$ e $\epsilon_3 = 0.001$; (B) projecção no plano (x_2, x_3) da trajectória cujas séries temporais foram estudadas em (A);

Legenda: (a) Reversão; (b) Excursão; (c) Modo Axial dipolar; (d) Pontos de equilíbrio; (e) Ligação heteroclínica de dimensão 1 entre os equilíbrios.

uma dada polaridade. Interessante de realçar é ainda o modo como este modelo sugere a mudança da geometria do campo geomagnético durante a reversão. Entre duas reversões, este modelo sugere que o campo magnético passa, de forma rápida, por uma simetria equatorial dipolar e, posteriormente, por uma axial quadripolar. Apesar de não estar bem compreendido e de ainda gerar muita controvérsia, é possível afirmar que este modelo é consistente com o comportamento observável do campo geomagnético.

Da análise de redes heteroclínicas que envolvem selas de rotação e transversalidade de variedades invariantes levada a cabo em [1] e [2], decorre ainda a existência de uma *ferradura suspensa* perto da rede e, conseqüentemente, de comportamento caótico. É este dado que impossibilita qualquer tipo de previsões sobre a próxima reversão do campo magnético⁷. Na secção que se segue explicita-se, de um modo sucinto e sumário, o conceito de *ferradura suspensa*.

6. FERRADURA SUSPENSAS

Nos inícios do século XX, H. Poincaré foi o precursor da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, dando origem a um novo campo de investigação na Matemática, o dos Sistemas Dinâmicos. Meio século mais tarde, S. Smale, interessando-se em estudar a Teoria de Poincaré, formaliza o primeiro sistema dinâmico com uma lei de evolução determinista mas que é caótico, isto é:

- (1) tem sensibilidade relativamente às condições iniciais (condições iniciais vizinhas têm futuros distintos);
- (2) os pontos periódicos são densos do domínio da função;
- (3) existe uma trajectória que é densa no domínio da função.

Construção. Dado um quadrado como o da figura 5, estique-se até ficar um longo rectângulo fino, dobre-se em ferradura e coloque-se sobre o quadrado original. Itere-se este processo. No segundo passo, obtém-se uma espécie de ferradura dentro da ferradura, com quatro dobras. Cada iteração duplica as dobras existentes. No limite, obtém-se um tipo de curva infinitamente contorcida. Escolhendo dois pontos próximos no quadrado original, não se poderá afirmar rapidamente onde eles estarão no final do processo: estes ficarão afastados um do outro devido à dobra e ao esticamento a que foram sujeitos. Chama-se *Ferradura de Smale* a esta transformação topológica (difeomorfismo), a qual fornece uma base para a compreensão das propriedades caóticas dos sistemas dinâmicos.

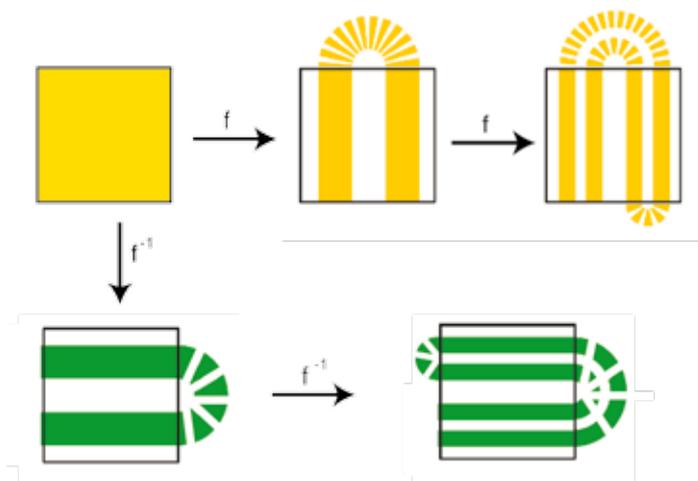


Figura 5: Construção da Ferradura de Smale.

Uma descrição elementar da transformação ferradura pode ser encontrada em Devaney [3] (secção 2.3).

Uma *Ferradura Suspensa* é o *esparguete enovelado* obtido ligando cada ponto à sua imagem por uma curva no espaço, a qual continua a ter as propriedades (1)–(3) acima. A existência de uma *Ferradura Suspensa* implica que cada secção que lhe seja normal contém um conjunto compacto e invariante pelo fluxo, o qual é caracterizado por ser totalmente desconexo (as componentes conexas reduzem-se a pontos) e por ser perfeito (todos os pontos são de acumulação).

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As reversões do campo geomagnético constituem um dos pontos mais desafiantes do geomagnetismo e da geofísica. Apesar de o fenómeno das reversões estar pouco entendido, a sua ocorrência está bem evidenciada por rochas basálticas. Neste artigo, apresentou-se um modelo que é relevante para o estudo das reversões e cuja prova analítica foi efectuada em Rodrigues [13, 14]. Neste modelo, as durações dos intervalos de tempo de polaridade constante e a curta duração das reversões são consistentes com as da Terra. O modelo consegue ainda explicar o porquê do campo geomagnético ser predominantemente axial dipolar. É interessante salientar que a existência do grupo de simetrias no campo de vectores definido em (2) é uma hipótese muito forte e irrealista. No entanto, uma vez que o estudo directo do sistema perturbado é intratável, a existência da simetria do campo não perturbado foi essencial para o tratamento analítico do problema. Estu-

dar os efeitos da quebra de simetria é, actualmente, uma linha de investigação importante no ramo dos sistemas dinâmicos.

Este artigo é uma apresentação acessível dos trabalhos que Rodrigues [13, 14] desenvolveu no seu projecto de doutoramento sob a orientação de Isabel Labouriau e Manuela Aguiar, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. As simulações numéricas (séries temporais e projecções) foram obtidas usando o programa DSTOOL [7]. A investigação levada a cabo pelo autor, membro do Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP), teve apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), Portugal, através dos programas POCTI e POSI, com fundos nacionais e da União Europeia. A.A.P. Rodrigues foi apoiado directamente pela FCT através da bolsa de doutoramento com referência SFRH/BD/28936/2006.

REFERÊNCIAS

- [1] M. Aguiar, S. Castro e I. Labouriau, "Dynamics near a heteroclinic network", *Nonlinearity*, No. 18, 391–414, 2005
- [2] M. Aguiar, I. Labouriau e A. Rodrigues, "Switching near a heteroclinic network of rotating nodes", *Dynamical Systems: an International Journal*, Vol. 25, Issue 1, 75–95, 2010
- [3] R. Devaney, "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems", 2nd ed., *ABP- Westview*, 2003
- [4] M. Field, "Lectures on bifurcations, dynamics and symmetry", *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, Vol. 356, Longman, 1996
- [5] M. I. Golubitsky, I. Stewart e D. G. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. II, Springer, 2000
- [6] D. Gubbins, C. Barber, S. Gibbonsy e J. J. Love, "Kinematic dynamo action in a sphere II - Symmetry selection", *Proc. R. Soc. Lond. A*, No. 456, 1333–1353, 2000
- [7] J. Guckenheimer, M. R. Myers, F. J. Wicklin, P. A. Wolfork, "DSTOOL: A Dynamical System Toolkit with an Interactive Graphical Interface" Reference Manual, Center for Applied Mathematics, Cornell University, 1995
- [8] M. W. Hirsch, C. C. Pugh e M. Shub, *Invariant Manifolds*, *Lecture Notes in Mathematics*, 583, Springer-Verlag, 1977
- [9] R. Holme, "Three-dimensional kinematic dynamos with equatorial symmetry: application to the magnetic fields of Uranus and Neptune", *Phys. Earth Planet. Interiors*, No. 102, 12, 105–122, 1997
- [10] M. Krupa, "Robust heteroclinic cycles", *J. Nonlin. Sci.* 7, 129–176, 1996
- [11] M. Proctor, "The role of mean circulation in parity selection by planetary magnetic fields", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 8, 311–324, 1977
- [12] R. L. McPherron, "Solar Terrestrial Influences on Climate during Geomagnetic Reversals", Seminário de Aspen, Institute Geophysics and Planetary Physics University of California, 2010
- [13] I. Melbourne, M. R. E. Proctor e A. M. Rucklidge, "A heteroclinic model of geodynamo reversals and excursions", *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge* (eds. P. Chossat, D. Armbruster and I. Oprea, Kluwer: Dordrecht, 363–370, 2001
- [14] A. Rodrigues, "Persistent Switching near the Heteroclinic Model for the Geodynamo Problem", submetido, 2011
- [15] A. Rodrigues, "Heteroclinic Phenomena", Ph.D. Thesis, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, 2011
- [16] A. Rodrigues, I. Labouriau e M. Aguiar, "Chaotic Double Cycling", *Dynamical Systems: an International Journal*, Vol. 26, Issue 2, 199–233, 2011

⁷Em [11], há a referência de que o decaimento linear que se está a observar pode ser interpretado como o início de uma reversão; segundo métodos estatísticos, designadamente regressão linear, a mesma referência aponta que a reversão ocorrerá no ano 4000.

SOBRE O AUTOR

Alexandre Rodrigues é licenciado em Matemática - Ramo Educacional (2003) e Mestre em Matemática - Fundamentos e Aplicações (2006) pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, com especialização em sistemas dinâmicos. Obteve em 2012 o grau de Doutor (PhD) em Matemática pela Universidade do Porto com a tese "Heteroclinic Phenomena". Faz investigação em Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Actualmente é docente destacado na Escola Secundária de Arouca, continuando ligado ao Centro de Matemática da Universidade do Porto.



FABIO CHALUB
Universidade Nova
de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

HÁ MUITO TEMPO PARA A EVOLUÇÃO

“A evolução é um processo lento, tão lento que seriam necessários muitos universos para surgir um ser com a complexidade humana” – já ouviram isto em algum lugar? Mais uma treta que a matemática desmistifica, com uma nova estimativa do tempo necessário – logaritmo, não exponencial – para atingir um certo nível de organização genética.

Não há teoria científica que gere mais controvérsia fora dos meios académicos do que a evolução. Entre os especialistas, no entanto, a evolução não é sequer classificada como teoria, mas como facto! Porquê então o altíssimo nível de contestação e porque é que a incrível massa de dados acumulada a favor da teoria de Darwin não esmaga a oposição?

Existem muitos motivos para alguém não acreditar numa teoria, mesmo quando quase todos os outros o fazem. A rigor, é da contestação ao que está estabelecido que a ciência progride. Mas, evidentemente, nem sempre isto é feito pelas melhores razões; por vezes, é a busca de consistência interna, outras, o *motto* é a compatibilização com dados frequentemente ignorados, e ainda há aqueles que se preocupam com o rigor das afirmações contidas na teoria e encontram lacunas. Estes são alguns dos *bons* motivos. Mas há também os maus motivos: “não entendo e portanto sou contra” ou, por exemplo, “não coincide com minha visão do mundo”. Este último desdobra-se em dezenas de versões. Aquela que parece mais importante para a contestação à evolução é a crença de que, de alguma forma, nós somos especiais, que um processo aleatório e cego, como aquele preconizado por Darwin, não poderia resultar em seres tão complexos como nós!

No entanto, não se ganham guerras sem sair de casa. Como a evolução é uma teoria científica, é necessário colecionar factos e explicações que a contestem, caso se a queira derrubar. Um dos primeiros argumentos usados contrários ao darwinismo remonta ao teólogo e filósofo William Paley, que dizia que

se encontramos um relógio, com todos os seus mecanismos perfeitamente encaixados, devemos concluir imediatamente a existência de um relojoeiro que o tenha feito (ou, pelo menos, projetado); além disso, a sua construção mostraria a existência de um propósito na mente do artífice. Se olharmos, então, para os seres vivos, com complexidade claramente superior à de uma pequena máquina, então estas conclusões devem ser potencializadas. Conclusão: Deus existe e tem um propósito. Processos naturais que resultam em nós seriam tão impossíveis quanto um tufão passar num depósito de velharias e deixar um avião pronto a voar.

Apesar da falta de evidências diretas, o raciocínio acima é um encadeamento lógico, que em princípio parece perfeitamente aceitável. Olhando com cuidado, no entanto, o centro do argumento – a existência de um relógio implica a existência de um relojoeiro – é exatamente aquilo que se deseja provar quando aplicado aos seres vivos (coisa que um relógio certamente não é).

Um contra-argumento, certamente com uma dose de ironia, ficou conhecido como “o teorema dos infinitos macacos” (figura 1): se colocarmos uma quantidade infinita de macacos em frente a máquinas de escrever e eles baterem aleatoriamente nas suas teclas a um ritmo constante, um deles acabará por escrever as obras completas de Shakespeare. Verdade, mas tão trivial quanto irrelevante para o que nos interessa. Vejamos o motivo.

Vamos simplificar a vida e considerar um alfabeto de apenas 10 letras. Como este artigo é de matemática, vamos

considerar apenas os 10 números e calcularemos o tempo que um macaco, batendo nas teclas uma vez por segundo, demorará para escrever os 100 primeiros dígitos de π (o nosso *Hamlet*). Existem 10^{10} números de 100 algarismos e portanto serão necessários 300 vezes a idade do universo, sem pausas. O ponto é que a evolução é um processo de otimização combinatória, e para descobrir de todas as possíveis combinações qual delas é a melhor é necessário percorrê-las uma a uma. Para chegar ao nosso genoma, teríamos de examinar uma quantidade incrível de possibilidades: L^N , onde L é o número de bases do ADN (cerca de três mil milhões no caso humano) e N o número de letras deste alfabeto (4: adenina, guanina, citosina e tiamina, as quatro moléculas que se unem para formarem o genoma). Podemos mudar este número de forma substancial: consideramos apenas a parte que realmente interessa (a que codifica proteínas), ou então, em vez de bases, consideramos apenas os genes (menos de 30 mil). Nada disto muda o facto concreto de que este número é muuuuuuito grande e o tempo necessário para qualquer mecanismo natural inspecionar mesmo uma pequena fração das possibilidades é proibitivo.

Mais uma vez, este argumento de impossibilidade não apresenta factos, apenas um raciocínio lógico, com uma matemática elementar e muitos furos de raciocínio.

O primeiro de todos é a ideia de que o processo evolutivo é sequencial: primeiro construímos pernas; depois de elas estarem prontas, vamos ver o que podemos fazer com os braços. Somente depois disto tudo poderíamos preocupar-nos com a evolução dos dedos. Na verdade, tudo evolui junto: à medida que ganhávamos a postura ereta, perdíamos pelo, desenvolvíamos uma mão mais adequada a novas tarefas e um cérebro capaz de as executar. Do ponto de vista fundamental, a evolução de cada gene depende de todos os outros (o que, diga-se, dificulta muito a descrição matemática da evolução) e quando uma variante se impõe (ou seja, está pre-



Figura 1: Um macaco dactilógrafo: quanto tempo será necessário para escrever *Hamlet*? Será mais rápido evoluir até o bardo ou continuar a bater ao calhas?

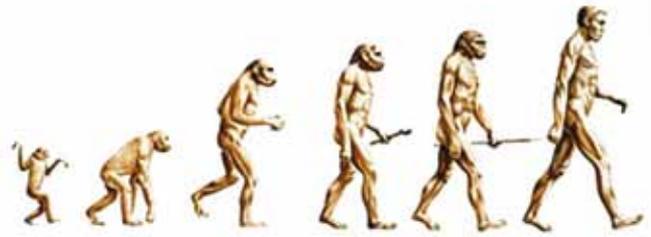


Figura 2: Não evoluímos desenvolvendo cada característica separadamente, mas em paralelo: o cérebro cresce, diminuem os pelos, a postura torna-se ereta, tudo ao mesmo tempo. A figura acima, apesar de famosa, dá a ideia errada de progresso linear no processo evolutivo.

sente em quase todos, ou mesmo todos, os indivíduos de uma população), é muito difícil – mas não impossível – alterá-la.

Apesar de a mutação ser um evento raro, o genoma é tão grande que cada recém-nascido tem em média 100 bases alteradas em relação aos seus pais (mutações), a maior parte destas irrelevantes. Considerando toda a população humana, cada gene tem 250 variantes à disposição da evolução.

Voltemos aos macacos: se considerarmos que quando um macaco acerta um algarismo qualquer da expansão decimal de π , então aquele número está fixo e não mais se altera, o tempo necessário para obter o resultado final será $N \log L$ (com N e L definidos como acima); mais exactamente, como calculado em [1] por W. Ewens (um dos principais cientistas a trabalhar na fronteira entre a matemática e a biologia, do Departamento de Matemática da Universidade da Pensilvânia) e o seu colega Herbert Wilf (um especialista em combinatoria do Departamento de Matemática da mesma universidade), o número de gerações necessárias para este processo simplificado achar o ótimo para um genoma de L bases e N letras, quando L é muito grande, é dado por

$$\frac{\log L + \gamma}{\log \left(\frac{K}{K-1} \right)} + \frac{1}{2},$$

onde $\gamma \approx 0.57721 \dots$ é a constante de Euler. Para o caso humano, isto dá menos de 100 gerações! Há muitas outras questões que a matemática não pode resolver em relação à ampla aceitação da evolução na sociedade; no entanto, mostrar as falhas lógicas dos argumentos que são frequentemente levantados é uma das inúmeras possibilidades associadas ao raciocínio quantitativo rigoroso, algo que não se faz sem fazer contas.

REFERÊNCIAS

[1] Herbert S. Wilf e Warren J. Ewens, "There is plenty of time for evolution", *Proc. Natl. Acad. Sciences* **107** (52) 22454–22456 (2010).

Este artigo foi escrito no abrigo das normas do Novo Acordo Ortográfico.



ANTÓNIO MACHIAVELO
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

PROBLEMAS POTENCIALMENTE PERIGOSOS

Há, em matemática, alguns problemas notáveis que são muito fáceis de enunciar, mas cuja solução tem escapado a todos os esforços para os resolver. São, por isso, problemas com um fascínio especial. É necessário, porém, ter muito cuidado com eles, pois podem causar dependência, viciação e mesmo, em alguns casos mais extremos, obsessão crónica...

Na sua grande maioria, os problemas com que lidam os matemáticos, na sua tarefa quotidiana de investigar as regularidades mais abstractas do cosmos, são demasiado técnicos para descrever a um não-iniciado neste ofício por muitos considerado exótico. Há, porém, alguns problemas especiais que são fáceis de enunciar, mas cuja solução tem iludido os esforços de alguns dos mestres mais destacados desta arte multimilenar.

Há que confessar que estes não são, em geral, os problemas típicos ou representativos da prática diária de um matemático. São, em geral, questões marginais, mas que, talvez por isso mesmo, e também pelo enorme desafio que colocam, não deixam de ter o seu encanto e de ser fonte de um fascínio quase irresistível. E há também que confessar que os esforços despendidos no ataque a alguns destes enigmas motivaram já a descoberta de muitos outros resultados interessantes e conduziram ao desenvolvimento de ferramentas matemáticas importantes.

Vamos dar aqui alguns exemplos destes problemas inebriantes, que são de facto conjecturas, não sem antes deixar bem claro os riscos em que incorre o leitor ao continuar a ler este artigo. As conjecturas abaixo descritas são mais tentadoras do que as sereias da *Odisseia* de Homero, mais hipnóticas do que o olhar da serpente Apófis do Antigo Egipto. Há exemplos documentados em que causaram

dependência, viciação e mesmo obsessão crónica.

Estão os leitores avisados! Daqui em diante, quem prosseguir fá-lo-á por sua própria conta e risco...

