N. 0165

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA | Ano LXXII | Nov. 2011 | 4,20€

Tio Patinhas, o Tostão Fatal e a Teoria das Catástrofes

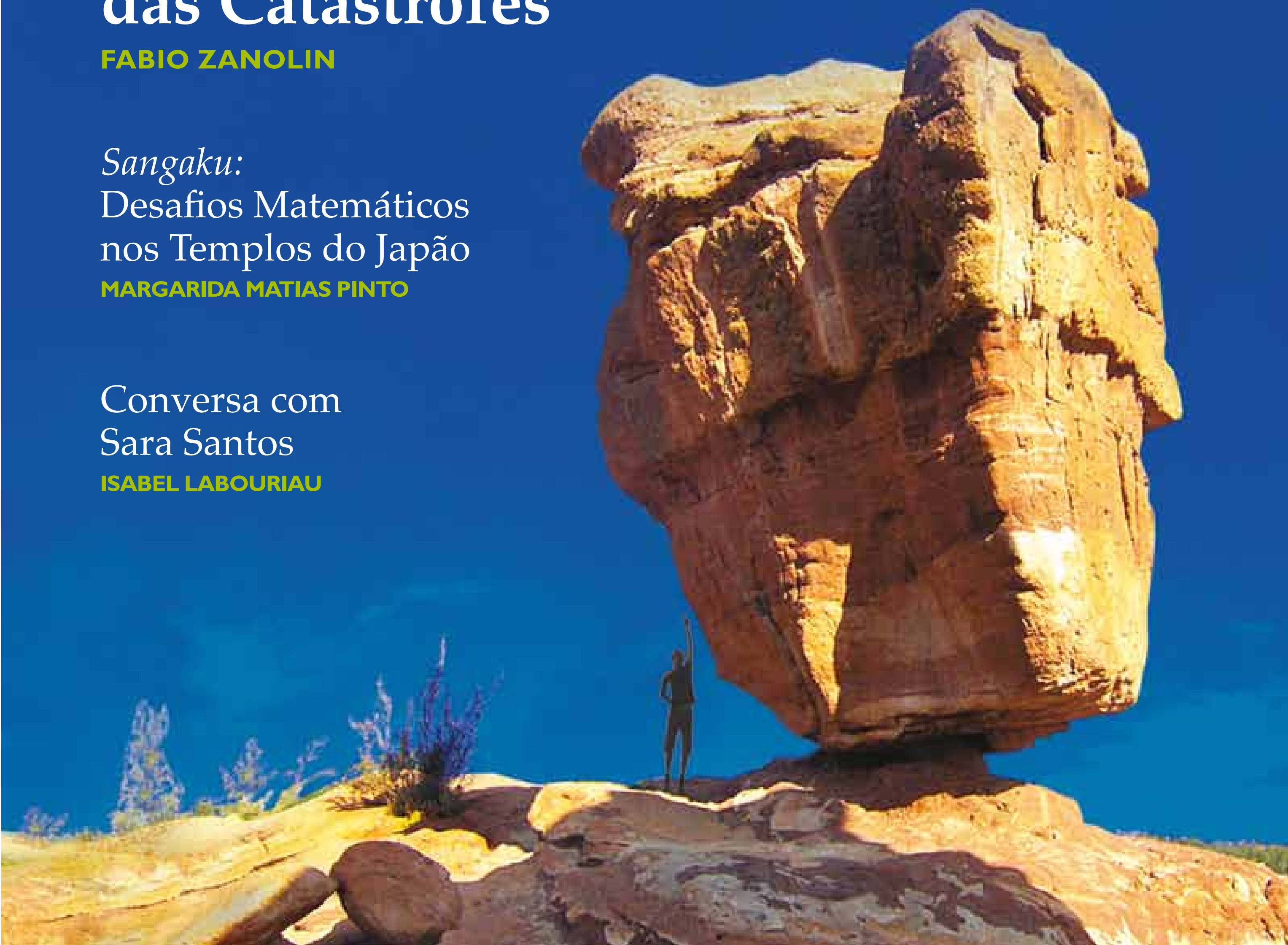
FABIO ZANOLIN

Sangaku: Desafios Matemáticos nos Templos do Japão

MARGARIDA MATIAS PINTO

Conversa com Sara Santos

ISABEL LABOURIAU



30as OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

BANCO ESPIRITO SANTO · spm

Participar nestas Olimpíadas é acertar em cheio!

Inscrições até 30 de Abril 2012 • http://mopm.mat.uc.pt/MOPM

CATEGORIA

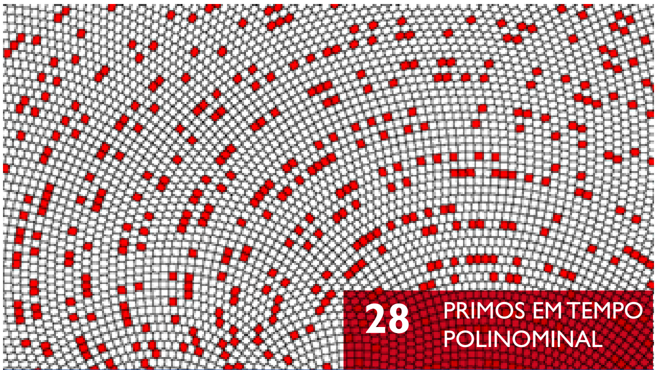
MINI-OLIMPÍADAS (3º E 4º ANOS DO ENSINO BÁSICO)

PROVA ÚNICA Maio de 2012

2ª Edição Nacional das Olimpíadas de Matemática do 1º Ciclo do Ensino Básico

CONTACTOS: www.spm.pt Tel.: 217 986 353 Telm.: 960 130 506 Email: opm@spm.pt

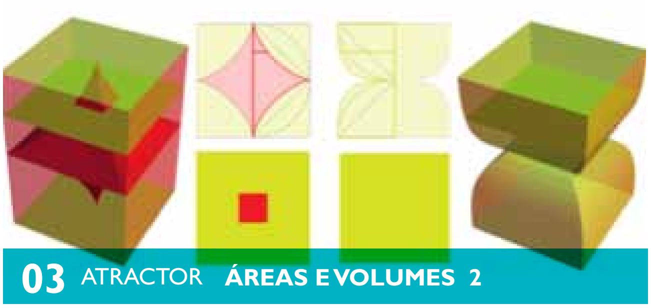
ÍNDICE


28 PRIMOS EM TEMPO POLINOMINAL


14 TIO PATINHAS, O TOSTÃO FATAL E A TEORIA DAS CATÁSTROFES


36 SANGAKU. DESAFIOS MATEMÁTICOS NOS TEMPLOS DO JAPÃO


43 CONVERSA COM...
SARA SANTOS


03 ATRACTOR ÁREAS E VOLUMES 2

Rogério Martins
Universidade Nova de Lisboa
roma@fct.unl.pt

VALE A PENA ESTUDAR MATEMÁTICA

Uma discussão recorrente, em que nos encontramos frequentemente envolvidos, é sobre as razões para se estudar matemática. Porquê exigir que os nossos estudantes dediquem uma considerável percentagem do seu tempo de estudo a esta disciplina?

Um argumento que surge recorrentemente é o de que só uma pequena percentagem das pessoas que estudam matemática para além de um nível elementar vai aplicar esse conhecimento na sua vida profissional. É verdade que fora de um grupo restrito de pessoas que de facto usa a matemática no seu trabalho, a maior parte de nós teria dificuldade em enumerar meia dúzia de vezes em que usou matemática não elementar para resolver um problema concreto da vida real. Contudo este argumento é falacioso. Alguém se lembra da última vez que aplicou conhecimentos adquiridos na disciplina de História na sua vida real? E de Filosofia, de Física, Química, etc.? Curiosamente só a Matemática é que tem de provar constantemente que vai ser útil em problemas concretos reais.

Embora só raramente um cidadão comum use a matemática de nível superior para resolver um problema concreto a verdade é que ela está indirectamente presente na forma como nos moldou o raciocínio e na tomada de decisões. A matemática, junto com o restante conhecimento, fornece um enquadramento para a forma como observamos e actuamos no que nos rodeia.

Por outro lado, a verdade é que não faltam apoiantes do fortalecimento do ensino da disciplina. Entre a sociedade em geral, o sentimento mais comum é o de que o estudo da matemática ajuda a estruturar o pensamento. Embora um certo número de pessoas tenha uma relação conflituosa com a disciplina, a verdade é que o interesse da comunicação social pela disciplina é considerável e não só pelas piores razões. Frequentemente vemos peças sobre pessoas que se destacam no mundo da matemática ou sobre divulgação científica da disciplina. Mesmo sem ter dados concretos (espero não estar a ser atraiçoado pelos meus interesses pessoais) diria que é a ciência que tem mais livros de divulgação científica publicados. Por outro lado, é frequente encontrar pessoas bem-sucedidas em áreas que não a matemática atestarem o importante papel que a matemática teve na sua formação. Gostaria aqui de destacar, pela sua actualidade, as palavras do prémio Nobel da economia deste ano, Thomas J. Sargent:

> *A matemática é a linguagem da economia… estudar matemática abre-te portas para interessantes disciplinas de economia… e oportunidades de emprego posteriores.*
> *Soberbos economistas… fizeram contribuições notáveis para a economia em parte porque eram criativos mas também porque estudaram mais matemática do que os outros.*

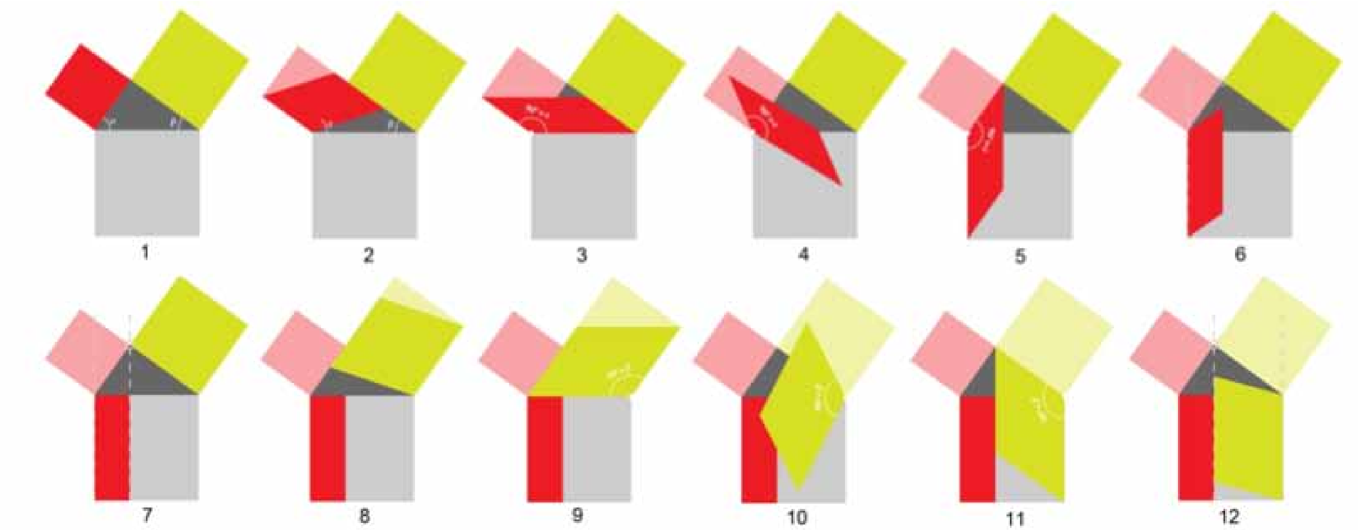
O texto completo pode ser visto em *https://files.nyu.edu/ts43/public/math_courses.html* (agradeço ao Fabio Chalub por me ter chamado à atenção para esta página).

ATRACTOR

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site *www.atractor.pt* . Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

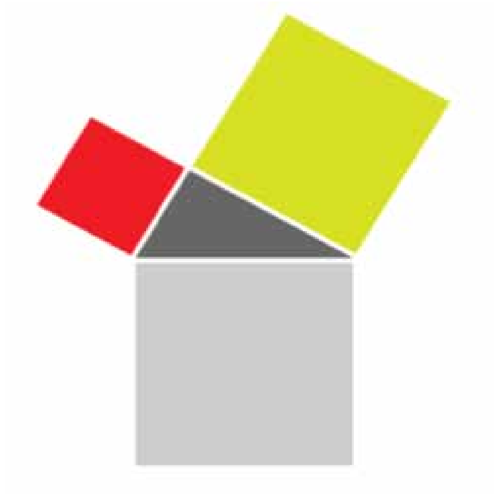
ÁREAS E VOLUMES 2

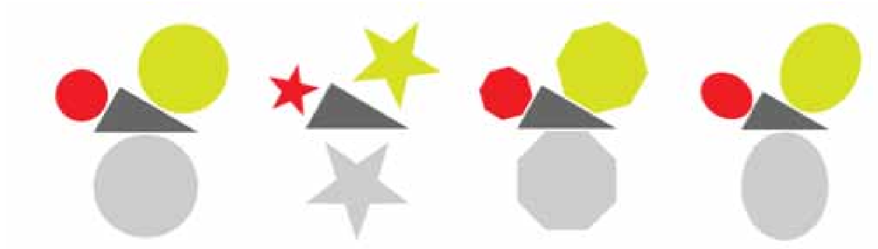
Partindo de uma formulação geométrica alternativa do Teorema de Pitágoras, é indicada uma construção que a cada coroa circular associa um disco com a mesma área. E, repetindo esse procedimento com as coroas circulares que se obtêm seccionando uma esfera e um cilindro circunscrito por uma família de planos perpendiculares ao eixo deste, determinaremos o volume da esfera.



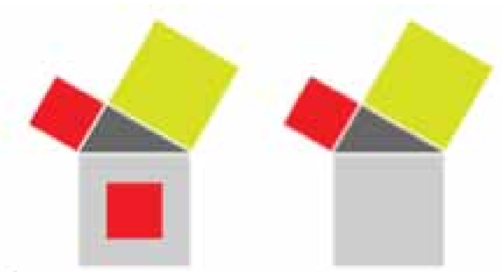
Consideremos um triângulo rectângulo e três quadrados construídos sobre os seus três lados. Na sucessão de imagens acima - de que a imagem final é a indicada à esquerda, separada das outras - as partes a vermelho têm igual área e o mesmo vale para as coloridas a amarelo. De facto, para a figura vermelha: em 1, 2, 3 e 5, 6, 7, porque a área de um paralelogramo só depende do comprimento de um lado e da altura correspondente [1], e em 3, 4, 5, porque uma rotação conserva distâncias e, portanto, também áreas. Analogamente para a figura amarela: passos 7, 8, 9 e 11, 12, final pela primeira razão e 9, 10, 11 pela segunda. Conclusão: a área do quadrado cinzento construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados coloridos construídos sobre os catetos (formulação geométrica do Teorema de Pitágoras).

Como figuras semelhantes com razão de semelhança k têm áreas que estão na razão k^2 [1], podemos concluir que, para quaisquer outras figuras (semelhantes entre si), construídas (de igual forma) sobre os catetos e a hipotenusa, continua a ser verdade que a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das construídas sobre os catetos. Em cada imagem a figura cinzenta tem como área a soma das áreas das figuras vermelha e amarela.





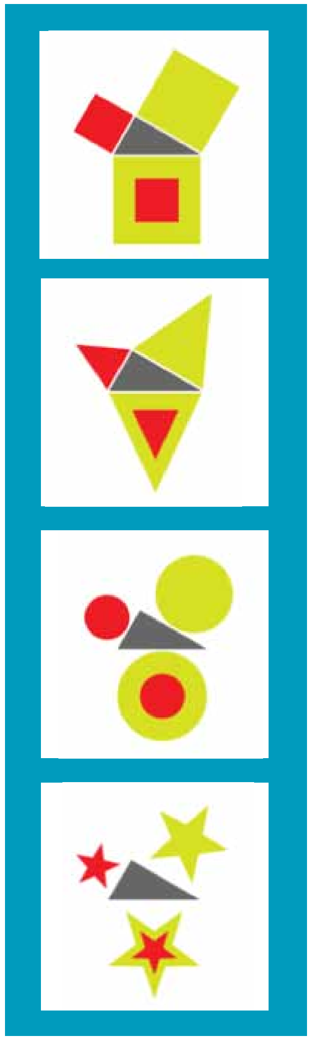
A figura abaixo sugere uma formulação geométrica alternativa para o teorema de Pitágoras. Colocando uma cópia do quadrado vermelho no quadrado cinzento, obtém-se uma coroa quadrada, cuja área é exactamente a do quadrado amarelo associado ao outro cateto.

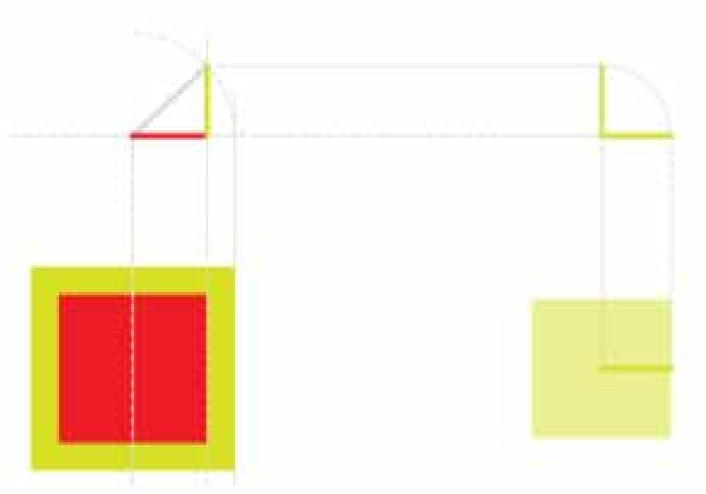


À esquerda, a coroa a cinzento e o quadrado amarelo têm mesma área

Para cada imagem, têm área igual as figuras com a mesma cor (ver à direita).

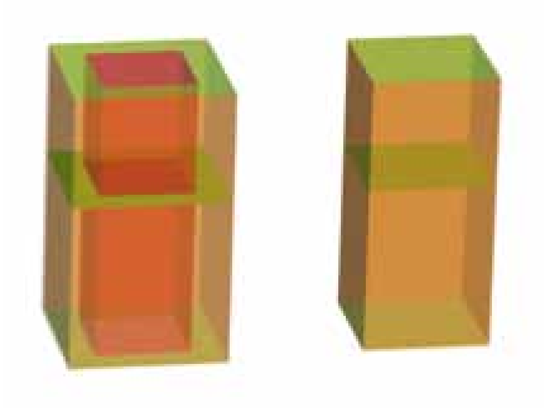
Utilizando devidamente estas propriedades, poderemos encontrar facilmente uma solução para o problema de, dada uma "coroa" baseada numa figura de certa forma, encontrarmos uma figura com a mesma forma (i.e. semelhante) com a mesma área. Por exemplo, como construir um quadrado com área igual à da coroa quadrada amarela na figura ao lado? No caso geral, basta escolher na figura maior dois pontos, construir um triângulo rectângulo que tenha como medida da hipotenusa a distância entre esses dois pontos da figura e como medida de um dos catetos a distância entre os pontos correspondentes da figura semelhante





de circunferência um ponto. O segmento (amarelo) vertical desta recta com extremo nesse ponto é o cateto desejado. O quadrado procurado tem como comprimento do lado o dobro do deste cateto.

Para prismas rectos assentes sobre estas figuras planas, temos resultados análogos, agora envolvendo os respectivos volumes. Por exemplo, na figura abaixo, partindo da coroa pris-

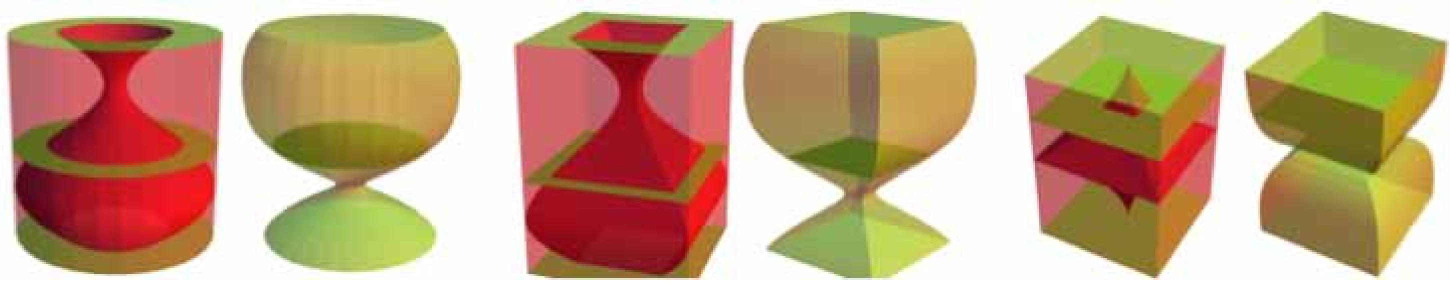


mais pequena, na coroa. Construindo a figura semelhante em que os dois pontos correspondentes aos anteriores distam entre si exactamente o comprimento do novo cateto do triângulo, temos o problema resolvido (figura acima).

Para construir o tal triângulo rectângulo, um processo simples é o de desenhar uma circunferência cujo raio seja a hipotenusa desejada, marcar num raio um segmento com origem no centro e comprimento igual ao do cateto desejado e tirar uma perpendicular pelo outro extremo. Por exemplo, partindo da coroa quadrada amarela anterior, a construção geométrica indicada na figura acima leva a um quadrado com a mesma área da coroa. O arco de circunferência indicado tem como raio a medida de meio lado do quadrado grande da coroa e o segmento vermelho horizontal com um extremo no centro da circunferência tem comprimento igual ao de metade do lado do quadrado vermelho. A recta perpendicular a este segmento passando pelo seu outro extremo determina no arco

mática da esquerda e aplicando a construção anterior à secção recta (horizontal), que é uma coroa quadrada, obtemos um prisma de secção quadrada com o mesmo volume da "coroa prismática" da esquerda.

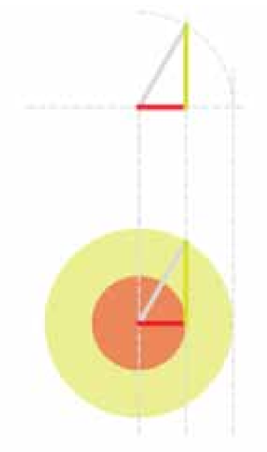
Mas estamos particularmente interessados numa situação mais complexa, em que a parte exterior é um prisma (ou cilindro) e a interior tem secções variáveis com a altura. Se, em cada nível, aplicarmos a construção anterior, obtemos do lado esquerdo coroas em que as figuras de fora são todas congruentes, mas não as de dentro. O resultado é o que as figuras abaixo ilustram. Para cada par, o volume da região (imagem da esquerda) compreendida entre o prisma ou cilindro exterior e o sólido que está dentro é igual ao volume do sólido (verde). Isto resulta do facto de as secções por cada plano ho-



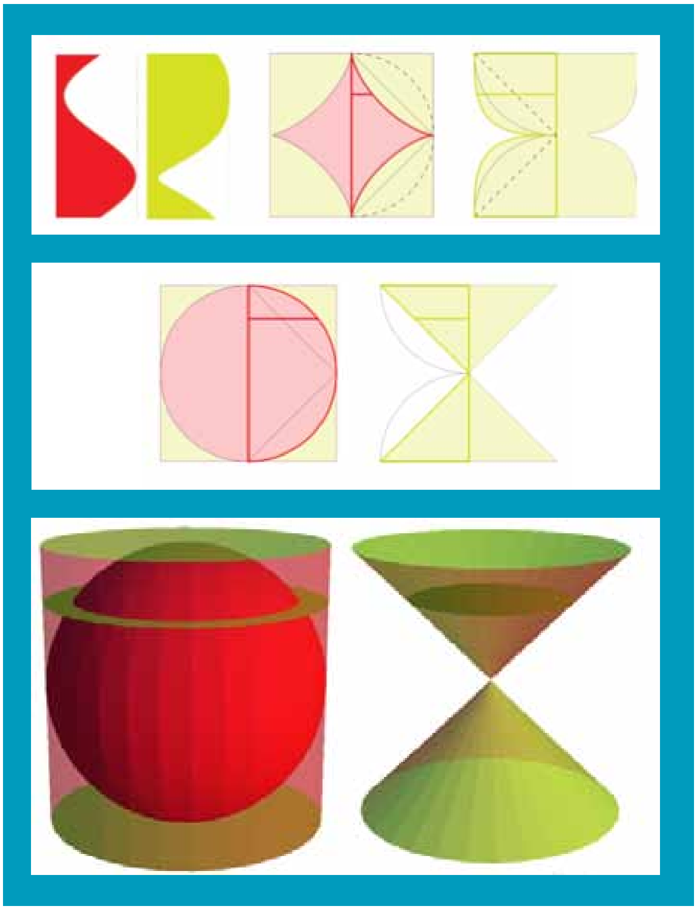
rizontal terem a mesma área. O tamanho dessas secções depende da altura segundo uma função que, neste exemplo, é a mesma para os dois primeiros pares e diferente para o último (ver figura).

Se a curva determinando a variação do tamanho das secções do sólido vermelho for uma circunferência, obtemos um caso particularmente interessante; note-se na figura à direita (meio), a curva correspondente amarela. Se as formas usadas forem circulares, o sólido vermelho da esquerda dentro do cilindro é uma esfera e o sólido verde da direita um (duplo) cone.

Qual a razão? Se voltarmos ao processo anterior de construção, descobrimos que neste caso a altura da secção é igual ao comprimento do cateto construído, que, por sua vez, vai ser o raio da secção da figura verde da direita. Isto é, o raio desta secção é precisamente igual à altura da secção. Portanto, obtemos geratrizes rectilíneas de um duplo cone de revolução com uma inclinação de 45° relativamente ao eixo. Aliás, no caso em análise, há uma construção equivalente e mais directa do cateto desejado (que será o raio do círculo com área igual à da coroa circular de partida). Como a figura à esquerda indica, nesse caso particular do círculo, basta marcar um raio horizontal do círculo vermelho: o segmento amarelo vertical partindo do extremo desse raio e terminando na circunferência amarela é o cateto procurado. O triângulo rectângulo assim obtido é claramente congruente com o que se obtém pela construção geral, válida para todas as formas. Como o volume do duplo cone é um terço do volume do cilindro com a mesma base e altura (o da esquerda) [1], o volume da esfera será a diferença entre os dois, ou seja, dois terços do volume desse cilindro.