A CONJECTURA DE COLLATZ

Um dos mais curiosos dos problemas em aberto é o problema do $3x + 1$, também conhecido como a *Conjectura de Collatz*. Para o descrever, seja $C(n)$, onde n é um número natural, igual ao número $\frac{n}{2}$, se n for par, e igual a $3n + 1$, se n for ímpar. O que é que acontece se se iterar a função C ? Ou seja, dado um número, o que é que acontece se aplicarmos C a esse número e depois, sucessivamente, aos números que se vão obtendo? Por exemplo, começando com o número 9, obtém-se:

$$9 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \\ \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow \dots$$

Ou seja, $C(9) = 28, C(28) = 14, C(14) = 7$, etc.

A conjectura de Collatz é a afirmação de que, qualquer que seja o número de que se parta, eventualmente se chega sempre ao número 1! Continuando o exemplo dado, tem-se $40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Ninguém conseguiu encontrar um exemplo onde tal não acontecesse, nem ninguém conseguiu ainda demonstrar a veracidade da conjectura.

Que a conjectura é válida para todos os números até 20×2^{58} , foi confirmado por Tomás Oliveira e Silva, do Departamento de Electrónica, Telecomunicações e Informática da Universidade de Aveiro. Para mais detalhes sobre este feito computacional nada trivial, ver: <http://www.ieeta.pt/~tos/3x+1.html>.

A melhor introdução à conjectura de Collatz e à sua história é o artigo de Jeffrey C. Lagarias disponível em: <http://www.ams.org/bookstore/pspdf/mbk-78-prev.pdf>.

Lagarias produziu também uma bibliografia anotada sobre este problema: <http://www.math.lsa.umich.edu/~lagarias/3x+1.html>.

A CONJECTURA DE GOLDBACH

A conjectura de Goldbach nasceu por volta de 1742 em cartas trocadas entre Christian Goldbach e Leonhard Euler, que podem ser lidas em <http://www.math.dartmouth.edu/~euler>. Esta conjectura afirma que todo o número par maior do que 2 pode ser escrito como soma de dois números primos.

Tomás Oliveira e Silva detém o recorde de verificação desta conjectura, tendo testado todos os números pares até 2678×10^{15} , e posteriormente conferido os resultados até 10^{17} , como pode ser lido em: <http://www.ieeta.pt/~tos/goldbach.html>

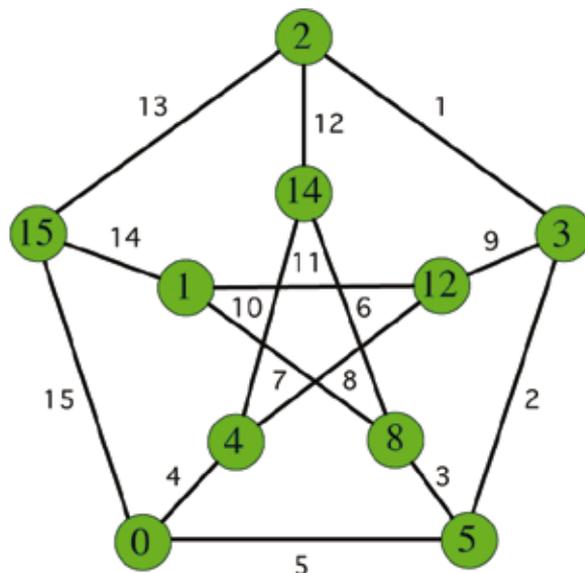
Apesar de alguns avanços notáveis em questões semelhantes, como, por exemplo, a demonstração de Vinogradov, em 1937, de que todo o número ímpar suficientemente grande é uma soma de três números primos, e apesar de se “saber” heurísticamente que o número de representações de um número par como soma de dois primos é assintoticamente maior do que $\frac{n}{(\log n)^2}$ (de facto é conjecturado algo mais exacto, que todos os cálculos numéricos confirmam), ninguém sabe como resolver a conjectura de Goldbach.

INFINIDADE DE PRIMOS DA FORMA $n^2 + 1$

Há muitos outros problemas e conjecturas em aberto sobre números primos. Limitamo-nos aqui a dar apenas mais um exemplo. Dirichlet mostrou, em 1832, e usando análise complexa (!), que toda a progressão aritmética da forma $(an + b)_{n \in \mathbb{N}}$, com $\text{mdc}(a, b) = 1$, contém uma infinidade de primos. Desconhece-se qualquer resultado do género para polinómios de grau superior a um, em particular não se sabe se existe ou não uma infinidade de primos da forma $n^2 + 1$, conjecturando-se que existe: ver http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0803/0803.1456v1.pdf.

ETIQUETAGENS GRACIOSAS

Uma *etiquetagem graciosa* de um grafo com m arestas é uma atribuição de inteiros não negativos aos vértices, de tal modo que se as arestas forem etiquetadas com o módulo da diferença dos inteiros atribuídos aos vértices nela incidentes, então as arestas ficam etiquetadas com todos os números de 1 a m . Na figura abaixo dá-se um exemplo de uma tal etiquetagem para o denominado *grafo de Petersen*. O problema de saber se todas as árvores (grafos conexos sem ciclos) admitem ou não uma etiquetagem graciosa está em aberto. Conjectura-se que sim. Sendo as árvores grafos particularmente simples, é um pouco surpreendente que esta questão esteja por resolver. Para mais informações sobre este problema, ver: <http://mathworld.wolfram.com/GracefulGraph.html> e <http://kintali.wordpress.com/2009/06/23/graceful-tree-conjecture>.



Uma etiquetagem graciosa do grafo de Petersen

A CONJECTURA DE FRANKL

Diz-se que uma família \mathcal{F} de conjuntos é *fechada para reuniões* se a reunião de dois quaisquer conjuntos de \mathcal{F} for ainda um conjunto de \mathcal{F} . Ou seja, se $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$. Em 1979, Péter Frankl conjecturou que numa qualquer família finita de conjuntos finitos que seja fechada para reuniões existe um elemento que pertence a pelo menos metade dos conjuntos da família, desde que esta família contenha pelo menos um conjunto que não é vazio. Mais precisamente, se m for o número de elementos de \mathcal{F} , então o que é afirmado é que existe um elemento que pertence a pelo menos

$\lceil \frac{m}{2} \rceil$ conjuntos em \mathcal{F} , onde $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro que é maior do que ou igual a x .

Um exemplo de uma família nas condições referidas é a família \mathcal{F} dos subconjuntos não-vazios do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que só têm números pares. Ou seja,

$$\mathcal{F} = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}\}.$$

É claro que esta família é fechada para reuniões, pois a reunião de dois conjuntos que só contêm números pares também só contém números pares. Note-se que, neste exemplo, cada elemento pertence a exactamente 4 ($= \lceil \frac{7}{2} \rceil$) dos 7 conjuntos em \mathcal{F} .

Para mais detalhes sobre esta conjectura, ver: <http://mathworld.wolfram.com/Union-ClosedSetsConjecture.html> e http://www.combinatorics.org/Volume_15/Abstracts/v15i1r88.html.

A CONJECTURA DE CASAS-ALVERO

Em 1998–99, o matemático espanhol Eduardo Casas-Alvero, da Universidade de Barcelona, tropeçou no seguinte problema¹:

Um polinómio não-nulo, de coeficientes complexos, que tem uma raiz em comum com cada uma das suas derivadas não-constantas é necessariamente uma potência de um polinómio linear?

A resposta a esta pergunta continua em aberto, conjecturando-se que é afirmativa. Para mais informações, ver o artigo “Casas-Alvero Conjecture”, da autoria de Jan Draisma e Johan P. de Jong, publicado na Newsletter da EMS (pp. 29–33), e disponível em: <http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2011-06-80.pdf>. Ver ainda o curioso applet elaborado por Johan P. de Jong e disponível em: <http://www.win.tue.nl/~jdraisma/index.php?location=recreational>.

De muitas mais conjecturas com enunciados simples se poderia aqui falar. O leitor interessado em conhecer algumas mais deverá consultar o “Jardim dos Problemas em Aberto”, em: <http://garden.irmacs.sfu.ca>.

Termino esta rubrica desejando que o leitor se divirta com alguns destes problemas, mas reiterando os cuidados acima referidos para os potenciais perigos de contracção de obsessões patogénicas. Recomenda-se o máximo cuidado!

¹ Ver: <http://gaussianos.com/la-conjetura-de-casas-alvero-contada-por-eduardo-casas-alvero>.



Novo site da
Gazeta de Matemática.

Brevemente disponível.



Publicado originalmente no jornal Público, em 20/06/2011. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRECTOR:

Rogério Martins Universidade Nova de Lisboa

VICE-DIRECTORES:

Alessandro Margheri Universidade de Lisboa

CONSELHO EDITORIAL:

Afonso Pedrosa Pinto E. S./3 S. Pedro Vila Real • António Rosa E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho • Elisabete Rodrigues E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • Graciano de Oliveira Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • Henrique Leitão Universidade de Lisboa • João Filipe Queiró Universidade de Coimbra • José Francisco Rodrigues Universidade de Lisboa • José Miguel Rodrigues de Sousa E. S. Felismina Alcântara • Lina Fonseca Escola Superior de Educação de Viana do Castelo • Maria do Céu Pinto Universidade de Coimbra • Manuel Domingos Oliveira Cadete Universidade Agostinho Neto • Paulus Gerdes Universidade Eduardo Mondlane, Moçambique • Raquel Escórcio antiga professora na E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • Roberto Ramalho Universidade de Pernambuco, Brasil • Teresa Almada Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • Juan-Miguel Gracia Universidad del País Vasco, Espanha

ASSISTENTES EDITORIAIS:

Ana Margarida Pereira SPM • Sílvia Dias SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

CONCEPÇÃO E MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB:

Pedro Quaresma Universidade de Coimbra

IMPRESSÃO:

Dossier – Comunicação e imagem

PROPRIEDADE:

Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3^o Esq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

TIRAGEM 1900 Exemplares

ISSN 0373-2681

ICS 123299

DEPÓSITO LEGAL: 159725/00



Ensinar capacidades gerais de resolução de problemas não é uma substituição, nem um complemento viável, a ensinar matemática¹

JOHN SWELLER, RICHARD CLARK E PAUL KIRSCHNER

j.sweller@unsw.edu.au, clark@usc.edu, paul.kirschner@ou.nl.

¹ Artigo originalmente publicado em *Notices of the American Mathematical Society*, que gentilmente permitiu a sua tradução e a sua publicação na *Gazeta de Matemática*: J. Sweller, R. Clark, P. Kirschner, "Teaching General Problem-Solving Skills Is Not a Substitute for, or a Viable Addition to, Teaching Mathematics", *Notices of American Mathematical Society*, vol. 57, Issue 10, 2010, 1303-1304. Tradução de ISEL-IPL.

Resolver problemas é central para a matemática. No entanto, a capacidade de resolver problemas não é o que parece.

Na verdade, o tema da resolução de problemas sofreu recentemente um aumento de interesse e reflexão em investigação, no entanto muitos dos resultados desta investigação são contra-intuitivos e contrários a muitos pontos de vista amplamente aceites. Por exemplo, muitos educadores assumem que estratégias gerais de resolução de problemas são não apenas possíveis de aprender e de ensinar, mas também um complemento essencial para o conhecimento matemático. A exposição mais conhecida desse ponto de vista foi fornecida por Pólya (1957). Ele discutiu uma série de estratégias gerais de resolução de problemas, tais como incentivar os alunos de Matemática a pensar num problema relacionado para depois resolver o problema dado, por analogia, ou a pensar num problema mais simples e, em seguida, extrapolar para o problema dado. Os exemplos que Pólya utilizou para demonstrar as suas estratégias de resolução de problemas são fascinantes, e a sua influência pode provavelmente ter sido originada, pelo menos em parte, por esses exemplos.

No entanto, em mais de meio século, não surgiu nenhum corpo sistemático de provas que demonstrem a eficácia das estratégias gerais de resolução de problemas. É possível en-

sinar os estudantes a usarem estratégias gerais, tais como as sugeridas por Pólya (Schoenfeld, 1985), mas isso é insuficiente. Não existe um corpo de investigação com base em experiências aleatórias, controladas, indicando que tal ensino leve a resolver melhor os problemas.

A recente “reforma” do currículo ignora a ausência de dados de suporte e entende de uma forma completamente errada o papel da resolução de problemas na cognição. Suponhamos, com vista a um absurdo, que não estamos realmente a ensinar matemática às pessoas, mas a ensinar alguma forma geral de resolução de problemas. Então, pode ser reduzida a importância do conteúdo matemático. De acordo com este argumento, podemos ensinar os alunos a resolver problemas em geral, e isto torna-os bons matemáticos aptos a descobrir novas soluções independentemente do conteúdo.

Acreditamos que este argumento ignora toda a evidência empírica sobre a aprendizagem da matemática. Apesar de certos matemáticos, na falta de instrução adequada, poderem ter aprendido a resolver problemas matemáticos descobrindo soluções sem orientação explícita, esta abordagem nunca foi a forma com melhor resultado ou mais eficiente para aprender matemática.

A via alternativa para adquirir competências de resolução de problemas em matemática deriva do trabalho de um psicólogo holandês, De Groot (1946-1965), investigando a origem da competência em xadrez. Pesquisando porque é que os mestres de xadrez derrotaram sempre os jogadores de fim-de-semana, De Groot conseguiu encontrar apenas uma diferença. Ele mostrou a mestres e jogadores de fim-de-semana uma configuração do tabuleiro de um jogo real, removeu-a após cinco segundos, e pediu-lhes para a reproduzir. Os mestres conseguiam fazê-lo com uma taxa de precisão de cerca de 70%, em comparação com 30% para os jogadores de fim-de-semana. Chase e Simon (1973) replicaram estes resultados e, adicionalmente, demonstraram que, quando a experiência foi repetida com configurações aleatórias em vez de configurações de jogo real, mestres e jogadores de fim-de-semana tinham igual precisão ($\pm 30\%$). Os mestres foram superiores apenas para configurações retiradas de jogos reais.

O xadrez é um jogo de resolução de problemas, cujas regras podem ser aprendidas em cerca de trinta minutos. No entanto, são precisos pelo menos dez anos para alguém se tornar um mestre de xadrez. O que é que ocorre nesse período?

Ao estudar os jogos anteriores, os mestres de xadrez aprendem a reconhecer dezenas de milhares de configurações do tabuleiro e os melhores movimentos associados a cada configuração (Simon & Gilmartin, 1973). A superioridade dos mestres de xadrez não vem de terem adquirido inteligentes e sofisticadas estratégias gerais de resolução de problemas, mas sim de terem armazenado inúmeras configurações e os melhores movimentos associados a cada uma na memória de longo prazo.

Os resultados de De Groot têm sido replicados em vários campos educacionalmente relevantes, incluindo o da matemática (Sweller & Cooper, 1985). Eles dizem-nos que a memória de longo prazo, uma componente crucial da arquitectura cognitiva humana, não é usada para armazenar factos isolados, aleatórios, mas sim para armazenar enormes complexos de informações estreitamente integradas que resultam em competências de resolução de problemas. Essa competência é conhecimento de domínio específico, e não de domínio geral. Um experiente “resolvidor de problemas” em qualquer domínio construiu e armazenou um grande número de esquemas na memória de longo prazo, que permitem aos problemas nesse domínio ser categorizados de acordo com seus movimentos-solução. Em suma, a investigação sugere que podemos ensinar aspirantes a matemáticos a serem eficazes “resolvidores de problemas” fornecendo-lhes apenas um grande armazém de esquemas específicos do domínio. A competência de resolver problemas de matemática é adquirida através de um grande número de estratégias específicas da resolução de problemas de matemática que são relevantes para problemas particulares. Não existem estratégias gerais, independentes, de resolução de problemas que possam ser aprendidas.

Como é que se podem resolver problemas que não se tenham previamente encontrado? A maioria das pessoas emprega uma versão de análise dos “finais intermédios”, em que são identificadas as diferenças entre um problema-formulado corrente e um objectivo-formulado e os operadores de resolução de problemas reduzem essas diferenças. Não há nenhuma evidência de que esta estratégia seja possível de ensinar ou de aprender porque a usamos automaticamente.

Mas as competências de resolução de problemas de matemática de domínio específico *podem* ser ensinadas. Como?

Uma resposta simples é enfatizando exemplos trabalhados de estratégias de resolução de problemas. Há agora um grande corpo de evidências que mostra que estudar exemplos trabalhados é uma forma mais efectiva e eficiente de aprender a resolver os problemas do que simplesmente praticar a resolução de problemas, sem referência a exemplos trabalhados (Paas & van Gog, 2006). Intercalando o estudar exemplos trabalhados com praticar a resolver o tipo de problemas descrito no exemplo reduz a carga desnecessária da memória de trabalho que impede a transferência de conhecimento para a memória de longo prazo (Paas & van Gog). A melhoria no desempenho de resolução de problemas subsequentes, depois de estudar exemplos trabalhados em vez de resolver problemas, é conhecida como efeito exemplo-trabalhado (Paas & Van Gog).

Enquanto é notável a falta de evidência empírica apoiando o ensino de estratégias gerais de resolução de problemas em matemática, existe ampla evidência empírica da validade do efeito dos exemplos trabalhados. Um grande número de experiências aleatórias controladas demonstra esse efeito (por exemplo Schwonke et al 2009; Sweller & Cooper, 1985). Para os alunos novatos de matemática, é esmagadora a evidência de que estudar exemplos trabalhados em vez de resolver os problemas equivalentes facilita a aprendizagem. Estudar exemplos trabalhados é uma forma de instrução directa, explícita, que é vital em todas as áreas curriculares, especialmente em áreas que muitos alunos consideram difíceis e que são cruciais para as sociedades modernas. A matemática é uma dessas disciplinas. O mínimo de orientação no ensino da matemática conduz a uma aprendizagem mínima (Kirschner Sweller & Clark, 2006).

REFERÊNCIAS

- [1] W. G. Chase, & H. A. Simon, “Perception in Chess”, *Cognitive Psychology* 4 (1973), 55–81.
- [2] A. De Groot, *Thought and Choice in Chess*, Mouton, The Hague, Netherlands, 1965. (Original work published 1946.)
- [3] P. Kirschner, J. Sweller, & R. Clark, “Why Minimal Guidance During Instruction Does not Work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential and inquiry-based teaching”, *Educational Psychologist* 41 (2006), 75–86.

[4] F. Paas & T. van Gog, "Optimising Worked Example Instruction: Different ways to increase germane cognitive load", *Learning and Instruction* 16 (2006), 87–91.

[5] G. Pólya, *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Doubleday, Garden City, NY, 1957.

[6] A. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, New York, 1985.

[7] R. Schwonke, A. Renkl, C. Kreig, J. Wittwer, V. Alevén, & R. Salden, "The Worked Example Effect: Not an artifact of lousy control conditions", *Computers in Human Behavior* 25 (2009), 258–266.

[8] H. Simon. & K. Gilmartin, "A Simulation of Memory for Chess Positions", *Cognitive Psychology* 5 (1973), 29–46.

[9] J. Sweller & G. Cooper, "The Use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra", *Cognition and Instruction* 2 (1985), 59–89.

SOBRE OS AUTORES

John Sweller é professor de Educação na School of Education, University of New South Wales, Sydney, Austrália.

Richard E. Clark é professor de Psicologia Educacional no Clinical Research Professor of Surgery, e director do Center for Cognitive Technology na University of Southern California.

Paul Kirschner é professor de Psicologia Educacional no Centre for Learning Sciences and Technologies (CELSTEC) da Open University of the Netherlands em Heerlen, Holanda.