Em [1] foram dadas justificações das afirmações: i) a área de um paralelogramo só depende do comprimento da base; ii) o volume de um prisma (cilindro) ou de uma pirâmide (um cone) só depende da altura e da área da base (não da forma desta); iii) uma pirâmide (um cone) tem como volume um terço do volume do prisma (cilindro) com a mesma base e altura. E decorre de propriedades justificadas nesse texto que a área de um triângulo só depende do comprimento da base e da altura, pelo que é metade da do paralelogramo construído sobre dois dos seus lados. Fixando como unidade de volume o valor do volume de um cubo de aresta unitária e utilizando devidamente grelhas tridimensionais cada vez mais finas, obtidas a partir daquele cubo, conclui-se que qualquer prisma rectangular recto tem como volume o produto dos comprimentos de três arestas, duas na base e uma vertical. Por outro lado, π é definido como a razão (que se prova ser constante) entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência, ou seja o perímetro é, por definição de π, igual a $2\,\pi\,r$, sendo r o raio da circunferência. Inscrevendo um polígono regular de n lados na circunferência e unindo os vértices ao centro, obtêm-se n triângulos, cuja área total é metade do produto do perímetro pelo apótema. Daqui conclui-se que a área do círculo é metade do produto do raio pelo perímetro, ou seja $\pi\, r^2$. Assim, o volume do cilindro de revolução envolvente da esfera é $\pi\, r^2 * 2\, r$ e o da esfera é dois terços do volume do cilindro, ou seja, $(2/3)\,\pi\, r^2\,.(2r)=(4/3)\,\pi\, r^3$.



REFERÊNCIAS

[1] Atractor, "Áreas e Volumes", *Gazeta de Matemática* 164, ano 72, Jul 2011, pp. 4-7

Jorge Nuno Silva
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

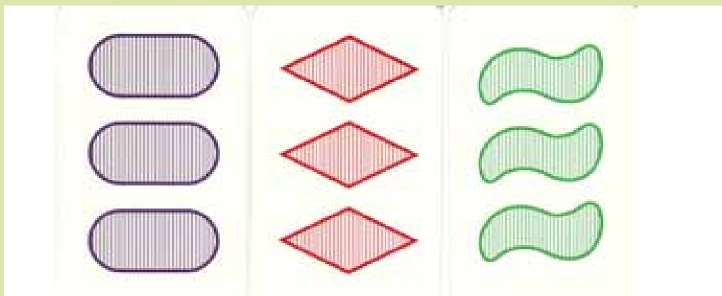
EPILEPSIA CANINA?!

Marsha Jean Falco, especialista em genética de populações, estudava, em Cambridge, a incidência de epilepsia em pastores alemães. . . Nas suas fichas, para evitar repetição excessiva de textos, utilizou uns desenhos coloridos que se distinguiam bem entre si. Daí a criar um jogo com esses símbolos foi um pequeno passo. Os filhos levaram-na, 16 anos depois, em 1990, a comercializá-lo. Foi um enorme sucesso, tendo ganho vários prémios internacionais!

O jogo SET® foi inventado por Falco nas circunstâncias descritas acima. Trata-se de um jogo de cartas. Cada uma tem quatro características, e cada uma delas pode assumir três valores.

O baralho contém todas as cartas possíveis, que são em número de $3^4 = 81$.

O conceito fundamental deste jogo é o *set*. Um *set* é qualquer conjunto de três cartas as quais, relativamente a qualquer das qualidades listadas, são todas iguais ou todas diferentes. (VER CAIXA)



Em cima, um exemplo de *set*, já que as cartas são todas iguais quanto a número e a enchimento, e todas diferentes relativamente a cor e a forma.

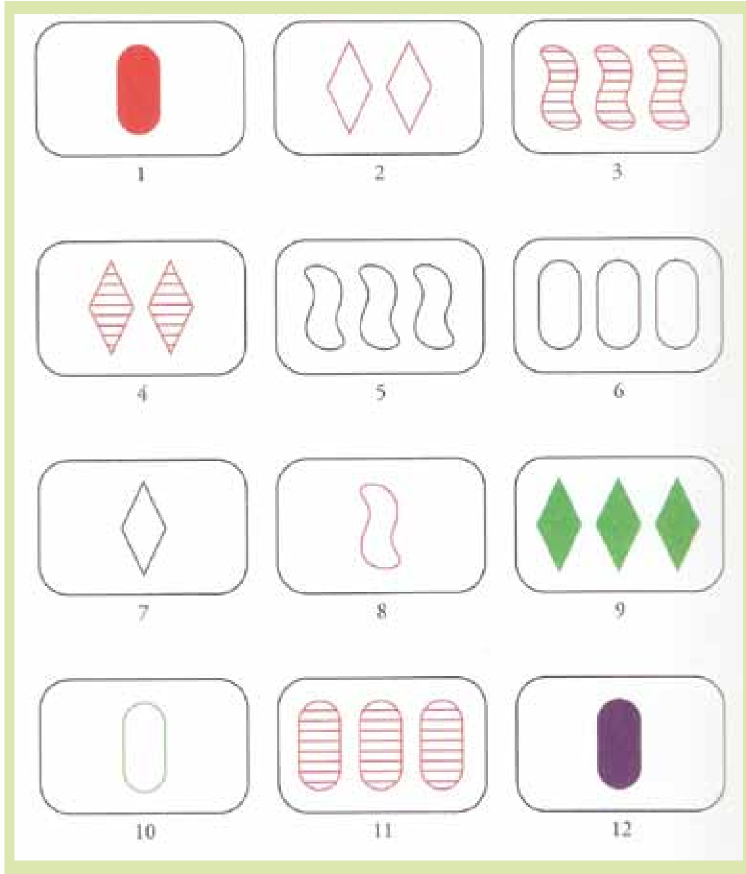
As características são:
1. Número (1, 2 ou 3)
2. Cor (vermelho, violeta ou verde)
3. Forma (oblongo, til ou losango)
4. Enchimento (sombreado, vazio ou cheio)

O conjunto de cima não é um *set*, porque, se bem que as cartas cumpram a regra fundamental quanto a número, cor e enchimento, falham na forma.

Na versão mais difundida, o jogo consiste em colocar 12 cartas na mesa, formando uma matriz 4x3 onde os jogadores procuram *sets*. Quando um jogador identifica um, anuncia em voz alta "*set*" e retira as três cartas respectivas. Se os adversários concordarem que se trata de facto de uma configuração válida, o jogador ganha um ponto, mas se se tiver enganado perde um ponto. As três cartas são substituídas e o jogo continua. No fim ganha quem tiver mais pontos.

Devo avisar os leitores de que é fácil ficar viciado...

O The New York Times publica problemas deste jogo. Na figura à direita o desafio consiste em encontrar seis *sets* (não têm de ser disjuntos).



Há várias questões, muito matemáticas, que surgem naturalmente. Deixo aqui algumas:

• Quantos *sets* diferentes se podem formar com as 81 cartas do baralho?

• Será verdade que, dadas quaisquer duas cartas, é possível encontrar uma terceira formando um *set*?

• Qual é o maior número de cartas que não contém nenhum *set*?

Benjamin Lent e Diane Maclagan deram uma descrição geométrica deste jogo baseada na identificação do baralho com $\mathbb{F}_3^4$ onde $\mathbb{F}_3$ é o corpo com três elementos e às possibilidades das quatro qualidades se fez corresponder os elementos do corpo: 1, 2 e 3.

Com esta abordagem, três cartas formam um *set* exactamente quando os correspondentes pontos em $\mathbb{F}_3^4$ são colineares!

Moral da estória: O SET® é um belíssimo jogo e aí está a imensa matemática para o confirmar!

CANTO DÉLFICO

Alexander Kovačec
Universidade de Coimbra
kovacec@mat.uc.pt

JUSTIFICAÇÃO MATEMÁTICA DA REGRA DO PARALELOGRAMO NA FÍSICA

A regra do paralelogramo para adicionar vectores em geometria é uma definição ou, dependente da abordagem, justificável com axiomática de geometria. Mas com que razão, para além de experiências de precisão limitada, o aceitamos na física para somar forças? Uma boa resposta requer alguma matemática sofisticada. A validade da regra talvez seja *a* razão do papel preponderante do cálculo vectorial em mecânica.

Aluno: Em casa construí este aparelho simples (figura 1a). Através de pesos e fios, que correm sobre roldanas fixadas num anel, aplico forças denotadas por $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ num ponto P. Se as representar geometricamente por vectores no plano com normas (comprimentos) iguais às dos pesos associados, então verifico que o vector $\vec{r}$ é igual ao simétrico da soma geométrica de $\vec{p}$ e $\vec{q}$, determinada segundo a regra do paralelograma que aprendemos em geometria. Posso reajustar as roldanas, e mudar os pesos como quero. Todas as experiências mostram que, em equilíbrio, P assume uma posição tal que a soma geométrica $\vec{p} + \vec{q}$ é igual a $-\vec{r}$, ou seja $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \vec{0}$. Como é possível que a física, i.e. o mundo real, obedeça tão maravilhosamente às leis simples da matemática?

Professor: Esta questão foi abordada por cientistas reputados. Lê [2, p.75] e procura o artigo do físico Eugene P. Wigner aí citado. Diz-se que Deus é um matemático supremo. Uma boa resposta à tua pergunta específica vais encontrar neste Canto Délfico.

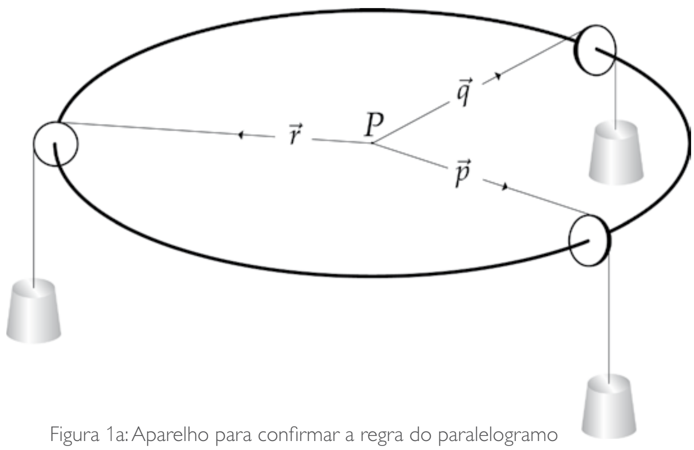


Figura 1a: Aparelho para confirmar a regra do paralelogramo

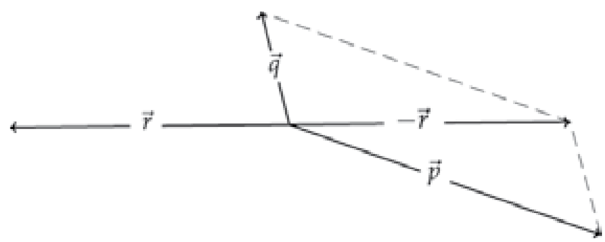


Figura 1b: Determinação geométrica da soma dos vectores $\vec{p}, \vec{q}$.

Com efeito, vamos apresentar uma justificação para o uso da regra do paralelogramo na física. Esta parte de hipóteses bastante fracas e naturais, mas precisa de alguma matemática sofisticada.

Seja $E = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano a três dimensões. A procurada lei para compor ('somar') forças representadas por vectores é uma aplicação $E \times E \ni (\vec{p}, \vec{q}) \to \vec{p} \dotplus \vec{q} \in E$. É nosso objectivo mostrar que esta soma é igual à soma de vectores definida na geometria através do conhecido paralelogramo gerado por $\vec{p}, \vec{q}$, ou seja, vamos provar que $\vec{p} \dotplus \vec{q} = \vec{p} + \vec{q}$. A seguir, ρ significa uma rotação espacial qualquer, e $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in E$ vectores quaisquer.

Note-se que não tentamos definir o que 'força' é, nem o que uma rotação é. Antes postulamos para estes conceitos certas propriedades que vão parecer naturais.

i. Se submetermos duas forças à mesma rotação, então a sua soma sofre ainda a mesma rotação. Formalizando: $\rho(\vec{p} \dotplus \vec{q}) = \rho(\vec{p}) \dotplus \rho(\vec{q})$.

ii. A força resultante exercida sobre P por duas ou três forças que a compõem depende apenas destas, e não da ordem com que as denotamos ou contemplamos. Além disto, toda a força pode ser anulada por certa outra e a força nula é neutra relativamente à adição. Por outras palavras: O espaço E munido da adição '$\dotplus$' define um grupo abeliano: para $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ em E quaisquer

$$\vec{p} \dotplus \vec{q} = \vec{q} \dotplus \vec{p},\ (\vec{p} \dotplus \vec{q}) \dotplus \vec{r} = \vec{p} \dotplus (\vec{q} \dotplus \vec{r}),\ \vec{0} \dotplus \vec{p} = \vec{p},$$

e para todo o $\vec{p}$ existe um $\vec{q}$ tal que $\vec{p} + \vec{q} = \vec{0}$.
Para um real λ e força $\vec{p}$ define-se $\lambda\vec{p}$ como sendo a força paralela (se $\lambda \geq 0$) ou antiparalela (se $\lambda < 0$) a $\vec{p}$ de norma $|\lambda||\vec{p}|$.

iii. A norma da resultante de dois vectores de normas iguais depende de forma contínua da sua norma e do ângulo entre eles. Ou seja: a função $\mathbb{R} \times S^2 \times S^2 \ni (\lambda, p, q) \mapsto |\lambda\vec{p} \dotplus \lambda\vec{q}|$ é contínua. Aqui S^2 é a superfície esférica de raio 1. Ela representa todos os vectores de norma 1.

iv. Se $\vec{p}, \vec{q}$ são forças paralelas (do mesmo sentido), então a norma da sua soma é igual à soma das normas: se $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$, então $|\vec{p} \dotplus \vec{q}| = |\vec{p}| + |\vec{q}|$.

Partindo destes postulados pouco restritivos vamos agora, passo por passo, deduzir a regra do paralelogramo.

Lema. *Sejam $\vec{e}, \vec{e}'$ vectores de normas iguais. Então a sua resultante tem a direção da bissectriz do ângulo $\angle(\vec{e}, \vec{e}')$ e norma proporcional à de $\vec{e}$ (ou de $\vec{e}'$).*

Prova. Seja ρ a rotação por π radianos (180 graus) em torno da bissectriz de $\angle(\vec{e}, \vec{e}')$. Então $\rho(\vec{e})$ tem origem e sentido de $\vec{e}'$.

Como ainda $|\vec{e}| = |\vec{e}'|$, temos $\rho(\vec{e}) = \vec{e}'$.

Da mesma forma $\rho(\vec{e}') = \vec{e}$. Por isso os postulados i e ii implicam $\rho(\vec{e} \dotplus \vec{e}') = \vec{e}' \dotplus \vec{e} = \vec{e} \dotplus \vec{e}'$. Ou seja a soma fica invariante sob a rotação ρ. Como uma rotação deixa invariante apenas uma direção, vemos que $\vec{e} \dotplus \vec{e}'$ está sobre a bissectriz. Seja agora $f(\lambda) = |\lambda\vec{e} \dotplus \lambda\vec{e}'|$. Se λ for um racional, $\lambda = \frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, digamos, então

$$\begin{aligned} \lambda\vec{e} \dotplus \lambda\vec{e}' &\overset{iv}{=} \overbrace{(\frac{1}{n}\vec{e} \dotplus \cdots \dotplus \frac{1}{n}\vec{e})}^{m \text{ parcelas}} \dotplus (\tfrac{1}{n}\vec{e}' \dotplus \cdots \dotplus \tfrac{1}{n}\vec{e}') \\ &\overset{ii}{=} (\tfrac{1}{n}\vec{e} \dotplus \tfrac{1}{n}\vec{e}') \dotplus \cdots \dotplus (\tfrac{1}{n}\vec{e} \dotplus \tfrac{1}{n}\vec{e}') \end{aligned}$$

Daí obtemos $f(\frac{m}{n}) = |\frac{m}{n}\vec{e} \dotplus \frac{m}{n}\vec{e}'| = m|\frac{1}{n}\vec{e} \dotplus \frac{1}{n}\vec{e}'| = mf(\frac{1}{n})$, e, em particular, $f(1) = f(n/n) = nf(1/n)$, e portanto $f(r) = rf(1)$ para $r \in \mathbb{Q}_{>0}$. A hipótese iii de continuidade de f dá agora $f(\lambda) = \lambda f(1)$ para um real $\lambda \geq 0$ qualquer. O mesmo é válido para $\lambda < 0$ usando que $r \in \mathbb{Q}_{<0}$ pode ser escrito $\frac{-m}{n} = r$ com $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Isto prova o lema.

Note-se que dados quaisquer dois pares de versores, $\vec{e}, \vec{e}'$ e $\vec{e}_1, \vec{e}_1'$ que definem o mesmo ângulo, existe uma rotação ρ tal que $(\rho(\vec{e}), \rho(\vec{e}')) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1')$. Como rotações não alteram normas,

$$|\vec{e} \dotplus \vec{e}'| = |\rho(\vec{e} \dotplus \vec{e}')| = |\rho(\vec{e}) \dotplus \rho(\vec{e}')| = |\vec{e}_1 \dotplus \vec{e}_1'|.$$

Isto serve para dizer que a função $f(y) := \frac{1}{2}|\vec{e} \dotplus \vec{e}'|$ com $\vec{e}, \vec{e}'$ versores e $\angle(\vec{e}, \vec{e}') = 2y$ está bem definida, i.e. não depende da escolha dos versores.

Sejam agora $\vec{p}_1, \vec{p}_2; \vec{q}_1, \vec{q}_2$ pares de versores que definem o mesmo ângulo. Definamos $\vec{p}, \vec{q}, x, y$ pelas equações

$$\vec{p} = \vec{p}_1 \dotplus \vec{p}_2, \quad \vec{q} = \vec{q}_1 \dotplus \vec{q}_2,$$

$$\angle(\vec{p}, \vec{q}) = 2x, \quad \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \angle(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 2y.$$

Por definição de f temos $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2f(y)$ e pelo lema a indicação dos ângulos dada na figura 2 é justificada e temos

$$|\vec{p}\dot{+}\vec{q}| = 2f(y)2f(x),$$

$$|\vec{p}_1\dot{+}\vec{q}_1| = 2f(x+y), \quad |\vec{p}_2\dot{+}\vec{q}_2| = 2f(x-y).$$

Por isso,

$$\begin{aligned} 4f(x)f(y) &= |\vec{p}\dot{+}\vec{q}| = |(\vec{p}_1\dot{+}\vec{p}_2)\dot{+}(\vec{q}_1\dot{+}\vec{q}_2)| \\ &\overset{ii}{=} |(\vec{p}_1\dot{+}\vec{q}_1)\dot{+}(\vec{p}_2\dot{+}\vec{q}_2)| \\ &\overset{iv}{=} 2f(x+y) + 2f(x-y). \end{aligned}$$

Do postulado ii decorre $f(\frac{\pi}{2}) = 0$. O seguinte teorema, provado a seguir, diz-nos que a função f que é por iii contínua, é igual à função cosseno.

Teorema. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ e para todos os $x, y \in \mathbb{R}$ a equação funcional de d'Alembert*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Então, $f = \cos$.

Daqui tiramos o seguinte facto:

F1. A soma física $\vec{p}\dot{+}\vec{q}$ de dois vectores de igual norma $|\vec{p}| = |\vec{q}| = \lambda$ que fazem um ângulo $2x$ é igual a $2\lambda \cos x\, \vec{b}$, onde $\vec{b}$ é o versor da bissectriz de $\vec{p}, \vec{q}$; pela figura 3, este vector é então igual à soma geométrica dos dois: $\vec{p}\dot{+}\vec{q} = \vec{p} + \vec{q}$.

Mostremos a seguir esta mesma igualdade no caso $\vec{p} \perp \vec{q}$, e finalmente para vectores $\vec{p}, \vec{q}$ quaisquer.

Na figura 4 vemos vectores $\vec{p} \perp \vec{q}$ que geram o rectângulo $[OPRQ]$. Sabe-se (por axiomática de geometria) que as diagonais de um rectângulo se intersectam num ponto M que as bissecta. Sejam $\vec{s} = \overrightarrow{OM}$ e $\vec{q}_1 = \overrightarrow{OQ_1}$, $\vec{p}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ as translações de $\overrightarrow{PM}$ e $\overrightarrow{MP}$, respectivamente, para O. Então vemos

$$\begin{aligned} \vec{p}\dot{+}\vec{q} &\overset{F1}{=} (\vec{p}_1\dot{+}\vec{s})\dot{+}(\vec{s}\dot{+}\vec{q}_1) \overset{ii}{=} (\vec{p}_1\dot{+}\vec{q}_1)\dot{+}2\vec{s} \\ &\overset{ii}{=} \vec{0}\dot{+}2\vec{s} \overset{ii}{=} 2\vec{s} = \vec{p} + \vec{q}. \end{aligned}$$

Mostrámos assim o facto seguinte.

F2. Se $\vec{p} \perp \vec{q}$,então $\vec{p}\dot{+}\vec{q} = \vec{p} + \vec{q}$.

Finalmente, sejam $\vec{p}, \vec{q}$ vectores quaisquer. Examinemos a figura 5.

Dos pontos P e Q baixámos perpendiculares à dia-

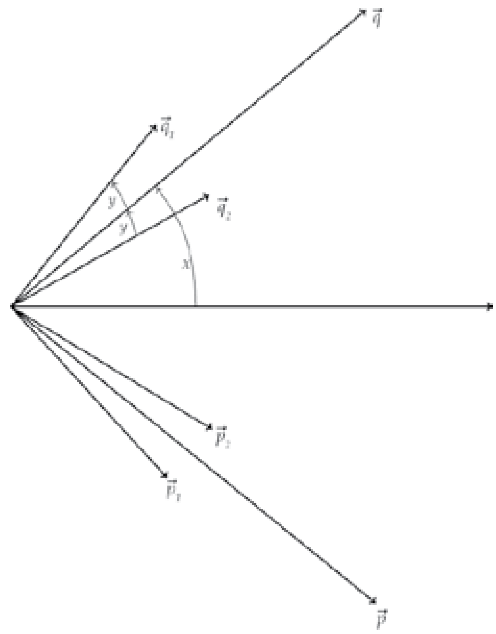


Figura 2: As relações entre $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}$, $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$, e $\vec{q}$.

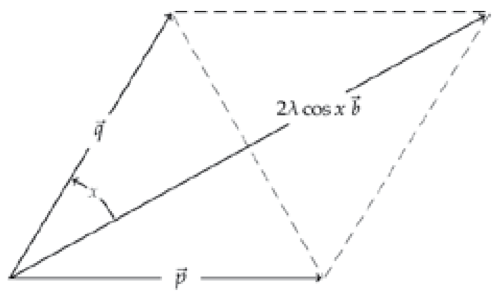


Figura 3: Justificando a adição de forças da mesma norma.

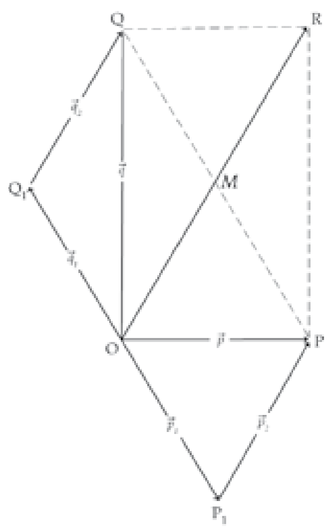


Figura 4: Justificando a adição de forças perpendiculares.

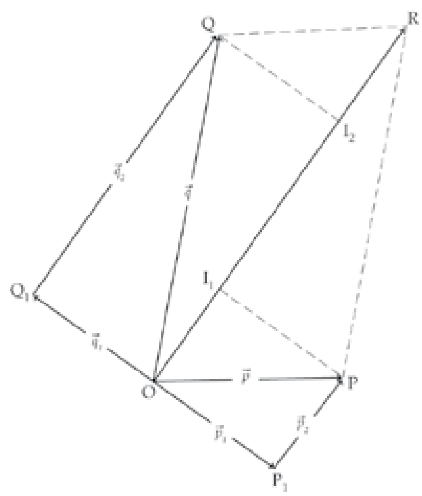


Figura 5: Justificando a adição de forças quaisquer.

gonal OR com pés I_1, I_2. Os vectores $\vec{q}_1, \vec{p}_1$, paralelos a estas perpendiculares e aplicados em O, têm por congruência de triângulos $\triangle QRI_2 \cong \triangle POI_1$ soma $\vec{0}$: $\vec{p}_1 + \vec{q}_1 = \vec{0}$. Com raciocínio um pouco análogo ao anterior, obtemos

$$\vec{p} \dot{+} \vec{q} \overset{F2}{=} (\vec{p}_1 \dot{+} \vec{p}_2) \dot{+} (\vec{q}_1 \dot{+} \vec{q}_2) \overset{ii}{=} (\vec{p}_1 \dot{+} \vec{q}_1) \dot{+} (\vec{p}_2 \dot{+} \vec{q}_2) \overset{iv}{=} \vec{p} + \vec{q}.$$

Isto termina a justificação da regra do paralelogramo excepto que devemos ainda provar o teorema atrás mencionado.

Prova do teorema: Pondo $y = 0$, obtemos $2f(x) = 2f(x)f(0)$ para todos os $x \in \mathbb{R}$. Usando aqui $x = 0$, inferimos $2 = 2f(0)$, logo $f(0) = 1$. Pondo $x = 0$ na equação funcional, vemos $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, ou seja, $f(y) = f(-y)$ para todos os y. Portanto, f é uma função par. Pondo nela $y = x$, vem $f(2x) + 1 = 2f(x)^2$, o que equivale a $*_0 : \; f(t/2)^2 = (1 + f(t))/2$ para $t \in \mathbb{R}$.

Como f e cos são contínuas e assumem os valores 1 e 0 em 0 e $\pi/2$, respectivamente, existem $a, c \in]0, \pi/2[$ tais que $0 < f(a) = \cos c < 1$. Estabelecemos a seguir que para todos os $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, se tem $*_1 : \; f(na/2^m) = \cos(nc/2^m)$.

São consequências do teorema da adição do cosseno,

$$\cos(u + w) = \cos(u)\cos(w) - \sin(u)\sin(w),$$

as duas fórmulas

$$\begin{aligned} 1 + \cos(2x) &= 2\cos(x)^2; \\ \cos((n+1)x) &= 2\cos(x)\cos(nx) - \cos((n-1)x). \end{aligned}$$

Tratamos do caso $n = 1$ de $*_1$ por indução sobre m. Para $m = 0$ ($*_1$) lê-se $f(a/2^0) = \cos(c/2^0)$, o que é verdade segundo a definição de c. Supondo $*_1$ para determinado m, e usando a primeira das fórmulas para o cosseno, vem $*_1$ com $m+1$ em lugar de m, pois

$$\begin{aligned} f(a/2^{m+1})^2 &= f((a/2^m)/2)^2 \overset{*_0}{=} (1 + f(a/2^m))/2 \\ &\overset{h.i.}{=} (1 + \cos(c/2^m))/2 = \cos^2(c/2^{m+1}). \end{aligned}$$

Portanto, temos $*_1$ para $n = 1$ e todos os $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Pondo na equação funcional para f, $x = ny$, obtemos $f((n+1)y) = 2f(y)f(ny) - f((n-1)y)$. Supondo $*_1$ para determinado n e usando a segunda das fórmulas para o cosseno, podemos então escrever

$$\begin{aligned} & f((n+1)a/2^m) \\ &= 2f(a/2^m)f(na/2^m) - f((n-1)a/2^m) \\ &= 2\cos(c/2^m)\cos(nc/2^m) - \cos((n-1)c/2^m) \\ &= \cos((n+1)c/2^m), \end{aligned}$$

mostrando $*_1$ para $n+1$ em lugar de n, e logo para todos os $n \in \mathbb{Z}$, também os negativos, pois tanto f como cos são funções pares.