Participar nestas Olimpíadas é acertar em cheio!
Inscrições até 30 de Abril 2012 • <http://mopm.mat.uc.pt/MOPM>



CATEGORIA
MINI-OLIMPIADAS (3º E 4º ANOS DO ENSINO BÁSICO)
PROVA ÚNICA Maio de 2012

2ª Edição Nacional das Olimpíadas de Matemática do 1º Ciclo do Ensino Básico
CONTACTOS: www.spm.pt, Tel.: 217 986 353, Telex: 960 130 506, Email: opm@spm.pt



Associação Nacional
de História
e Cultura
Clássica e Tradicional



Os Cubos do Príncipe

ANTÓNIO PEREIRA ROSA

Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho

antoniopereirarosa@gmail.com

INTRODUÇÃO

Suponhamos que dispomos de um cubo de pedra ou madeira e nele escavamos um túnel. Se a secção desse túnel for um quadrado, será certamente possível usá-lo para fazer passar um novo cubo (possivelmente mais pequeno do que o primeiro) através do cubo inicial. No século XVII, o príncipe Rupert¹, sobrinho do rei Carlos I de Inglaterra, colocou, na forma de uma aposta, uma questão cuja resposta parece ser obviamente negativa: será possível fazer passar um cubo *maior* (ou igual, nalgumas versões da história) através do cubo original? A surpreendente resposta é **Sim!** e foi dada alguns anos mais tarde por John Wallis².

Neste trabalho veremos como é possível obter este resultado com conhecimentos a nível de 11^o ano de Matemática A (cursos de Ciências e Tecnologias ou de Ciências Socioeconómicas) ou de Matemática B e Geometria Descritiva (curso de Artes Visuais) e referiremos brevemente uma outra solução para o problema, obtida em finais do século XVIII pelo matemático holandês Pieter Nieuwland³.

A SOLUÇÃO DE WALLIS

A solução de Wallis para a questão dos cubos do príncipe baseia-se na sua redução a um problema de geometria plana, a inserção de um quadrado num hexágono regular. Wallis procurou uma solução com uma característica adicional, não exigida na formulação da aposta: o “túnel” de secção quadrada a “escavar” no cubo vai ter como eixo principal a diagonal

espacial, pelo que o centro de cada quadrado que representa a secção do “túnel” fica sobre essa diagonal.

Consideremos um cubo de aresta 1; vamos determinar a sua projecção ortogonal sobre um plano contendo um vértice e perpendicular à diagonal espacial que passa por esse mesmo vértice. Começemos por escolher a posição do nosso cubo num referencial o.n. directo de \mathbb{R}^3 . Uma ideia natural consiste em fazer coincidir um dos vértices do cubo com a origem, tomar como recta suporte da diagonal espacial que por ele passa o eixo Oz e projectar o cubo sobre o plano xOy (a posição do cubo da Ribeira, ver a figura 1).

¹ Rupert do Reno (1619-1682), general, almirante e administrador colonial inglês. Foi artista de mérito e membro fundador da Royal Society, distinguindo-se pelas suas descobertas em metalurgia e gravação de imagens; veja-se [5].

² John Wallis (1616-1703) foi o principal matemático inglês da geração anterior a Newton. Deixou o seu nome ligado ao estudo das cónicas por meio da geometria analítica e aos métodos infinitesimais, nomeadamente ao cálculo de integrais e ao conhecido *produto de Wallis* $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times \dots}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times \dots}$; veja-se [1] ou [3].

³ Pieter Nieuwland (1764-1794), matemático, químico e poeta, foi professor na Universidade de Leiden; nada publicou em vida sobre o problema dos cubos e a sua contribuição foi dada a conhecer apenas em 1816, num livro de geometria escrito por um dos seus professores, J. H. van Swinden, que a tinha encontrado no espólio de Nieuwland. Para a história do problema, nomeadamente no que diz respeito às contribuições dos matemáticos referidos, consulte-se [6] ou [2], que contêm uma versão algo diferente da história do problema dos cubos.

Apostar que se consegue fazer passar um cubo de aresta 31 por um cubo de aresta 30? Uma aposta para perder! No entanto, no século XVII, o príncipe Rupert fê-la... e ganhou.

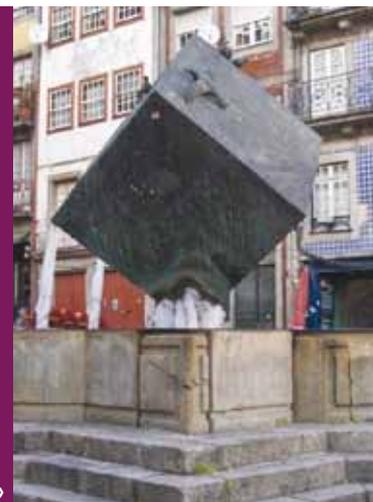


Figura 1

Esta escolha tem o inconveniente de levar a cálculos desnecessariamente complicados: por exemplo, o outro extremo da diagonal espacial em causa terá as coordenadas $(0, 0, \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}) = (0, 0, \sqrt{3})$ (supondo que todos os pontos do cubo têm cota não negativa) e para os restantes vértices o resultado é ainda pior. Assim, vamos considerar o cubo de vértices

$$A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,1,0), O(0,0,0), D(1,0,1), \\ E(1,1,1), F(0,1,1) \text{ e } G(0,0,1)$$

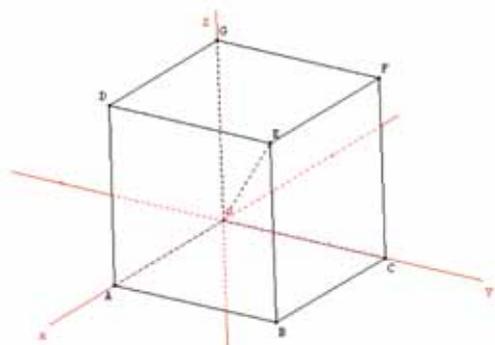


Figura 2

(figura 2) e fazer a sua projecção sobre o plano π , que passa na origem e é perpendicular à recta DE . Como $\vec{DE} = E - D = (1, 1, 1)$, resulta imediatamente que o plano π pode ser definido por $x + y + z = 0$.

Para cada ponto $X \in \mathbb{R}^3$, seja X' a sua projecção sobre o plano π ; é óbvio que $O' = O$ e que $E' = O$. Vejamos como determinar as imagens dos seis restantes vértices do cubo, que vão definir um hexágono no plano π (figura 3).

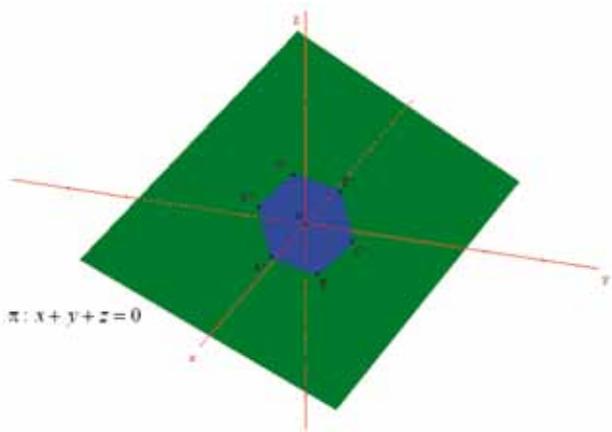


Figura 3

Seja então $A(1,0,0)$; para determinar A' basta obter a intersecção da recta a , que incide com o ponto A e tem como vector director $\vec{DE} = (1, 1, 1)$ com o plano π . A referida recta pode ser definida pelas equações

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1};$$

resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}, \\ x + y + z = 0 \end{cases},$$

obtemos

$$A' \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$

As coordenadas dos restantes vértices do hexágono podem ser obtidas de forma análoga, pelo que nos limitamos a indicar os resultados:

$$B' \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right), C' \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right), D' \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \\ F' \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), G' \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Para comprovar que o hexágono é regular, basta:

- 1) Calcular os comprimentos $\overline{A'D'}$, $\overline{D'G'}$, $\overline{G'F'}$, $\overline{F'C'}$, $\overline{C'B'}$ e $\overline{B'A'}$ e verificar que são todos iguais.
- 2) Constatar que os ângulos internos de vértices A' , D' , G' , F' , C' e B' têm amplitude 120° .

Vejamos, a título de exemplo, os cálculos de $\overline{A'D'}$ e de $A'\hat{D}'G'$.

$$\overline{A'D'} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$A'\hat{D}'G' = \overline{D'A'} \wedge \overline{D'G'} = \cos^{-1} \left(\frac{\overline{D'A'} \cdot \overline{D'G'}}{\|\overline{D'A'}\| \times \|\overline{D'G'}\|} \right) \\ = \cos^{-1} \left(\frac{-1/3}{\sqrt{2/3} \times \sqrt{2/3}} \right) \\ = \cos^{-1}(-1/2) = 120^\circ$$

Concluimos assim a primeira parte do nosso programa, a redução a uma questão de geometria plana: será possível inscrever num hexágono regular de lado $\sqrt{2/3}$ um quadrado de lado superior a 1?

Consideremos a figura seguinte:

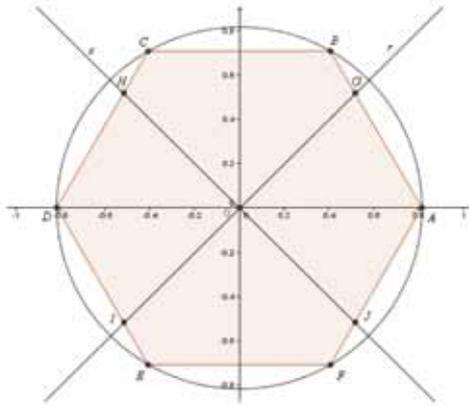


Figura 4

Nela está representado um hexágono regular $[ABCDEF]$, centrado na origem e de lado $\sqrt{2/3}$, no qual pretendemos inscrever um quadrado de lado superior a 1; a simetria da figura sugere o traçado do quadrado (também centrado na origem) a partir das suas diagonais, que vão ser as bissectrizes dos quadrantes. Como o lado do hexágono inscrito numa circunferência é igual ao raio, os pontos A e B têm as coordenadas

$$(\sqrt{2/3}, 0) \text{ e } \sqrt{2/3}(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

respectivamente, pelo que a recta AB pode ser definida por $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{2}$. Para determinar as coordenadas do ponto G , basta resolver o sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = -\sqrt{3}x + \sqrt{2} \end{cases}$$

cuja solução é $x = y = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

Vemos assim que o lado do quadrado é $2x = \sqrt{6} - \sqrt{2} > 1$ e segue-se o resultado. Conclui-se ainda que o maior cubo que pode atravessar um cubo de aresta 1 *quando se usa o método de Wallis* tem de aresta $\sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1.035$; em particular, um cubo de aresta 31 pode atravessar um cubo de aresta 30!

UM PROCESSO ALTERNATIVO

Wallis e os seus contemporâneos utilizaram um processo diferente do descrito na secção anterior para estudar a projecção do cubo sobre o plano π ; recorreram a técnicas que actualmen-

te são estudadas em Geometria Descritiva (veja-se [4] ou [6]).

Admitiram como óbvio que a projecção do cubo é um hexágono regular e determinaram o seu lado por um raciocínio muito simples. Repare-se que a diagonal facial $[DF]$ do cubo, de comprimento $\sqrt{2}$, é paralela ao plano π , pelo que o seu comprimento não é alterado pela projecção. Assim⁴, representando por X o ponto médio de $[DF]$, tem-se que (ver figuras 5 e 6):

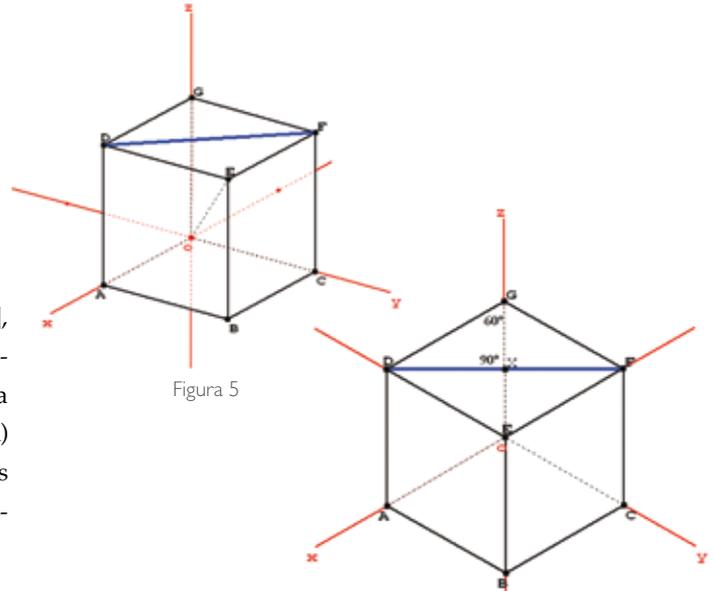


Figura 5

Figura 6

- $\overline{DX} = \sqrt{2}/2$;

- no triângulo rectângulo $[DXG]$, $\text{sen } 60^\circ = \frac{\overline{DX}}{\overline{DG}}$,
donde

$$\sqrt{3}/2 = \frac{\sqrt{2}/2}{\overline{DG}} \text{ e } \overline{DG} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

A redução do problema dos cubos à inscrição de um quadrado num hexágono está assim concluída e o estudo prossegue como anteriormente. Esta apresentação alternativa, para além de ter interesse histórico, permite que o problema dos cubos seja apresentado a alunos de Matemática B do curso de Artes Visuais, que têm bons conhecimentos de Geometria Descritiva mas que pouco sabem de geometria analítica no espaço.

⁴ Para evitar sobrecarregar as figuras, utilizámos as mesmas letras para os vértices do cubo e para as suas projecções.

A CONTRIBUIÇÃO DE NIEUWLAND

Pieter Nieuwland abordou o problema dos cubos de uma perspectiva diferente; deixou cair a restrição de Wallis de que o eixo do “túnel” deveria coincidir com uma diagonal espacial e procurou determinar a secção quadrada de maior lado que é possível obter seccionando o cubo unitário por um plano. Não vamos fazer aqui a prova de que a secção que ele encontrou é efectivamente a maior possível (o leitor interessado pode encontrá-la em [2]), limitando-nos a apresentá-la e a mostrar que o lado da secção é maior do que o lado do quadrado de Wallis.

Consideremos os três pontos $P(1, 1/4, 0)$, $Q(3/4, 0, 1)$ e $R(0, 3/4, 1)$. Verifica-se imediatamente que $P \in [AB]$, $Q \in [DG]$ e $R \in [FG]$. O plano PQR , que pode ser definido por $4x + 4y + 2z - 5 = 0$, intersecta a aresta $[BC]$ no ponto $S(1/4, 1, 0)$ (ver figura 7).

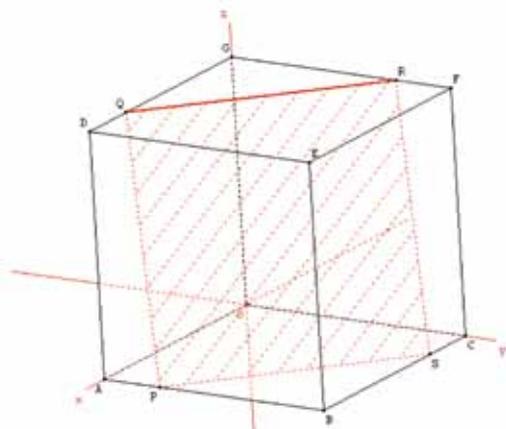


Figura 7

Afirmamos que o quadrilátero $[PQRS]$ é um quadrado, de lado $3\sqrt{2}/4$; como este número é ligeiramente superior a 1,06, temos aqui uma solução de lado superior à de Wallis. Para comprovar estas afirmações, basta:

- 1) Calcular os comprimentos \overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RS} e \overline{PS} e verificar que são todos iguais a $3\sqrt{2}/4$.
- 2) Constatar que os ângulos internos de vértices P , Q , R e S são rectos.

Como os cálculos são muito semelhantes aos feitos anteriormente, vamos fazê-los apenas para o lado $[PQ]$ e o ângulo PQR .

$$\bullet \overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{3}{4} - 1\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{4}\right)^2 + (1 - 0)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} > \sqrt{6} - \sqrt{2};$$

- O ângulo PQR é recto, pois

$$\vec{QP} \cdot \vec{QR} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1\right) = 0.$$

Para concluir, e a título de curiosidade, reparemos que a secção de área máxima tem área racional:

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{9}{8}.$$

REFERÊNCIAS

- [1] Boyer, C. B e Merzbach, U. C. (1989), *A History of Mathematics* (2nd edition), John Wiley and Sons, New York.
- [2] “El Problema del Cub” (2007), Full no. 61 (publicação da Facultat de Matemàtiques i Estadística, Universitat Politècnica de Catalunya), disponível em http://upcommons.upc.edu/revistes/bitstream/2099/6535/4/full_61.pdf e www.fme.upc.edu/arxius/el.../solucio_cub.pdf
- [3] Hollingdale, S. (1989), *Makers of Mathematics*, Penguin Group, London.
- [4] Melzak, Z. A. (1983), *Invitation to Geometry*, John Wiley and Sons, New York.
- [5] “Prince Rupert” (artigo na Wikipedia).
- [6] Rickey, V. F. (2005), “Dürer Magic Squares, Cardano’s Rings, Prince Rupert Cube’s and Other Neat Things” (trabalho apresentado num curso de matemática recreativa da Mathematical Association of America, disponível em <http://www.math.usma.edu/people/rickey/papers/ShortCourseAlbuquerque.pdf>)

SOBRE O AUTOR

António Pereira Rosa é licenciado em Matemática (1986) e mestre em Matemática para o Ensino (2008) pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É professor do quadro da Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho desde 1994.



MANUEL SILVA
Universidade Nova
de Lisboa
mnas@fct.unl.pt



PEDRO J. FREITAS
Universidade
de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

A GEOMETRIA SEGUNDO PAUL ERDŐS

Será que ainda é possível formular problemas interessantes em geometria plana? Vamos apresentar três exemplos no contexto da geometria de incidência combinatoria, uma área que muito deve à imaginação do incansável Paul Erdős.

Iremos considerar configurações finitas de pontos e rectas no plano euclidiano, embora os enunciados aqui discutidos façam sentido em contextos mais gerais, substituindo \mathbb{R}^2 por \mathbb{R}^n por exemplo, e as rectas por circunferências ou outras curvas algébricas.

1. SZEMERÉDI-TROTTER

Dado um ponto P e uma recta r no plano, dizemos que P incide com r se P pertencer à recta r .

Problema 1. Dados n pontos e m rectas no plano, qual o número máximo de incidências possível?

Denotando por $I = I(n, m)$ o número máximo de incidências referido no problema, sabemos que $I \leq nm$, mas será que existe alguma configuração de pontos e rectas que atinja este valor? Certamente que não, excepto nos casos degenerados: todos os pontos numa única recta, ou todas as rectas a passar num ponto único comum. A obstrução reside naturalmente no postulado de Euclides que afirma que por dois pontos passa uma única recta. Um resultado bastante útil e que foi conjecturado por Erdős dá-nos o melhor valor assintótico possível para $I(n, m)$.

Teorema 1 (Szemerédi-Trotter). Dados n pontos e m rectas no plano, o número de incidências não excede

$O(n^{2/3}m^{2/3} + n + m)$ e há configurações de pontos para as quais este limite superior é assintoticamente atingido.