Como a família dos pontos $na/2^m$, $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ é densa na recta, e f uma função contínua, obtemos $f(x) = \cos((c/a)x)$ para todos os $x \in \mathbb{R}$. Ora $f(\pi/2) = 0$ obriga a $c/a = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Então $f(\pi/(4k+2)) = \cos(\pi/2) = 0$; ou seja, se dois vectores de norma 1, $\vec{e}$ e $\vec{e}'$, fazem um ângulo $\pi/(2k+1)$, então $\vec{e} \dot{+} \vec{e}' = 0$. Como $(E, \dot{+})$ é grupo, só $\vec{e}' = -\vec{e}$ é aqui possível. Isto implica $k = 0$, logo $f = \cos$, como queríamos mostrar.

O presente artigo baseia-se na secção 2.4 do livro [1] que por sua vez relata pensamentos de matemáticos tão famosos como d'Alembert (1750), Siméon Denis Poisson (1804), Augustin Louis Cauchy (1821), Niels Henrik Abel (1823) e outros sobre o assunto. Uma abordagem alternativa da equação de d'Alembert usando cálculo encontra-se em [3]. As afirmações geométricas decorrentes da axiomática podem ser obtidos usando sobretudo resultados dos capítulos 6 e 8 de [4] ou as páginas Axdist 24, 25 de [5].

Como desafio, deixamos ao leitor o seguinte problema-tipo de equações funcionais que se encontram em Olimpíadas de Matemática.

Problema. Encontrar todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ que satisfazem $f(xf(y)) = yf(x)$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Para nos motivar na continuação do Canto Délfico envie evidências de leituras sérias dos nossos artigos – soluções de problemas, apontamentos em que pormenorizou provas, reflexões sobre os argumentos apresentados, perguntas que surgiram na leitura de cantos délficos – e sugestões para futuros artigos para:

Projecto Delfos
Departamento de Matemática
Apartado 3008, E.C. Universidade
3001-454 Coimbra

Retribuímos tais evidências com a publicação dos respectivos nomes (e certificados, se quiserem) que atestam o vosso profissionalismo.

Agradecimentos: A todos que melhoraram aspectos deste texto, mas muito em particular aos gráficos.

REFERÊNCIAS

[1] Janos Aczél, "Lectures on Functional Equations and their applications", Academic Press, New York (1966)

[2] Philip J. Davis e Reuben Hersh, "A Experiência Matemática", Gradiva (1995).

[3] F. J. Papp, (1985) "The d'Alembert Functional Equation", *Amer. Math. Monthly* 92 (1985) 273-274.

[4] P. V. Araújo, "Curso de Geometria", Gradiva (1997).

[5] Texto Delfos (cópia pode ser obtida do autor).

Luis Afonso

Publicado originalmente no jornal Público, em 26/07/2011. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRECTOR:
Rogério Martins Universidade Nova de Lisboa

VICE-DIRECTORES:
Alessandro Margheri Universidade de Lisboa

CONSELHO EDITORIAL:
Afonso Pedrosa Pinto E. S./3 S. Pedro Vila Real • **António Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho • **Elisabete Rodrigues** E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** E. S. Felismina Alcântara • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação de Viana do Castelo • **Maria do Céu Pinto** Universidade de Coimbra • **Manuel Domingos Oliveira Cadete** Universidade Agostinho Neto • **Paulus Gerdes** Universidade Eduardo Mondlane, Moçambique • **Raquel Escórcio** antiga professora na E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • **Roberto Ramalho** Universidade de Pernambuco, Brasil • **Teresa Almada** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • **Juan-Miguel Gracia** Universidad del País Vasco, Espanha

ASSISTENTES EDITORIAIS:
Ana Margarida Pereira SPM • **Sílvia Dias** SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

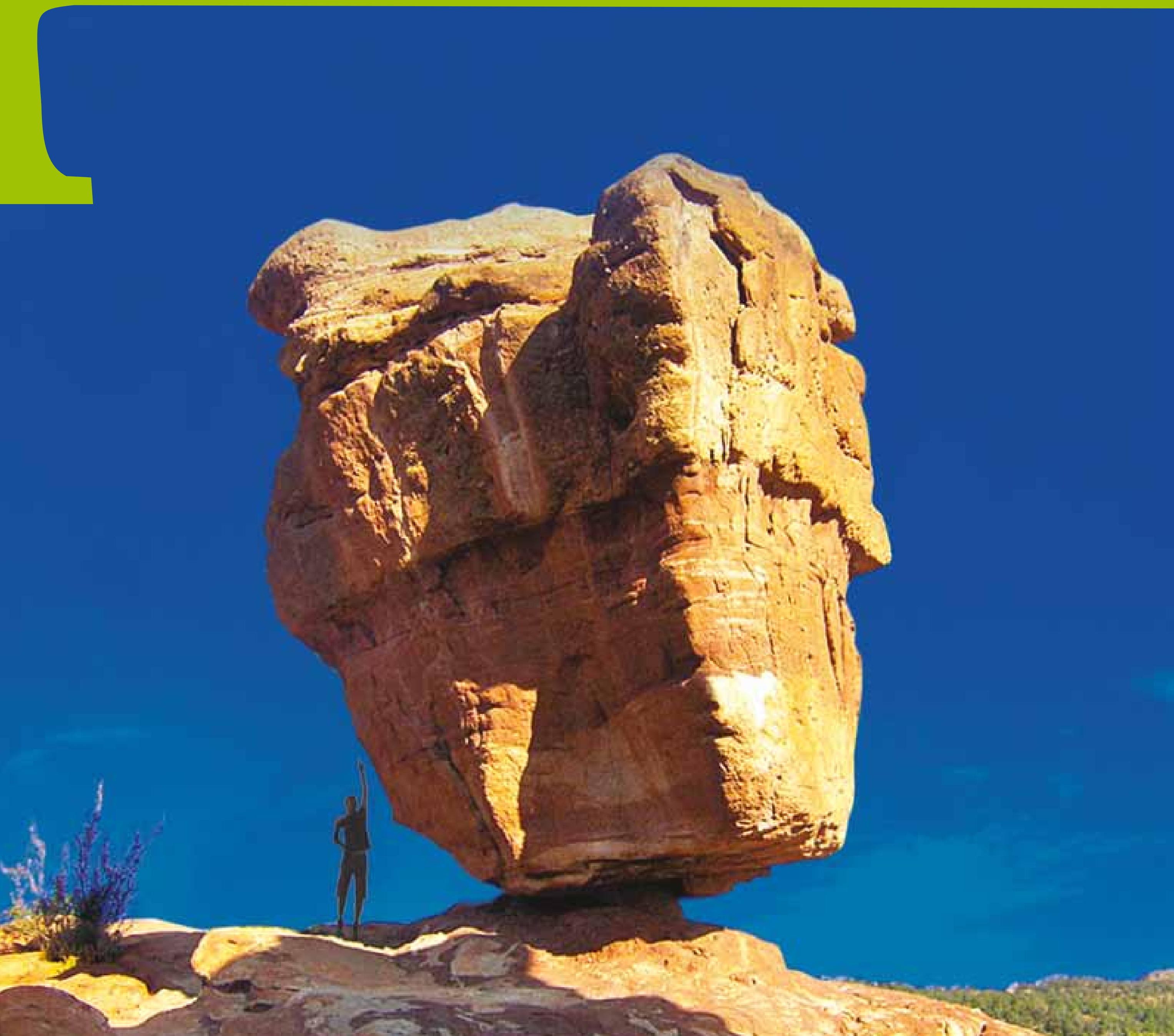
DESIGN:
Ana Pedro

CONCEPÇÃO E MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB:
Pedro Quaresma Universidade de Coimbra

IMPRESSÃO:
Dossier – Comunicação e imagem

PROPRIEDADE:
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

TIRAGEM **1900 Exemplares**
ISSN **0373-2681**
ICS **123299**
DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**



Tio Patinhas, o Tostão Fatal e a Teoria das Catástrofes

Fabio Zanolin

Dipartimento di Matematica e Informatica, Universitá di Udine

fabio.zanolin@uniud.it

O que têm em comum o Tio Patinhas, o pintor surrealista Salvador Dalí, a queda do Império Romano e os reflexos de luz numa chávena de chá? E, por amor à ciência, é conveniente provocar um cão agressivo só para ver se um teorema de geometria diferencial é verdadeiro? O matemático francês René Thom desenvolveu uma teoria geométrica que explica porque é que certas formas simples aparecem em todo o lado nas ciências naturais. Desta teoria foram imaginadas consequências e aplicações de todos os tipos. Apresentaremos uma breve introdução à teoria das catástrofes, esperando despertar a curiosidade do leitor e o seu desejo de aprofundar alguns dos tópicos apresentados.

Em *A Christmas for Shacktown*, um dos mais belos trabalhos de Carl Barks, publicado pela primeira vez em Janeiro de 1952, Tio Patinhas corre o risco de perder todo o dinheiro contido no seu cofre pelo colapso do chão do próprio edifício causado pela carga de moedas e notas aí amontoadas. A razão que desencadeia o desastre é uma miserável moedinha: o tostão fatal referido no título.

Este é só um exemplo dos muitos que são usualmente associados ao termo "catástrofe", entendida como o surgir repentino de um efeito explosivo em consequência de uma causa que pode ser de intensidade leve ou, de qualquer forma, pode exercer a sua influência de modo contínuo no tempo, sem efeitos aparentes até o momento do desastre. Voltando à história de Carl Barks, durante anos e anos as moedas foram adicionadas uma após a outra no cofre num processo de acumulação de tipo contínuo e sem qualquer alteração digna de nota na estrutura do edifício. A certo ponto, aparece uma descontinuidade repentina e o desmoronamento (assinalado pelo *rumble* do quadradinho) é o seu resultado inesperado.

Em geral, faz-se remontar o nascimento da teoria das catástrofes como teoria matemática ao ano de 1972, com a publicação do livro *Stabililité Structurelle et Morphogénèse. Essai d'une théorie générale des modelès*, do matemático francês René Thom (1923-2002). O livro, especialmente após a sua tradução em inglês, teve um enorme impacto, embora ainda hoje, por causa do seu estilo complexo, talvez não seja bem compreendido por muitos. René Thom entrou em 1943 na prestigiada École Normale Supérieure de Paris, onde se licenciou em 1946, e obteve uma posição de investigação no CNRS, em Estrasburgo. Depois de uma bolsa de estudo, que lhe permitiu passar um período nos Estados Unidos (onde encontrou também Einstein), ensinou em Grenoble (1953-1954) e em seguida, novamente em Estrasburgo (1954-1963). Foi nomeado professor em 1957. Em 1958, com 35 anos, foi galardoado com a Medalha Fields pelas suas importantes contribuições à topologia diferencial e à teoria das singularidades, algumas das quais remontavam ao trabalho de investigação com o qual concluiu o seu doutoramento em 1951. Como é sabido, não há Prémio Nobel da Matemática

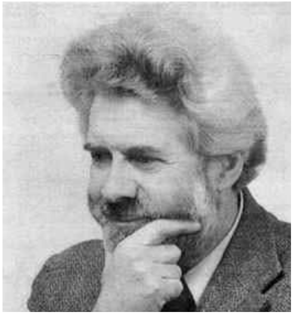
(embora alguns matemáticos tenham recebido o Prémio Nobel em outras áreas pelo seu trabalho). O Congresso Internacional de Matemáticos, que se reuniu em Zurique em 1932, adoptou a proposta de John Charles Fields de preencher essa lacuna, e os reconhecimentos para a matemática (chamados por esta razão Medalhas Fields) foram conferidos pela primeira vez no congresso seguinte, em Oslo em 1936. Após uma interrupção durante o período da Segunda Guerra Mundial, desde 1950 as Medalhas Fields foram regularmente atribuídas de quatro em quatro anos. Estes prémios são dados como reconhecimento à investigação já desenvolvida, mas também a matemáticos que se demonstrem particularmente promissores. Com efeito, para receber a Medalha Fields é preciso não ter mais de 40 anos de idade.

Por ocasião do discurso de atribuição da Medalha Fields a Thom pela sua investigação sobre temas como o cobordismo e os teoremas de transversalidade, destacou- se em particular como as ideias de Thom, dignas de admiração pelo seu carácter geométrico e pela sua natureza intuitiva, haviam enriquecido a matemática e como tudo parecesse indicar que o impacto dessas ideias estava longe de estar esgotado. Em 1964, René Thom transferiu-se para o Institut des Hautes Études Scientifiques em Bures-sur-Yvette, um centro de investigação perto de Paris, onde continuou a trabalhar até à reforma, em 1988.

Embora a teoria das catástrofes tenha as suas raízes na investigação em Topologia Diferencial que valeu a Thom a Medalha Fields, o seu maior desenvolvimento deu-se nos anos que se seguiram a 1960. O próprio Thom afirma em alguns artigos autobiográficos que a Medalha Fields lhe garantiu a liberdade de escolher os tópicos de investigação que queria desenvolver sem nenhuma restrição. Isto levou-o gradualmente a abandonar a investigação matemática no sentido mais puramente técnico do termo e a abranger noções mais gerais, tais como a génese das formas em biologia[1], em geologia, na linguística, em ciências sociais e noutros campos ainda, contando sempre mais com a sua intuição geométrica do que com o formalismo matemático de tipo académico.

Não se pode concluir esta breve nota histórica sobre a "teoria das catástrofes" sem mencionar o nome do matemático inglês Erik Christopher Zeeman (nascido em 1925), que muito contribuiu para a difusão da teoria e das suas aplicações (ver,


René Thom


Chris Zeeman

por exemplo, [5]). Chris Zeeman foi uma figura importante no panorama da matemática britânica de 1900. Licenciado em Cambridge, em 1964 transferiu-se para a nova Universidade de Warwick, perto da cidade de Coventry, onde ficou até 1988. Sob a sua liderança, Warwick tornou- se em poucos anos um dos centros de investigação mais importantes para o estudo dos sistemas dinâmicos. Para além dos seus sucessos na investigação matemática, (e no mundo académico, que lhe garantiram um amplo número de distinções (chegando a receber o título de "Sir"), Christofer Zeeman é famoso pelas suas aulas e conferências brilhantes e pela sua obra a favor da educação de jovens talentos matemáticos no Reino Unido. Se a teoria das catástrofes se tornou tão popular fora do mundo matemático, de tal forma que até os jornais diários começaram a tratar do assunto em meados dos anos setenta com títulos do tipo "Thom: tenho a fórmula que explica os desastres" (*Corriere della Sera Illustrato*, 1978), deve-se em grande parte à obra entusiasta de artigos e conferências de Zeeman. Ele foi um verdadeiro pioneiro no que diz respeito a imaginar novas aplicações da teoria às ciências biológicas e comportamentais e inventor de uma máquina das catástrofes, um simples mecanismo que ilustra como pequenas perturbações podem dar origem a fenómenos de descontinuidade. De acordo com o próprio Thom, o termo "teoria das catástrofes" foi criado por Zeeman.

Nos anos setenta, o grande sucesso de público da teoria das catástrofes levou a uma "moda" em que cada vez mais pessoas, imitando a abordagem de Thom e Zeeman (por vezes sem perceber completamente as técnicas que utilizavam e não possuindo nem o domínio da matemática nem a intuição geométrica destes dois precursores), tentaram encontrar novas aplicações da teoria a especulações gradualmente mais ousadas e extravagantes e, por vezes, sem nenhuma base experimental. Isto provocou uma espécie de rejeição de grande parte da comunidade matemática (e científica em geral) à qual se seguiu um período de debates acalorados e de polémicas. O próprio Thom, num artigo autobiográfico de 1997, concluía amargamente: "É um facto que a teoria das catástrofes está morta. Mas poder-se-ia dizer que morreu por causa do seu grande sucesso... Quando se percebeu que a teoria não permitia previsões quantitativas, todas as mentes bem-pensantes decidiram que a teoria não tinha valor nenhum....". Hoje podemos ver tudo numa perspectiva histórica e em vez de escrever como num famoso artigo na revista *Science* de 1977 (Gina Kolata) "Teoria da Catástrofes: o rei vai nu", podem publicar-se trabalhos intitulados "Ascensão e queda da teoria das catástrofes em economia: deitou-se fora o bebé com a água do banho?" (J.B. Rosser Jr., 2007). Voltaremos a este assunto mais à frente.

Uma vez que este é um artigo escrito por um matemático, o leitor esperaria encontrar também um pouco de matemática e não apenas conversa de tipo jornalístico. Quem escreve, por sua vez, encontra-se agora num grande embaraço. Com efeito, percebe que os colegas matemáticos que vão ler este artigo se calhar estremecerão à frente de simplificações demasiado audazes e também tecnicamente incorrectas (se não forem suportadas por hipóteses bem precisas). Um exemplo: não é verdade que um ponto onde a derivada de uma função se anula é necessariamente ou de máximo ou de mínimo ou de inflexão (como parecerei sugerir daqui a pouco). No entanto, isto é verdade para algumas classes de funções (por exemplo, para aquelas de tipo polinomial). Uma premissa que é importante fazer é que a teoria das catástrofes não aborda todos os possíveis aspectos que pode apresentar uma função. As palavras mágicas neste contexto são os termos *suave* e *genérico*: as propriedades consideradas são válidas para funções que possuem uma grande regularidade (por exemplo, funções polinomiais), com a possível excepção de "casos patológicos" extremamente raros. Para além disso, estas propriedades devem manter-se para pequenas perturbações das funções. O termo "pequeno" é aqui usado de forma deliberadamente ambígua e é, num certo sentido, tautológico: pequeno significa adequado para a validade dos teoremas enunciados. Uma vez que não enunciarei de modo formal nenhum teorema, mas ilustrarei apenas um par de aplicações, não preciso de clarificar mais este assunto. Quem pretenda aprofundá-lo, deverá entrar num terreno que não é trivial e requer competências técnicas específicas de análise matemática. Uma advertência final: as propriedades que serão agora descritas são de tipo puramente qualitativo (e não quantitativo). Por exemplo, nalguns textos consideram-se as perturbações da função x^3, em outros as da função $x^3/3$. A segunda função é, por vezes, mais conveniente porque a sua derivada é x^2 (em vez de $3x^2$). Isto simplifica alguns cálculos. Para além de alguns coeficientes por redimensionar, não há diferença nenhuma em considerar uma ou outra das funções. Um pouco mais delicado é o facto de que, quando perturbamos uma função que começa com uma certa potência de x seguida de termos de grau mais baixo, não é necessário considerar todos os termos de ordem menor para obtermos todos os possíveis gráficos qualitativamente distintos. Por exemplo, os gráficos da função $y = x^2$ e das suas deformações $y = x^2 + ax + b$ são do mesmo tipo: são todas parábolas com a concavidade virada para cima (como se costuma dizer em linguagem da escola secundária). Mais precisamente, todas as parábolas da forma $y = x^2 + ax + b$ que podem ser obtidas ao variar dos coeficientes a e b (de infinitas maneiras possíveis) são meramente translações da parábola $y = x^2$ (experimente, se não acredita!). A coisa torna-se mais complicada para $y = x^3$ e as suas perturbações $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Neste caso, ao variar dos coeficientes a, b, c podem ser obtidas formas qualitativamente diferentes dos gráficos. No entanto, quem tiver algumas reminiscências de cálculo diferencial poderá convencer-se de que, para obter todos os comportamentos qualitativamente diferentes (ou seja, todas as diferentes formas dos gráficos que podem originar-se a partir de x^3 por adição de potências de x de ordem mais baixa), bastará considerar apenas funções da forma $y = x^3 + ux$, variando o parâmetro u. Ter entendido estas observações já é um passo importante para o que se segue.

A teoria das catástrofes propõe dar uma explicação de alguns fenómenos de tipo descontínuo através do uso

[1] Inspirando-se também no trabalho pioneiro de D'Arcy Wentworth Thompson (1860-1948), autor de *Crescimento e Forma*, em 1917.

de modelos matemáticos de tipo contínuo. Um sistema (físico ou mecânico, um organismo vivo, um modelo económico ou social, etc.) é modelado por equações diferenciais. Estas equações representam a evolução do sistema no tempo. Não é necessário para o leitor saber em detalhe (ou lembrar-se, se se esqueceu) o que é uma equação diferencial. Por agora é suficiente saber que há uma dinâmica interna ao sistema de acordo com a qual a evolução do mesmo está descrita de forma semelhante às leis da física.

Chegados a este ponto, uma primeira e importante hipótese que se assume é de que o sistema seja de tipo gradiente. Isto significa que existe uma função potencial a partir da qual podem determinar-se os estados de equilíbrio do sistema. Uma *função potencial* V é uma função de um certo número de variáveis $x, y, z, \ldots$, (variáveis *internas*, que descrevem o estado do sistema) e que toma valores reais. Um exemplo clássico em Física é dado pela energia do sistema que se está a considerar, mas podem imaginar-se inúmeros outros exemplos noutras situações. Para simplificar a exposição, imaginemos por agora que o potencial depende de uma única variável x. Teremos então uma função $V(x)$ da qual poderemos traçar o gráfico (ver figura 1).

O comportamento de um sistema de tipo gradiente[2] é análogo ao de uma gota de água (ou de uma pequena bola) apoiada num ponto do gráfico e sujeita a uma força que a empurra para baixo. Ela tenderá a dirigir-se para os pontos de mínimo relativo da função potencial. Para dizer toda a verdade, há algumas excepções. Por exemplo, se pusermos a nossa gota num ponto de máximo (ou num ponto de inflexão onde a derivada é nula), a gota ficará parada em equilíbrio. Porém,

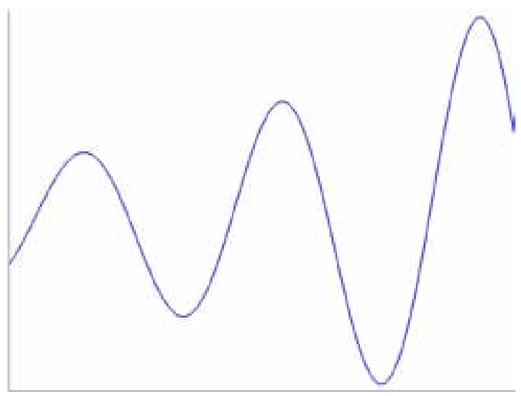


Figura 1: Um possível exemplo de função potencial numa variável x.

estas posições são de tipo instável, no sentido em que será suficiente uma pequena perturbação para fazer deslizar a nossa gota para um ponto de mínimo adjacente. Muitas vezes os sistemas físicos (como também outros sistemas em economia, em biologia, etc) comportam-se de forma semelhante ao que acabámos de descrever, estabilizando-se (depois de um certo tempo transitório) em posições de equilíbrio estável dadas pelos mínimos relativos do potencial.

Uma segunda hipótese importante da teoria das catástrofes é a de negligenciar o comportamento transitório (que se supõe realizar-se numa escala temporal muito mais curta dos fenómenos que se quer observar) para se concentrar nas posições de equilíbrio, estáveis ou instáveis. É claro que só as primeiras são as que se observam na Natureza, pois persistem por pequenas variações das condições iniciais. No caso simples considerado, isto é, o de um potencial $V(x)$ dependente de uma única variável, para determinarmos as posições de equilíbrio será suficiente estudar a equação dos pontos estacionários (ou *pontos críticos*) $V'(x) = 0$ e encontrar as suas soluções.

Se toda a história se reduzisse a isto, haveria bem pouco para contar. Mas, em geral, na Natureza a função potencial irá depender de alguns parâmetros (ditos também *factores de controlo*) que podem variar no tempo. Para dar um exemplo bastante grosseiro, a forma do nosso corpo é algo estável dia-a-dia (por sorte!), mas não fica a mesma com o passar dos anos. Cresce-se, a barriga fica maior, as costas curvam-se um pouco e o que era o jovem atlético e esbelto transforma-se num menos agraciado professor de meia-idade.

Nesta óptica, pode assumir-se que a função potencial V, para além de depender de um certo número de variáveis internas, $x, y, z, \ldots$, dependa também de um certo número de parâmetros de controlo $u, v, w, \ldots$ Variando estes parâmetros a sua forma muda de modo contínuo. As variações dos gráficos de V ao variar os parâmetros podem pensar-se como as alterações de uma paisagem com o passar das eras geológicas. Se pudéssemos filmar uma paisagem aparentemente fixa e imutável (estável) de colinas e montanhas durante vários milhões de anos e pudéssemos rever o filme a altíssima velocidade, observaríamos colinas e vales a nascer, a modificar-se, a desaparecer, etc. Podemos agora imaginar uma situação em que, ao variar de certos parâmetros, um ponto

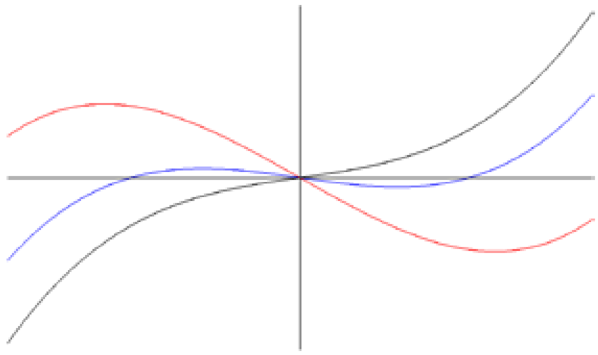


Figura 2: Gráficos da função potencial $V(x) = \frac{1}{3}x^3 + ux$ para os valores do parâmetro $u = -4$ (vermelho), $u = -1$ (azul) e $u = 1$ (preto). No primeiro caso, os pontos de mínimo e de máximo são bastante acentuados, no segundo caso, são um pouco atenuados, no terceiro, desapareceram completamente. Neste último caso, não havendo nenhum ponto de equilíbrio estável, o estado do sistema x tende para $-\infty$ (em tempo finito, pode provar-se). Diz-se que o sistema explode a $-\infty$.