Existem diversas demonstrações deste resultado desde a inicial [1]. Székely em [2] usou o método probabilístico de Erdős e uma medida do grau de planaridade de um grafo, conhecido pelo *número de cruzamentos*, e que corresponde ao número de intersecções mínimo entre todas as representações de um grafo no plano, para demonstrar o resultado de Szemerédi-Trotter. O argumento de Székely admite diversas generalizações, por exemplo podemos considerar configurações de pontos e circunferências ou outras curvas desde que estas se intersectem num número uniformemente limitado de pontos.

2. NÚMERO DE DISTÂNCIAS DISTINTAS

O problema seguinte foi proposto por Erdős em [3] há cerca de 60 anos.

Problema 2. Qual o número mínimo de distâncias distintas determinado por um conjunto de n pontos no plano?

Definimos uma função $f(n)$ como sendo o número mínimo possível de distâncias determinadas por conjuntos S com $|S| = n$. Por exemplo, $f(3) = 1$ e $f(4) = 2$, onde os pontos são,

respectivamente, vértices de um triângulo equilátero e de um quadrado. Um conjunto de n pontos colineares equidistantes entre si definem $n - 1$ distâncias distintas, o que mostra que embora o número de distâncias possível seja quadrático $\binom{n}{2}$, a função $f(n)$ é no máximo linear.

Erdős mostrou que

$$\sqrt{n} \ll f(n) \ll n / \log(n)^{1/2}$$

e conjecturou que a função $f(n)$ deveria ser linear a menos de um factor logarítmico. O majorante quase linear corresponde a uma grelha de pontos de tamanho \sqrt{n} por \sqrt{n} . Determinar o número de distâncias distintas nesta grelha é equivalente ao problema clássico em teoria de números de representar um natural como soma de dois quadrados. Para obter o menor \sqrt{n} basta fixar um ponto $P \in S$ e considerar todas as circunferências com centro em P e que passam por algum ponto de S . Dizemos que estas circunferências cobrem o conjunto S . Se existirem pelo menos circunferências com centro em P o resultado já está provado. Caso contrário, terá de existir uma circunferência com pelo menos n pontos e consequentemente, uma semicircunferência com pelo menos $\frac{\sqrt{n}}{2}$ pontos. As distâncias entre um ponto extremo desta semicircunferência aos outros pontos são necessariamente distintas, de onde resulta o menor $f(n) \gg \sqrt{n}$.

A estimativa assintótica da função $f(n)$ foi sucessivamente melhorada $f(n) \gg n^{2/3}$ por Leo Moser em 1952, $f(n) \gg n^{5/7}$ por Fan Chung em 1984, $f(n) \gg \frac{n^{4/5}}{\ln n}$ por Fan Chung, Endre Szemerédi e W. T. Trotter em 1992, $f(n) \gg n^{4/5}$ por László Székely em 1993, $f(n) \gg n^{6/7}$ por József Solymosi e C. D. Tóth em 2001.

O problema foi finalmente resolvido em 2011 por Nets Katz e Larry Guth [4], sendo previsível que as técnicas desenvolvidas e usadas no argumento venham a ser úteis noutros problemas.

Teorema 2 (Guth e Katz). $f(n) \gg \frac{n}{\ln n}$.

O argumento usa diversas ideias, combinadas de modo bastante engenhoso.

Uma delas é considerar a geometria das transformações rígidas do plano, em vez de considerar simplesmente pontos e rectas. Sendo poderosa, esta é uma ideia bastante natural, uma vez que as distâncias são preservadas por estas transformações.

Outra ideia central é o uso do conhecido *teorema da sandwich*, o qual nos diz, por exemplo, que, dados dois conjuntos limitados no plano, existe necessariamente uma recta que divide os dois simultaneamente ao meio, ou em dimensão 3: dados três conjuntos limitados (mensuráveis) no espaço, existe um plano que divide os três (pão, queijo e fiambre) ao meio. Se em vez de rectas e planos usarmos um conjunto polinomial podemos generalizar este tipo de resultado. Estes resultados são contínuos, mas têm equivalentes naturais discretos mais relevantes para o nosso problema. Com estes ingredientes podemos obter uma subdivisão equilibrada do conjunto de pontos inicial através de uma curva polinomial $P(x, y) = 0$, que o divide em células que têm, essencialmente, o mesmo número de pontos. E a partir daqui basta fazer as contas como alguém com razão dizia.

3. UMA CONJECTURA DE ULAM

Terminamos com um pequeno desafio ao leitor e uma conjectura de Ulam.

Desafio. Construir um conjunto de 7 pontos não colineares no plano de modo a que todas as distâncias entre pares de pontos sejam números inteiros.

Na verdade existem configurações no plano com um número arbitrariamente grande de pontos tais que todas as distâncias são inteiras. Não existe no entanto um conjunto infinito de pontos no plano (não colineares) com todas as distâncias inteiras. O argumento é simples desde que o leitor se lembre da definição geométrica de hipérbole e foi obtido por Erdős e Anning.

E se em vez de distâncias inteiras considerarmos distâncias racionais, será que os problemas são equivalentes? Naturalmente para configurações finitas podemos transformar uma configuração *racional* numa em que as distâncias são inteiras através de uma ampliação. No entanto, surpreendentemente, existem conjuntos infinitos de pontos com todas as distâncias racionais!

Em [5] demonstra-se que as únicas curvas algébricas irredutíveis que podem conter um conjunto infinito racional de pontos são as rectas e as circunferências. Assim, não é possível, por exemplo, escolher um conjunto infinito racional de pontos numa parábola.

Terminamos apresentando uma conjectura que, para variar, foi sugerida por Ulam a Erdős.

Conjectura (Ulam 1945). Não existem conjuntos densos de pontos no plano com todas as distâncias racionais.

REFERÊNCIAS

[1] Endre Szemerédi, William T. Trotter, "Extremal problems in discrete geometry", *Combinatorica* 3 (3–4), 1983, 381–392.

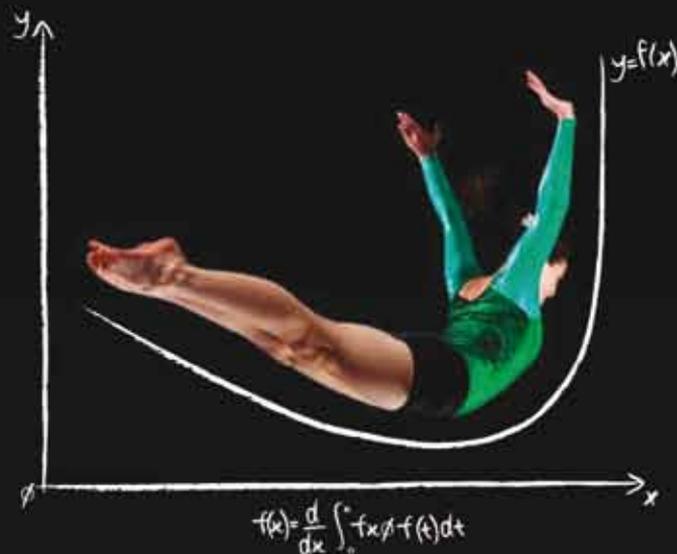
[2] László A. Székely "Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry", *Combinatorics, Probability and Computing* 6 (3), 1997, 353–358.

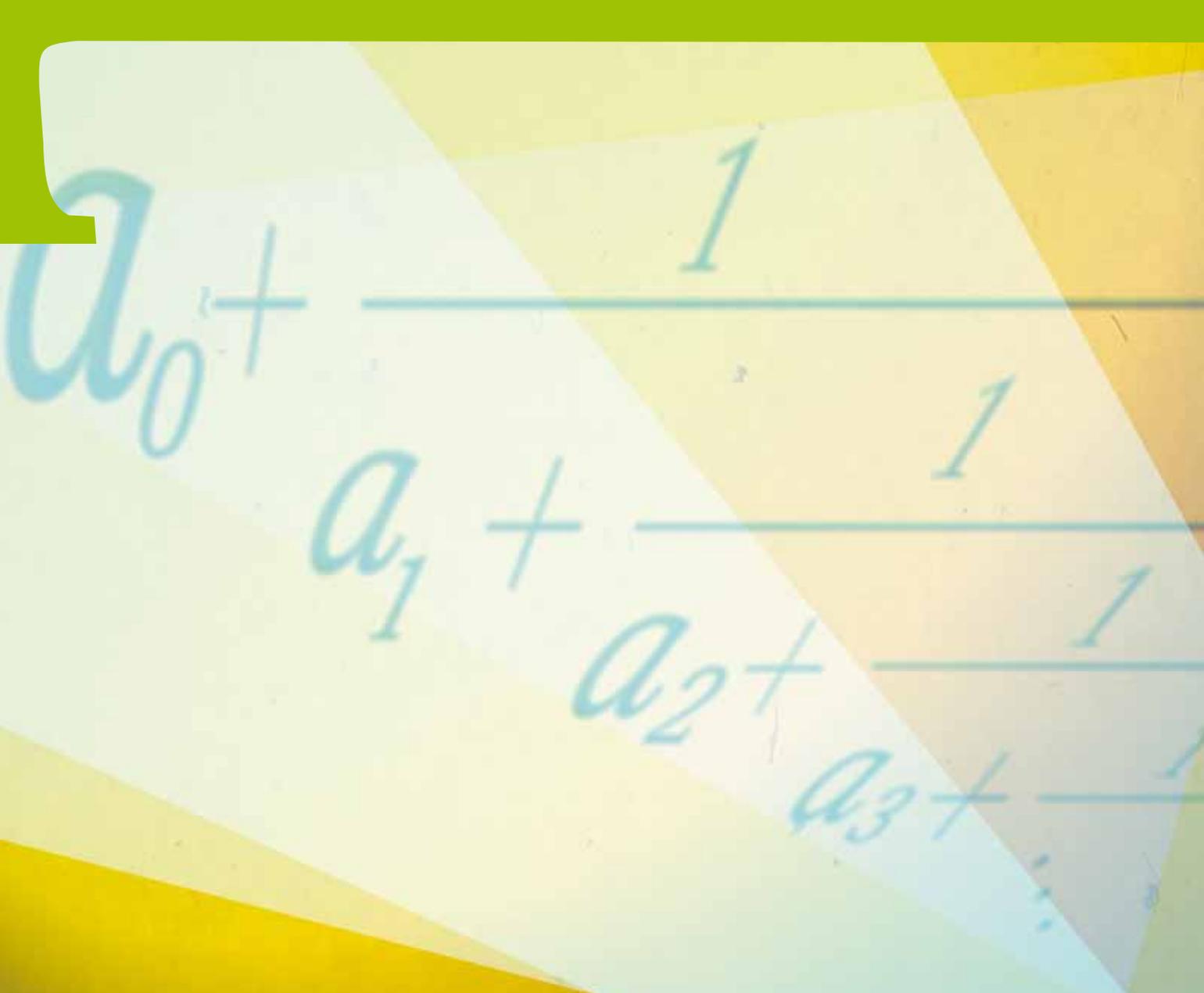
[3] P. Erdős, "On the set of distances of n points", *The American Mathematical Monthly* 53, Maio de 1946, 248-250.

[4] L. Guth; N. H. Katz, *On the Erdős distinct distance problem on the plane*. ar- Xiv:1011.4105 (2010)

[5] József Solymosi, Frank de Zeeuw, "On a Question of Erdős and Ulam", *Discrete and Computational Geometry* 43(2), 2010, 393-401.

[6] J. Garibaldi, A. Iosevich, S. Senger *The Erdős Distance Problem*, Providence, RI: American Mathematical Society (2011)





Sucessões e Frações Contínuas

JOÃO CARREIRA PAIXÃO

Escola ES/3 de Maria Lamas

jcpaixao@gmail.com

Atualmente a representação de números reais na notação decimal parece ser a mais óbvia, mas nem sempre foi assim. Uma outra forma de representar números reais, que recorre a uma sucessão de frações encaixadas umas nas outras, esteve em particular destaque nos meios científicos entre os sécs. XVII e XIX. Embora menos conhecida, a representação em forma de fração contínua é ainda utilizada em estudos e trabalhos recentes. Neste artigo, fundamentando resumidamente do ponto de vista teórico as tarefas propostas, iremos apresentar uma forma de trabalhar com frações contínuas no ensino secundário em conexão com o estudo das sucessões alternadas convergentes.

Enquanto se estudam as sucessões no 11º ano podemos confrontar os alunos com uma interrogação: “Não haverá outro tipo de sucessões alternadas convergentes para além daquelas cujo termo geral apresente uma potência de base -1?”.

Uma possível resposta reside no estudo de um tipo de representação dos números reais, pouco conhecida mas muito interessante. Essa representação designa-se por *Fração Contínua* e toma a forma de:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}, \text{ onde } a_0 \in \mathbb{Z} \text{ e } a_i \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}$$

ou escrita de forma compacta, $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$.

Há registos desde o séc. V do desenvolvimento em fração contínua de números. Em particular, o matemático hindu Aryabhata (476 d.C.) terá usado um método semelhante para resolver equações diofantinas (encontrar as soluções inteiras de equações com uma ou mais incógnitas), assim designadas em homenagem ao matemático grego Diofanto de Alexandria (250 a.C.), sem contudo apresentar um método geral.

Mais tarde, o também matemático hindu Bahscara II, no séc. XII, generalizou o processo para resolver equações diofantinas a partir de um desenvolvimento semelhante a uma fração contínua de um número. Já em 1575, no livro *Álgebra*, Rafael Bombelli (1526-72) usa este tipo de fração para aproximar raízes quadráticas (por exemplo $\sqrt{13}$). Também Pietro Cataldi (1548-1626) apresenta um desenvolvimento para $\sqrt{18}$. Contudo, nenhum dos dois aprofundou a generalização em fração contínua.

É em 1692, e depois de Lord Brouncker (1602-84) ter apresentado o desenvolvimento de $\frac{4}{\pi} = [1; 3, 1, 1, 1, 15, 2, \dots]$ ¹ em fração contínua, que surge pela primeira vez o termo, introduzido pelo matemático inglês John Wallis (1616-1703) no seu livro *Opera Mathematica P*. Neste período, mais precisamente em 1685, o matemático e astrónomo holandês Christian Huygens (1629-95) apresenta uma aplicação das frações contínuas no cálculo da razão entre rodas dentadas para a construção de um planetário mecânico. Euler (1707-83) em 1737, no livro *De Fractionibus Continuis*, provou que qualquer irracionalidade quadrática (uma raiz de um polinómio do segundo grau com coeficientes inteiros) é expressa por uma fração contínua infinita periódica, tendo criado um método para encontrar as frações contínuas de raízes de uma equação do 2º grau com coeficientes inteiros. Euler apresentou também a expressão para o número e em fração contínua. Johan Lambert (1728-77) usou o trabalho de Euler para provar que se x fosse um racional diferente de 0, então e^x e $\tan x$ não podiam ser racionais. Durante o séc. XX, as frações contínuas foram aplicadas para deduzir algoritmos computacionais, destacando-se o trabalho de Daniel Shanks que, em abril de 1954, descreve um método para calcular logaritmos a partir do desenvolvimento em frações contínuas, tirando partido da “rapidez” de cálculo dos computadores da altura. Também queremos evidenciar o trabalho de M. A. Morrison e J. Brillhart que, em 1975, desenvolveram um algoritmo de fatorização prima, baseado no desenvolvimento em frações contínuas, o mais rápido até 1981, ano em que foi proposto o Método da Rede/Malha Quadrática por Carl Pomerance. Por fim, vale a pena referir que no estudo de sistemas dinâmicos

¹ A fração contínua apresentada por Brouncker não tinha este formato e apresenta-se apenas como exemplo.

² Wallis e Brouncker foram co-fundadores da Royal Society.

caóticos se tem recorrido a propriedades das frações contínuas para analisar comportamentos e justificar resultados.

Sabe-se que qualquer número real pode ser representado por uma fração contínua. Para encontrar a fração contínua de um número real x , basta seguir o algoritmo seguinte:

- 1) Se $x > 1$ siga para 2, se $0 < x < 1$ siga para 3 (o procedimento é análogo para os reais negativos).
- 2) Subtraia a x a sua parte inteira; se o resto for zero, o processo pára, se não, siga para 3.
- 3) Inverta o número que se obtém e volte a 1.

Os números inteiros que se vão obtendo ao longo do processo formam a fração contínua correspondente.

Como exemplo, escreva-se a fração contínua para $\frac{13}{7}$.

$$\frac{13}{7} - 1 = \frac{6}{7}, a_0 = 1 \text{ é a parte inteira de } \frac{13}{7}$$

$$\frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}, a_1 = 1 \text{ é a parte inteira de } \frac{7}{6}$$

$$6 - 6 = 0, a_2 = 6 \text{ termina o processo.}$$

Subtraíram-se ao longo da iteração do algoritmo os números 1 (duas vezes) e 6, pelo que

$$\frac{13}{7} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}.$$

Proposta 1: Confirme que esta igualdade se verifica.

Proposta 2: Escreva as frações contínuas dos números (use a calculadora para os irracionais):

a) $\frac{35}{12}$ b) $\sqrt{2}$ c) π

Como provavelmente reparou, há enormes diferenças entre o primeiro e os restantes números. Euler esclareceu-nos esta questão por completo quando provou o seguinte teorema.

Teorema: Um número real é racional se e só se for representado por uma fração contínua finita.

Este teorema permite concluir que os números irracionais são necessariamente escritos na forma de uma fração contínua infinita.

Que a qualquer número real x se pode associar uma fração contínua não oferece qualquer dúvida, basta verificar o algoritmo já apresentado.

No que se segue mostraremos que essa fração representa, num sentido técnico bem preciso que será esclarecido a seguir, esse número real x . Mas antes disso, provaremos que

qualquer fração contínua representa, sempre no sentido que será abaixo precisado, um número real (e é aqui que se introduzem as sucessões alternadas). Juntando os dois factos, ficará estabelecida uma bijeção entre números reais e frações contínuas.

Observe-se um conceito fundamental para este estudo.

Se uma fração contínua for truncada a partir de certa ordem, obtém-se uma outra fração contínua, que por ser finita corresponde necessariamente a um número racional e, como tal, se representa por um número fracionário. As frações obtidas por esta via são designadas por *frações reduzidas*. Se truncarmos a fração a partir de certa ordem k , obtemos $C_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k], k \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{N} (k \neq 0), a_0 \in \mathbb{Z}$.

Por exemplo, $\frac{13}{7}$ tem como frações reduzidas

$$C_0 = 1,$$

$$C_1 = 2 = 1 + \frac{1}{1}$$

$$\text{e } C_2 = \frac{13}{7} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}.$$

Como vemos, a última reduzida coincide com a fração inicial, e isto ocorre sempre que a fração contínua é finita, ou seja, que representa um número racional.

Se a fração contínua for infinita teremos uma infinidade de reduzidas. A título de exemplo, apresentam-se as três primeiras reduzidas de

$$\pi : C_0 = 3,$$

$$C_1 = \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$$

$$\text{e } C_2 = \frac{333}{106} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}}$$

Uma observação: é notável que a fração $\frac{22}{7}$ tenha sido usada como aproximação de π por Arquimedes, não é conhecida a razão pela qual o sábio grego terá utilizado este valor, mas, recorrendo à teoria das *frações contínuas*, será possível compreender que esta aproximação é de um nível de exatidão impossível de obter com uma outra fração com denominador igual ou inferior ao desta. É usual referir-se que se trata de uma aproximação vantajosa. Na parte final do artigo, explicar-se-á esta afirmação com outro pormenor.

Da construção das frações reduzidas pode estabelecer-se uma regra geral de cálculo do numerador e do denominador de cada fração. Por recorrência tem-se que:

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0}, C_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

$$\text{e } \forall k > 1, k \in \mathbb{N}, C_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1} a_k + p_{k-2}}{q_{k-1} a_k + q_{k-2}}$$

Esta relação de recorrência prova-se facilmente por indução, bastando para tal ter em atenção que para se obter a fração reduzida de ordem $k + 1$, substitui-se a_k na anterior por $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$.

A partir daqui pode construir-se um quadro geral que facilita o cálculo de cada uma das reduzidas:

	a_0	a_1	a_2	\dots	a_k
p_i	a_0	$a_0 a_1 + 1$	$p_1 a_2 + p_0$	\dots	$p_{k-1} a_k + p_{k-2}$
q_i	1	a_1	$q_1 a_2 + q_0$	\dots	$q_{k-1} a_k + q_{k-2}$

No que se segue, provaremos que a sucessão das reduzidas é uma sucessão convergente. Começamos por observar que, comparando duas reduzidas consecutivas, se verifica a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} &= \frac{p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1}}{q_{k+1} q_k} \\ &= \frac{p_k a_{k+1} q_k + p_{k-1} q_k - p_k q_k a_{k+1} - p_k q_{k-1}}{q_{k+1} q_k} \\ &= \frac{p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1}}{q_{k+1} q_k} = -\frac{p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k}{q_k + 1 q_k} \\ &= (-1)^k \frac{p_1 q_0 - p_0 q_1}{q_{k+1} q_k} = \frac{(-1)^k}{q_{k+1} q_k}. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{q_{k+1} q_k} = 0 \quad (i)$$

sendo por construção $0 < q_0 < \dots < q_k < q_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Também daqui resulta a propriedade fundamental das reduzidas

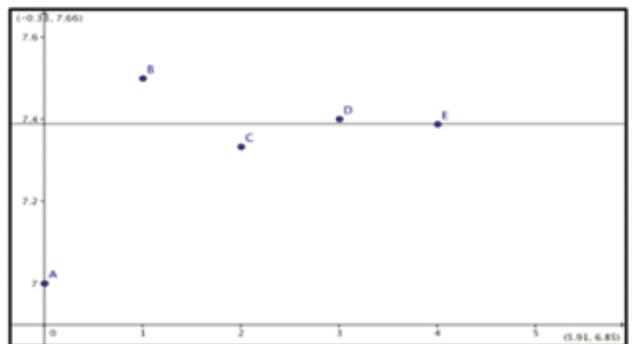
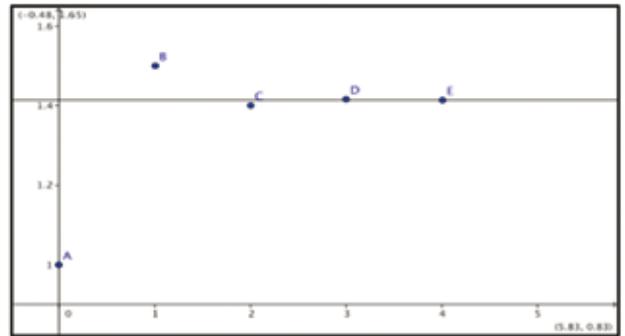
$$p_{k+1} q_k - q_k q_{k+1} = (-1)^k \quad (ii)$$

Proposta 3: Calcule as cinco primeiras reduzidas de $\sqrt{2}$ e e^2 .

Proposta 4: Represente num referencial ortogonal, para cada um dos valores anteriores, os pontos de coordenadas $(k, \frac{p_k}{q_k})$. O que é que observa?

Proposta 5: Represente em cada referencial ortogonal, construído na proposta anterior, a equação $y = \alpha$, sendo $\alpha = \sqrt{2}$ ou $\alpha = e^2$, respetivamente. (Usando um *software* de

geometria, como o GeoGebra, poderá obter resultados como os seguintes)



Continuando com a prova da convergência das frações reduzidas de uma dada fração contínua, comparamos duas frações reduzidas consecutivas com a mesma paridade:

$$\begin{aligned} \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{p_k}{q_k} &= \frac{p_{k+2} q_k - p_k q_{k+2}}{q_{k+2} q_k} \\ &= \frac{p_{k+1} a_{k+2} q_k + p_k q_k - p_k q_{k+1} a_{k+2} - p_k q_k}{q_{k+2} q_k} = \\ &= \frac{a_{k+2} (p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1})}{q_{k+2} q_k} = \frac{a_{k+2} (-1)^k}{q_{k+2} q_k} \end{aligned} \quad (iii)$$

esta última igualdade resulta de (ii).

Denotando $C_k = \frac{p_k}{q_k}$, conclui-se que

$$C_1 - C_0 > 0, C_2 - C_1 < 0 \quad \text{e} \quad C_2 - C_0 > 0,$$

ou seja, $C_0 < C_2 < C_1$.

Generalizando,

$C_0 < C_2 < C_4 < \dots < C_{2k} < \dots < C_{2k+1} < \dots < C_5 < C_3 < C_1$, isto porque da igualdade (iii) é possível constatar que a sub-sucessão de reduzidas de ordem par é crescente e a de ordem ímpar é decrescente. Também de (ii) se conclui que as de or-

dem par representam números menores do que as adjacentes de ordem ímpar.

Tendo em conta que já provámos que a diferença entre reduzidas consecutivas tende para zero, recorrendo ao *Axioma dos Intervalos Encaixados de Cantor* (na reta real para cada sucessão de intervalos fechados encaixados e cujo comprimento tenda para zero, existe um e um só ponto que pertença a todos os intervalos), prova-se que a sucessão das reduzidas de uma qualquer fração contínua tende para um número real. Neste sentido, dizemos que qualquer fração contínua representa um número real. Contudo, é ainda necessário esclarecer se a fração contínua obtida a partir de um número real fixado α , usando o algoritmo apresentado acima, representa mesmo o número que lhe deu origem. Para provar que é esse o caso, comparemos duas reduzidas adjacentes

$$C_k = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k] = \\ = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}$$

$$\text{e } C_{k+1} = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}] = \\ = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k + \frac{1}{a_{k+1}}}}}}$$

com o número real α escrito de uma forma oportuna. Mais precisamente, vamos escrever α na forma

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha_k] = \\ = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{\alpha_k}}}}, \alpha_k \in \mathbb{R}^+.$$

onde α_k é o inverso da parte decimal depois da k -ésima iteração do algoritmo para desenvolver a em fração contínua. Por exemplo, temos que:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} \text{ ou } \\ \alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\alpha_2}} \text{ ou } \alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\alpha_3}}}, \text{ etc.}$$

Conforme se pode notar, as três expressões de C_k , α , C_{k+1} têm em comum $[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}]$ e diferem nos termos $\frac{1}{a_k}$, $\frac{1}{\alpha_k}$ e $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$, respetivamente.

É agora possível concluir que α é o limite da sucessão.

Com efeito, por construção,

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}, \text{ com } \alpha_{k+1} \in \mathbb{R}^+, \text{ donde } \alpha_k > a_k.$$

Mas por outro lado, também

$$\alpha_{k+1} = a_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+2}}, \text{ com } \alpha_{k+2} \in \mathbb{R}^+ \text{ e assim, } \frac{1}{\alpha_{k+1}} < \frac{1}{a_{k+1}},$$

pelo que $\alpha_k < a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$.

Obtém-se o enquadramento $a_k < \alpha_k < a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$, que aplicando nos termos referidos anteriormente, resulta,

$$\frac{1}{a_k + \frac{1}{a_{k+1}}} < \frac{1}{\alpha_k} < \frac{1}{a_k}.$$

Desta forma, conclui-se que, $C_k < \alpha < C_{k+1}$ ou $C_{k+1} < \alpha < C_k$.

Tendo em conta a propriedade, (i) concluímos que o limite das reduzidas é mesmo α . Vale a pena observar que um simples cálculo mostra que $C_0 < \alpha < C_1$, pois $C_0 = a_0 < \alpha$, ao mesmo tempo,

$$C_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} > a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = \alpha, \text{ com } \alpha_1 \in \mathbb{R}^+.$$

Como as frações reduzidas de ordem par representam sempre um número inferior ao representado pelas de ordem ímpar, conclui-se que $C_{2k} < \alpha < C_{2k+1}$ explicando rigorosamente o seu comportamento estudado nas propostas 4 e 5.

Antes de terminar, gostaríamos apenas de esclarecer o conceito enunciado anteriormente de vantagem de uma aproximação. Diz-se que uma aproximação de um número real por um número fracionário é vantajosa se não for possível melhorar o erro da aproximação sem aumentar consideravelmente o denominador da fração. De facto, para se melhorar o erro da aproximação de π usada por Arquimedes, ter-se-ia de aumentar o denominador da fração para 25.

Repare-se que fixado um número real α , se p e q forem inteiros tais que

$$\alpha \in \left] \frac{p-1}{q}, \frac{p}{q} \right],$$

então o menor erro ε de uma aproximação de um α por um número fracionário com denominador q vai satisfazer

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2q}.$$

Com efeito, tem-se ou

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q} \quad \text{ou} \quad \left| \alpha - \frac{p-1}{q} \right| \leq \frac{1}{2q}.$$

Contudo, utilizando um enquadramento com duas reduzidas adjacentes da fração contínua associada a α , obtém-se

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \left| \frac{(-1)^k}{q_{k+1}q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2},$$

por construção $q_{k+1} > q_k$.

Compreende-se assim que o erro dado pela aproximação de π por $\frac{22}{7}$ seja inferior a $\frac{1}{49}$ e por outra fração de denominador 7 o erro seria apenas inferior a $\frac{1}{14}$.

Proposta 6: Experimente aproximar π pelas frações de denominador 7 e numerador entre 21 e 28. Qual o erro cometido?

As implicações desta teoria nos diferentes domínios da matemática e ciências afins são inúmeras e não param de nos surpreender, ao mesmo tempo a sua relativa simplicidade permite a sua exploração no âmbito dos diversos conteúdos do 3º ciclo e secundário com vantagens para a compreensão das diferentes conexões que podem estabelecer-se entre diferentes objetos matemáticos que os alunos tendem a compartimentar e a separar.

Agradecimentos: Ao professor Alessando Margheri pelas opiniões e correções propostas.

BIBLIOGRAFIA

Barrow, John D., "Chaos in Numberland: The secret life of continued fractions" in *Plus Magazine*, no 11, Maio 2000. (<http://plus.maths.org/content/>).

Beskin, N.M., *Frações Contínuas*, Editora Mir Moscovo, 1980 (Tradução de Pedro Lima, 1987).

Conway, John H. e Guy, Richard K., *O Livro dos Números*, Universidade de Aveiro/Gradiva, 1999.

Devaney, Robert L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

Khinchin, A. Ya., *Continued Fractions*, Dover, 1997.

Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.

Olds, C.D., *Continued Fractions*, Random House, 1963.

Este artigo foi escrito ao abrigo das normas do Novo Acordo Ortográfico.

SOBRE O AUTOR

João Carreira Paixão é professor contratado de Matemática do 3º ciclo do ensino básico e do ensino secundário. Licenciou-se em Ensino da Matemática pela Universidade de Évora e concluiu recentemente o mestrado em Matemática para Professores pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. O presente artigo percorre uma das tarefas apresentadas na dissertação sobre "Frações Contínuas no Ensino Pré-universitário" no âmbito do mestrado sob orientação do Prof. Doutor Pedro J. Freitas.



Exposições (ma)temáticas da SPM.

Disponíveis para exibição nas escolas, bibliotecas ou instituições similares*.

*A requisição das exposições tem custos de manutenção.



Da Modelação Matemática à Simulação Computacional: Uma Experiência no Âmbito da Formação Contínua de Professores

SUZANA NÁPOLES, MARGARIDA OLIVEIRA,
DM-FCUL, EB 2,3 PISCINAS
napoles@ptmat.fc.ul.pt; guidacoliveira@gmail.com

A utilização das tecnologias de informação e comunicação no ensino/aprendizagem, em diferentes níveis de escolaridade, tem vindo a tornar-se uma prática habitual. Conceitos que muitas vezes são apresentados de uma forma estática aos alunos são mais fáceis de apreender quando se utiliza tecnologias adequadas para lhes imprimir maior dinamismo. Mas envolver os alunos na construção de aplicações computacionais com objectivos muito concretos de forma a levá-los a utilizar esses conceitos contribui não só para o esclarecimento dos mesmos, mas também para o desenvolvimento do hábito de pensar e agir de forma organizada.

Este envolvimento é susceptível de promover uma dinâmica inovadora de colaboração entre professores e alunos, em que os primeiros facultam guiões destinados a atingir o resultado desejado e reforçam a cada passo as ideias matemáticas envolvidas, enquanto os segundos têm oportunidade de testar os seus conhecimentos matemáticos num ambiente diferente do habitual, programando as diferentes etapas e sendo recompensados com um produto final a que poderão imprimir um cunho pessoal.

Deverão ser usadas ferramentas tecnológicas de simples utilização e acessíveis na generalidade dos computadores disponíveis nas escolas. Nesta óptica considera-se que as folhas de cálculo têm enormes potencialidades e, quando de-

vidamente exploradas, proporcionam ambientes de aprendizagem muito ricos. A grande vantagem da utilização desta ferramenta tecnológica, em contraponto com outras, porventura com melhores características gráficas, prende-se com a possibilidade do desenvolvimento de aplicações com alguma sofisticação através duma programação simples, o que as torna passíveis de um trabalho conjunto entre alunos e professores. Também o facto de a folha de cálculo não ter ferramentas disponíveis que automatizem os procedimentos torna a sua utilização dependente duma correcta formulação matemática do que se pretende implementar. É possível desenvolver aplicações computacionais de grande interesse para a aprendizagem da matemática recorrendo apenas a algumas funções básicas de uma folha de cálculo, como o Excel. Embora este programa esteja amplamente divulgado nas escolas, é de referir que existe uma versão de acesso livre (OpenOffice.org - Calc) que contém, no geral, as mesmas funcionalidades.

Salienta-se também que o *software* de acesso livre GeoGebra, que reúne geometria, álgebra e cálculo, proporciona uma maior qualidade em termos de visualização gráfica, pelo que a sua utilização se revela vantajosa nalguns casos, apesar da disponibilização de automatismos que diminuem a sua validade enquanto motor para estudar matemática.

O facto de a folha de cálculo Excel não possuir automatismos e permitir usar diferentes tipos de linguagens, tais como a linguagem corrente, numérica e simbólica, e o facto de todos os procedimentos usados ficarem registados na folha e de uma forma visível fazem com que os alunos possam observar as etapas do desenvolvimento da aplicação e receber de uma forma imediata o *feedback* das suas acções. Podem assim ir rectificando os erros cometidos.

No ano lectivo 2008/2009 a Escola Básica EB2,3 Piscinas implementou o projecto *Matemática Dinâmica*¹. Este projecto, com a duração de três anos e acompanhando um mesmo grupo de alunos ao longo do terceiro ciclo do ensino básico, propõe o desenvolvimento e a utilização de aplicações em Excel, com módulos computacionais em Visual Basic, que permitem estruturar o pensamento matemático e aprofundar os conhecimentos em diferentes temas do currículo nacional da

Da mesma forma que a compreensão de um algoritmo de uma operação é fundamental para a sua utilização, também a compreensão de certos problemas matemáticos só é atingida quando se desenvolve um programa computacional para os analisar.

¹ Este projecto foi distinguido com uma menção honrosa pela Fundação Ilídio Pinho no âmbito do concurso “Ciência na Escola” 7.ª edição, centrada na área da matemática (Tecnologias de Informação e Comunicação).

disciplina de Matemática, privilegiando o desenvolvimento de competências como tomada de decisões, reflexão, resolução de problemas e aplicações.

Procurou-se neste projecto evidenciar conexões entre vários tópicos curriculares de matemática.

Por exemplo, a aplicação a que diz respeito a figura 2 destina-se a trabalhar as coordenadas cartesianas e o conceito de variável. Apresenta o desenho de um comboio, uma tabela de coordenadas cartesianas de alguns pontos de referência do desenho e uma barra de deslocamento que permite efectuar o movimento do comboio. Para simular o movimento horizontal do comboio é necessário alterar as abcissas dos pontos, surgindo a necessidade de utilizar uma expressão algébrica que exprima as abcissas dos “novos” pontos de referência.

As potencialidades dos meios computacionais disponíveis permitem desenvolver trabalhos com os alunos na área das relações entre os vários ramos do saber de uma forma rápida e eficiente. Em particular, as relações entre a matemática e os fenómenos físicos observáveis são aspectos fundamentais para a concretização de uma abordagem que privilegia a vertente laboratorial da matemática, acompanhada pela validação das hipóteses e das técnicas de modelação matemática utilizadas para simular os fenómenos observados.

A simulação virtual do movimento de um projectil lançado na vertical de baixo para cima é exemplo de uma aplicação susceptível de diferentes tipos de utilização.

Desprezando a resistência do ar, um corpo em movimento ascendente, ou em queda livre, está apenas sujeito à acção da força gravítica que a Terra exerce sobre ele. Neste movimento, a aceleração adquirida é constante, a aceleração da gravidade, sendo vertical, com sentido descendente. Durante a subida, um corpo está animado de movimento rectilíneo uniformemente retardado (porque a velocidade e a aceleração são vectores que têm sentidos opostos) e durante a queda está animado de movimento rectilíneo uniformemente acelerado (porque a velocidade e a aceleração são vectores que apontam no mesmo sentido).

Para obter experimentalmente o gráfico que traduz a distância ao solo do projectil (lançado do solo com a velocidade inicial $v_0 = 49\text{m/s}$) pode recorrer-se, por exemplo, a uma sequência de fotografias obtidas de 0,5 s em 0,5 s, dispondo-as lado a lado ao longo de um eixo horizontal, de acordo com uma escala adequada de tempo, como se simula na figura 3.



Figura 1: Matemática Dinâmica
(<http://www.matematicadinamica.com>).

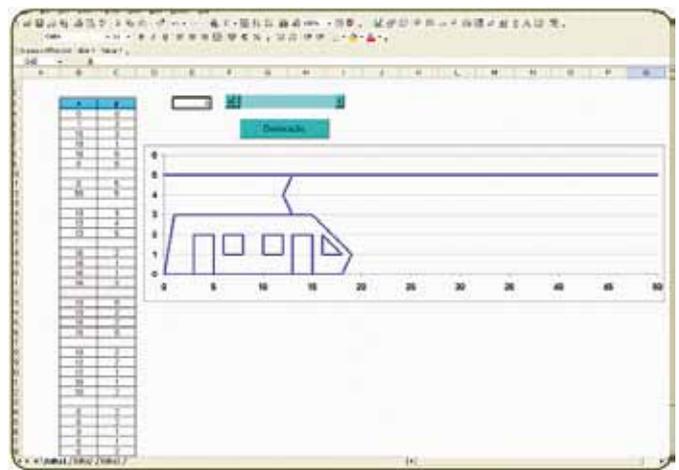


Figura 2: Um comboio em movimento.
Aplicação desenvolvida pelos alunos do 7.º ano de escolaridade.

Sendo o gráfico de uma função quadrática uma parábola, a simulação virtual deste fenómeno pode ser usada na introdução ao estudo das funções quadráticas no âmbito do 10º ano de escolaridade. Neste caso, os alunos serão utilizadores duma aplicação que podem manipular, individualmente ou com recurso a um quadro interactivo. É pertinente colocar questões como:

1. Escreve a equação que descreve o movimento do projectil quando este é lançado de uma altura de 50 m com uma velocidade inicial de 24 m/s.
2. Estima graficamente qual o instante em que o projectil atinge o solo e confirma analiticamente o resultado obtido.

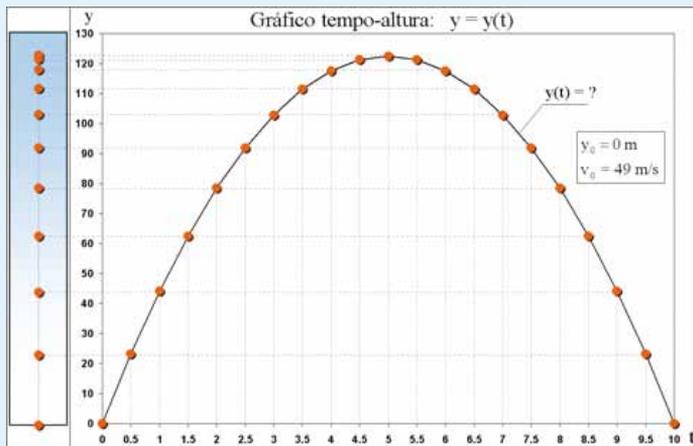
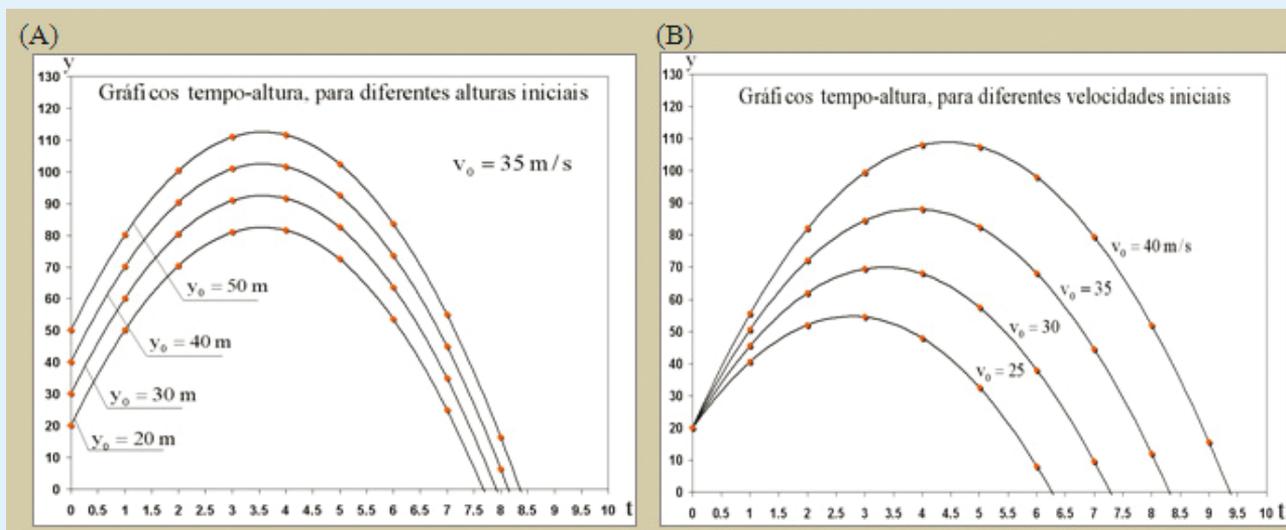


Figura 3: Aplicação que simula o lançamento de um projectil na vertical, de baixo para cima.

A observação dos gráficos A e B sugere que as curvas que melhor se ajustam aos pontos assinalados são partes de parábolas. Mais precisamente, e no caso de o movimento se realizar na Terra, para uma determinada velocidade inicial v_0 e uma determinada altura inicial y_0 , a função que melhor se ajusta às posições fotografadas exprime-se analiticamente por $y(t) = -1/2gt^2 + v_0t + y_0$ em que $g = 9,8\text{m/s}^2$ é a aceleração da gravidade terrestre.



3. Ao fim de quanto tempo é que o projectil atinge a altura máxima? Determina esse valor graficamente e confirma-o analiticamente.

Mas, no âmbito do 12º ano, os conhecimentos de matemática, nomeadamente o domínio do conceito de derivada de uma função, associados aos conhecimentos de física, permitem obter a função que modela a distância do projectil ao solo em função do tempo: uma vez que a aceleração é constante, a função que traduz a velocidade em função do tempo é uma função linear, pelo que a função $y = y(t)$ é uma função quadrática, restando determinar os seus coeficientes tendo em conta as condições do problema.

Esta relação privilegiada entre a física e a matemática foi reforçada com o desenvolvimento do projecto “Tópicos de Física em Experimentação Virtual”² (www.fisicaexpvirtual.com), iniciado no ano lectivo 2009/10 na mesma escola.

Tendo em conta as dificuldades reais na implementação de um ensino experimental da física, este projecto apresenta actividades inseridas num contexto das novas tecnologias, fomentando a experimentação e o sentido de descoberta, dois aspectos essenciais no ensino das ciências experimentais.

² Este projecto foi também distinguido pela Fundação Ilídio Pinho no âmbito do concurso “Ciência na Escola” - 8.ª edição “As Artes da Física”.

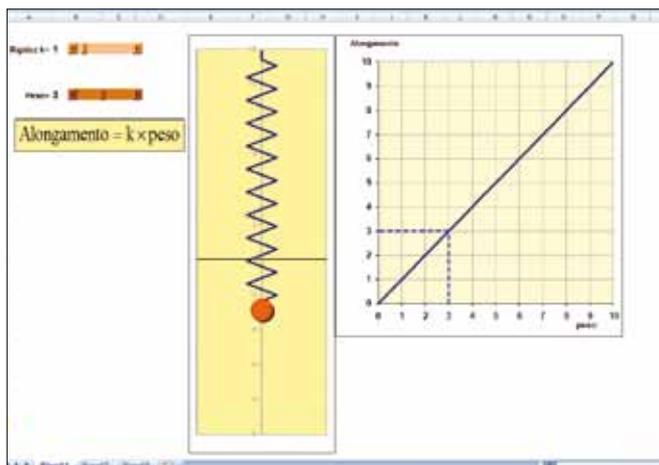


Figura 4: Simulação do alongamento de uma mola. A aplicação foi usada com alunos do 7.º ano de escolaridade acompanhada por uma ficha de trabalho.

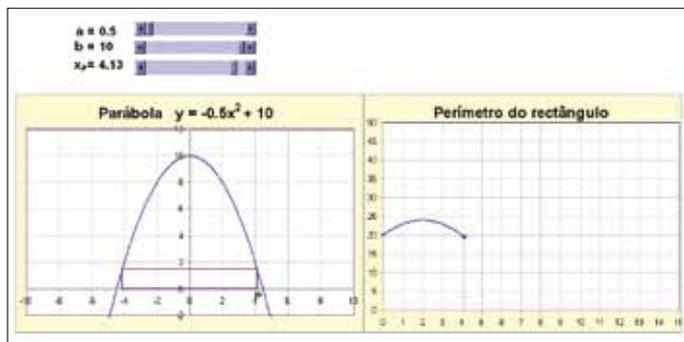


Figura 5: Estudo dos máximos absolutos de funções.

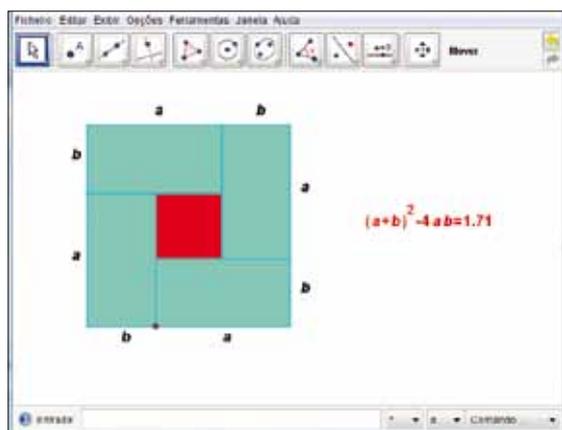


Figura 6: Comparação das médias aritmética e geométrica de números reais não negativos.

A figura 4 diz respeito a uma aplicação realizada em Excel que associa o conceito de proporcionalidade directa à experimentação virtual de um fenómeno: apresenta um esquema representativo de uma mola onde é aplicado um peso, bem como um gráfico que exprime a relação de proporcionalidade directa entre o alongamento de uma mola e o peso aplicado. Esta aplicação dá um significado físico à constante de proporcionalidade que representa, neste caso, a rigidez da mola.

Entre Outubro de 2009 e Março de 2010 o Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa realizou um curso de 40 horas intitulado “Da Modelação Matemática à Simulação Computacional”³, dirigido a professores do 3º Ciclo e Secundário com o objectivo de criar adeptos para este processo de interacção entre professores e alunos através desta forma de utilização das tecnologias nos vários níveis de ensino e de contribuir para o desenvolvimento de uma nova forma de olhar a matemática, realçando as suas aplicações e a sua vertente experimental e computacional.

Durante as sessões os formandos foram desafiados a criar instrumentos computacionais, em Excel e/ou GeoGebra, susceptíveis de criar abordagens inovadoras de temas curriculares, com especial destaque para os temas transversais a vários níveis de ensino. Os resultados foram surpreendentes, tanto no que respeita à participação nas sessões como à qualidade da generalidade dos trabalhos produzidos autonomamente.

Com exemplos criteriosamente escolhidos, pretendeu-se mostrar a necessidade de um completo domínio dos conceitos matemáticos envolvidos na construção das aplicações. Por exemplo, um dos problemas ilustrados virtualmente (fig. 5) proporciona o estudo dos máximos absolutos de funções associados a um problema geométrico: determinação das dimensões do rectângulo de perímetro máximo com dois vértices no eixo das abcissas e os outros dois sobre o gráfico de uma função quadrática da família $f(x) = -ax^2 + b$ com a e b números reais positivos e a diferente de zero. Para a construção é necessário ir resolvendo o problema, respondendo nomeadamente às seguintes questões:

- Qual deverá ser o valor máximo da abcissa do ponto P ?
- Quais deverão ser as coordenadas dos vértices do rectângulo, tendo em conta a forma como ele é construído?

- Qual é a expressão analítica da função que dá o perímetro do rectângulo em função da abscissa do ponto P ?

- Como construir o gráfico do perímetro do rectângulo de forma a que seja possível vê-lo aparecer à medida que o ponto P se desloca?

Este problema estende-se naturalmente ao 11º ano no caso de se pedir as dimensões do rectângulo com área máxima. Neste caso, a função a maximizar é do terceiro grau, pelo há que recorrer à sua derivada para a determinação da abscissa do ponto P que conduz ao rectângulo pretendido.

No que respeita a situações que pretendam tirar partido de figuras geométricas, a utilização do GeoGebra apresenta vantagens evidentes tendo em conta as ferramentas disponíveis.

Mais uma vez numa perspectiva de inter-relações entre tópicos curriculares, a relação entre as médias aritmética e geométrica de dois números reais não negativos

$$(\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}_0^+)$$

proporciona a construção em GeoGebra de uma aplicação visualmente elucidativa (fig. 6).

Atendendo a que a e b são números não negativos, basta verificar que $4ab \leq (a+b)^2$, e ter em conta que

- ab é a área de um rectângulo com lados de dimensões a e b
- $(a+b)^2$ é a área de um quadrado em que a medida do lado é $a+b$.

Na sequência desta formação foram realizadas outras acções de 15 horas dirigidas a professores do 1º e do 2º ciclos do Ensino Básico⁴. Nestes níveis de ensino a implementação do uso de módulos interactivos é necessariamente diferente. Com efeito, a limitação de recursos matemáticos que os alunos então possuem torna-os essencialmente utilizadores de *applets* previamente construídos, desejavelmente pelos respectivos professores.

A folha de cálculo constitui uma ferramenta muito adequada para experimentar, explorar e exercitar o cálculo mental. Estas características propiciam a sua utilização para o desenvolvimento de pequenos módulos computacionais que constituam um apoio efectivo ao estudo das propriedades de números. Podem construir-se desafios muito elementares, como o representado na figura 7, trabalhando apenas adições e subtracções com números inteiros



Figura 7: Desafio numérico.

não negativos para utilização no primeiro ano de escolaridade. Acreditamos que estes módulos destinados a trabalhar o cálculo mental têm grandes vantagens em contraponto com a realização de exercícios com carácter repetitivo que constam da generalidade dos manuais. Com efeito, a confrontação imediata com a justeza do resultado e a capacidade de gerar aleatoriamente novas situações cria uma empatia com a repetição que não está presente na generalidade dos alunos quando se trata de resolver exercícios de um manual.

³ Foram formadores desta acção Margarida Oliveira, da Escola Básica EB 2,3 Piscinas, e Pedro Miguel Duarte e Suzana Nápoles, ambos docentes do Departamento de Matemática da FCUL.

⁴ Acções de formação promovidas pelo Departamento de Matemática da FCUL em colaboração com a Lisboa Editora. Foram formadores destas acções Margarida Oliveira (EB 2,3 Piscinas) e Suzana Nápoles (DM-FCUL).

A programação deste desafio⁵ constitui uma boa ocasião para os professores reverem os algoritmos das operações elementares e construir novos desafios, envolvendo, por exemplo, as quatro operações elementares em diferentes universos de números, a ordenação de números, a decomposição de um número em factores primos, a determinação do máximo divisor comum ou do menor múltiplo comum de dois ou mais números naturais.

Este tipo de aplicação permite adaptações a vários anos de escolaridade e despertou muito interesse junto dos formandos, que criaram autonomamente variações muito interessantes⁶.

Também o GeoGebra proporciona a construção de módulos destinados a trabalhar as propriedades dos números tirando partido de aspectos figurativos.

A aplicação a que respeita a figura 8 destina-se a apoiar o estudo das fracções, facilitando as várias representações, usando apenas dois cursores para fazer variar os valores do denominador e do numerador da fracção.

EM CONCLUSÃO

O envolvimento e o entusiasmo dos alunos quando confrontados com a construção e a utilização de aplicações levam-nos a reforçar a ideia de que este tipo de módulos interactivos, construídos com *software* disponível na generalidade dos PCs, pode ter um papel importante na compreensão dos conceitos matemáticos e na resolução de problemas. Pode também contribuir para a formulação de conjecturas e para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Com a ajuda das aplicações torna-se simples testar diferentes casos, o que permite formular questões que levam a percorrer o caminho da descoberta e evidenciam a importância das demonstrações.

O interesse despertado por estas acções de formação e a adesão dos participantes às actividades desenvolvidas, manifestada tanto ao longo das sessões como na fase da avaliação da acção (com a concepção de traba-

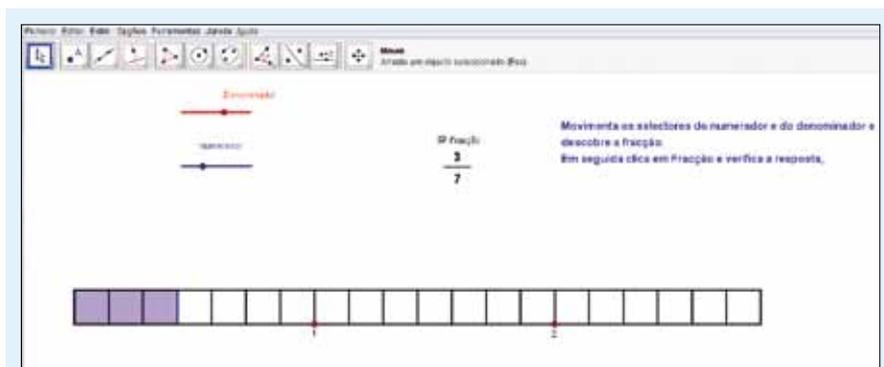


Figura 8: Representação de fracções.

lhos e a sua posterior apresentação), leva-nos a acreditar que esta aposta na ligação da modelação matemática à simulação computacional pode, de facto, criar dinâmicas diferentes na sala de aula que conduzam ao desenvolvimento de uma nova forma de olhar a matemática.

⁵ Para o funcionamento desta aplicação há que programar o botão gerador de novo *puzzle* (assinalado com <>) e o botão para conferir o resultado (assinalado com “verificar”). Relativamente ao primeiro, há que ter especial cuidado na escolha dos elementos possíveis nas linhas 8 e 11 de forma a que o número satisfazendo as igualdades escolhidas aleatoriamente não seja negativo. No caso da linha 8, e uma vez escolhidos os valores que ocupam a casa vermelha, por exemplo de 1 a 10, os valores da casa laranja não poderão ser inferiores a 10.

⁶ É interessante salientar que vários professores presentes na acção testemunharam o êxito obtido com o trabalho realizado com estas aplicações na sala de aula utilizando o computador Magalhães (que inclui o Microsoft Office e onde instalaram o software do GeoGebra) e que, até à data, praticamente não tinha sido utilizado no ensino/aprendizagem da matemática nos 1^o e 2^o ciclos de ensino.

SOBRE AS AUTORAS

Suzana Metello de Nápoles é doutorada em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e é professora do Departamento de Matemática desta faculdade. Nessa qualidade tem colaborado na orientação de mestrados ligados ao ensino da matemática e em acções de formação contínua para professores dos ensinos básico e secundário. Dedicou-se actualmente a actividades na área da comunicação e divulgação da matemática, sendo co-autora de obras publicadas nas áreas de ensino e de divulgação científica desta ciência.

Margarida Cristina Pereira da Silva Oliveira é mestre em Matemática para o ensino pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e é professora de Matemática do ensino básico e secundário. Nessa qualidade tem colaborado em acções de formação contínua para professores de diferentes níveis de ensino. Encontra-se actualmente a desenvolver o doutoramento em Modelação Matemática e Simulação Computacional.



BERNARDO MOTA
Universidade de Lisboa
bernardomota@campus.ul.pt

APOLÓNIO E OS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES - 2.^a PARTE

Os académicos são unânimes em considerar a contribuição de Apolónio de Perga no domínio da geometria elementar pouco relevante. Chegou o momento de rever esta doutrina e mostrar que, por detrás de algumas certezas, o estudo da matemática antiga está cheio de incertezas.

Quando os estudiosos defendem que as alternativas de Apolónio ao texto dos *Elementos* são inferiores às soluções de Euclides, assumem (a) que o texto do primeiro livro dos *Elementos* que circulava no tempo de Apolónio é aquele que hoje conhecemos, mais coisa menos coisa; (b) que Apolónio toma essa suposta compilação referencial como ponto de partida para as suas reflexões; (c) e que Proclo está a ser historicamente exacto. Poucas vezes se pronunciaram contra este dogma e as que o fizeram foram tímidas na sua reivindicação e ferozmente refutadas, acabando por cair no esquecimento (assim, por exemplo, Paul Tannery, que defendeu que as noções comuns do prefácio de *Elementos* 1 foram introduzidas por Apolónio).