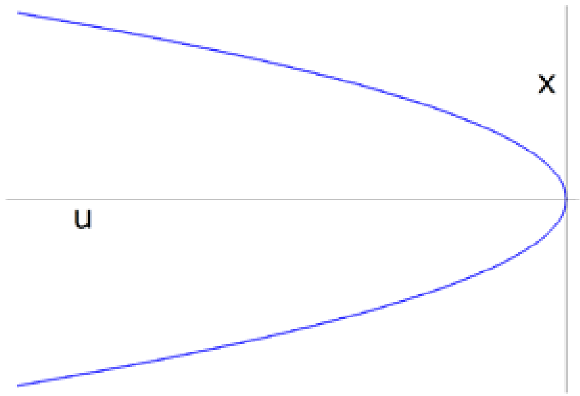


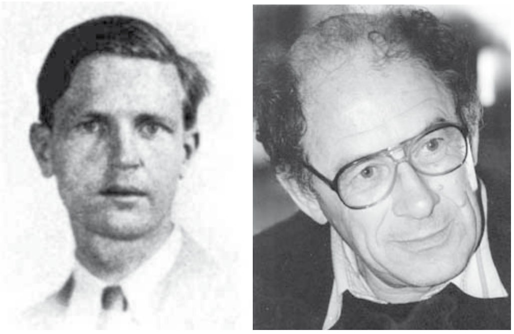
Figura 3: Conjunto dos pontos estacionários do potencial $V(x) = \frac{1}{3}x^3 + ux$ ao variar do parâmetro u. Os pontos da parábola $x^2 + u = 0$ com $x > 0$ correspondem a equilíbrios estáveis (os vales da figura anterior), enquanto os instáveis (os cumes da figura anterior) são os que correspondem a $x < 0$. Se u é negativo, o sistema encontrar-se-á no equilíbrio estável $x = \sqrt{|u|}$. O parâmetro u pode aumentar de forma contínua, e quando ultrapassar o valor $u = 0$ os equilíbrios desaparecem e o sistema explode em tempo finito. O vértice da parábola, em $u = 0$, corresponde ao instante em que se verifica o colapso do chão do cofre do Tio Patinhas.

que antes era estável perca a sua estabilidade: a pequena bola (ou gota de água) que anteriormente estava tranquilamente em repouso num vale, de repente encontrar-se-á no lado de uma encosta e deslizará para um novo ponto de mínimo do potencial (ou cairá sem nunca parar se todos os pontos de mínimo tiverem desaparecido). Neste caso, uma variação contínua dos parâmetros determina um salto descontínuo do estado do sistema: uma catástrofe, precisamente. Dado que, como vimos acima, interessa-nos identificar os pontos estacionários de V, com particular atenção para os que são estáveis, estudaremos a forma como, ao variar dos parâmetros de controlo, varia a estabilidade dos equilíbrios.

Se tomarmos o exemplo da figura 2 e procurarmos os pontos estacionários, da relação $V'(x) = 0$, obtemos $x^2 + u = 0$. No plano cartesiano com abcissa u (parâmetro de controlo) e ordenada x (variável interna, que determina o estado do sistema) obtém- se um lugar geométrico (é uma parábola), que representa o conjunto dos pontos estacionários ao variar do parâmetro u. Esta curva, desenhada na figura 3, representa o caso mais simples de catástrofe elementar, que se chama "dobra". Esta catástrofe intervém em todos aqueles modelos onde um sistema é conduzido de modo uniforme para um ponto de ruptura, como na história da moedinha que provoca o colapso do chão do cofre de Tio Patinhas. Esta situação é bem descrita por expressões coloquiais como "a gota que faz transbordar o vaso" ou "não esticar demasiado a corda (porque se parte)".

Até agora considerámos um exemplo muito particular, que é também o mais simples de todos. Poderia pensar-se que o número de casos qualitativamente diferentes que se podem apresentar seja enorme, se não mesmo infinito. Isto tornaria a teoria praticamente inutilizável para as aplicações, visto que quem quisesse aplicá-la a um modelo específico não saberia que tipo de catástrofe elementar escolher. E aqui está um dos pontos cruciais da teoria, contido num teorema de classificação topológica de Thom (1969). De acordo com este resultado, em sentido genérico e entre os sistemas dependentes de até *três parâmetros de controlo*, só há *cinco catástrofes elementares*. Para sistemas dependentes de, no máximo, *quatro parâmetros*, aos cinco modelos anteriores devemos juntar outros dois, num total de *sete catástrofes elementares*: o "mágico número 7" como escreve com alguma ironia Vladimir I. Arnol'd na introdução do seu livro [1]. Às setes catástrofes elementares foram dadas nomes sugestivos que lembram algumas características das superfícies constituídas pelos conjuntos de pontos críticos da função potencial. No caso da dobra, a "superfí-

[2] Que numa linguagem técnica se escreve como $x' = -\Delta V(x)$.



À esquerda, Hassler Whitney. À direita, Vladimir I. Arnol'd.

cie" é, de facto, uma curva plana, a parábola $x^2 + u = 0$, mas no caso de mais parâmetros temos superfícies mergulhadas no espaço tridimensional (a cúspide) e hipersuperfícies mergulhadas num espaço de dimensão 4 (a cauda de andorinha) ou superior. Para além da dobra, os nomes atribuídos às sete catástrofes elementares são os seguintes:

A cúspide, no caso de uma variável x e dois parâmetros de controlo, u, v, obtida a partir dos pontos críticos ($V'(x) = 0$) do potencial

$$V(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ux^2 + vx.$$

A cauda de andorinha, no caso de uma variável x e três parâmetros de controle u, v, w, obtida a partir dos pontos críticos do potencial

$$V(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ux^3 + \frac{1}{2}vx^2 + w.$$

E ainda **a borboleta**, **o umbigo hiperbólico** (*la vague*), **o umbigo elíptico** (*le poil*), e **o umbigo parabólico** (*le champignon*), para os quais não damos a expressão explícita do potencial por razões de espaço.

Em relação à figura 4, é interessante dar uma interpretação da curva, que tem forma de cúspide e que aparece a projectar a superfície dos pontos críticos sobre o plano dos parâmetros. Mais precisamente, a superfície de equação $f(u,v,x) = 0$, com $f(u\ v\ x) = x^3 + ux + v$ contém algumas dobras, no sentido de que tem algumas partes onde a superfície se enrola sobre si própria. Outras partes projectam-se de forma bijectiva sobre o plano uv, de equação $x = 0$. Para determinar a equação da cúspide, curva sobre a qual se projecta o contorno das dobras, procuram-se os pontos da superfície onde $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Sob esta afirmação esconde-se a utilização do Teorema da Função Implícita.

Com efeito, numa vizinhança dos pontos onde $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ (pontos ditos *regulares*) poderão descrever-se os pontos da superfície com x a depender de forma unívoca de *(u,v)*. Portanto, os pontos de dobra serão aqueles onde $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ (ditos pontos *singulares*).

Chega-se assim ao sistema de equações:

$$\begin{cases} x^3 + ux + v = 0 & \text{(equação de superfície)} \\ 3x^2 + u = 0 & \begin{array}{l}\text{(condição de anulamento} \\ \text{da derivada parcial } \partial f / \partial x\text{)}\end{array} \end{cases}$$

Eliminando a variável x e tendo em conta que pela segunda equação deve ser $u \leq 0$, obtém-se por fim a equação da cúspide no plano uv:

$$9v^2 = 4u^3, \text{ com } u \leq 0.$$

As observações aqui feitas para este caso particular estão contidas numa teoria geral desenvolvida em 1955 pelo matemático americano Hassler Whitney (1907-1989) que, com o seu artigo "On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane onto the Plane", criou as bases para o estudo das singularidades de aplicações suaves entre superfícies. Como escreve de forma admirável o grande matemático Vladimir I. Arnol'd (1937-2010) no seu livro [1]: "Aplicações de superfícies regulares sobre o plano são tudo o que nos rodeia. Com efeito, a maioria dos objectos à nossa volta é limitada por superfícies suaves. Os contornos visíveis dos corpos são a projecção das suas superfícies sobre a retina do olho. Examinando os objectos que nos rodeiam, por exemplo os rostos das pessoas, podemos estudar as singularidades dos contornos visíveis." Usualmente vemos essas singularidades como *dobras* ou *cúspides*. A teoria de Whitney (e a de Thom, com ela relacionada) tem inúmeras aplicações em óptica (com as *cáusticas*, já estudadas por Newton e Huygens) e, em geral, na análise da propagação das frentes de onda (veja-se o reflexo de luz em forma de cúspide que aparece no líquido contido na chávena da foto).

Particularmente bela é, na minha opinião, a análise que Arnol'd faz sobre o trabalho de Zeldovič relativo à distribuição em grande escala da matéria

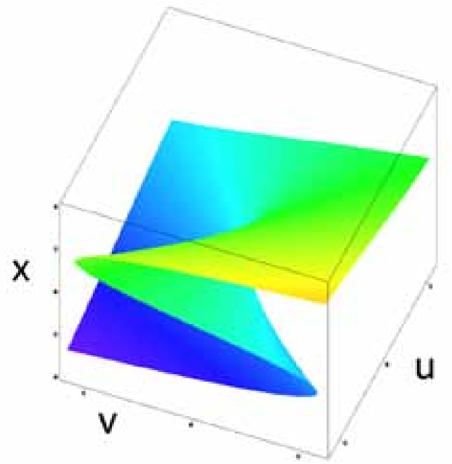


Figura 4: Superfície dos pontos críticos $V'(x) = x^3 + ux + v = 0$ no caso da catástrofe chamada **cúspide.** A variável x representa a altura, enquanto os parâmetros de controlo u e v são a abcissa e a ordenada no plano $x = 0$. Se a superfície for projectada no plano uv (imagine tirar uma foto de cima), irá aparecer o perfil de uma cúspide correspondente aos pontos onde a superfície se dobra sobre si própria.

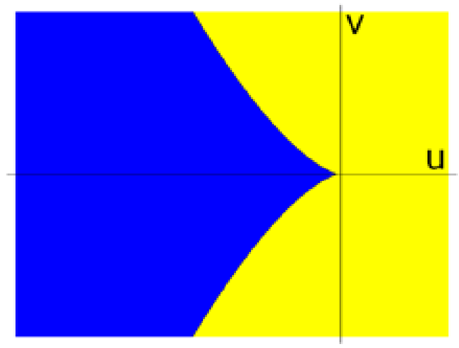


Figura 5: Cúspide no plano u,v. A zona de cor azul corresponde ao conjunto dos pontos do plano das variáveis de controlo por cima dos quais a superfície se dobra sobre si própria: por cima de cada ponto desta zona há três pontos da superfície. A zona de cor amarela é constituída pelos pontos (u, v) em correspondência dos quais há um único ponto da superfície. A cúspide que separa as duas áreas é o conjunto dos pontos (u, v), que satisfazem a equação $9v^2 + 4u^3 = 0, u \leq 0$.

no Universo, matematicamente equivalente à formação de singularidades de cáusticas.

A catástrofe de tipo cúspide talvez tenha sido a mais utilizada nas aplicações, de uma forma mais ou menos apropriada. Não é trivial como a dobra, e portanto permite uma descrição de fenómenos mais complexos. Para além disso, o conjunto dos pontos críticos é uma superfície que se pode visualizar no espaço (enquanto as catástrofes de ordem superior, descritas geometricamente por superfícies contidas num espaço de dimensão, pelo menos, 4, são visualizáveis apenas através das suas secções tridimensionais). Em [4], Woodcock e Davis utilizam modelos baseados, a maioria das vezes, na catástrofe de tipo cúspide para descrever não só aplicações bem conhecidas na física, mas também aplicações mais controversas (propostas por vários autores), tais como: o comportamento territorial dos animais, a agressão ou submissão de um cão que é provocado, algumas características comportamentais, tal como ser de temperamento solitário ou gregário, os comportamentos psicológicos de massa relacionados com a percepção do perigo, que podem aumentar ou diminuir a coesão de um exército, desencadear o pânico, dar início a motins, etc. Aplicações à política e à história têm tentado descrever o declínio e a queda do Império Romano, a ascensão de Hitler ao poder na Alemanha ou a "Primavera de Praga" (quando o livro saiu não tinha ainda caído o Muro de Berlim, caso contrário talvez houvesse também uma possível aplicação aos factos de 1989). Para além disso, a catástrofe de tipo cúspide foi usada para explicar eventos como a frequência cardíaca, as quebras das bolsas, os motins nas prisões, os confrontos entre grupos de adeptos exaltados nos estádios de futebol, a alternância de períodos de censura e períodos de permissividade em relação à difusão de pornografia, as alterações do ciclo vigília-sono e a análise de vários distúrbios psíquicos.

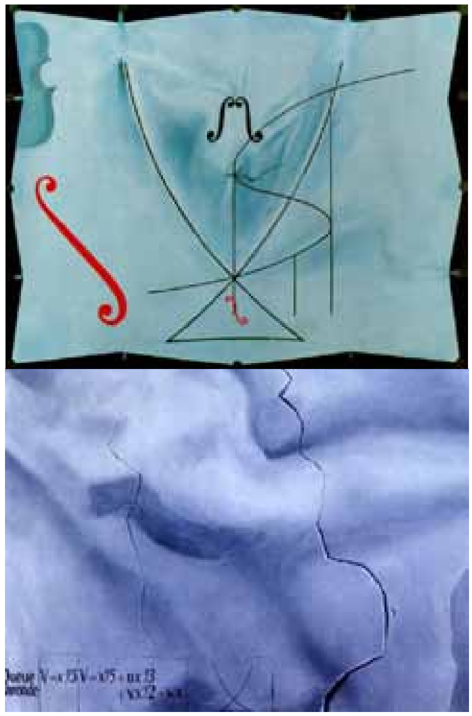
Um exemplo destas aplicações (atribuída à imaginação de Zeeman) é descrito por Arnol'd no seu livro, como se segue: uma personalidade criativa (por exemplo, um cientista) é caracterizada pelos parâmetros x = *sucesso*; $-u$ = *entusiasmo*; $-v$ = *competência técnica.*[3]

Observemos a figura 4 e a figura 5, e imaginemos que identificamos uma situação na qual se encontra a um determinado ponto da sua existência a pessoa que está a ser analisada. Se o entusiasmo $-u$ é pequeno (por exemplo, se u é positivo) estamos longe da zona da cúspide (estamos na zona amarela da figura 5). Neste caso não se verificará nada de inesperado. Se a competência técnica $-v$ aumentar, aumentará (lentamente) também o sucesso, no sentido em que o ponto

[3]Para ter uma descrição compatível com os gráfico das figuras 4 e 5, mudei os sinais de *u* e *v*, e portanto *u* muito negativo significa grande entusiasmo e *v* muito negativo significa grande competência.

da superfície crítica (figura 4) que representa a descrição da personalidade em análise mover-se-à de regiões mais baixas (em cima, à esquerda, na figura 4) para regiões mais altas (em cima, à direita, na figura 5) da superfície. Se porém o entusiasmo é alto, e, portanto, nos encontramos numa zona onde $u < 0$, ao crescer de $-v$ (isto é, aumentando a competência), poderemos atravessar a região azul. Neste caso, teremos uma mudança repentina, no sentido em que o ponto que representa a pessoa, originalmente em baixo à esquerda, na superfície da figura 4), no momento em que encontra a cúspide saltará imediatamente sobre o ponto que lhe fica por cima na parte mais alta da superfície. Como os pontos com x baixo dos quais partimos correspondem à pessoa entusiasta mas com pouca competência técnica e com pouco sucesso (no modelo, esta pessoa é chamada "maníaco"), o exemplo mostra como se pode saltar para o sucesso (os pontos com x alto sobre a dobra superior da superfície representam o sucesso de uma pessoa entusiasta e competente, denominada "génio" no exemplo em questão). Naturalmente, pode ocorrer também o percurso inverso: um entusiasta de sucesso não acompanhado pelo correspondente crescimento da competência poderá, de repente, cair na parte inferior da superfície, acabando na zona etiquetada como "maníaco". Exemplos como estes são altamente sugestivos, mas abrem o espaço para críticas, por vezes mesmo ferozes. Ninguém gosta de pensar que as manifestações da própria personalidade sejam descritíveis com só uma grandeza e dois parâmetros, como no modelo do cão que, se provocado, pode atacar ou recuar. Por outro lado, é preciso dizer que sobretudo Thom e Zeeman tinham um estilo convincente e também a audácia intelectual de propor pontos de vista novos baseados em modelos deste tipo. Arnol'd conclui mais à frente no seu livro que "felizmente, os belos resultados da teoria das singularidades não dependem do *dark misticism* da teoria das catástrofes."

E a propósito de misticismo, quero concluir com uma anedota curiosa. O grande pintor surrealista Salvador Dalí (1904-1989), nos últimos anos da sua vida (a partir de 1978, aproximadamente) ficou fascinado com a teoria das catástrofes. Conheceu pessoalmente René Thom e em 1983 quis dedicar-lhe um quadro baseado no mito de Europa e intitulado *El Rapto Topológico de Europa – Homenaje a René Thom*. O tema da pintura é depois retomado num pormenor do quadro *A Cauda da Andorinha* (*La Queue d' Aronde – Série des Catastrofes*). O desenho central deste último é tirado directamente de uma projecção tridimensional da catástrofe *cauda de andorinha* de Thom. É bem conhecido que Dalí era fascinado pelo conceito de quarta dimensão, que quis explorar nalgumas das suas obras anteriores. No quadro *A cauda da Andorinha* estão presentes também uma cúspide e um símbolo musical (associado à figura de um violoncelo) que porém é também o símbolo do integral. Conta-se que Dalí achava que a sala de espera da estação de comboios da cidade de Perpignan (capital da região dos Pirinéus Orientais, no sul de França), onde em 19 de Setembro de 1963 teve uma visão de êxtase cósmica, fosse o centro do universo. Vários anos depois, Dalí teve o seu único encontro com René Thom, que lhe confidenciou que naquele momento estava a estudar a teoria das placas e os movimentos da crosta terrestre. A uma pergunta do pintor catalão, parece que o matemático francês confirmou que alguns milhões de anos antes a Península Ibérica tinha rodado, tendo como fulcro o lugar onde hoje se encontra a estação de Perpignan. O artista pintou sucessivamente a sua homenagem a René Thom, repro-



O Rapto Topológico de Europa e *A Cauda de Andorinha*, segundo Salvador Dalí.

duzindo no canto inferior esquerdo da obra exactamente a expressão de potencial que descreve a catástrofe de tipo cúspide. O quadro é uma das últimas pinturas de Dalí sobre tela, e num primeiro momento alguns críticos consideraram-na um rabisco senil de uma pessoa que já sofria de alucinações. Todavia, uma crítica posterior reavaliou a obra e encontrou uma incrível semelhança entre as fracturas desenhadas por Dalí sobre a tela e alguns percursos rodoviários para Narbonne (a norte de Perpignan). Mas Dalí, de acordo com alguns testemunhos, traçou aqueles signos sem ter à sua frente um mapa rodoviário dessa zona. Delírios de um velho louco ou os últimos relâmpagos de um génio?

Indico abaixo algumas referências bibliográficas onde o leitor interessado poderá aprofundar alguns aspectos da teoria das catástrofes que neste trabalho foram apenas mencionados. Para além do livro fundamental [3], assinalo uma síntese de divulgação, muito acessível, de Woodcock e Davis [4]. Quero também lembrar os livros de Arnol'd [1] e [2], na minha opinião, muito belos embora um pouco difíceis, onde se pode encontrar uma visão diferente sobre o tema bem como vários exemplos de aplicações. Obviamente, há uma ampla literatura especializada que se pode encontrar nas bibliotecas universitárias. Na *web*, pode encontrar-se facilmente um artigo do matemático francês Ivar Ekeland em "La Récherche" de 1977, onde o autor apresenta uma exposição que me parece muito clara do trabalho de Thom. Por fim, o livro do Saunders [8] é um excelente ponto de partida para um leitor que tenha conhecimentos de matemática.

As notas históricas com as quais tentei enquadrar a obra de alguns protagonistas da teoria das catástrofes estão disponíveis na página de história da matemática *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/*, tal como algumas imagens que descarreguei livremente e utilizei neste artigo.

Por fim, os meus agradecimentos sinceros ao Alessandro Margheri, pelo convite de submeter um trabalho e pela sua tradução.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Arnol'd, V. I.: "Catastrophe theory". Second edition. Translated from the Russian by G. S. Wassermann. Based on a translation by R. K. Thomas. Springer-Verlag, Berlin, 1986. xiv+108 pp.

[2] Arnol'd, V. I., Huygens and Barrow, Newton and Hooke. "Pioneers in Mathematical Analysis and Catastrophe Theory from Evolvents to Quasicrystals". Translated from the Russian by Eric J. F. Primrose. Birkha¨user Verlag, Basel, 1990. 118 pp.

[3] Thom, R., "Structural Stability and Morphogenesis. An Outline of a General Theory of Models". Translated from the French by D. H. Fowler. With a foreword by C. H. Waddington. Second printing. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976. xxv+348 pp.

[4] Woodcock, A. and Davis, M., "Catastrophe Theory". E. P. Dutton, New York, 1978. viii+152 pp.

[5] Zeeman, E. C., "Catastrophe Theory. Selected Papers, 1972-1977". Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1977. x+675 pp.

[6] Gilmore, R., "Catastrophe Theory for Scientists and Engineers". (English summary) Reprint of the 1981 original. Dover Publications, Inc., New York, 1993.

[7] Poston, T. and Stewart, I., "Catastrophe Theory and Its Applications". With an appendix by D. R. Olsen, S. R. Carter and A. Rockwood. Reprint of the 1978 original. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1996. xviii+491 pp.

[8] Saunders, Peter T., "An Introduction to Catastrophe Theory". Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980. xii+144 pp.

SOBRE O AUTOR

Fabio Zanolin nasceu em Trieste. É professor catedrático de Análise Matemática. Desde 1987 é docente da Universidade de Udine. É autor de vários artigos de investigação sobre a teoria dos pontos fixos e sobre as aplicações dos métodos topológicos e da análise não linear às equações diferenciais. Há alguns anos tem-se ocupado também da divulgação da cultura matemática, quer através de artigos e conferências públicas, quer como colaborador do projecto "Laurée Scientifiche" do Ministério da Educação italiano, cujo objectivo é o de contrariar a diminuição das inscrições nas faculdades de ciências. Este artigo é uma versão ampliada de um trabalho publicado recentemente no número especial, entitulado "Crac", da revista *Multiverso*.

Fabio Chalub
Universidade Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

A TERRA É AZULEJO

Os desenhos das paredes das casas de banho são um pouco entediantes. O motivo é simples: queremos usar azulejos feitos de um, ou poucos, moldes, que se encaixem perfeitamente e preencham completamente a parede. Não são quaisquer figuras que satisfazem estes requisitos. Mas e se fôssemos seres quadridimensinais cercados por ladrilhos em paredes tridimensionais? Seria mais agradável o início do dia?

Considere que queremos usar azulejos obtidos de apenas um molde para cobrir uma parede. Suponha ainda que este azulejo é um polígono regular (aqueles cujos lados e ângulos são todos iguais). De quantas maneiras diferentes podemos decorar a casa de banho? (Suponha que o tamanho do azulejo é irrelevante; falaremos apenas da sua forma.) O número é surpreendentemente pequeno. Apenas três polígonos regulares são capazes de, convenientemente arrumados, preencher o plano: o triângulo, o quadrado e o hexágono. Estes são os chamados ladrilhamentos (ou por vezes pavimentação, ou ainda tesselações) regulares. Permitindo o uso de mais de um polígono regular, temos os 11 ladrilhamentos uniformes do plano (além dos três regulares, existem seis compostos de dois polígonos distintos e dois obtidos a partir de três polígonos regulares). Veja a figura 1.

A classificação acima foi obtida pelo famoso astrónomo alemão Johannes Kepler no seu livro *A Harmonia do Mundo*, publicado em 1619, onde tenta compreender o mundo físico a partir da elegância das figuras geométricas. Apesar de, num sentido estrito, os seus objetivos não terem sido atingidos, um dos importantes legados da obra é o que hoje conhecemos como Terceira Lei de Kepler, a relação entre o período orbital e a distância do planeta ao Sol.

Passados quase quatro séculos, finalmente o problema de ladrilhar o espaço tridimensional tem apresentado avanços notáveis.

Primeiro, uma definição: uma tesselação (num contexto não limitado ao plano esta expressão parece ser mais adequada) é uma partição do domínio em regiões fechadas (ou seja, que incluem a fronteira) cujo interior é disjunto. É uniforme se, quando vista de qualquer um dos seus vértices, parecer a mesma (tecnicamente, dizemos que o grupo de simetria da tesselação comuta com as translações de vértice a vértice).

Um ponto que deve ser percebido é que as tesselações do espaço são muito distintas das do plano. O único exemplo regular é dado pelo cubo, que ao ser colocado um ao lado do outro, produz uma tesselação do $\mathbb{R}^3$. Como existem apenas cinco poliedros regulares, os chamados sólidos platónicos, contra uma infinidade de polígonos regulares, isto não chega a ser uma surpresa.

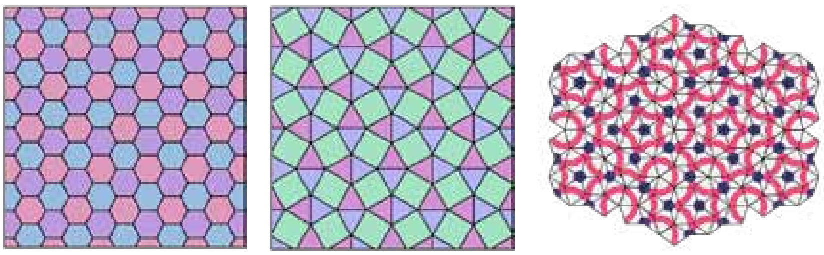


Figura 1: À esquerda, um ladrilhamento regular por hexagonos, no centro, um ladrilhamento uniforme não regular feito por quadrados e triângulos e à direita, um ladrilhamento aperiódico (dito ladrilhamento de Penrose). Não discutiremos aqui este último caso.

Existe também uma tesselação uniforme do espaço conhecida como *octet truss*, visionada inicialmente por Buckminster Fuller (o mesmo do fulereno, ou *buckyball*) e que consiste num octaedro e até dois tetraedros regulares distintos. A sua visualização é um tanto ou quanto difícil (figura 2), mas algumas animações disponíveis na Internet podem ajudar o leitor (veja, por exemplo, *http://edobobik.kilu.de/octettruss.html* ou *http://www.4dsolutions.net/ocn/graphics/fccanim.gif*). Esta tesselação associa-se naturalmente à estrutura cristalina do sal de cozinha (NaCl), conhecida como "cúbica de face centrada", ou "fcc" e também as tesselações chamadas de Delaunay, que são fundamentais em análise numérica. Somente isto mostra que ladrilhar o espaço não é só uma brincadeira que, aliás, requer muita capacidade de visualização.

Uma variante deste foi descrita inicialmente pelo grande matemático alemão Herman Minkowski ao concluir a forma ótima de empacotamento de octaedros – como colocar o maior número de octaedros de dado tamanho num certo espaço. Os vazios (ou seja, os espaços desocupados deixados entre octaedros), como se concluiu posteriormente, são tetraedros.

Até ao trabalho [1], acreditava-se que estas eram essencialmente as únicas tesselações possíveis do $\mathbb{R}^3$. O que John Conway (mais conhecido por ter criado o "Jogo da Vida"), Yang Jiao e Salvatore Torquato, todos da Universidade de Princeton, nos Estados Unidos, fizeram foi perceber que era possível deformar estas duas últimas tesselações continuamente de uma para a outra, usando sempre um único octaedro e um pequeno número de tetraedros. Num sentido bastante técnico, cada um dos elementos desta família não é equivalente a nenhum outro, fornecendo uma quantidade genuinamente infinita de tesselações do $\mathbb{R}^3$.

Como é comum acontecer em certos ramos mais abstratos da matemática, uma pergunta natural é como é que estes resultados se generalizam a outros espaços. Em dimensão mais alta, a resposta dada é pelos próprios autores: ela não se generaliza. Um raciocínio completamente diferente terá de ser feito para compreendermos as tesselações não triviais de $\mathbb{R}^4$ ou mesmo dimensões superiores. Em espaços não-euclideanos, como por exemplo a superfície de uma esfera, entender formas ótimas de tesselações (no entanto, num sentido mais restrito do que o discutido aqui) é importante para o desenho de algoritmos numéricos eficientes. Uma tesselação da superfície terreste (e que explica a brincadeira do título) está na figura 3.