Começemos pela última assunção. Proclo viveu no século V, quase 800 anos depois de Euclides e 700 anos depois de Apolónio. Ou seja, se Proclo vivesse agora, estaria a tentar explicar a história da matemática do tempo das Cruzadas, aí por volta do ano 1200. Ou seja, Proclo mais provavelmente está a reconstituir do que a transmitir um retrato fiel de uma etapa na elaboração dos elementos de geometria. Acresce que Proclo dificilmente possui o texto original de Apolónio, mas toma

as suas informações de fontes secundárias, como é habitual, de resto, no seu comentário. E assim temos uma dúvida razoável quanto ao último ponto. O que altera a nossa perspectiva do segundo ponto. Uma vez que Proclo assume que Apolónio está a comentar a versão dos *Elementos* de que dispomos, é natural que se sinta livre para interpretar a informação disponível de acordo com este dado. Neste sentido, Proclo pode estar a submeter inconscientemente as demonstrações de Apolónio à estrutura rígida que encontra nas provas euclidianas e ao quadro mais amplo da ordenação proposicional dos *Elementos* que chegaram até nós, deturpando a sua intenção original. Por outro lado, é intrigante que um matemático reconhecidamente capaz e competente como Apolónio tivesse decidido percorrer o livro primeiro dos *Elementos*, mas acabasse por se dar ao trabalho de registar apenas umas poucas notas supérfluas e marcadas pela trivialidade. Lidar com o primeiro livro dos *Elementos* implica manobrar as ferramentas da geometria elementar com especial brilhantismo e ter em consideração restrições matemáticas e filosóficas particularmente severas a que Apolónio não podia deixar de estar atento. É lícito pensar, nestas circunstâncias, que o significado das provas de

Apolónio não se encontra bem determinado e que a relação do seu contributo com a tradição dos *Elementos* de Euclides que conhecemos não está clara. O que nos leva ao primeiro ponto. É preciso lembrar que lidamos com um texto cujo carácter compilatório faz com que seja tentador incluir novas passagens e transformar as já existentes, de forma a responder a novos desenvolvimentos na história das ideias e da própria matemática. Não é fácil determinar quando é que o texto final ficou estabelecido; mas não é de todo descabido pensar que a constituição do texto dos *Elementos* de Euclides foi demorada e cruzou diversas tradições, num processo que pode ter camuflado a estrutura original.

Podemos vislumbrar o tipo de transformação que um texto de matemática pode ter sofrido na Antiguidade se tomarmos em atenção uma passagem justamente famosa, incluída por Hípsicles no prefácio do 14º livro dos *Elementos*, que ele próprio acrescentou aos 13 primeiros habitualmente atribuídos a Euclides. O passo é sobre as alterações sofridas por um tratado... de Apolónio:

“Quando Basílides de Tiro veio para Alexandria e se encontrou com o meu pai, Protarco passou a maior parte do tempo com ele devido ao elo que os unia, derivado do seu interesse comum na matemática. Ora, em dada altura, ao examinarem o tratado de Apolónio [...] chegaram à conclusão de que o tratamento de Apolónio [...] não estava correcto; então, como depreendi da narrativa do meu pai, puseram-se a corrigi-lo e a reescrevê-lo. Mas eu próprio, mais tarde, encontrei um outro livro publicado por Apolónio e que continha uma demonstração do assunto em questão, e interessei-me sobremaneira pelo seu tratamento do problema. Ora, o livro publicado por Apolónio está acessível a todos; pois tem larga difusão numa forma que parece ter sido o resultado de uma cuidada elaboração posterior. Da minha parte, decidi dedicar-te o que julguei necessário sob a forma de comentário...”

A passagem indica duas regras que presidiam à transmissão de textos matemáticos na Antiguidade. Em primeiro lugar, eram alterados, emendados, corrigidos e elaborados no decurso da sua transmissão; neste processo, dois tipos de erros eram constantemente corrigidos: os do próprio autor e os resultantes de corrupção (um dos problemas da transmissão manuscrita). Em segundo lugar, os textos mantinham a sua autoria original e muito do trabalho posterior de edição acabava por permanecer anónimo; assim sendo, mesmo na Anti-

guidade os académicos acabavam por não conseguir distinguir quanto do trabalho que consultavam seria realmente autêntico, embora nunca duvidassem da autoria original. Mais ainda: podia circular uma variedade de tratados do mesmo autor com tratamentos diversos do mesmo assunto.

Ora, não há razão nenhuma para o texto dos *Elementos* não ter passado pelo mesmo processo. Talvez seja a altura ideal para lembrar que os manuscritos mais antigos dos *Elementos* datam dos séculos IX e X e que os poucos fragmentos de papiro que incluem trechos aparentados com passagens dos *Elementos* apresentam variações importantes em relação ao texto que temos (além de serem, eles também, bastante posteriores em relação à data em que viveu Euclides). Mesmo na Antiguidade, e antes de Proclo, o texto dos *Elementos* sofreu vários processos editoriais, sendo talvez o mais relevante aquele que foi empreendido por Teão de Alexandria, no século IV.

Baralhando novamente as cartas e voltando a dá-las, o que é que resulta? Resulta que Apolónio pode ter trabalhado sobre uma tradição dos *Elementos* diferente daquela que chegou até nós e que atribuímos a Euclides. Ou ainda, que pode ter trabalhado numa altura em que os *Elementos* de Euclides ainda não tinham ganho o estatuto de obra de referência que acabaram por obter. Seja qual for a hipótese alternativa que considerarmos, o importante é fazer pesquisa assumindo que Apolónio é uma testemunha fundamental do *state of the art* da geometria elementar do seu tempo.

Um exemplo: e se Apolónio oferecer o retrato dos *Elementos* anterior à versão de que dispomos? Nesse caso, a proposição que ensina a construir um triângulo equilátero não teria de merecer uma demonstração isolada nem teria de ocupar o lugar que ocupa hoje e que é nem mais nem menos do que a primeira posição no livro 1. Antes pertenceria à parte da construção da prova onde se mostra como bissectar uma linha (aliás, o leitor ficará surpreendido ao saber que o primeiro autor a referir a construção do triângulo equilátero como primeira proposição dos *Elementos* é Alexandre de Afrodísias, que escreveu cerca do século II d.C.). O que implica que *Elementos* 1.2 (que depende de *Elementos* 1.1) não estaria no manual de geometria elementar de referência no tempo de Apolónio, ou, pelo menos, na posição em que a temos hoje. E assim por diante.

A hipótese pode estar completamente errada. Quando aplicada, pode mesmo ganhar uma complexidade inesperada; quem é que nos diz que as provas atribuídas por Pro-

clo a Apolônio não foram, elas próprias, alteradas no decurso da sua transmissão? No entanto, apesar de termos de ser cautelosos, este é um ponto de partida excitante. Repare-se na mudança de perspectiva que opera. Hoje assume-se que os argumentos geométricos mais sofisticados dos *Elementos* pertencem a Euclides e que os mais toscos pertencem a autores posteriores (ou) muito menos brilhantes. Ora, e se a sofisticação toda que se encontra nos *Elementos* resultar, pelo contrário, de um longo processo de melhoramento do texto, da matemática e dos princípios de filosofia envolvidos? Tentar uma doutrina diferente, mesmo que a título experimental, pode muito bem ser a única maneira de ultrapassarmos a linha do horizonte estabelecida por sucessivas reedições do texto euclidiano que obscureceram a sua etapa inicial e o seu processo de desenvolvimento.

Agradecimentos: Como habitualmente, a Henrique Leitão, pela leitura do rascunho do artigo (que, neste caso, acabou desdobrado em dois); e a André Mota, pelo desenho das figuras (que ficaram confinadas à primeira parte).

REFERÊNCIAS

Proclo escreveu originalmente em língua grega, mas o seu comentário a Euclides encontra-se disponível em tradução inglesa, francesa, italiana (e, para quem preferir, latina); em português é que não se encontra. Deixo a indicação completa da tradução inglesa, para o leitor que quiser espreitar esta fonte fundamental para o estudo da matemática antiga (aí são referidas as outras traduções existentes):

Morrow, Glenn (1992). *Proclus. A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton University Press.



LOJA
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em www.spm.pt



Programa de Matemática do 1.º ciclo: Para começar, a estimativa não é boa.

CARLOS GROSSO

Escola Secundária de Pedro Nunes e Escola Superior de Educação de João de Deus

carlos.grosso@espn.edu.pt

Nos três ciclos do Ensino Básico (EB), o ensino da disciplina de Matemática rege-se por um novo programa, publicado no decorrer do ano letivo de 2007/2008, que, depois de experiências piloto, começou a ser aplicado em todas as escolas do País no ano letivo passado, 2010/2011. Parece-nos que é necessário refletir sobre algumas das orientações pedagógicas em que se sustenta este novo programa, em particular no que diz respeito ao ensino da Matemática no 1º ciclo do EB. Assim, chamamos a atenção de que não é nosso propósito fazer uma análise exaustiva do PMEB, mas, antes, focalizar a análise numa orientação pedagógica evidente no documento – a preferência que é dada, nos primeiros anos de escolaridade, aos cálculos por estimativa.

Ao percorrer as 70 páginas do documento excetuam-se as páginas referentes à bibliografia - podemos constatar que, no que concerne ao capítulo de “Números e Operações”, é dada uma clara preferência aos cálculos por estimativa em detrimento dos cálculos aritméticos exatos com recurso aos algoritmos. Talvez seja bom lembrar que os tradicionais algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão têm a sua eficácia testada por milhões de seres humanos ao longo de muitos séculos de utilização.

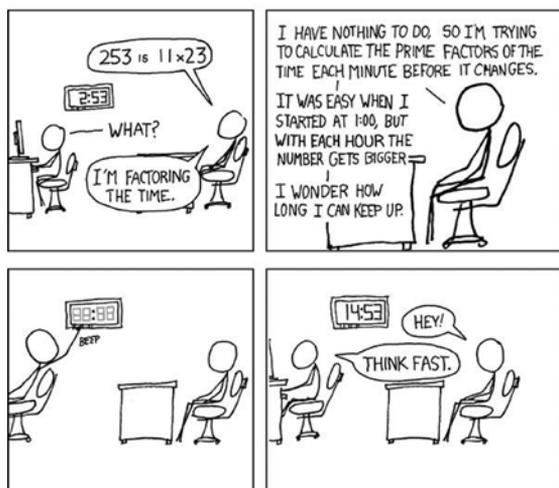
É certo que no programa que estava em vigor já se tinha assistido a um claro desinvestimento da prática dos algoritmos, embora isso se devesse à forte orientação que era dada para que se tornasse vulgar a utilização da máquina de calcular: “A máquina de calcular não pode deixar de ter lugar no

No novo programa de Matemática do Ensino Básico, os algoritmos das operações aritméticas foram eliminados dos dois primeiros anos de escolaridade. Propõe-se cálculos por estimativa. Mas será razoável que os alunos só tomem conhecimento da existência do algoritmo da adição no terceiro ano?

1º ciclo, não só pela sua vulgarização, mas sobretudo pela segurança que dá como auxiliar em cálculos morosos”. No atual programa nota-se a preocupação de refrear a utilização da calculadora, tendo o cuidado de assinalar que “a calculadora e o computador não devem ser usados para a realização de cálculos imediatos ou em substituição de cálculo mental” e ainda que “a calculadora não deve ser utilizada, pelos alunos, para execução de cálculos imediatos ou que se efetuam facilmente usando estratégias de cálculo mental”, pois há que entender que a sua utilização abusiva é associada, com naturalidade, a dificuldades na aprendizagem do cálculo. Contudo, agrava-se o desprezo pelos algoritmos, apesar de ser o meio mais expedito e eficaz para efetuar um cálculo exato com números inteiros ou decimais.

Por vezes defende-se que o desinvestimento no ensino dos algoritmos pode permitir uma maior focalização no cálculo mental. Todavia, esta perspetiva parece esquecer-se de que os procedimentos requeridos na execução dos algoritmos estão constantemente a treinar o cálculo mental de adições, subtrações, multiplicações e divisões. A execução dos algoritmos permite atingir frequências e repetições de cálculo mental que dificilmente se atingirão de outro modo. Queremos registar que estamos absolutamente de acordo com o que está estipulado no programa, quando se afirma que “no 1º ciclo deve ser dada especial importância ao cálculo mental”, e aplaudimos a orientação que determina que “a criança deve habituar-se, desde o início, a considerá-lo como o primeiro dos recursos a utilizar para obter um resultado”, mas associar cálculo mental a estimativa é prejudicar o rigor que o cálculo mental deve ter.

O que é certo é que, para os 1º e 2º anos do 1º ciclo do EB, não está contemplada a utilização de quaisquer algoritmos. Os algoritmos da adição e da subtração estão apenas programados para serem introduzidos no 3º ano e só no ano seguinte é que se referem os algoritmos da multiplicação e da divisão, ou seja, só no último ano do 1º ciclo, para alunos com 9 anos de idade, é que se programa o ensino do vulgar algoritmo da multiplicação. Repare-se na dificuldade que pode ter um simples cálculo do tipo 12×123 , para um aluno de 9 anos no início do 4º ano. Ou se considera que se trata de um cálculo complexo e se propõe que o aluno o efectue com recurso à calculadora, “ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores na realização de cálculos



Cartoon em www.xkcd.com

complexos”, ou aquele cálculo terá de ser efetuado recorrendo a processos muito mais morosos e que envolvem ainda mais operações de cálculo, o que facilmente pode levar à desmotivação e ao erro. Só para dar dois exemplos dos muitos possíveis para determinar o produto sem recorrer ao algoritmo, imagine-se um aluno a efetuar uma adição repetindo 12 vezes o número 123 ou a utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para calcular a soma de 12 vezes o número 100, com 12 vezes o número 20 e com 12 vezes o número 3. Não há dúvida de que a probabilidade de errar é significativamente maior do que no cálculo proporcionado pelo algoritmo, em que é necessário multiplicar 2 por 3, 2 por 2, 2 por 1, 1 por 3, 1 por 2 e 1 por 1 e, em seguida, adicionar 0 com 6, 3 com 4, 2 com 2 e 1 com 0. Uma das óbvias vantagens do algoritmo da multiplicação é exigir apenas produtos entre números menores do que 10, pois é certo que os erros aumentam quando se aumenta o número de cálculos ou se aumenta a magnitude dos números.

Apesar de o anterior programa do 1º ciclo do EB ter desincentivado a utilização dos algoritmos por se querer facilitar os cálculos recorrendo à máquina de calcular, os algoritmos da adição, da subtração e da multiplicação estavam programados para serem introduzidos no 2º ano e o da divisão no 3º ano. Da comparação resulta uma clara depreciação do valor pedagógico dos algoritmos como meio facilitador e muito eficaz para determinar o resultado de uma operação aritmética entre números inteiros ou decimais.

No atual programa do 1º ciclo do EB, a par deste atraso no ensino dos algoritmos, encontramos um claro reforço

dos cálculos por estimativa. Comparando o programa atual com o anterior, no qual já se defendia fortemente os cálculos por estimativa, pode constatar-se o incremento que é dado a este tipo de cálculos. Usando como critério de comparação o número de ocorrências das palavras “estimação, estimar, estimativas”, obtém-se um rácio de 227%, o que representa um acréscimo que, de modo algum, pode ser entendido como casual. A leitura do documento não deixa dúvidas quanto à estima que é dada aos cálculos por estimativa.

Facilmente se compreende que a capacidade de estimar um resultado é uma boa vantagem quando se generaliza a utilização da calculadora, pois uma simples tecla trocada é suficiente para nos apresentar um resultado completamente disparatado. Assim, ao desenvolver a capacidade de fazer estimativas, desenvolve-se o sentido da grandeza dos números e aumenta-se a probabilidade de detetar erros na introdução dos dados, pela verificação de que o resultado fornecido pela calculadora não pode estar correto. Mas se a orientação é a de que a calculadora deve apenas ser utilizada para efectuar cálculos complexos, não se compreende que se dê preferência à estimação relativamente ao cálculo. Nas páginas que dizem respeito ao 1º ciclo, refere-se 25 vezes que os alunos devem fazer estimativas, enquanto o termo calcular se encontra apenas 10 vezes.

Os alunos do 1º ciclo do EB devem começar por fazer cálculos com pequenos números. Os primeiros cálculos devem ser exatos, permitindo que o aluno construa a percepção de que a aritmética é uma ciência rigorosa. Mas não podemos ficar-nos pelos pequenos números. Se queremos que, logo nos primeiros anos, se cimente a compreensão do sistema decimal, temos de lidar com números até ao milhar, como está previsto para os 1º e 2º anos do EB. E para efetuar operações com números desta ordem de grandeza, a aprendizagem dos algoritmos sempre foi uma mais-valia. A desvalorização dos algoritmos em favor da estimativa pode observar-se, por exemplo, no que se propõe no programa para os alunos do 1º ou do 2º ano: “calcular $143 + 264$, adicionando mentalmente 14 dezenas + 26 dezenas (o resultado é um pouco acima de 400)”. Para um aluno de 6 ou 7 anos, o esforço de cálculo exigido para separar as dezenas, determinar a sua soma e em seguida transformar o resultado em unidades para, com tudo isto, obter uma estimativa do resultado e não o resultado correto, é semelhante ao esforço que é requerido para efetuar o

cálculo exato pelo algoritmo da adição com a vantagem de se determinar a soma; logo, este processo é preferível.

Mais tarde, depois de muitos cálculos efetuados, e em situações em que não é possível determinar o valor exato do cardinal de determinado conjunto ou em situações em que o cálculo do valor exato é demasiado complexo, tem vantagem treinar a capacidade de estimativa. Podemos pedir a um aluno para determinar o valor exato do custo de 4875 artigos a €312,98 cada um, e isso cumpre um objetivo no domínio da aritmética. Mas se considerarmos que o cálculo é demasiado complexo, ou que não é importante determinar o valor exato, podemos pedir-lhe que faça uma estimativa do produto. 5000×300 é um cálculo que se faz rápida e facilmente, e há-de ser uma boa estimativa para o valor de $4875 \times 312,98$.

Quando não é possível determinar o valor exacto, a capacidade de fazer uma estimativa só pode ser encarada como uma boa habilidade que depende do nosso conhecimento dos números e das operações e que nos acrescenta, portanto não deve ser descurada. É bom termos a noção da ordem de grandeza do número de partículas que existem no universo, do número de seres humanos que habitam o planeta Terra ou do número de pessoas que participaram em determinada manifestação, o que só nos é possível por estimativa. Mas, em regra, a capacidade de estimar desenvolve-se depois de se ter efetuado muitos cálculos, o que faz com que se vá conhecendo as propriedades das operações aritméticas e se tenha desenvolvido uma boa compreensão do sistema de numeração decimal, o que nos ajuda a sedimentar a ordem de grandeza dos números e a sermos capazes de estimar que o valor desconhecido deve estar em determinado intervalo.

Pedir a alunos do 1º ou do 2º ano que estimem o número de feijões que se encontram dentro de um frasco (“Propor aos alunos que estimem, por exemplo, a quantidade de feijões que estão dentro de um frasco e comparem a estimativa com o número exacto dos feijões.”) é sobretudo um exercício de adivinhação. A probabilidade de ficar próximo talvez seja semelhante a pedir-lhes que digam o número da primeira bola do próximo totoloto. Se os alunos estivessem habituados a contar os feijões que se encontram dentro de diferentes frascos e a compararem os números de diferentes tipos de feijões em frascos semelhantes, era natural que pudesse haver algum conhecimento que sustentasse a estimativa de quantos feijões se encontram em determinado frasco. Caso contrário,

é expô-los a confrontarem-se com respostas que podem ser absolutamente desajustadas.

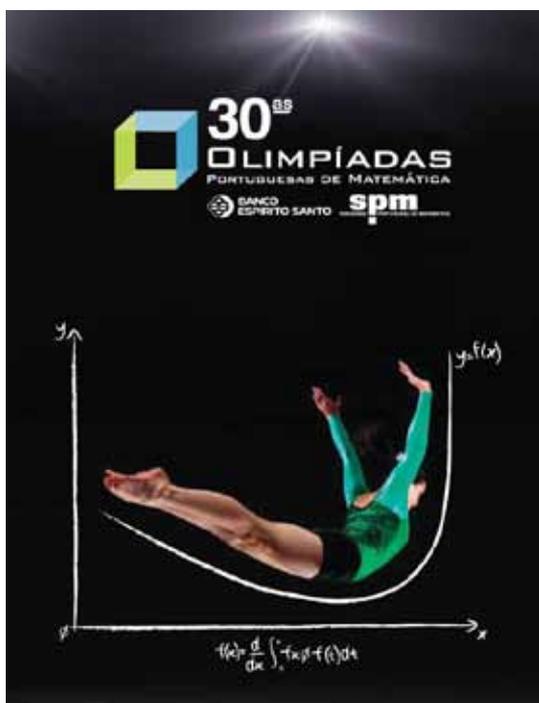
Nos primeiros anos do Ensino Básico, deve começar-se pelo cálculo do resultado das operações aritméticas e não pela estimativa. A prioridade no ensino do cálculo deve centrar-se na forma mais eficaz para determinar o resultado das operações aritméticas e no rigor que a determinação desse resultado exige. Depois de experimentados por muitos milhões de seres humanos durante vários séculos, os algoritmos tradicionais têm batido toda a concorrência na eficiência com que nos ajudam a encontrar os resultados, exceção feita às máquinas de calcular. Mais tarde, e em situações particulares, o desenvolvimento da capacidade de estimativa será benéfico e as melhores estimativas há-de ser propostas pelos alunos que se revelaram mais capazes no cálculo exato.

Só daqui a alguns anos poderemos avaliar, a nível nacional, as aprendizagens dos alunos que estão perante o Programa de Matemática em vigor. Embora se entenda que a qualidade das aprendizagens não depende exclusivamente das orientações que o Programa veicula, certamente que não se pode considerar isento de responsabilidades aquele que é o principal documento orientador do ensino da Matemática nos primeiros anos de escolaridade. Consideramos que, perante a análise feita, a estimativa não é boa. Veremos os resultados.

Este artigo foi escrito ao abrigo das normas do Novo Acordo Ortográfico

SOBRE O AUTOR

Carlos Grosso Licenciado em Matemática pela Faculdade de Ciências de Lisboa. Mestre em Educação pela Universidade do Minho. Formador de professores do Ensino Básico e Educadores de Infância. Coordenador do Centro de Avaliação de Manuais Escolares da SPM.



OLIMPIADAS PORTUGUEAS DE MATEMÁTICA COMEMORAM 30 ANOS EM LEIRIA

As Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM) celebram este ano a sua 30.^a edição, que será comemorada entre os dias 22 e 25 de Março, em Leiria. A Escola Domingos Sequeira será a anfitriã da Final Nacional das OPM, em que competirão 90 estudantes, entre os 10 e os 18 anos. Apurados entre quase 40 mil alunos, estes participantes partem na expectativa de conquistar uma medalha e, eventualmente, representar Portugal internacionalmente. Como forma de assinalar o 30.^o aniversário das OPM, a SPM promoverá uma exposição retrospectiva desta competição que, todos os anos, envolve milhares de alunos a nível nacional. As OPM foram organizadas pela primeira vez em 1980, com a designação de Mini-Olimpíadas de Matemática. Naquele ano e nos seguintes, apenas as escolas da região Centro participaram. A procura, no entanto, fez com que a partir de 1983 fossem alargadas a nível nacional.

INSCRIÇÕES ABERTAS PARA AS MINI-OLIMPIADAS

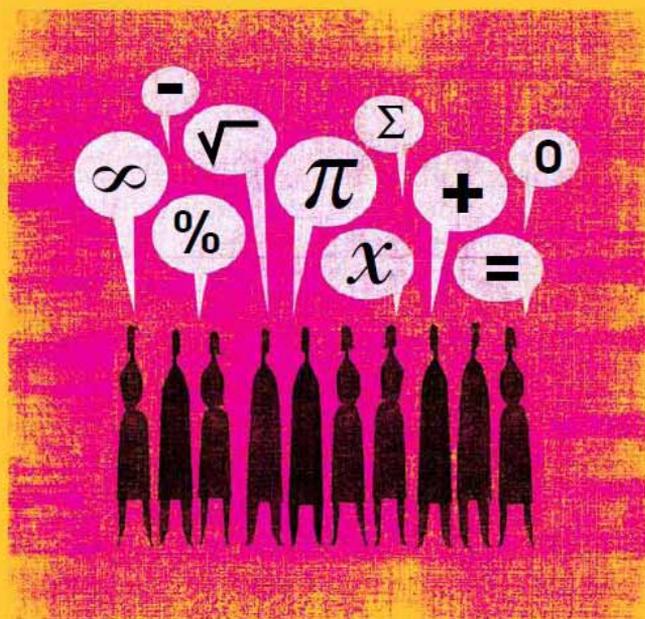
Os alunos dos 3.^o e 4.^o anos de escolaridade ainda podem participar nas Mini-Olimpíadas. As inscrições estão abertas até 30 de Abril no site oficial das OPM, em www.opm-online.net. Esta competição destinada aos mais novos foi introduzida no ano passado e consiste numa prova única, que decorrerá no mês de Maio nas escolas inscritas.

PORTUGAL REPETE OURO NAS OLIMPIADAS IBERO-AMERICANAS UNIVERSITÁRIAS

Pelo quinto ano consecutivo, os participantes portugueses nas Olimpíadas Ibero-Americanas Universitárias (OIAU), destinadas a alunos que frequentam o Ensino Superior, alcançaram o ouro nesta competição. Além desta medalha, conquistada por Pedro Vieira, do Instituto Superior Técnico, a equipa portuguesa obteve duas medalhas de prata (Jorge Miranda e Raúl Penaguião), três de bronze (Gonçalos Matos, João Pedro Santos e João Pereira) e uma menção honrosa (João Miguel Santos). Nas OIAU, o número de medalhas atribuídas é limitado a uma medalha de ouro, duas de prata e quatro de bronze por país. Esta prova, cujos resultados foram recentemente conhecidos, realizou-se no passado mês de Novembro em simultâneo em 11 países (América Latina, Portugal e Espanha) e contou com a participação de estudantes de várias universidades portuguesas.

10 MATEMÁTICOS 100 PROBLEMAS

Eduardo Wagner (Coord.)



SPM LANÇA VERSÃO PORTUGUESA DE *10 MATEMÁTICOS, 100 PROBLEMAS*

No ano em que se celebra a 30.^a edição das OPM, a SPM lançará o livro *10 matemáticos, 100 problemas* em Portugal, com a chancela da Gradiva. O livro, coordenado por Eduardo Wagner, compila um conjunto de problemas seleccionados por 10 matemáticos, coordenadores olímpicos de 10 países ibero-americanos, e pretende cativar miúdos e graúdos. A versão portuguesa foi organizada por Joana Teles e António Salgueiro. O livro *10 matemáticos, 100 problemas* acrescentará mais um título à colecção “Temas de Matemática”, uma iniciativa conjunta da Gradiva e da SPM, para divulgação de textos relacionados com a matemática.



ENSPM 2012 DECORRE ENTRE 9 E 11 DE JULHO, NO ALGARVE

O Encontro Nacional da SPM (ENSPM), que se realiza bianualmente, decorrerá este ano na Universidade do Algarve, em Faro. Entre os dias 9 e 11 de Julho, matemáticos e todos os que se interessam pela matemática poderão participar neste encontro que promove a troca de experiências, de conhecimentos e de ideias. Nesta edição, as sessões temáticas privilegiarão as seguintes áreas: Álgebra e Combinatória, Análise e Equações com Derivadas Parciais, Geometria e Topologia, Matemática nas Ciências e Tecnologia, Sistemas Dinâmicos, História da Matemática, Probabilidades e Estatística e Optimização / Investigação Operacional. A submissão de comunicações deve ser efectuada até ao dia 1 de Junho para o endereço enspm12@spm.pt. As contribuições submetidas para o ENSPM12 e aprovadas através de um sistema de *referee* serão publicadas num número especial do Boletim da SPM, revista indexada pelo MathSciNet.



SPM E CTT LANÇAM POSTAL E CARIMBO COMEMORATIVOS DO DIA DO PI

A SPM e os CTT – Correios de Portugal lançaram no dia 14 de Março (14/3) um postal e um carimbo comemorativos do Dia do Pi (3,14). A data assinalada pela SPM, em parceria com os CTT, é celebrada com entusiasmo um pouco por todo o mundo. O lançamento do postal decorreu na Escola Secundária Dom Manuel Martins, em Setúbal, e contou com a presença dos alunos e representantes de cada instituição. O Dia do Pi foi celebrado pela primeira vez em 1988 pelo norte-americano Larry Shaw, no museu Exploratorium, em São Francisco.

TARDES DE MATEMÁTICA ANIMAM SÁBADOS DE NORTE A SUL

São várias as cidades que verão as suas tardes de sábado animadas, ao longo dos próximos meses, por mais uma edição das Tardes de Matemática. Lisboa, Porto, Braga, Aveiro, Évora, Vila Real e Ponta Delgada têm já várias sessões agendadas, com temas tão variados como “Uma viagem matemática pela ecologia”, “Encontros entre matemática e arte” ou a “A matemática do infinitamente pequeno”. As Tardes de Matemática têm entrada livre. Consulte o calendário completo no *site* oficial da SPM, em www.spm.pt.

COIMBRA RECEBEU FINAL DO CAMPEONATO NACIONAL DE JOGOS MATEMÁTICOS

A final do 8.º Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM) decorreu no dia 9 de Março, no Estádio Universitário de Coimbra, com o apoio da SPM. Nesta competição, dirigida a alunos dos Ensinos Básico e Secundário, os participantes tiveram a oportunidade de utilizar o raciocínio abstracto e de desenvolver estratégias, recorrendo a jogos matemáticos, na sua maioria jogos de tabuleiro. De acordo com o *site* oficial do CNJM, participaram nesta edição 2320 alunos de 517 instituições de ensino de todo o País. O 8CNJM foi organizado localmente pela Delegação Regional Centro da SPM, pela Universidade de Coimbra (UC), pelo Museu da Ciência da UC e pela Associação Académica de Coimbra.



CICLO “MATEMÁTICA, A CIÊNCIA DA NATUREZA”, NA FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

A Fundação Calouste Gulbenkian promove até Dezembro de 2012 um ciclo de conferências intitulado “Matemática, a Ciência da Natureza”. A primeira sessão (realizada em Fevereiro) contou com a participação de Henrique Leitão, que apresentou o tema “Trazer o céu para a Terra”. Seguir-se-á, no dia 28 de Março, Dinis Pestana, com “Ter muitas ideias, e a coragem de deitar quase todas fora”; a 18 de Abril, Ana Rita Pires apresentará “Geometria com dobras de papel: como o *origami* bate Euclides”; no dia 16 de Maio, Eduardo Marques Sá explicará “Como rodopia um pião, e porquê”; M. Paula Serra de Oliveira será a oradora no dia 6 de

Junho, com “A Teoria do Caos: de Homer Simpson ao futuro do Planeta”; José Natário desvendará “A linguagem secreta do Universo”, no dia 24 de Outubro; “Trigamia intelectual: Poincaré, Hamilton e Perelman” será o tema apresentado por André Neves, a 14 de Novembro, e, por fim, Jorge Buescu, encerrará o ciclo de conferências, no dia 12 de Dezembro, com “A Matemática, o Universo e tudo o resto”. A entrada é livre.



INSCRIÇÕES ABERTAS PARA PRÉMIO PEDRO MATOS

Estarão abertas até dia 31 de Março as inscrições para a 4.ª edição do Prémio Pedro Matos, destinado a estudantes do Ensino Secundário. O objetivo desta competição é fomentar a criatividade e o interesse dos jovens pela matemática e suas aplicações, bem como descobrir novos talentos. A entrega dos trabalhos a concurso deve ser efectuada até dia 18 de Maio e os prémios serão entregues no mês de Julho. O prémio Pedro Matos é organizado pelo Instituto Politécnico de Leiria e conta com o apoio da SPM.



NOVA EDIÇÃO DO MATOESTE COM O APOIO DA SPM

O Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria organizará, com o apoio da SPM, a quinta edição do MatOeste – Matemática na Região Oeste. O encontro, dirigido aos docentes e público em geral, decorrerá em Julho e será uma oportunidade para a divulgação, discussão e partilha de ideias sobre a matemática. O tema em destaque será “Desafios no Ensino da Matemática”. Para além de palestras relacionadas com esta temática, os participantes poderão assistir à entrega dos prémios da 4.ª edição do Prémio Pedro Matos, destinado a alunos do secundário.

INSCRIÇÕES ABERTAS PARA 20.º CONCURSO DE JOVENS CIENTISTAS E INVESTIGADORES

Destinado a estudantes com idades entre os 15 e os 20 anos, o Concurso de Jovens Cientistas e Investigadores premeia trabalhos em várias áreas de estudo, entre elas a matemática. A recepção de trabalhos decorre até ao dia 20 de Abril e está aberta a estudantes que frequentem os Ensinos Básico e Secundário ou o 1.º ano do Ensino Superior, podendo estes concorrer individualmente ou em grupo. Os prémios serão atribuídos na 6.ª Mostra Nacional de Ciência, que decorrerá nos dias 31 de Maio, 1 e 2 de Junho. Este concurso é organizado pela Fundação da Juventude.



ENCICLOPÉDIA DE MATEMÁTICA EM VERSÃO WIKI

Uma nova versão *wiki* da Encyclopedia of Mathematics já está disponível *online*. A página disponibilizada pela Springer e pela European Mathematical Society (EMS) pode ser consultada em www.encyclopediaofmath.org. A página dirigida à comunidade matemática pretende dinamizar as mais de oito mil entradas e 50 mil noções em matemática que foram originalmente publicadas pela Kluwer Academic Publishers, em 2002. As entradas podem ser actualizadas pelos matemáticos interessados em melhorar o portal. Todos os novos artigos ou adendas serão monitorizadas por um corpo editorial científico designado pela EMS.

IST RECEBE CONFERÊNCIA DE COMPUTAÇÃO SIMBÓLICA NO ENSINO E NA INVESTIGAÇÃO

Nos dias 2 e 3 de Abril terá lugar no Instituto Superior Técnico (IST), em Lisboa, a primeira Conferência Nacional sobre Computação Simbólica no Ensino e na Investigação – CSEI2012. Os participantes poderão assistir a três sessões plenárias, que terão como oradores principais os Professores Hoon Hong (editor-chefe do *Journal of Symbolic Computation*), Jože Korelc (autor do AceFEM integrado no Mathematica) e Arala Chaves (Atractor). Pretende-se neste encontro fazer o levantamento da situação actual e do desenvolvimento em Portugal da aplicação da Computação Simbólica no Ensino (do Básico ao Superior) e na Investigação. Será ainda uma oportunidade para que docentes e investigadores que realizam trabalhos na área da Computação Simbólica (Axiom, Derive, Macsyma, Maple, Mathematica, Matlab,...) possam partilhar conhecimentos e ideias. Mais informações sobre o CSEI2012 em www.csei2012.com.



PHILIBERT NANG É O VENCEDOR DO PRÉMIO RAMANUJAN 2011

Philibert Nang, 44 anos, da École Normale Supérieure, Laboratoire de Recherche en Mathématiques, em Libreville, no Gabão, foi o vencedor do Prémio Ramanujan 2011 para Jovens Matemáticos de Países em Desenvolvimento. O galardão, no valor de 15 mil dólares, premiou a contribuição de Philibert Nang no campo da teoria algébrica dos módulos-D e o esforço de investigação que este desenvolve no seu país de origem, o Gabão, em África. O Prémio Ramanujan é atribuído anualmente a 31 de Dezembro, pelo Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics e pela International Mathematical Union e é financiado pelo Niels Henrik Abel Memorial Fund. Em comunicado, os responsáveis pela atribuição do Prémio esperam que este seja visto como um exemplo de inspiração para outros jovens matemáticos africanos que desenvolvem trabalho de alto nível no seu país de origem. As inscrições para a edição de 2012 do Prémio Ramanujan estão abertas até ao próximo mês de Abril. Mais informações em www.euro-math-soc.eu.



INSCRIÇÕES ABERTAS PARA CONGRESSO EUROPEU DE MATEMÁTICA



O 6.º Congresso Europeu de Matemática, que se realizará este ano na cidade de Cracóvia, na Polónia, de 2 a 7 de Julho, já tem 17 conferências satélite agendadas. As inscrições podem ser feitas no *site* oficial, em www.6ecm.pl. A partir de 31 de Março, o valor da inscrição sofrerá um acréscimo. O Congresso é um dos acontecimentos matemáticos mais importantes da Europa e destina-se a toda a comunidade matemática interessada. Configura-se como uma oportunidade excelente para contactar com personalidades destacadas na área, ficar a par dos principais desenvolvimentos na matemática e promover os horizontes dos jovens investigadores para novas pesquisas. No encontro, além da oportunidade de conhecer esta cidade carregada de História e participar nos simpósios e conferências, poder-se-á também assistir à atribuição de vários prémios, como o Prémio EMS, o Prémio Otto Neugebauer e o Prémio Felix Klein. O Congresso é organizado pela European Mathematical Society, pela Sociedade Polaca de Matemática e pela Universidade de Jagiellonian.

MIGUEL ABREU
Presidente da SPM
mabreu@math.ist.utl.pt

MATEMÁTICA DO PLANETA TERRA 2013

A SPM é parceira da iniciativa *Mathematics of Planet Earth 2013*.

Concebida em 2010 e apresentada à comunidade matemática internacional no Congresso Internacional de Matemáticos de Hyderabad, Índia, em agosto desse ano, a iniciativa *Mathematics of Planet Earth 2013* (MPE2013, <http://www.mpe2013.org>) é um projeto mundial com o apoio da International Mathematical Union (IMU), do International Council of Applied and Industrial Mathematics (ICIAM) e da International Commission of Mathematical Instruction (ICMI). De acordo com Christiane Rousseau, vice-presidente da IMU e grande impulsionadora deste projeto, “a missão do MPE2013 é aumentar o envolvimento de matemáticos, investigadores, professores, alunos, e do público no papel da matemática em questões que afetam o planeta Terra e o seu futuro”.

O foco principal do MPE2013 é a investigação, estando já previstas atividades espalhadas um pouco por todo o mundo: períodos temáticos e workshops promovidos por institutos e centros de investigação, escolas de verão, números especiais de revistas científicas, etc. Em paralelo, estão também previstas atividades viradas para o ensino e a divulgação do papel da matemática no estudo do nosso planeta.



A SPM aderiu ao MPE2013 no início de 2012, propondo-se:

- Apoiar o Centro Internacional de Matemática (CIM) na organização de duas conferências internacionais em 2013: “Mathematics of Energy and Climate Change” e “Dynamics, Games and Applications”.
- Dedicar a Escola de Verão da SPM do próximo ano a temas do MPE2013.
- Incentivar a publicação de artigos relacionados com o MPE2013 na Gazeta de Matemática e no Boletim da SPM, incluindo a tradução para português de artigos internacionais relevantes.

- Promover atividades de divulgação no âmbito do MPE2013, dando particular atenção à competição associada à Open Source Exhibition of Virtual Modules (<http://www.imaginary-exhibition.com/mpe2013/MPE2013/>) que está

aberta até 15 de setembro de 2012.

Queremos promover o envolvimento da comunidade matemática portuguesa e estamos abertos a apoiar outras iniciativas que nos sejam propostas no âmbito do MPE2013.

Este artigo foi escrito ao abrigo das normas do Novo Acordo Ortográfico

M Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre

temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: gazeta@spm.pt.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2012

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para imprensa@spm.pt

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

<http://www.spm.pt>

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

<http://www.mat.uc.pt/~gazeta>

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