REFERÊNCIAS

[1] J. H. Conway, Y. Jiao and S. Torquato, "New Family of Tilings of Three-Dimensional Euclidean Space by Teatrahedra and Octahedra", *Proc. Natl. Acad. Science* 2011 108 (27) 11009-11012.

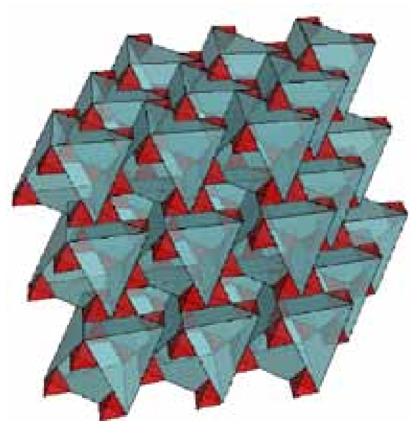


Figura 2: Um *octet truss* com peças semi-transparentes. Ainda está a ser difícil visualizar? Visite os sites referidos no texto. Figura gentilmente cedida pelos autores do artigo [1].

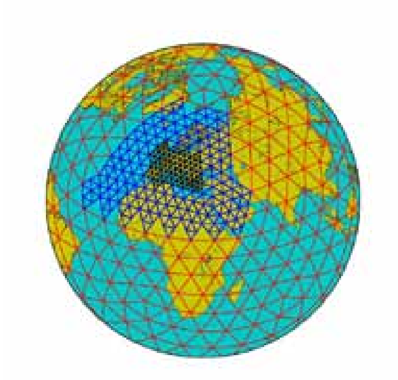


Figura 3: Uma tesselação numa esfera, usada em soluções numéricas de equações às derivadas parciais definidas em superfícies. Figura gentilmente cedida por Luca Bonaventura (Politécnico de Milão e ICON Project - *http://icon.enes.org*).

ERRATUM

Uma figura bidimensional pode ajudar a compreender uma realidade tridimensional, mas por vezes o tiro sai pela culatra. Como reparou o leitor Rui Albuquerque, da Universidade de Évora, a explicação na legenda da figura 2 desta coluna no último número da *Gazeta* está errada. Dados dois planos paralelos entre si que intersectem uma esfera, a área da superfície da esfera compreendida entre estes dois planos depende apenas da distância entre estes, e não da sua posição relativa à esfera. Desta forma, os dois raios de Sol destacados na figura iluminam a mesma área da Terra, ao contrário do que foi dito. Este resultado segue de um teorema de Arquimedes, como pode ser visto na página do colega eborense: *http://home.uevora.pt/~rpa/ArquiGD/node4.html*

A grande diferença, no entanto, é a quantidade de luz solar que ilumina esta mesma área, menor à medida que nos aproximamos dos pólos. Assim, a conclusão permanece: a temperatura média é maior no equador.

Este texto foi escrito ao abrigo das normas do Novo Acordo Ortográfico.

António Machiavelo
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

PONTOS, LINHAS E A ESTRUTURA DO UNIVERSO

É verdadeiramente impressionante a quantidade de matemática que pode ser gerada por simples considerações sobre despretensiosos arranjos de pontos e linhas. Para além disso, resultados muito humildes sobre estes objectos são excelentes exemplos de como, através da matemática, se acede à estrutura interna do Universo.

Informalmente, um *grafo* é simplesmente um arranjo de um certo número de pontos, em que alguns (possivelmente nenhum ou, num outro caso extremo, eventualmente todos) estão ligados entre si por linhas (ver figura 1). É irrelevante a localização dos pontos ou qual a forma dessas linhas, se são rectas ou curvas. O que é importante é saber se, dados dois quaisquer pontos, estes estão ou não ligados por uma linha. Um modo de formalizar este conceito é definir um grafo como um conjunto finito $\mathcal{P}$ juntamente com um subconjunto $\mathcal{L}$ do conjunto constituído pelos subconjuntos de $\mathcal{P}$ com exactamente dois elementos. O leitor poderá querer reler a última frase. O conjunto $\mathcal{P}$ correspondente aos pontos, também designados por vértices, e o conjunto $\mathcal{L}$ correspondente às linhas, a que também se chamam arestas.

Vou limitar-me aqui a descrever um resultado muito simples sobre grafos, mas que não deixa de ter algumas implicações curiosas. Para o fazer, é conveniente introduzir a nomenclatura seguinte. O *grau* (ou *valência*) de um ponto (ou vértice) é o número de linhas (ou arestas) que dele "irradiam", ou seja, o número de pontos a que ele está ligado. O resultado é então:

A soma dos graus de todos os pontos é igual ao dobro do número de linhas.

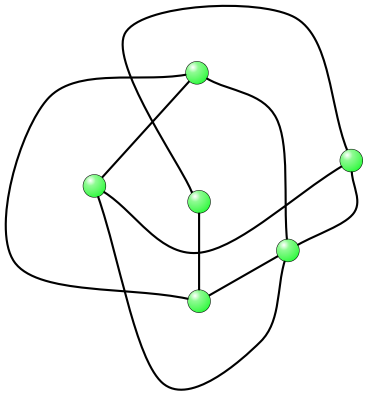


Figura 1: Um grafo com seis vértices e nove arestas

A razão é simples: ao somar os graus de todos os pontos, cada linha é somada duas vezes, dado que cada linha "irradia" de dois pontos, nomeadamente as suas duas extremidades. No exemplo da figura 1, a soma dos graus é 2+3+3+3+3+4 = 18 e o número de linhas é 9.

Suponhamos agora que o leitor encontra alguém que tenta descobrir uma maneira de ligar cinco coisas de tal modo que cada uma esteja conectada a três outras. É irrelevante o que tais coisas possam ser, assim como é irrelevante saber em que consistem exactamente essas ligações. Poderiam, por exemplo, ser filiais de uma empresa que se pretendiam ligar por cabos de fibra óptica de altíssima qualidade, ou então uma companhia aérea que planeava estabelecer ligações entre cinco capitais de forma a que houvesse voos de cada uma para três das outras. Ou poderiam ser muitas outras coisas.

Munido do resultado acima, o leitor poderá agora explicar à tal pessoa que, por mais que tente, não conseguirá nunca executar essa tarefa. Porquê? Simplesmente porque o que está a tentar fazer corresponde a um grafo em que a soma dos graus seria um número ímpar, 15, o que é impossível. Atente-se bem na imensidão de casos concretos a que o resultado acabado de descrever se aplica! Limitei-me a dar dois exemplos, mas o leitor facilmente poderá imaginar muitos mais. Além disso, escolhi os números cinco e três simplesmente a título de exemplo. Facilmente se precebe que o resultado implica que não existe nenhum grafo com um número ímpar de pontos tal que cada um esteja ligado a um número ímpar de outros pontos. E isto é ainda apenas um conjunto de casos especiais!

Há, pelo menos, duas importantes lições que se podem retirar deste simples exemplo. A primeira é a de que a pretensa dicotomia abstracto/concreto é, em grande parte, disparatada. Quanto mais uma coisa é abstracta, mais aplicações concretas tem! A segunda tem a ver com natureza da própria matemática. Repare-se que o resultado acima evidenciado é como que uma lei da Natureza, em certo sentido, mais profunda do que uma lei da física. Ele mostra que é simplesmente impossível estabelecer ligações entre um dado número de coisas de certas maneiras. É como que uma lei estrutural do Universo.

Para quem queira saber um pouco mais sobre teoria dos grafos, há excelentes livros disponíveis gratuitamente na Internet, nomeadamente o clássico *Graph Theory with Applications*, de John Bondy e Uppaluri Murty, disponível em *http://www.math.jussieu.fr/~jabondy/books/gtwa/gtwa.html* .

Um dos problemas mais famosos nesta área é o chamado "Problema do Caixeiro Viajante". Para uma descrição e algumas das suas inúmeras aplicações, ver: *http://www.tsp.gatech.edu* .

Para algumas relações curiosas entre teoria dos grafos e alguns *puzzles*, ver: *http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/graphs.shtml.*

Num artigo de Ivan Gutman na revista *The Teaching of Mathematics*, intitulado "The Chemical Formula C_nH_{2n+2} and Its Mathematical Background" e disponível em: *http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/21/tm1121.pdf,* o leitor poderá ver como o resultado muito simples acima descrito tem, pelo menos, uma consequência não trivial em química, fazendo parte da *raison d'être* da fórmula molecular geral dos alcanos!

Vale a pena detalhar um pouco algo que já foi acima referido. O resultado da teoria dos grafos atrás exposto é um exem-

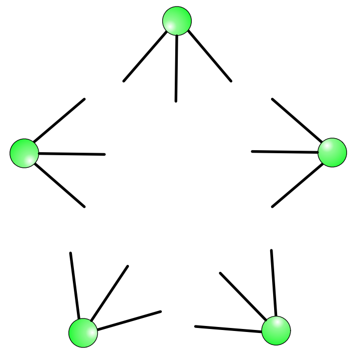
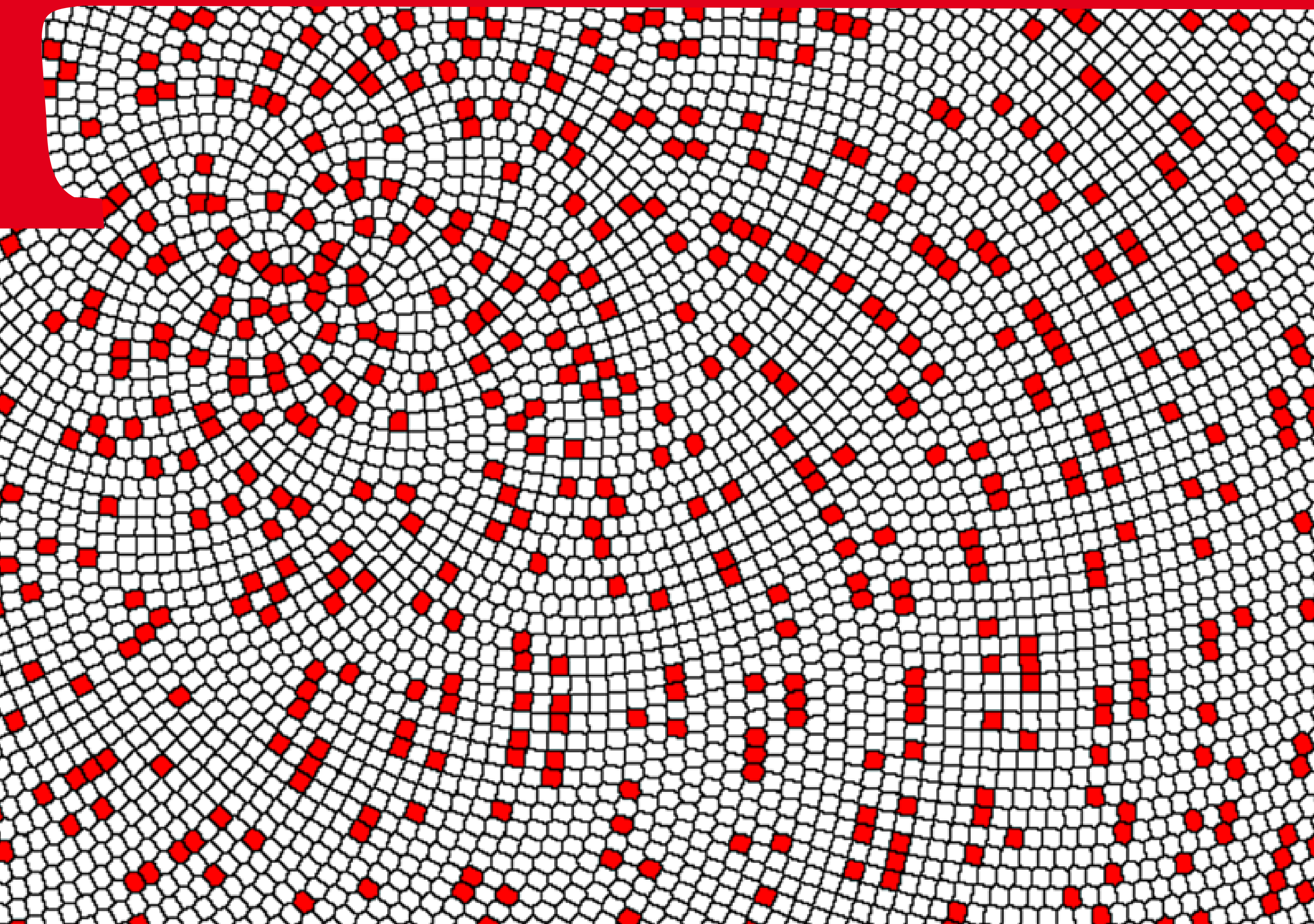


Figura 2: Uma tarefa impossível

plo do seguinte: os resultados, ou teoremas, matemáticos são leis estruturais que fazem parte da própria organização do Universo. São mais profundos que as leis físicas, no sentido em que são subjacentes a elas, uma vez que estas são descritas com base naqueles. Além disso, enquanto é possível imaginar, e mesmo "brincar", com universos em que as leis da física seriam outras, é de todo impossível conceber um universo no qual se possa ligar cinco coisas de modo a que cada uma esteja ligada a outras três. O facto de que a soma dos graus de um grafo é exactamente igual ao dobro do número de arestas é uma lei estrutural, que não só implica a não existência de certas configurações dos mais variados tipos, como delimita as possibilidades da existência de certas estruturas, como no caso dos alcanos. Faz assim parte de uma espécie de textura lógico-matemática do Universo. E é isto mesmo que eu diria ser aquilo em que consiste a matemática: o estudo de uma certa estrutura íntima do Universo, de uma espécie de textura profunda que tem algo a ver com a própria organização interna do Cosmos.

Mas, poder-se-á perguntar, como somos nós capazes de deduzir, aparentemene *à priori*, sem recurso a experiências, factos como os contidos nos teoremas matemáticos? Esta é uma pergunta que intrigou vários filósofos gregos, que deduziram que tal só era possível devido à pré-existência de algo um pouco abstracto e vago chamado alma, como detalhadamente explicado em várias obras de Platão. É Darwin que irá precisar em que consiste essa alma platónica que relembra coisas que "viu" antes de nascermos. Consiste exactamente em toda a herança evolutiva de que somos portadores e contém inúmeras experiências da nossa própria espécie, assim como de todas aquelas de que somos afortunados descendentes, desde os longínquos primórdios da vida neste nosso belo planeta. Como escreveu Darwin no fim de *A Origem das Espécies*, "há grandiosidade nesta visão da vida".



Primos em Tempo Polinomial

Manuel Silva e Pedro J. Freitas
mnas@fct.unl.pt, pedro@ptmat.fc.ul.pt

1. A IMPORTÂNCIA DOS PRIMOS

Não sabemos quem terá "inventado" os números primos, mas os gregos, já há cerca de 2300 anos, provaram por exemplo que os números primos nunca se esgotavam. Uma propriedade central destes números que faz deles objectos centrais da aritmética é o facto de todo o número natural se poder escrever de modo único como produto de primos, $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ por exemplo.

Uma característica dos números primos que sempre fascinou os matemáticos e que os torna difíceis de estudar é a aparente imprevisibilidade na forma como se distribuem entre os números naturais. Por vezes parece que foram lá colocados de modo aleatório.

Deixemos os gregos e saltemos para o século XX. Será que o estudo dos primos tem alguma utilidade prática? Para desespero do matemático inglês Hardy, que preferia ser especialista numa área sem qualquer aplicação, os números primos revelam-se fundamentais em criptografia (codificação de mensagens). A utilidade dos primos em criptografia está relacionada com o facto de ser muito fácil multiplicar dois números primos a e b usando simplesmente o algoritmo que aprendemos na escola primária. No entanto, se me derem $n = ab$, eu terei em geral bastante dificuldade em descobrir os factores iniciais a e b, essenciais para descodificar a mensagem e os quais me foram ocultados.

O essencial dos métodos de criptografia com uma chave pública é a existência de operações difíceis de inverter. Multiplicar dois números *versus* factorizar no caso descrito.

Existem diversas maneiras de se saber um número é primo. A complexidade de um algoritmo (um conceito que se tornou relevante com a existência de computadores) mede o número mínimo de operações elementares necessárias para completar uma dada tarefa em função do tamanho dos dados iniciais.

Um algoritmo simples, que todos aprendemos, para verificar se um número inteiro é primo ou composto é dividi-lo por todos os inteiros até $\sqrt{n}$. Infelizmente, em termos computacionais, este algoritmo não é eficiente.

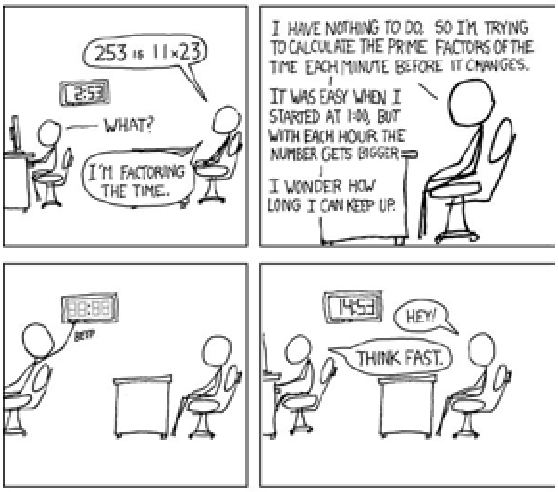
Considerando como dado inicial o número n, o seu tamanho é medido pelo seu número de dígitos 1, ou seja, $d = \log n$. Se precisarmos de dividir n por todos os números até $\sqrt{n} = 2^{\frac{d}{2}}$, o número de operações é exponencial em d, tamanho de n

"O problema de distinguir números primos de compostos, e de decompor números compostos nos seus fatores primos, é um dos mais importantes e úteis de toda a aritmética. (...) A dignidade da ciência parece pedir que nenhum esforço seja poupado na busca de uma solução para um problema tão famoso e elegante."

C. F. Gauss, *Disquisitionae Aritmeticae*, art. 329 (1798)

C. F. Gauss

medido como o número dos seus dígitos[1], o que essencialmente significa que, à medida que o número n cresce, a tarefa se torna rapidamente impossível de realizar, mesmo usando os computadores mais sofisticados.



Cartoon em *www.xkcd.com*

Assim, tentar factorizar um número para verificar se ele é ou não primo pode até funcionar se este tiver um factor pequeno, mas não é boa ideia em geral. Antes de continuar, notemos que encontrar uma factorização própria (ou provar que ela não existe) não é o mesmo que decidir se um número é primo. O que é que podemos fazer então?

Até 2002 existiam duas alternativas, ambas de algum modo insatisfatórias. Por um lado, eram conhecidos algoritmos determinísticos eficientes mas cuja justificação dependia de conjecturas em aberto. Por outro lado, existiam algoritmos probabilísticos eficientes, com uma probabilidade desprezável de o algoritmo certificar um número primo erradamente.

Em 2002, Agrawal, Kayal e Saxena, três cientistas da computação indianos (o segundo e o terceiro ainda alunos de licenciatura), descobriram, para espanto dos especialistas, um algoritmo que permite decidir se um número é primo em tempo polinomial.

O artigo onde este algoritmo é apresentado chama-se simplesmente "PRIMES is in P"[1], e afirma que o problema de determinar se um número é ou não primo, está em P, que é a classe dos problemas que se podem resolver computacionalmente em tempo polinomial.

Notamos aqui que, antes do artigo [1], o problema se encontrava em NP, a classe de problemas para os quais uma solução apresentada pode ser verificada em tempo polinomial. Por exemplo, se um número for composto, e nos derem uma factorização própria, é simples verificar se a factorização está certa, mas esta é difícil de encontrar. Se usamos o nosso cartão de crédito na Internet é porque ainda ningúem conseguiu encontrar um método simples para factorizar um número.

Um dos problemas matemáticos mais importantes, ainda em aberto, é justamente saber se para todo o problema na classe NP se pode encontrar uma solução algoritmica eficaz (i.e., em tempo polinomial), o famoso problema "P=NP". De um modo um pouco embaraçoso podemos dizer que não sabemos se existem problemas verdadeiramente difíceis, em termos computacionais! Esperemos que a resposta seja negativa, para podermos fazer compras na Internet e para continuarem a existir problemas matemáticos interessantes sem solução.

2. COMO RECONHECER UM PRIMO?

"Os matemáticos tentaram em vão descobrir uma ordem subjacente à sequência dos primos, mas há razões para acreditar que existem mistérios onde nunca conseguiremos penetrar."

L. Euler (1770)

Vamos agora descrever métodos que nos permitem decidir se um número inteiro n é primo sem ser necessário obter a sua factorização.

Aqui precisaremos da noção de congruência. Dois inteiros $a, b \in \mathbb{Z}$ são congruentes módulo n se $a - b$ for um múltiplo de n. Escrevemos $a \equiv b \mod n$, com um sinal parecido com o de igualdade porque de facto podemos trabalhar equações com congruências de forma similar às equações habituais, no que diz respeito a adições e multiplicações. Esta foi a razão pela qual Gauss o escolheu, no seu famoso *Disquisitiones Arithmeticae*, para representar a relação de congruência.

Se queremos então reconhecer eficazmente números primos, precisamos de encontrar uma propriedade no universo dos inteiros que seja verdadeira sempre que n é primo e só nesses casos. Além disso, a propriedade terá de ser fácil de testar (i.e., em tempo polinomial). Uma primeira tentativa seria a de tentar usar o pequeno teorema de Fermat: dado um primo n e um inteiro a, $a^n - a$ é sempre um múltiplo de n — isto é, se n é primo e a é um inteiro qualquer, $a^n \equiv a \mod n$. Veremos mais à frente uma demonstração simples deste resultado.

Assim, para garantir que um número n é composto basta encontrar um inteiro a (testemunha) tal que $a^n - a$ não seja múltiplo de n. Este método infelizmente não funciona sempre porque existem números que se "disfarçam" de primos, os denominados números de Carmichel: números compostos tais que para qualquer inteiro a, $a^n - a$ é sempre múltiplo de n. Estes números passariam em todos os testes relacionados com o pequeno teorema de Fermat mesmo não sendo primos.

Uma propriedade simples que, ao contrário do pequeno teorema de Fermat, caracteriza os primos de modo completo é dada pelo teorema de Wilson: um inteiro n é primo se e só $(n-1)!+1$ é um múltiplo de n — isto é, $(n-1)! \equiv -1 \mod n$. A dificuldade neste caso é não existir um modo simples de calcular $(n-1)!$[2].

Uma outra maneira de decidir se um número n é primo é olhar para a linha correspondente do Triângulo de Pascal e verificar se todos os elementos exceptuando os 1's das pontas são múltiplos de n. Podemos também escrever: n é primo se e só se $\binom{n}{k}$ é múltiplo de n para $1 \leq k \leq n-1$.

Este resultado não é muito difícil de demonstrar. Para verificar por exemplo que o coeficiente binomial $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ com $1 \leq k \leq n-1$ é múltiplo de n, basta observar que na fracção anterior o factor n aparece uma vez no denominador e nunca aparece no denominador porque n não tem factores próprios. O argumento para a implicação contrária é apenas um pouco mais envolvente, ficando ao cuidado do leitor dedicado. A dificuldade nesta caracterização consiste na necessidade de verificar $n-1$ coeficientes binomiais, o que é naturalmente pouco eficaz.

No entanto, esta caracterização tem uma formulação polinomial análoga que irá revelar-se crucial. Lembrando que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

se n for primo, temos $(x+y)^n = x^n + y^n + np(x,y)$, em que p é um polinómio, ou seja, $(x+y)^n \equiv x^n + y^n \mod n$, considerando agora congruências em polinómios. O artigo [4] chama a este resultado o *teorema binomial das crianças*.

Pode mesmo provar-se que n é primo se e só se $(x+1)^n \equiv x^n + 1 \mod n$, e a demonstração não é particularmente difícil.

Podemos apresentar nesta altura uma demonstração do pequeno teorema de Fermat, que afirma que para todo o inteiro a e todo o primo n, $a^n \equiv a \mod n$. A demonstração pode ser feita por indução: a propriedade é claramente válida para $a = 1$, e supondo que é válida para a, usamos o teorema binomial das crianças para escrever $(a+1)^n = a^n + 1^n \equiv a+1 \mod n$.

Usando o pequeno teorema de Fermat, vemos que se n é primo, então $(x+a)^n \equiv x^n + a \mod n$. Esta é uma das condições que aparecem no teorema, e que acabámos de provar ser necessária para n ser primo.

3. CARACTERIZAÇÃO DOS PRIMOS DE AGRAWAL, KAYAL E SAXENA

O resultado de Agrawal, Kayal e Saxena (AKS) baseia-se então numa caracterização engenhosa dos números primos, que permite decidir, em tempo polinomial, se um número é primo. Começamos por apresentar a caracterização, passando depois a esclarecer alguns conceitos.

Teorema *Seja $n \geq 2$ um inteiro, $r < n$ um inteiro positivo tal que n tem, módulo r, ordem maior do que $(\log n)^2$. Então n é primo se e só se*

- *n não é uma potência perfeita,*
- *n não tem nenhum factor primo menor ou igual a r e*
- *para cada inteiro a, $1 \leq a \leq \sqrt{r}\log n$, temos $(x+a)^n \equiv x^n + a \mod (n, x^r - 1)$.*

Esclarecemos agora alguns conceitos: a *ordem* de um inteiro $m \mod r$, para m e r coprimos, é o menor número k tal que $m^k \equiv 1 \mod r$. Na terceira condição, a notação $\mod (n, x^r - 1)$ indica congruência módulo n e módulo $x^r - 1$ simultaneamente. Encontra-se uma caracterização equivalente em [3], apresentada inicialmente por Dan Bernstein em [2].

Destas condições, já verificámos que algumas são necessárias para a primalidade de n. A demonstração completa da caracterização, embora curta, não é do âmbito deste artigo, e pode encontrar-se em [1], [4] e [3].

Não vamos igualmente demonstrar que o tempo computacional de implementação desta caracterização é polinomial

[1] Em questões computacionais é mais habitual usar a base 2 em vez da base 10 que costumamos usar na escrita de números.

[2] É talvez surpreendente que não se conheça uma forma simples de multiplicar os primeiros n naturais análoga à que conhecemos para os somar.

(mais uma vez, remetemos o leitor interessado para os artigos acima). Para dar uma ideia da simplicidade de alguns dos cálculos necessários, como o cálculo da potência de $(x+a)^n$, note-se que à medida que vamos fazendo multiplicações, como estamos a fazê-las no módulo $x^r - 1$, o grau dos polinómios que aparecem nunca é maior do que r. O resultado inicial de AKS afirma que o algoritmo termina ao fim de um tempo na ordem de $d^{7.5}$, em que $d = \log_2 n$ corresponde ao número de dígitos de n em base 2.

4. COMENTÁRIOS FINAIS

O resultado de AKS foi notável a vários níveis. Em primeiro lugar, pela sua simplicidade: o artigo inicial que deu origem a [1] tem nove páginas, e os especialistas a quem o artigo tinha sido enviado confirmaram em poucos dias que o argumento estava essencialmente correcto. Foi em 4 de Agosto de 2002, um domingo, que os autores enviaram a primeira versão do artigo a 15 especialistas. Nessa mesma noite receberam já algumas respostas de parabéns, na segunda-feira Carl Pomerance (um dos 15 especialistas) organizou um seminário improvisado para discutir o assunto e preveniu o *The New York Times*, que publicou na quinta-feira seguinte uma notícia sobre o resultado, com título "New Method Said to Solve Key Problem in Math". Na sexta-feira já estava publicada na internet uma versão abreviada da demonstração, que se reduzia a uma página (da qual [2] contém uma versão posterior). Outras contribuições foram dadas mais tarde, como por exemplo a de Henrik Lenstra e Carl Pomerance, que apresentaram em 2003 uma modificação do algoritmo que funcionava em tempo da ordem de d^6.

É muito invulgar que um problema tão antigo e importante seja resolvido de forma tão simples. O artigo [3] nota que é praticamente impossível explicar a um grande público, mesmo com alguma formação matemática, soluções completas de outros problemas antigos, como o último teorema de Fermat, ou o trabalho dos últimos laureados com a medalha Fields. No entanto, é notável que esta solução seja compreensível até para alunos de licenciatura.

Quase a terminar temos de confessar que o algoritmo aqui proposto por AKS, embora de complexidade polinomial e sob diversos aspectos, brilhantes, não foi usado na prática, pelo menos, até hoje. Na verdade, os algoritmos mais eficazes para determinar se um inteiro n é primo são os algoritmos probabilísticos referidos anteriormente. Embora exista a possibilidade destes algoritmos certificarem como primos números inteiros n erradamente, isto acontece com uma probabilidade tão pequena quanto se queira – inferior a 10^{-50} por exemplo –, mais facilmente alguém ganharia 10 vezes consecutivas a lotaria.

Finalmente resta dizer que desde 1997 existem algoritmos quânticos para factorizar números inteiros em tempo polinomial. Mas o leitor pode estar descansado e continuar a usar o seu cartão de crédito porque o algoritmo descoberto por Peter Shor [5] depende da construção de uma nova geração, ainda inexistente, de computadores que procuram tirar partido de fenómenos quânticos.

REFERÊNCIAS

[1] M Agrawal, N Kayal, N Saxena, "PRIMES is in P", *Annals of Mathematics*, 160 (2004), 781-793.

[2] Dan Bernstein, "Proving Primality after Agrawal-Kayal--Saxena", version of January 25, 2003, *http://cr.yp.to/papers.html#aks*

[3] Folkmar Bornemann, "PRIMES Is in P: A Breakthrough for 'Everyman'", *Notices of the AMS*, Maio de 2003.

[4] Andrew Granville, "It is Easy to Determine Whether a Given Integer is Prime", *Bulletin of the AMS* 42 (2005), 3-38 (2008 Chauvenet Prize).

[5] Peter Shor, "Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer", SIAM J. Comput. 26 (5), 1484–1509.

SOBRE OS AUTORES

Manuel Silva obteve em 2008 o grau de Doutor em Matemática pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Faz investigação em combinatória e teoria aditiva de números. Actualmente é professor no Departamento de Matemática da FCT da Universidade Nova de Lisboa e membro do CMA - Centro de Matemática e Aplicações

Pedro J. Freitas obteve o grau de Doutor (PhD) em Matemática pela Universidade do Illinois em Chicago. Actualmente é professor no Departamento de Matemática da Universidade de Lisboa. Desenvolve investigação nas áreas de análise matricial e teoria da representação.

Bernardo Mota
Universidade de Lisboa
bernardomota@campus.ul.pt

APOLÓNIO E OS ***ELEMENTOS*** DE **EUCLIDES - 1.ª PARTE**

Proclo atribui a Apolónio de Perga alguns argumentos matemáticos relacionáveis com o conteúdo do livro primeiro dos *Elementos*. Em baixo apresentam-se algumas das suas contribuições, cujo conteúdo tem surpreendido os historiadores da matemática antiga e é pouco conhecido do público em geral.

O matemático Apolónio de Perga, famoso pelas suas *Cónicas*, dedicou parte do seu tempo a tentar clarificar alguns dos princípios e proposições de geometria elementar incluídos no primeiro livro dos *Elementos* de Euclides. A sua contribuição inclui uma reformulação de algumas definições (linha, ângulo, plano), uma tentativa de demonstração da primeira noção comum (coisas iguais a uma terceira são iguais entre si) e diversas provas alternativas correspondentes a *Elementos* 1.10 (bissecção de uma linha finita), 1.11 (erguer uma perpendicular a uma linha a partir de um ponto nesta) e 1.23 (construção de um ângulo igual a outro ângulo numa dada recta). Vale a pena debruçarmo-nos um pouco sobre as propostas deste matemático porque elas colocam em evidência as premissas que assumimos ao estudar a matemática antiga.

A nossa principal (e única!) fonte sobre esta faceta do trabalho de Apolónio é o *Comentário ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*, da autoria de Proclo (séc. V). Ao ler o texto, ficamos convencidos de que algumas das provas de Apolónio são citadas textualmente. Veja-se, por exemplo, a forma como é apresentada a solução para bissectar uma dada recta (= *Elementos* 1.10), traduzida em baixo (ver figura 1):

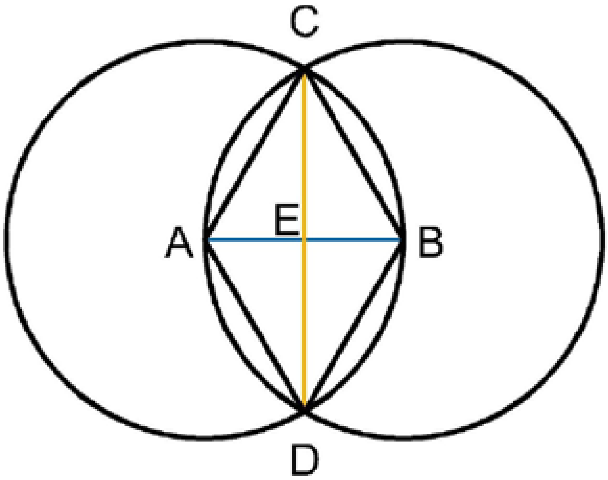


Figura 1: *Elementos* 1.10 na versão de Apolónio.

[Enunciado] Apolónio de Perga bissecta uma dada linha recta [= *Elementos* 1 defs. 3-4] da seguinte maneira. **[Exposição]** "Seja *AB*", diz ele, "a linha recta finita **[Especificação]** que se deseja bissectar". **[Construção]** "Seja descrito um círculo com centro em *A* e distância *AB* [= *Elementos* 1 post. 3]; novamente, seja descrito um outro círculo com centro em *B* e distância *BA* [= *Elementos* 1 post. 3]; e unam-se os pontos de intersecção dos círculos por meio da linha *CD* [= *Elementos* 1 post. 1]. Esta linha bissecta a linha *AB*. Sejam traçadas as linhas *CA* e *CB* [= *Elementos* 1 post. 1]; **[Prova]** então, cada uma delas é igual a *AB; DA* e *DB* são iguais pela mesma razão [= *Elementos* 1 def. 15], e *CD* é uma base comum; portanto, o ângulo *ACD* é igual ao ângulo *BCD* [= *Elementos* 1.8], de forma que *AB* é bissectada de acordo com a quarta" [= *Elementos* 1.4]. **[Conclusão]** Esta é a forma da prova deste problema que é dada por Apolónio.

Proclo cita a versão de Apolónio de *Elementos* 1.11 (traçar uma perpendicular a uma recta a partir de um ponto nesta) de maneira semelhante (veja-se a figura 2):

[Enunciado] Apolónio traça a linha em ângulos rectos da seguinte maneira: [aqui subentende-se a **Exposição:** "Seja *AB* a linha dada e *C* um dos seus pontos"; a ela, segue-se a **[Construção]** "Tome-se um ponto *D* em *AC*, corte-se de *CB* um comprimento *CE* igual a *CD* [= *Elementos* 1.3]; então, com centro em *D* e distância *DE*, descreva-se um círculo [= *Elementos* 1, post. 3], e novamente, seja descrito outro círculo com centro em *E* e distância *DE* [= *Elementos* 1, post. 3]; trace-se uma linha de *F* a *C* [= *Elementos* 1, post. 1]. Afirmo que esta é a linha em ângulos rectos. Com efeito, se traçarmos as linhas *FD* e *FE* [= *Elementos* 1, post. 1], **[Demonstração]** elas serão iguais [= *Elementos* 1 def. 15 e noção comum 1]; ora, *CD* e *CE* também são iguais, e *FC* é comum, de forma que os ângulos em *C* são iguais, pela oitava [= *Elementos* 1.8]. Portanto, são ângulos rectos [= *Elementos* 1 def. 10].

As provas de Apolónio mantêm, de acordo com Proclo, a estrutura rígida das demonstrações euclidianas; os termos técnicos que introduzem cada parte estão omissos, como seria de esperar, mas estão assinalados em cima a negrito ("enunciado", etc.), para que o leitor possa identificar cada etapa da prova. A transcrição de Proclo também é visivelmente esquemática porque é assumido (tanto por Proclo como o seria por um leitor moderno) que Apolónio alude a princípios e proposições dos *Elementos* com os quais o leitor está familiarizado (que também assinalei no trecho acima citado).

A contribuição de Apolónio, tal como descrita por Proclo, é surpreendente a diversos níveis. A primeira nota digna de registo é a de que Apolónio está a tratar de construções e provas muitíssimo elementares, que hoje qualquer criança aprende a fazer logo a seguir à escola primária. A segunda é a de que Apolónio está, sem qualquer dúvida, a ampliar uma tradição muito antiga, visto que os grupos de proposições onde surge o seu nome incluem também, de forma sistemática, o nome de Enópides de Quios. A terceira nota é a de que, se tivermos em atenção o texto dos *Elementos* que possuímos, as alternativas de Apolónio não trazem realmente nada de novo; antes constituem uma paráfrase pouco interessante de Euclides. Com efeito, ambas as provas citadas acima concretizam a construção de um triângulo equilátero de acordo com *Elementos* 1.1, ao passo que o texto euclidiano se limita a remeter para essa proposição; Apolónio repete, portanto, o que já tinha sido

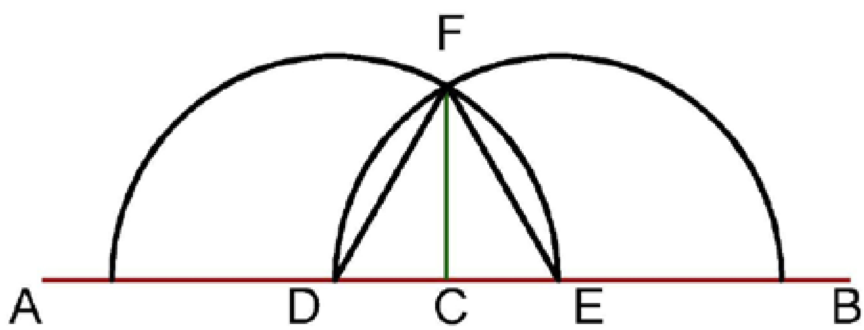


Figura 2: *Elementos* 1.11 na versão de Apolónio

feito antes, além de falhar a indicação de que se construiu um triângulo equilátero. A primeira das provas citadas realiza ainda, além da construção do triângulo equilátero, a bissecção de um ângulo, operação que, nos *Elementos*, também merece tratamento anterior (em *Elementos* 1.9, que constitui, precisamente, um lema para 1.10*)*. Em suma, nos *Elementos* há uma série de operações que merecem tratamento isolado para evitar a sua constante repetição em proposições posteriores e Apolónio parece ignorar esta estratégia.

Proclo não consegue evitar um julgamento negativo sobre as provas de Apolónio. A propósito da bissecção de uma recta, afirma: "Também ela [a prova de Apolónio] parte de um triângulo considerado equilátero, mas em vez de proceder a partir da bissecção do ângulo em *C*, prova que a linha é bissectada por causa da igualdade das bases. A prova dada pelo autor dos *Elementos* é, por conseguinte, muito melhor, porque é mais simples e procede dos princípios." De seguida, afirma, a propósito da versão Apoloniana de 1.11: "Mais uma vez se vê que esta prova, que requer que se desenhem os círculos, é mais complexa do que aquela dada pelo autor dos *Elementos*, uma vez que era possível construir imediatamente um triângulo equilátero em *DE* e provar o teorema." Hoje em dia, quando os estudiosos de matemática antiga se dispõem a apreciar as soluções de Apolónio, acabam limitados pela visão de Proclo. Considera-se que a contribuição de Apolónio para a geometria elementar é trivial e que nenhuma das suas alternativas foi incorporada nos *Elementos*. Considera-se ainda que as suas propostas são inferiores e menos científicas do que as euclidianas porque são menos económicas e porque interferem com a ordem lógica preferida por Euclides. Assim, por exemplo, se Proclo já tinha assinalado, como vimos, que a prova da bissecção de uma dada linha recta não parece tomar como pedra angular a bissecção de um ângulo (= *Elementos* 1.9*)*; hoje em dia costuma assinalar-se que Apolónio assume teoremas provados no livro terceiro dos *Elementos* na demonstração de proposições bem mais elementares do livro primeiro, como é o caso da sua prova alternativa a 1.23.

Esta interpretação difundiu-se de tal maneira que é difícil contradizê-la. No entanto, ela revela aquilo que podemos considerar uma limitação fundamental na nossa maneira de explicar o desenvolvimento da matemática antiga: é que somos fortemente influenciados por uma imagem construída pelos autores da Antiguidade tardia cuja correcção não podemos confirmar. Uma questão, por exemplo, que todos parecem ter ignorado é a seguinte: como entender que um matemático tão reputado como Apolónio apresente notas tão destituídas de valor em relação às propostas euclidianas? Uma tentativa de resposta fica para o próximo número da *Gazeta*, para que o leitor possa ter tempo para pensar no assunto. À laia de cenas dos próximos capítulos, arrisco dizer que ela pode implicar desconstruir e voltar a construir o que sabemos da matemática antiga.

Sangaku Desafios Matemáticos nos Templos do Japão

Margarida Matias Pinto
mmatiaspinto@gmail.com

Sob os telhados de alguns templos budistas e xintoístas do Japão podem ainda ver-se exemplares de *sangaku*, tábuas de madeira pintadas com coloridos desenhos geométricos. Neles encontramos problemas de geometria euclidiana nos quais círculos, elipses, quadrados, cones, cilindros... se intersectam. Alguns são suficientemente simples para poderem ser resolvidos por alunos dos ensinos básico e secundário e pouco mais exigem do que o teorema de Pitágoras e casos de semelhança de triângulos, outros requerem ferramentas avançadas como integrais, séries ou transformações afins. Os *sangaku* floresceram no período Edo, nos séculos XVII a XIX, altura em que o Japão auto-impôs o isolamento em relação ao Ocidente. Eram colocados nos templos tanto por cidadãos comuns que manifestavam aos deuses a sua gratidão pela ajuda concedida na resolução de um problema particularmente difícil da vida real, como por matemáticos consagrados que pretendiam lançar um desafio aos seus pares. Também os jovens aspirantes a matemáticos os afixavam, exprimindo o seu talento, desejosos de chamar a atenção dos mestres e de, assim, conseguirem ser convidados a ingressar numa escola para prosseguirem os seus estudos. Serviam ainda como difusor de conhecimentos e veículo de publicidade das escolas que enviavam representantes às zonas remotas do país e que, ao afixar uma tábua num templo, anunciavam aos habitantes a chegada de um mestre.

No texto que se segue apresentamos alguns exemplos de *sangaku* que envolvem essencialmente aplicações do teorema de Pitágoras, semelhanças de triângulos e resolução de equações de 1.º e 2.º graus e que, por isso, podem ser abordados por alunos do 3.º ciclo do ensino básico.

É importante dizer que a falta de rigor nos enunciados dos problemas que se seguem é deliberada e justifica-se por serem os *sangaku* essencialmente visuais e, em geral, pouco mais incluírem do que o desenho, o desafio, a solução e o nome do autor. Assim, embora nada seja afirmado, assume-se que as figuras respeitam aquilo que os olhos nos dizem, que os triângulos que aparentam ser equiláteros, isósceles ou rectângulos o são realmente, que dois círculos que se tocam são tangentes. . . Apesar da decisão que tomámos, consideramos que, quando se trabalhar com jovens estudantes, têm de constar no enunciado todos os dados completos.

É também assumido que o leitor tem conhecimentos básicos de geometria e, por isso, se omitem algumas justificações que serão necessárias para alunos dos ensinos básico e secundário.

Para que servem as tábuas pintadas com desafios geométricos colocadas em templos do Japão? Quem as colocou lá, quando e com que fim?

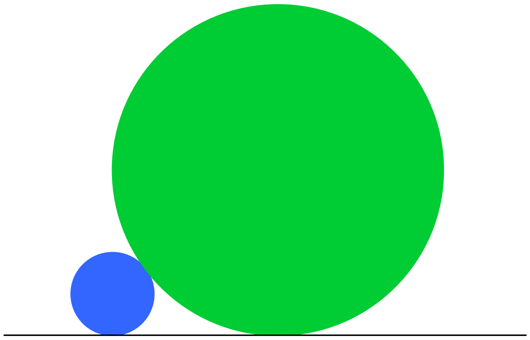


Figura 1

PROBLEMA 1

Relacionar a distância dos pontos de tangência da recta com os círculos e os seus raios.

Resolução

Sejam A e B os pontos de tangência da recta com os círculos, C_1 e r_1 o centro e o raio do círculo maior e C_2 e r_2 o centro e o raio do círculo menor (figura 2).

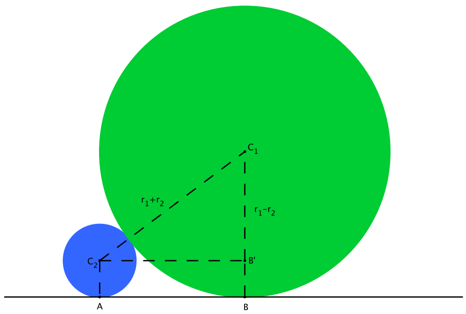


Figura 2

Tracemos o segmento que une os centros dos dois círculos e seja B' o pé da perpendicular baixada de C_1 para a paralela a AB que passa por C_2. (Deixa-se ao cuidado do leitor concluir que o ponto de tangência dos dois círculos pertence a C_1C_2.)

Consideremos o triângulo, rectângulo, $[C_1C_2B']$, cujos lados medem (r_1+r_2), (r_1-r_2) e $\overline{AB}$. Por aplicação do teorema de Pitágoras obtemos:

$$(r_1+r_2)^2 = \overline{AB}^2 + (r_1-r_2)^2$$

donde

$$r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = \overline{AB}^2 + r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2$$

ou seja

$$\overline{AB}^2 = 4r_1r_2.$$

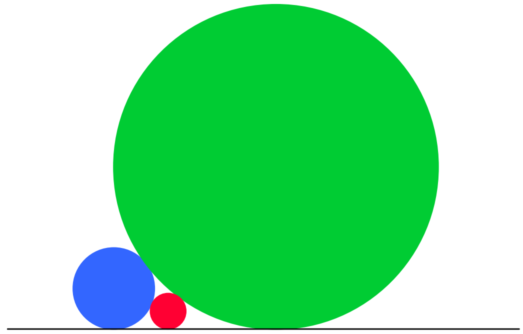


Figura 3

PROBLEMA 2

Relacionar os raios dos três círculos.

Resolução

Sejam A, B e C os pontos de tangência da recta com os círculos de raios r_1, r_2 e r_3 (figura 4).

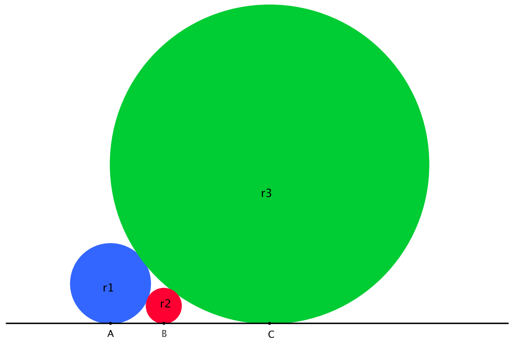


Figura 4

Aplicando o resultado do problema 1 temos:

$$\overline{AB}^2 = 4r_1r_2,\ \overline{AC}^2 = 4r_1r_3 \text{ e } \overline{BC}^2 = 4r_2r_3$$

ou:

$$\overline{AB} = 2\sqrt{r_1r_2},\ \overline{AC} = 2\sqrt{r_1r_3} \text{ e } \overline{BC} = 2\sqrt{r_2r_3}.$$

Como

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

então

$$2\sqrt{r_1r_3} = 2\sqrt{r_1r_2} + 2\sqrt{r_2r_3}$$

e, divididindo por $2\sqrt{r_1r_2r_3}$:

$$\frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}.$$

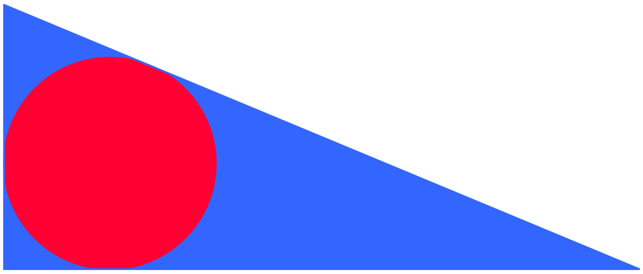


Figura 5

PROBLEMA 3

Exprimir o raio do círculo em função dos lados do triângulo.

Resolução

Sejam x, y e z os lados do triângulo, r o raio do círculo e M, N e P os pontos de tangência do círculo com os lados do triângulo, conforme a figura 6. Deixamos ao cuidado do leitor justificar que $\overline{AN} = \overline{AM}$ e $\overline{BN} = \overline{BP}$.

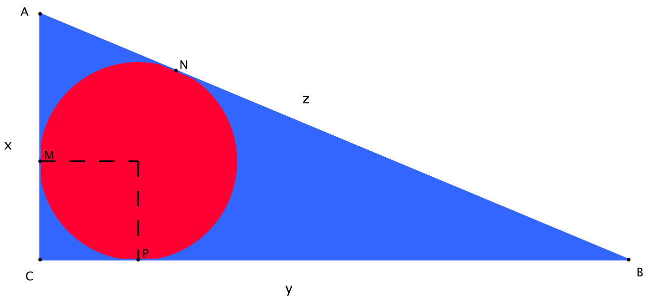


Figura 6

Seja $\overline{AN} = \overline{AM} = a$ e $\overline{BN} = \overline{BP} = b$. Podemos, assim, escrever os comprimentos dos lados do triângulo como $x = a + r$, $y = b + r$ e $z = a + b$. Se calcularmos os valores de $a = x - r$ e $b = y - r$ nas duas primeiras condições e substituirmos na terceira, temos, sucessivamente:

$$z = a + b = x + y - 2r$$

e a expressão que relaciona o raio do círculo com os lados do triângulo é:

$$r = \frac{x + y - z}{2}.$$

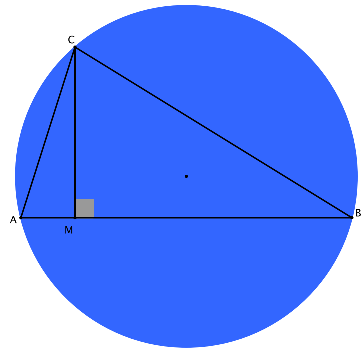


Figura 7

PROBLEMA 4

Calcular o raio do círculo a partir de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CM}$.

Resolução

Comecemos por traçar $[CE]$, diâmetro de extremos C e E e o triângulo $[BCE]$ (figura 8). Os triângulos $[ACM]$ e $[BCE]$ são semelhantes pois:

– $C\hat{A}B = C\hat{E}B$ (ângulos inscritos no mesmo arco)

– $A\hat{M}C = C\hat{B}E = 90^{\circ}$

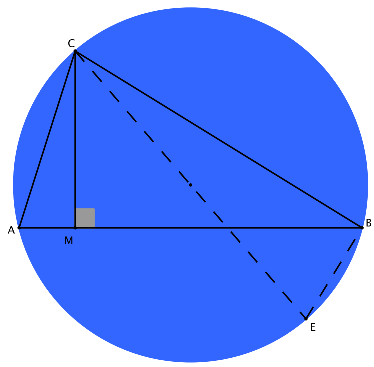


Figura 8

Da semelhança dos dois triângulos concluímos que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$$

ou seja

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CM}} = \frac{2r}{\overline{AC}}$$

donde

$$r = \frac{\overline{BC} \times \overline{AC}}{2\overline{CM}}.$$

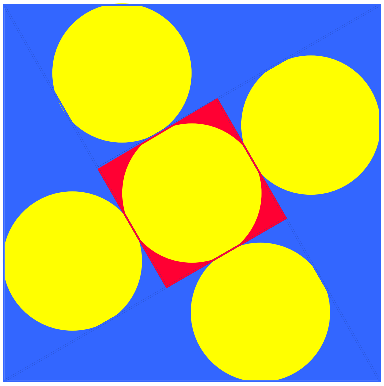


Figura 9

PROBLEMA 5

Relacionar o lado do quadrado com o raio dos círculos inscritos.

Resolução

Chamemos r ao raio do círculo e a, b e c às medidas dos lados do triângulo $[ABC]$, ordenadas por ordem crescente (figura 10). O problema 4 garante-nos que o raio da circunferência inscrita no triângulo é $r = \frac{a+b-c}{2}$.

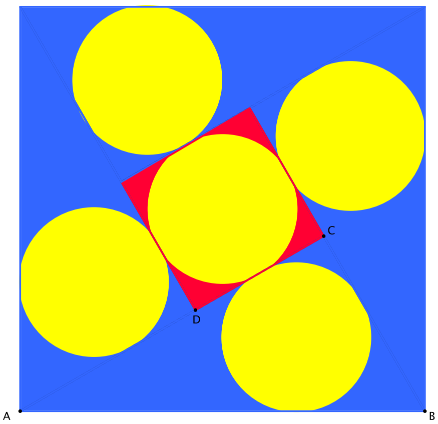


Figura 10

Por outro lado, como $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$, temos $a + 2r = b$, donde $r = \frac{b-a}{2}$.

Da conjunção dos dois valores obtidos para r concluímos que $\frac{a+b-c}{2} = \frac{b-a}{2}$, ou seja, que $c = 2a$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $[ABC]$, temos $c^2 = a^2 + b^2$ e, substituíndo c pelo valor atrás encontrado, obtemos a equação $4a^2 = a^2 + b^2$ cuja solução positiva é $b = \sqrt{3}a$.

Regressando a $r = \frac{b-a}{2}$ e efectuando sucessivamente as substituições $b = \sqrt{3}a$ e $a = \frac{c}{2}$, temos:

$$r = \frac{\sqrt{3}a - a}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a = \frac{\sqrt{3}-1}{4}c.$$

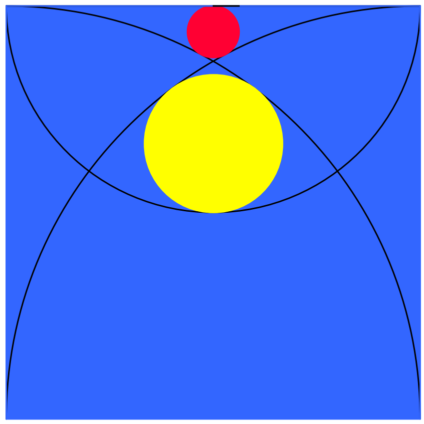


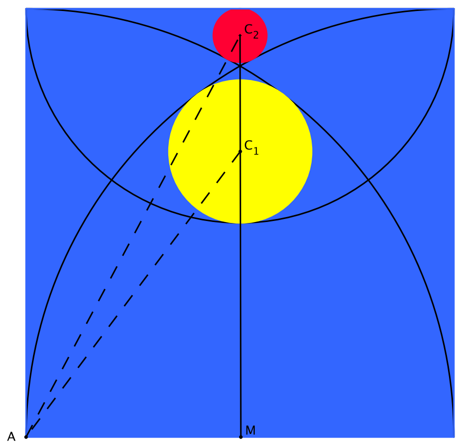
Figura 11

PROBLEMA 6

Escrever os raios dos círculos como função do lado do quadrado.

Resolução

Sejam a, r_1 e r_2 respectivamente as medidas do lado do quadrado e dos raios dos círculos de centros C_1 e C_2 e tracemos $[C_2M]$, segmento que passa por C_1 e intersecta o lado do quadrado no seu ponto médio M (justificação deixada ao cuidado do leitor). Tracemos também os segmentos $[AC_1]$ e $[AC_2]$.



O triângulo $[AMC_1]$ é rectângulo de lados $\overline{AM} = \frac{a}{2}$, $\overline{C_1M} = \frac{a}{2} + r_1$ e $\overline{AC_1} = a - r_1$. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{AC_1}^2 = \overline{C_1M}^2 + \overline{AM}^2$$

ou

$$(a - r_1)^2 = \left(\frac{a}{2} - r_1\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Resolvendo em ordem a r_1, obtemos a solução:

$$r_1 = \frac{a}{6}.$$

Consideremos agora o triângulo rectângulo $[AC_2M]$ de lados $\overline{AM} = \frac{a}{2}$, $\overline{AC_2} = a + r_2$ e $\overline{C_2M} = a - r_2$. Aplicando o teorema de Pitágoras, concluímos que:

$$(a + r_2)^2 = (a - r_2)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

donde

$$r_2 = \frac{a}{16}.$$

Resumindo: os raios das circunferências maior e menor podem ser escritos em função do lado do quadrado respectivamente como:

$$r_1 = \frac{a}{6} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{a}{16}$$

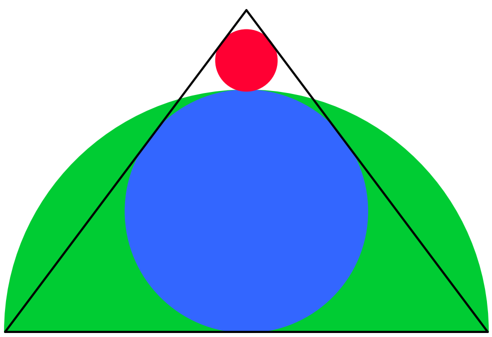


Figura 13

PROBLEMA 7

Relacionar os raios dos dois círculos com o do semicírculo.

Resolução

Sejam $h = \overline{CM}$ a altura do triângulo $[ABC]$, r o raio do semicírculo, s o raio do círculo de centro E, F e G os pontos de tangência de cada um dos círculos com AC. Tracemos os raios $[EF]$ e $[DG]$ (figura 14).

É imediato concluir que o círculo tem raio$= \frac{r}{2}$.

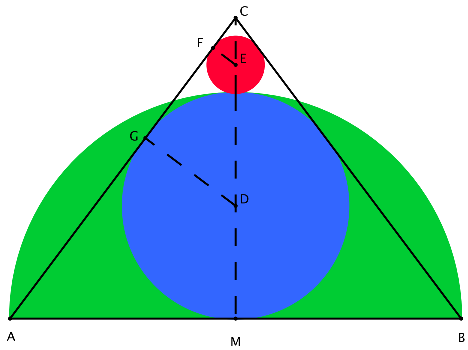


Figura 14

No triângulo $[ACM]$, rectângulo, de catetos $\overline{AM} = \frac{r}{2}$ e $\overline{CM} = h$, a hipotenusa mede $\overline{AC} = \sqrt{h^2 + r^2}$. No triângulo $[CDG]$, rectângulo, temos $\overline{CD} = h - \frac{r}{2}$ e $\overline{DG} = \frac{r}{2}$. Como estes dois triângulos são semelhantes pois têm os ângulos iguais, podemos afirmar que:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{AM}}$$

ou seja

$$\frac{h - \frac{r}{2}}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{\frac{r}{2}}{r}$$

e, desenvolvendo e simplificando, chegamos à equação: $3r^2h^2 - 4r^3h = 0$ que admite como solução positiva:

$$h = \frac{4}{3}r.$$

Efectuando a substituição $h = \frac{4}{3}r$ em $\overline{AC} = \sqrt{h^2 + r^2}$, obtemos $\overline{AC} = \frac{5}{3}r$.

Consideremos agora o triângulo $[CEF]$ em que $\overline{EF} = s$ e $\overline{CE} = h - r - s = \frac{4}{3}r - r - s = \frac{1}{3}r$. Os seus ângulos são iguais aos do triângulo $[ACM]$, pelo que, da semelhança dos dois triângulos, podemos concluir que:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AM}}$$

donde

$$\frac{\frac{1}{3}r - s}{\frac{5}{3}r} = \frac{s}{r}$$

e, resolvendo em ordem a s, obtemos sucessivamente:

$$\frac{1}{3}r - s = \frac{5}{3}s$$

$$s = \frac{1}{8}.$$

Em resumo, os raios dos círculos de centros D e E expressos em função do raio do semicírculo são, respectivamente, $\frac{r}{2}$ e $\frac{1}{8}r$.

Terminamos com o enunciado de um *sangaku* simples cuja resolução deixamos a cargo do leitor.

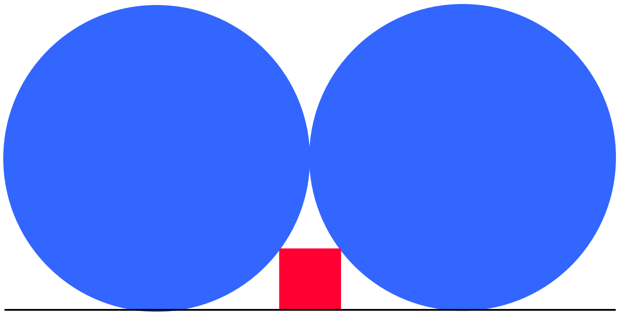


Figura 15

PROBLEMA 8

Escrever o lado do quadrado em função do raio dos círculos (figura 15).

Embora tenha sido referido no início, não é demais realçar que a aqui intencional falta de dados nos enunciados dos problemas não pode existir em contexto de aprendizagem e que, pelo menos nesse caso, os enunciados devem ser reescritos de

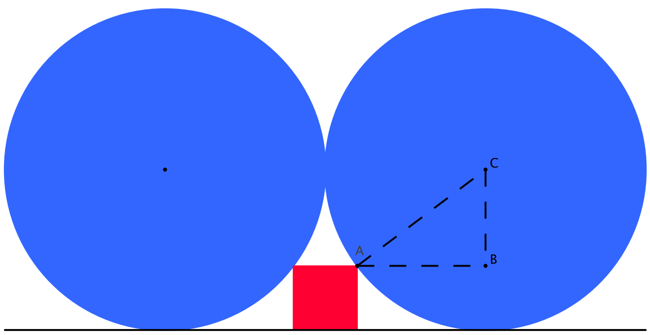


Figura 16

modo a conter todos os pressupostos. Por exemplo, ao texto do problema 4 deve acrescentar-se que o triângulo é rectângulo e que o círculo é tangente a cada um dos seus três lados.

Além dos livros citados na bibliografia, o leitor interessado encontra na *web* diversos problemas bem como fotografias de *sangaku*. Uma palavra especial para o livro de Fukagawa e Rothman que, além do elevado número de problemas, preenche boa parte das suas páginas com uma viagem fascinante à história da matemática no Japão.

BIBLIOGRAFIA

(1) Capitán, Francisco Javier, *Problemas* San Gaku, Córdoba, 2003.

(2) Fukagawa, Hidetoshi, e Rothman, Tony, *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton, New Jersey, 2008.

(3) Huvent, Guéry, Sangaku, *Le Mystère des Énigmes Géométriques Japonaises*, Paris, 2008.

SOBRE A AUTORA

Margarida Matias Pinto é Mestre em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Foi professora do ensino secundário e assistente do departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, tendo também leccionado cadeiras do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Nos últimos anos trabalhou na Sociedade Portuguesa de Matemática onde desempenhou, entre outras, actividades de coordenação das Olimpíadas Portuguesas de Matemática.

ISABEL S. LABOURIAU
Universidade do Porto
islabour@fc.up.pt

ISABEL LABOURIAU CONVERSA COM

SARA SANTOS

Esta é uma tentativa de compartilhar com os leitores da *Gazeta de Matemática* o prazer da conversa com **Sara Santos** sobre o seu trabalho e os seus projetos. Espero ter conseguido capturar o seu entusiasmo contagiante.

APRESENTAÇÃO

SARA ganhou o prémio *Seed of Science* 2011 atribuído pelo jornal *Ciência Hoje*, pelo seu trabalho de animação de rua para divulgação da matemática. O grupo de animação de rua, que por falta de melhor tradução batizei de "Saltimbancos da Matemática", não é a sua atividade principal, como vão ver pela conversa. Sara trabalha em Londres, coordenando uma rede de sessões de matemática para um público com 13 a 14 anos de idade. Antes disso, fez o doutoramento em sistemas dinâmicos na Universidade de Manchester, onde também trabalhou com divulgação de matemática. Ainda antes disso licenciou-se em matemática na Universidade do Porto, onde trabalhou comigo como monitora. Assim se explica que, a meio da conversa, ela hesite no tratamento.... Mas parece que agora que batizei o trabalho, sou a madrinha do projeto e a questão do tratamento ficou resolvida de vez.

Procurei reproduzir no texto a linguagem verbal. Enquanto leem, imaginem uma conversa entre uma portuguesa e uma brasileira.

CONVERSA

ISABEL Queremos contar na *Gazeta* o seu trabalho, as coisas que você faz.

SARA O meu trabalho agora é na Royal Institution of Great Britain, que é o sítio onde Michael Faraday desenvolveu o seu trabalho científico. Ele criou também em 1826 as *Royal Institution Christmas Lectures*. Durante mais de 150 anos elas funcionaram sem matemática até que em 1978 o Prof. Zeeman foi a primeira pessoa a levar matemática para as *Christmas Lectures*. Toda a gente ficou muito surpreendida por coisas tão formais como teoremas poderem ser comunicadas dessa forma. O diretor da Royal Institution nessa altura quis prolongar essa experiência e criou o projeto *Royal Institution Mathematics Masterclasses*, que é onde eu trabalho. Começou em 1981, estivemos a celebrar o trigésimo aniversário este ano. Temos mais de 50 sítios no Reino Unido onde estas *masterclasses* acontecem (*http://www.rigb.org/maths*).

As *masterclasses* não são aulas, são sessões de duas horas e meia com as crianças a trabalhar num problema de matemática sério. Tipicamente são alunos de 13, 14 anos, que são bastante competentes a matemática e que levam a matemática como outros encaram o futebol ou a música. Eles reúnem-se aos sábados de manhã para estudar coisas que vão expandir o seu horizonte matemático. O assunto pode ser por exemplo a matemática do *Facebook*, ou seja, redes, ou simetrias em três dimensões e caleidoscópios. Eu própria desenvolvi uma *masterclass* baseada nos caleidoscópios 3D vistos no Atractor e inspirada no livro de John Conway *The Symmetry of Things*. O objetivo é que eles sintam necessidade de uma prova matemática, de generalizar coisas e de abstrair, de perceber essa diferença entre matemática e outras ciências. O meu trabalho consiste em dirigir o projeto das *masterclasses* e também fazer o controlo de qualidade e dar apoio aos voluntários que organizam as aulas, para inspirar a próxima geração não só de alunos mas também de novos apresentadores de *masterclasses*.

ISABEL Quer dizer, você vai aos lugares e apresenta material para o trabalho dos garotos e também prepara material para os outros. É isso?

SARA Sim, acompanho os outros a prepararem o seu material. A ideia é: uma pessoa tem uma paixão por uma certa área da matemática e tem um material rico em exemplos e problemas acessíveis a alunos dessa idade. Parte do meu trabalho é ajudá-la a criar uma história que tenha um anzol, que os puxe e que fique. E que conduza para a demonstração ou a prova não necessariamente uma coisa algébrica e formal, mas que constitua um argumento bem estruturado e à prova de água.

ISABEL A ideia essencial da prova e do rigor do pensamento.

SARA Exato. Mas quando se fala em prova, muita gente pensa em aulas horríveis na universidade e nas demonstrações que não percebiam. Quando dizemos que as crianças fazem uma prova muitas pessoas não percebem que uma prova é um argumento. Isso é a realidade, muitos professores, senão mesmo a maior parte deles, arrepiam-se com a ideia de prova. E uma das satisfações deste trabalho é mostrar-lhes que afinal a prova não é um bicho de sete cabeças. Mas há algum trabalho para nós fazermos, para que os alunos façam isso. É como fazer andaimes...

ISABEL ... arranjar uns andaimes para eles poderem chegar à demonstração.

SARA Essa é uma das satisfações do trabalho, sim.

ISABEL Imagino que o trabalho também possa ser interessante com os formadores, que tenha todo um trabalho de preparação com eles, não é?

Masterclass em Santo Tirso, Portugal, Maio de 2011. Sara Santos fez *The Power of Two* ou "A Potência de Dois" sobre o problema de Josephus Flavius.

SARA Exato. E aprendo coisas novas também, coisas que eu não sabia.

Este trabalho é muito focado na próxima geração de matemáticos. Muitas das ideias que usamos neste projeto são ideias que eu penso, e que muitos outros também pensam, que podem ser usadas para despertar interesse pela matemática a pessoas que não ligam nada à matemática. Por exemplo, usar a expansão binária dos números para criar cartas "mágicas" e ler a mente, como foi usado na *masterclass The Power of Two* sobre o problema de Josephus Flavius[1]; caleidoscópios 3D que são fascinantes em qualquer idade; o jogo *Nim*[2]. Por isso eu juntei-me com outras pessoas (Matt Parker e Steve Humble) para levar avante este projeto independente, que não faz parte do meu trabalho, que é o *Maths Busking* (*http://www.mathsbusking.com/*).

[1] General da Galileia, séc. I DC

[2] O jogo de "O Ano Passado em Marienbad", ver *http://pt.wikipedia.org/wiki/Nim* (jogo) ou *http://en.wikipedia.org/wiki/Nim.*

ISABEL Um projeto separado do trabalho na Royal Institution. Usando as mesmas técnicas, as mesmas habilidades, a mesma capacidade, mas virado para um objetivo diferente.

SARA Exato. E aí, o público-alvo é o extremo oposto do espectro, são as pessoas que não procuram matemática, que não procuram ir a aulas de ciência, não compram livros sobre isso. Porque há uma oferta imensa de livros: Simon Singh, Marcus du Sautoy, em Portugal, Nuno Crato, Jorge Buescu e por aí fora. Também existem documentários na TV, mas a pessoa que não está voltada para a matemática vai desligar esse programa, não vai comprar o livro, e não vai procurar ir à Royal Institution para ouvir aulas de matemática, não é?

ISABEL Não, você quer apanhar o público que não gosta de matemática, ou que não sabe que gosta. Aquelas pessoas que se divertem com raciocínios lógicos mas que não sabem que isso é matemática.

SARA Nós pensamos que este modelo é semelhante ao da pessoa que faz entretenimento de rua, o *busker*, que toca música ou faz acrobacias, e que tem como objetivo fazer com que a pessoa que está no seu dia a dia e que não se quer incomodar com nada, pare, escute, veja, e se sinta compelida a pôr dinheiro no chapéu ou na caixa do violino. Com Matt Parker e Steve Humble, abstraímos o modelo e criámos o *Maths Busking*, que vai à rua e procura fazer matemática em interações de poucos minutos. A ideia é que as pessoas passam, prestam atenção durante dois ou três segundos e vão-se embora... ou ficam mais um bocadinho, não é? Abstraímos isso nos axiomas de *Maths Busking* (VER CAIXA).
O axioma 2 diz que se alguém fizer malabarismos e depois no fim disser "Matemática é fixe" não serve, é batota.

ISABEL É muito mais fácil fazer um malabarismo, tocar uma música, chamar a atenção e depois dizer um *slogan*. Mas aí, é publicidade, não é *Maths Busking*. Estou gostando!

SARA Claro que existe um orador que faz *masterclasses* (estou agora a fazer um desvio), que é o Colin Wright, que faz a matemática do malabarismo, com teoria e prática.

ISABEL Já vi isso!
SARA Já viste? ... Já viu? (na dúvida se podia mesmo me tratar por tu.)

ISABEL Já vi referência a isso. Acho que esse malabarismo vale.

SARA Vale, se ele fizer a parte matemática, não é? E um dos corolários é que o *Maths Busking* não pode ser dar um *puzzle* a uma pessoa para ela resolver.

Sara Santos, *Maths Busking* em Portsmouth, Novembro de 2010 a fazer o *Mind Reading* como no vídeo da CVTV.

MATHS BUSKING OU OS SALTIMBANCOS DA MATEMÁTICA

Axioma 1. *A audiência não é estática, não está comprometida, não comprou bilhete, está de passagem. Portanto, não podemos arreliá-la, temos de a ter do nosso lado, não a envergonhar.*

Axioma 2. *A atração tem que ser a matemática, ou seja, o conteúdo. A coisa que é surpreendente e atraente deve ter origem matemática.*

Axioma 3. *Tem que haver algo para as pessoas levarem consigo, no sentido lato. Pode ser uma ideia ou uma atitude ou uma tirinha de papel com o nosso* website, *que tem a explicação do* show.

Com estes três axiomas podemos ver as suas implicações.
Corolário 1. *Fazer* Maths Busking *não pode ser dar um* puzzle *a uma pessoa para resolver.*

E o teorema que nós queremos provar experimentalmente é:
Teorema 1. *Tem que ser um* show. *Tem que ser uma* performance.
E *performance* tem todas as implicações semânticas de ser atraente, de usar humor, de as pessoas quererem continuar a estar lá a ver.

Maths Busking, Southbank, Londres, Junho de 2010.

José Fonseca é o *busker* fazendo *Mind Reading*.
Sim, ele é português. Junho de 2010, Southbank, Londres.

ISABEL Porque isso demora muito. Não é instantâneo. Tem que ser uma coisa de impacto imediato, não é?

SARA Exato. Porque não é divertido ver alguém resolver um problema.

ISABEL Divertido é resolver o problema

SARA Sim. Agora, se tornar o *puzzle* um jogo ou um *show*, aí já vale. Para este público o *puzzle* não é atraente, a não ser que seja divertido de ver. Nós começámos à procura de financiamento no fim de 2009 e, em Março de 2010, fizemos a primeira sessão de treino com os meus colegas Matt Parker, que tem experiência a fazer comédia matemática e é conhecido como *stand-up mathematician*,[2] e com Steve Humble, também conhecido como *Dr. Maths* e *Maths agony aunt*. Quisemos criar um batalhão de pessoas no país que depois fizesse isso na sua região. As sessões de treino foram também para aprendermos com as pessoas que queriam contribuir o que é que funcionava. Nós desenvolvemos alguns *shows* a remascarar coisas que já fazíamos. Por exemplo, esta tirinha de papel foi uma coisa que me foi mostrada há uns anos numa conferência por um matemático japonês, Dr. Tadashi Tokieda, de Cambridge; se eu der um nó nesta tira de papel, fico com um pentágono regular. Então, eu mostrei isso a uma das colegas e ela depois criou uma história, no estilo de humor dela, assim: "Vocês saem de casa, não têm um pentágono no bolso ... tragédia! ... " Então ensina as pessoas a fazer. Mas é por causa de a história dela ser um bocado exagerada que a coisa fica engraçada.

ISABEL Você vai dizer: "Não tenho um pentágono no bolso, que horror. E agora?"

SARA "Claro, tinha quadrados, triângulos, mas não tinha pentágonos. Bolas!" (Ver no nosso site '*Emergency Pentagon*' em *Shows*).

Outra coisa que saiu duma *masterclass* que nós fazemos é a utilização de umas cartas mágicas que permitem adivinhar o aniversário duma pessoa, usando a decomposição em binário do número. Nós fazemos isso como um jogo de leitura de pensamento. Eu fiz esse *show* para 300 pessoas no Casino da Figueira, quando recebi o prémio para a equipa.[3] Desde então nós fizemos já sete ou oito sessões de treino. A última foi uma sessão de um dia para uma turma inteira de professores primários de uma escola. A ideia é que os professores possam usar essas ideias para o início ou o fim da aula ou fazerem matemática nas celebrações da escola, como se faz música ou teatro. De maneira alguma queremos substituir outras formas de comunicação por isto.

[2] Veja o link: *http://www.standupmaths.com/*

[3] Pode ser visto no Ciência Viva TV: *http://www.cvtv.pt/home/pesquisa.asp?idvideo=1274*

Sara Santos, *Maths Busking* em Birmingham, em Setembro de 2010, a fazer *Knot a Handkerchief.* O público (ver a primeira fila) está a dar uma dica à menina que usa o colete às bolinhas (este colete é para o outro *show Waistcoat and Handcuffs*)...

Rufus Roberts é o *busker* a fazer *Waistcoat and Handcuffs*. Birmingham, Setembro 2010.

ISABEL É um anzol para pegar as pessoas, não é? Põe o isco lá, depois elas têm de continuar.

SARA O projeto agora vai crescendo, receber o prémio foi estimulante. Temos a ideia de o lançar em Portugal, mas estamos ainda a reunir uma equipa e a procurar financiamento. A ideia seria fazer sessões de treino para criar pessoas no País que fiquem experientes, que trabalhem com outras pessoas como profissionais de animação de rua, para fazer a combinação certa de animação de rua com conhecimento de matemática. Precisamos de financiamento para que a equipa existente faça o treino inicial em Portugal, para que depois a estrutura seja criada e seja autossuficiente.

O meu sonho é levar avante um centro de apreciação de matemática. Um centro onde a pessoa interaja com matemática, com manipuláveis, mas onde também tenha acesso à história, ao personagem, às pessoas, a saber porque é que aquela pessoa estudou aquilo. Um sítio onde não haja a separação artificial entre história da matemática e fazer matemática. É uma história humana, não é? Da matemática que não pode despertar as mãos com uma parte científica. E há um comité de pessoas aqui, do qual eu faço parte, que está agora a angariar fundos para levar esse museu avante.

ISABEL Então não é só um sonho, é um sonho já quase acontecendo.

SARA Sim. Parte do que eu aprendi com *Maths Busking* é importante: não é matemática para os convertidos, é elevar a matemática ao mesmo estatuto do museu de arte. As escolas sentem obrigação de levar os miúdos ao Museu de Arte, ao Museu de História Natural, ao British Museum. É ter uma coisa dessa escala. E isso também tem a ver com o projeto do Atractor. Quando eu era aluna no Porto, no meu 2.º ano, o Prof. Arala Chaves fez a primeira reunião sobre o que seria o Atractor. Na altura eu não podia fazer muito, porque eu trabalhava a tarde inteira num escritório de advogados, fazia ilustrações à noite para ganhar algum dinheiro extra. Portanto, havia muitas aulas da manhã que eu também perdia. E só depois quando eu arranjei o trabalho como monitora na Universidade é que comecei a ter mais tempo para ir a essas reuniões e a outras coisas assim.

ISABEL É muito importante ter tempo para atividades colaterais, fazer a parte gostosa, fazer brincadeiras, não fazer só a dureza.

SARA Eu também dava explicações de matemática e cheguei a levar os meus alunos de explicação à primeira exposição que o Atractor fez no Porto, na Universidade.

ISABEL Isso é que foi uma explicadora de luxo! Não é todos os dias que se encontra uma explicadora que leve os alunos a exposições.

SARA Quando eu acabei o doutoramento aqui, havia a possibilidade de trabalhar no Porto, no Atractor. Mas era uma coisa muito precária e eu acabei por não ir, com muita pena. Mas antes de trabalhar aqui na Royal Institution eu trabalhei com o *Wider Participation Officer*, que é uma pessoa que se encarrega de abranger uma parte mais ampla da sociedade.

ISABEL Isso ainda em Manchester?

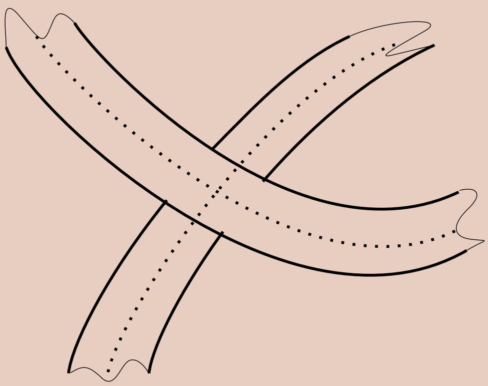
SARA Sim, na Faculdade de Ciências da Natureza (Faculty of Engineering and Physical Sciences) da Universidade de Manchester. Eles focam em crianças que não tenham ninguém na família que tenha ido para a universidade, levando-as até lá para terem atividades extra-curriculares. Foi aí que descobri que havia um mundo inteiro dedicado à comunicação de ciência.

Quando entrei para a universidade não sabia o que é que a matemática era, e isso é uma das coisas que me sabem bem no trabalho que faço agora. Porque, no fundo, estamos a abrir os horizontes a jovens de uma idade em que têm o potencial para desenvolver a competência matemática mais além e que podem beneficiar da tenra idada que têm, para levarem a matemática mais a fundo, antes de se preocuparem com namorados, com viagens, com ganhar dinheiro e essas coisas todas.

Sara Santos, *Surprising Geometry Show*, Faraday Theatre, Royal Institution, Londres, Julho de 2011.

Um *show* de Sara Santos, *Surprising Geometry*, uma coleção de coisas surpreendentes sobre geometria. No fim há um truque. O tema é a matemática e o namoro.

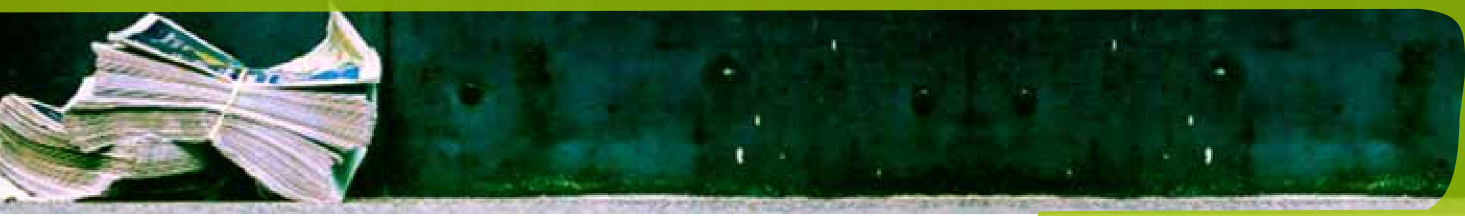
Comece com duas tiras de Möbius coladas ortogonalmente como na figura.
As tiras de Möbius têm de ter orientações opostas: uma torce para o lado oposto da outra.
Ponha fita cola dos dois lados, e corte a meio cada uma das fitas de Möbius ao longo da linha pontilhada.
Se fizermos isso com dois cilindros, em vez de tiras de Möbius, obtemos um quadrado, que já por si é surpreendente. Se fizermos com duas tiras de Möbius, uma com a torção para um lado e outra com a torção para o outro, como o tema é a matemática e o namoro, a interpretação é divertida. O resultado não é igual se as tiras tiverem torção para o mesmo lado. Aprendi este truque com Matt Parker. Além da brincadeira com o namoro, podemos concluir que as tiras de Möbius não são todas iguais, porque o resultado muda se as duas tiras tiverem torção para o mesmo lado.

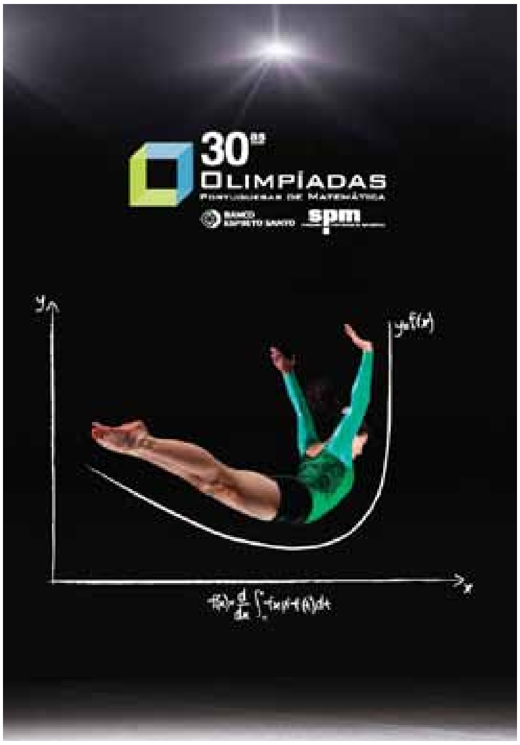


Desafio ao leitor: **Quem consegue tirar uma boa foto de duas tiras de Möbius com orientações opostas?**

E para terminar: **"O que é que se passa neste vídeo?"**
Estão todos convidados a deixar comentários na página do *Facebook*: *http://www.facebook.com/video/video.php?v=10150117194556993&oid=182745831748519&comments.*

Este artigo foi escrito ao abrigo das normas do Novo Acordo Ortográfico.





OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE **MATEMÁTICA** CHEGAM À **30.ª EDIÇÃO**

As Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM) estão de parabéns: a competição científica que mais jovens reúne em Portugal vai já na sua 30.ª edição. Dividida em cinco categorias, a competição pode ser disputada por estudantes do 1.º ciclo ao Ensino Secundário: Mini-Olimpíadas (3.º e 4.º anos), Pré-Olimpíadas (5.º ano), Categoria Júnior (6.º e 7.º anos), Categoria A (8.º e 9.º anos) e Categoria B (10.º, 11.º e 12.º anos). A 1.ª eliminatória das OPM decorrerá no dia 9 de Novembro. É também neste dia que se realiza a prova única das Pré-Olimpíadas (5.º ano). A 2.ª etapa está marcada para o dia 11 de Janeiro e a Final Nacional decorrerá entre 22 e 25 de Março, na Escola Secundária Domingues Sequeira, em Leiria. As Mini-Olimpíadas (3.º e 4.º anos) terão também uma prova única, que decorrerá durante o mês de Maio. As inscrições para esta categoria podem ser efectuadas até ao dia 30 de Abril, na página *http://mopm.mat.uc.pt/MOPM/*.

NOVIDADES DO **CENTRO DE FORMAÇÃO** DA SPM

O Centro de Formação da SPM (CF SPM) apresenta algumas novidades para o ano lectivo 2011/2012. "Simetrias no Plano: Estudo Interactivo, Matemática no Excel – Complementos", "Aplicações da TI – Nspire" e "Ensinar e Aprender com o Moodle" fazem agora parte da oferta formativa do CFSPM. Para conhecer em detalhe as várias acções relacionadas com as mais diversas temáticas consulte a página do CFSPM, em *http://formacao.spm.pt/*.

LOJA SPM
JÁ TEM UM ESPAÇO DISPONÍVEL **NO PORTO**

A Loja da SPM já chegou à Cidade Invicta. Este novo espaço situa-se no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, na sala 2.30. Tem disponíveis para consulta ou aquisição várias publicações, jogos e materiais didácticos, bem como informações gerais sobre as actividades da SPM. O espaço está aberto ao público às terças-feiras, entre as 9h30 e as 12h30. Consulte a página da loja no site oficial da SPM.

SPM LANÇA **POSTAL COMEMORATIVO** EM HOMENAGEM A **MARIA DO PILAR RIBEIRO**

A SPM, em colaboração com os CTT – Correios de Portugal, lançou a 4 de Outubro um Inteiro Postal (IP) comemorativo para assinalar o centenário do nascimento de Maria do Pilar Ribeiro, uma das últimas sobreviventes da geração matemática que fez história nas décadas de 1930 e 1940, em Portugal. O lançamento do IP teve lugar no Museu de Ciência da Universidade de Lisboa e contou com a presença do presidente da SPM, Miguel Abreu, do ministro da Educação e Ciência, Nuno Crato, e do vice-presidente dos CTT, Pedro Coelho. Maria do Pilar Ribeiro, falecida no passado mês de Março, completaria 100 anos no dia 5 de Outubro. A professora de matemática foi primeiro ecretário da primeira direcção da SPM, de 1940 a 1942, e sócia honorária da Sociedade a partir de 2006. Foi também uma das fundadoras da *Gazeta de Matemática*. O IP de homenagem a Maria do Pilar Ribeiro está disponível para venda na loja da SPM.

OLÍMPICOS PORTUGUESES CONQUISTAM **PRATA E BRONZE NA COSTA RICA**

A 26.ª edição das Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática (OIAM), que se realizou em San José, na Costa Rica, entre 23 de Setembro e 1 de Outubro, chegou ao fim da melhor forma para a equipa portuguesa, com a conquista de duas medalhas de prata, uma de bronze e uma menção honrosa. Raúl Penaguião, da Escola Secundária de Santa Maria, em Sintra, e Frederico Toulson, do Colégio Valsassina, em Lisboa, alcançaram a prata. João Santos, da Escola Secundária da Maia, conquistou o bronze pela segunda vez nesta competição. O mais novo do grupo, Francisco Machado, da Escola Secundária Infanta D. Maria, em Coimbra, foi distinguido com uma menção honrosa. No historial da participação portuguesa nas OIAM contam-se já inúmeras distinções: uma medalha de ouro, oito de prata, 30 de bronze e 10 menções honrosas.

SPM LANÇA DESAFIOS NA **GINCANA ROCK IN RIO**

A SPM vai lançar uma série de desafios ao longo de quatro meses, no âmbito da Gincana Rock in Rio, dirigida a alunos dos 1.º, 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Integrado numa iniciativa mais ampla que pretende sensibilizar a comunidade escolar para questões como a sustentabilidade ambiental, a eficiência energética e a responsabilidade social, o jogo *online*, que contará com o contributo da SPM, será a sexta etapa da Gincana Rock in Rio. Os vários desafios que a SPM lançará têm como objectivo contribuir para o reforço da aprendizagem da matemática, promovendo entre os participantes o treino do cálculo mental. A Gincana *online* decorrerá entre 1 de Novembro e 23 de Março de 2012.

ACESSO LIVRE A MATERIAL ACADÉMICO NO ARQUIVO ESCOLAR

A plataforma online Arquivo Escolar, um repositório de acesso livre a sebentas e textos universitários sobre matemática, está aberta a todos os autores e académicos que pretendam divulgar as sebentas que hoje estão inacessíveis ou se encontram dispersas na *web*. "Criar um arquivo central, de livre acesso e busca fácil, que torne estes recursos educativos mais acessíveis em toda a parte" é o objectivo do Arquivo Escolar. Este projecto tem particular utilidade para os Países Africanos de Língua Oficial Portuguesa (PALOP), onde os livros especializados, com preços pouco acessíveis, são difíceis de encontrar. Esta é uma iniciativa sem fins lucrativos, nascida no seio da comunidade académica e conta o apoio da SPM. Aceda ao Arquivo Escolar através do endereço *http://arquivoescolar.org/handle/arquivo-e/9.*

INSCRIÇÕES ABERTAS PARA **PRÉMIO PEDRO MATOS**

As inscrições para a 4.ª edição do Prémio Pedro Matos, destinado a estudantes do Ensino Secundário, estão abertas até 31 de Março de 2012. A edição deste ano será dedicada aos "Desafios no Ensino da Matemática". O principal objectivo desta iniciativa, organizada pelo Instituto Politécnico de Leiria, com o apoio da SPM, é fomentar a criatividade e o interesse dos jovens pela matemática e suas aplicações, bem como descobrir novos talentos. A entrega dos trabalhos a concurso deve ser efectuada até dia 18 de Maio e os prémios serão entregues em Julho do próximo ano.

ANDRÉ NEVES RECEBEU **UM MILHÃO DE EUROS** PARA **INVESTIGAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Foi a primeira vez que o Conselho Europeu de Investigação (ERC – European Research Council) atribuiu a um matemático português uma Starting Grant, um importante programa de financiamento para jovens investigadores de diversas áreas científicas. André Neves, investigador no Departamento de Matemática Pura do Imperial College de Londres, foi o feliz contemplado, com uma bolsa no valor de um milhão e 100 mil euros para os próximos cinco anos. A ERC Starting Grant, que pretende fixar investigadores de excelência na Europa, permitirá ao matemático estabelecer um grupo de investigação e expandir o alcance do seu trabalho. "Curvatura escalar positiva e fluxos de curvatura média Lagrangianos" foi o projecto que convenceu o painel de especialistas do ERC. O investigador pretende, através da análise geométrica, encontrar respostas para a questão da existência de superfícies mínimas, em espaços para além do Euclideano. O matemático acredita que o reconhecimento do seu trabalho através da atribuição da ERC Starting Grant possa ter um impacto positivo no meio científico português, desde logo, na formação. "Com esta bolsa tenho fundos para aceitar alunos para fazerem o doutoramento comigo no Imperial College of London e teria o maior gosto em aceitar um aluno português com aptidões excepcionais na matemática", afirma. O investigador, orador no Encontro Nacional da SPM em 2010, planeia também organizar alguns eventos científicos em Portugal nos próximos anos.

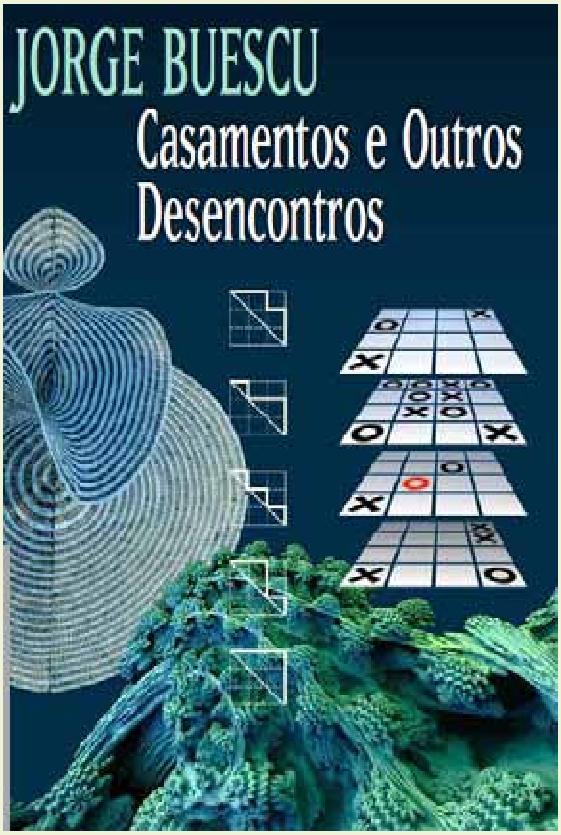
SPM APOIA NOVA EDIÇÃO DO **MATOESTE**

O Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria organizará, com o apoio da SPM, mais uma edição do MatOeste. O encontro, que se realiza em Julho de 2012, promove a divulgação, a discussão e a partilha de ideias e experiências nas mais variadas vertentes da matemática. O MatOeste é dirigido a docentes de todos os níveis de ensino e ao público geral, em especial da região Oeste.

CICLO DE CONFERÊNCIAS **"IMPLICA MATEMÁTICA"**, NA **FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNL**

O ClubeMath da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (UNL) promoverá, até ao dia 5 de Maio do próximo ano, um ciclo de conferências subordinado ao tema "Implica Matemática". O objectivo é relacionar a matemática com áreas de conhecimento tão diversas como história, arquitectura, ecologia, economia, medicina e linguística. As conferências, com entrada livre, destinam-se a um público leigo e terão lugar no Auditório da Biblioteca da FCT-UNL aos sábados, pelas 15 horas. O programa pode ser consultado no site oficial da SPM.

JORGE BUESCU LANÇA *CASAMENTOS E OUTROS DESENCONTROS*



Casamentos e Outros Desencontros é o título do novo livro assinado por Jorge Buescu. De uma forma divertida mas rigorosa, o autor levanta várias questões sobre como é que uma abordagem matemática pode enriquecer a nossa compreensão do funcionamento do mundo, da vida, do universo e de tudo aquilo que nos rodeia. Jorge Buescu mostra, desta forma, que a matemática é uma "extraordinária aventura intelectual" que vai muito além do uso que dela fazemos nas salas de aulas. Um livro pertinente que surge numa altura considerada pelo autor como a "idade de ouro" da matemática e em que se contam mais matemáticos activos do que ao longo de toda a história da Humanidade. O lançamento do livro *Casamento e Outros Desencontros*, com a chancela da Gradiva, está previsto para os dias 22 de Novembro, no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa, e 15 de Dezembro, no Casino da Figueira, na Figueira da Foz. Este é o quarto livro do autor publicado em Portugal, depois de *O mistério do bilhete de identidade e outras histórias* (2001), *Da falsificação de euros aos pequenos mundos* (2003) e *O fim do mundo está próximo?* (2007). Para além destas obras (duas delas publicadas internacionalmente), o Professor de Matemática (FCUL) e antigo director da *Gazeta de Matemática* é autor de mais de uma centena de artigos dedicados à divulgação da matemática.

CANDIDATURAS ABERTAS PARA **PRÉMIO FELIX KLEIN**

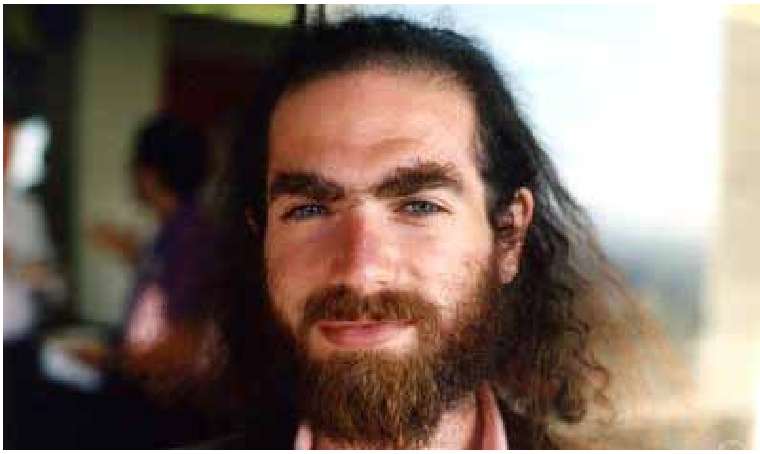
Estão abertas até ao dia 31 de Dezembro as inscrições para o Prémio Felix Klein, que distingue trabalhos de investigação na área da matemática aplicada. O prémio é concedido a jovens cientistas que demonstrem ter utilizado métodos sofisticados na resolução de problemas relacionados com o sector industrial. O prémio, no valor de cinco mil euros, e o certificado correspondente serão entregues a investigadores em nome individual ou em grupo. Os vencedores serão anunciados durante a 6.ª edição do Congresso Europeu de Matemática, que se realizará em Cracóvia, na Polónia, de 2 a 7 de Julho de 2012. O regulamento está disponível para consulta na página oficial da European Mathematical Society (EMS), em *http://euro-math-soc.eu.*

6.º CONGRESSO EUROPEU DE MATEMÁTICA REALIZA-SE EM **JULHO DE 2012,** EM **CRACÓVIA**

A cidade de Cracóvia receberá, entre 2 e 7 de Julho de 2012, o 6.º Congresso Europeu de Matemática, um dos eventos matemáticos mais importantes da Europa. O encontro, aberto a toda a comunidade matemática, é uma oportunidade para contactar com destacados matemáticos, ficar a par dos principais desenvolvimentos na área e alargar os horizontes de jovens investigadores para novas pesquisas. Serão atribuídas bolsas de apoio financeiro a todos os jovens matemáticos interessados em participar no encontro. Durante o evento serão atribuídos vários prémios, como o Prémio EMS e o Prémio Felix Klein. O congresso é organizado pela European Mathematical Society, pela Sociedade Polaca de Matemática e pela Universidade de Jagiellonian.

PRÉMIO RECUSADO POR **PERELMAN** REVERTE PARA PROGRAMA DE **PÓS-DOUTORAMENTO**

O prémio de um milhão de dólares que Grigori Perelman recusou em 2010, pela resolução da Conjectura de Poincaré, vai ser utilizado num programa de pós-doutoramento. O Clay Mathematics Institute e o Institut Henri Poincaré anunciaram a criação do programa Poincaré Chair, dirigido a matemáticos em início de carreira. A recompensa monetária que resultou da resolução de um dos "Problemas do Prémio Millennium" reverte, assim, a favor de matemáticos que queiram desenvolver as suas ideias e os seus trabalhos de investigação. De acordo com o Clay Institute, as nomeações para o Poincaré Chair serão requeridas em breve. A bolsa durará de seis meses a um ano e terá lugar no Institut Henri Poincaré, em Paris. Quanto aos "Problemas do Prémio Millenium" (sete no total) continuam por resolver, à excepção do solucionado por Perelman.



Joana Teles
Vice-presidente da SPM
jteles@mat.uc.pt

ANO DE OURO PARA AS OLIMPÍADAS

Os 30 anos das Olimpíadas Portuguesas de Matemática não poderiam ter sido preparados de forma mais adequada: primeira medalha de ouro nas Olimpíadas Internacionais de Matemática para um aluno português e a realização em Coimbra das 1.as Olimpíadas de Matemática da Lusofonia.

As Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM) vão celebrar os seus 30 anos no ano lectivo de 2011/2012. Estes 30 anos são um sinal claro da maturidade das OPM. De ano para ano há mais alunos e mais escolas a participar, no ano passado houve um alargamento ao 1.º ciclo do Ensino Básico e a criação de uma nova categoria, a Júnior, para alunos dos 6.º e 7.º anos. A Final Nacional conta agora com 90 finalistas repartidos por três categorias. Os resultados obtidos nas competições internacionais têm vindo a melhorar de uma forma consistente, tornando-se "um hábito" a conquista de medalhas por parte das equipas que representam Portugal. Por nossa iniciativa, alargámos fronteiras e fizemos chegar as Olimpíadas a todos os países lusófonos. Foram assim criadas as Olimpíadas de Matemática da Lusofonia.

OURO NAS OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE MATEMÁTICA

As Olimpíadas Internacionais de Matemática (conhecidas por IMO) são uma competição de grande prestígio a nível internacional. Várias são as universidades estrangeiras que dão entrada directa a alunos que tenham obtido medalhas neste evento. Portugal participa de forma regular nesta competição desde 1989 (30.ª IMO). Nos primeiros anos da nossa participação obtiveram-se algumas medalhas de bronze e menções honrosas mas não conseguíamos sair dos últimos lugares na tabela de países. Durante alguns anos os nossos alunos mais talentosos alcançavam poucos pontos, ou nenhuns, nas IMO. Era evidente que só com uma preparação adequada poderíamos competir com os outros países participantes. Apareceu então em Coimbra, em 2001, o Projecto Delfos, uma escola matemática para jovens. A equipa deste projecto já tinha anteriormente preparado os nossos alunos para as competições internacionais. O Projecto Delfos veio organizar a preparação e distribuí-la por todo o ano lectivo sendo depois responsável juntamente com a comissão de preparação das OPM pela selecção das equipas portuguesas nas competições internacionais. Os resultados começaram a melhorar de ano para ano. Naturalmente, apareceu a primeira medalha de prata em 2009 (50ª IMO) e a melhor classificação de sempre, 33.º lugar entre 104 países participantes. Com a fasquia

Na foto, a equipa portuguesa à chegada a Lisboa alta, a participação deste ano também ambicionava medalhas, mas obter a primeira medalha de ouro, e para um aluno do 10.º ano, foi de facto um feito admirável. O empenho, a dedicação e o talento do Miguel Santos são factos de enaltecer, e mais uma vez se demonstrou que estes dão os seus frutos. De salientar também o apoio dado por todos os outros délficos, pela equipa fantástica que voluntariamente trabalha todo o ano com os olímpicos, no Projecto Delfos, nas OPM, nas escolas e nas próprias famílias. De realçar também as duas medalhas de bronze obtidas, este ano, pelo Raul Penaguião e pelo João Santos e a menção honrosa do Luís Duarte.

1as OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA DA LUSOFONIA

Coimbra recebeu os primeiros olímpicos de Matemática da Lusofonia. Este evento organizado pela SPM e pelo Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra decorreu entre 20 e 31 de Julho de 2011. Tendo como modelo as Olimpíadas Internacionais e Ibero-americanas já existentes, mas trazendo também ideias inovadoras como a Semana Olímpica da Lusofonia, 23 jovens de quatro continentes partilharam os seus conhecimentos, o seu gosto pela matemática e a língua comum, o português. Foram dias que ficarão na memória de todos, pelas aprendizagens, pelo convívio, pelas amizades e também pela própria competição. Inesquecível foi também a entrega de prémios realizada no Palácio de São Marcos e da qual nenhum país saiu sem uma medalha. Portugal alcançou uma medalha de ouro (Frederico Toulson), uma medalha de prata (Francisco Machado), uma medalha de bronze (Francisco Andrade) e uma menção honrosa (Nuno Santos), ou seja, todos os alunos portugueses foram premiados. No próximo ano, em Salvador da Bahia, Brasil, espera-se que os oito países lusófonos possam estar presentes com alunos: Angola, Brasil, Cabo Verde, Guiné-Bissau (só observador este ano), Moçambique, Portugal, São Tomé e Príncipe (só observador) e Timor-Leste.

Os participantes das OML na cerimónia de encerramento com o Ministro da Educação e Ciência.

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2011

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S.Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

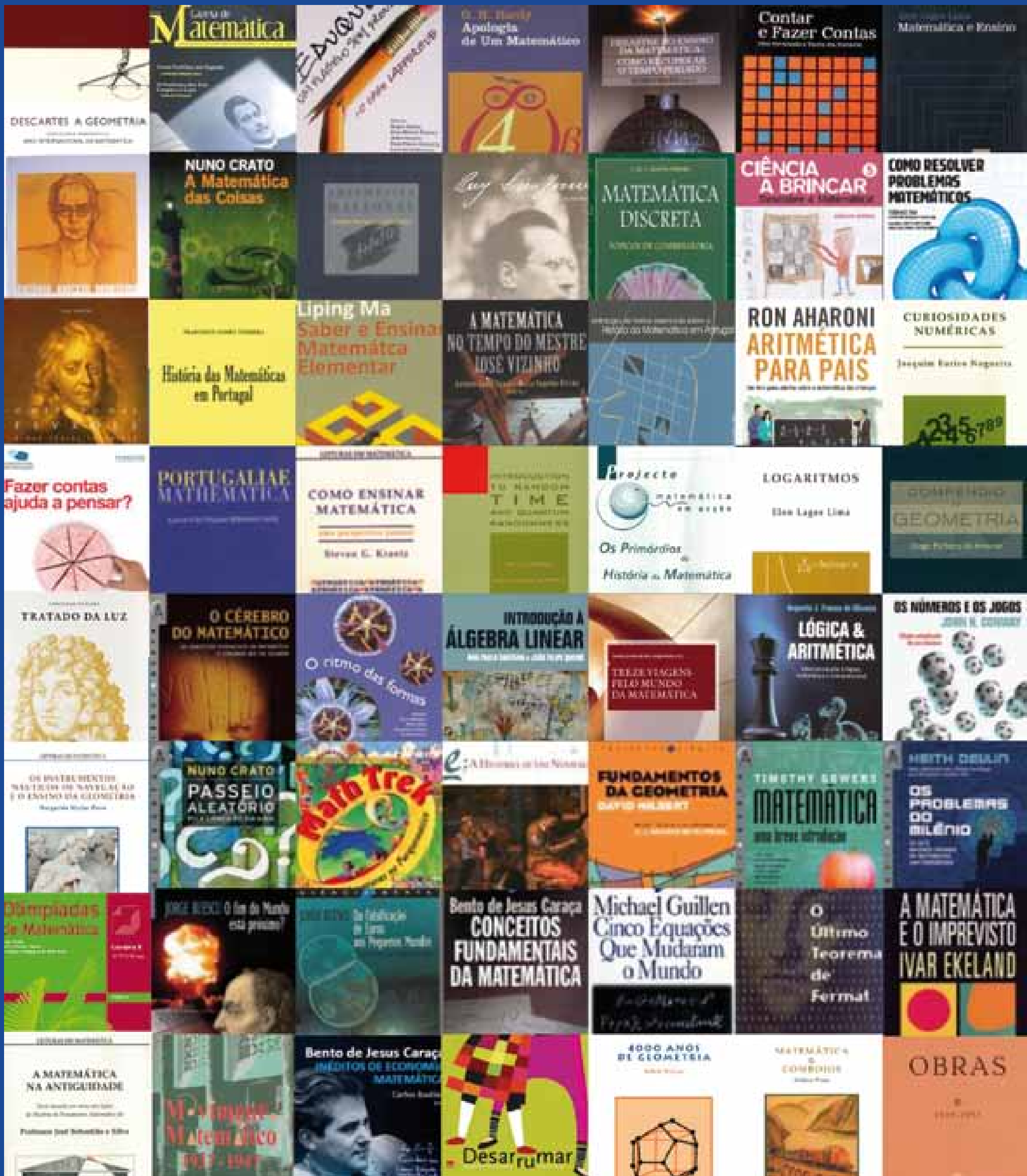
http://www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

http://www.mat.uc.pt/~gazeta

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3° esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*

VISITE A LOJA SPM EM *WWW.SPM.PT*



spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR