

M

N.º 0162

Gazeta de matemática

Publicação quadrimestral
da Sociedade Portuguesa de Matemática

Ano LXXI | Novembro 2010

4,20€

Curvas duma bola
de bilhar solitária

34 | Espaço-tempo de Minkowski: a física como geometria
[José Natário]

37 | O cubo de Rubik aos 30 anos
[Pedro J. Freitas]

Índice

2 **Editorial** por Jorge Buescu

3 **Atractor**
[À volta da roda]

6 **Recreio** por Jorge Nuno Silva
[Razão e bom gosto: Martin Gardner]

8 **Artigo Convidado** por Eduardo Marques de Sá
[Curvas duma bola de bilhar solitária]

21 **Canto Dêlfico** por Alexander Kovacec e Amílcar Branquinho
[Construções sem régua]

24 **Na Linha de Frente** por Fabio Chalub
[Onde calham os primos?]

26 **Apanhados na Rede** por António Machiavelo
[Espécies mutantes de dominós]

28 **Cartoon**

29 **[Os triângulos de Herão e as curvas elípticas]** por António Machiavelo

33 **Livros Convidados**
[Felix Klein: Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior]

34 **[O Espaço-tempo de Minkowski: a física como geometria]** por José Natário

37 **[O cubo de Rubik aos 30 anos]** por Pedro J. Freitas

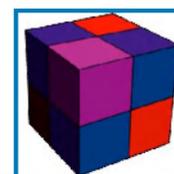
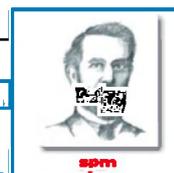
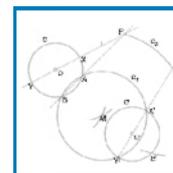
45 **O Que É...** por António Serra
[A função Gama?]

49 **[Regras de boa vizinhança]** por Ana Paula S. Dias e Eliana Manuel Pinho

57 **[O maior centro de formação de matemática do País tem mais cinco formações em 2010/2011]**
por Centro de Formação SPM

58 **Notícias**

64 **Cartas da Direcção** por Miguel Abreu
[SPM, EMS, IMU e a promoção da matemática]



Anuncie aqui!

Já reparou que um anúncio na Gazeta é visto por mais de 2.000 leitores, todos eles potenciais interessados em Matemática? Nenhum se desperdiça! A Gazeta é o local próprio para anunciar tudo quanto respeite a actividades matemáticas: programas de Mestrado e Doutoramento, livros, workshops ou debates, acontecimentos que interesse dar a conhecer e que devam ficar registados para o futuro... O que não é publicitado é como se não existisse!

Tabela de Preços (páginas interiores)

	Impar	Par
1 página	590,00 €	490,00 €
1/2 página	390,00 €	290,00 €
1/4 página	220,00 €	170,00 €
1/8 página	120,00 €	120,00 €

Descontos: Os Sócios Institucionais da Sociedade Portuguesa de Matemática têm direito a um desconto de 15%.

Encartes: É possível enviar encartes. Para mais detalhes consultar a página na web: <http://www.spm.pt>

[Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.]



Editorial

por Jorge Buescu
[Universidade de Lisboa]

De quatro em quatro anos, no pino do Verão, é o mesmo. Colegas entusiasmados discutem veementemente as suas opiniões. Abrem *sites* na Internet dedicados a apostas sobre os vencedores. O clímax é atingido perante milhares de espectadores e, poucas horas depois, o sucesso está estampado em todos os *media*, electrónicos ou em papel, e os jovens vencedores são recebidos como verdadeiros heróis nos seus países, desmultiplicando-se em entrevistas e exibindo orgulhosamente as medalhas conquistadas.

Futebol? Jogos Olímpicos? Não! Matemática. Coincidindo com os anos do Campeonato Mundial de Futebol (tema da última capa da *Gazeta*), realiza-se quadrienalmente em Agosto o Congresso Internacional de Matemáticos. Em 2010 decorreu em Hyderabad, Índia. E é sempre uma organização esmagadora: milhares dos melhores matemáticos do mundo acorrem aos ICM. É uma honra para toda a vida ser convidado para realizar uma sessão plenária no ICM.

E é no ICM que são atribuídos os prémios mais importantes em matemática: as medalhas Fields. Ao contrário dos Prémios Nobel, não são prémios de carreira mas de juventude, para estimular jovens matemáticos que tenham obtido resultados excepcionais a prosseguirem na senda da excelência – a serem Cristianos Ronaldos da Matemática. Este ano os distinguidos foram o francês Cédric Villani, o vietnamita de escola francesa Ngô Báu Châu, o russo Stanislav Smirnov e o israelita Elon Lindenstrauss. As suas realizações são brevemente descritas na Secção de Notícias.

Dois factos saltam, no entanto, imediatamente à vista. O primeiro é a forma como estes prémios realçam a misteriosa mas extraordinária ligação entre a matemática mais estratosférica e o seu potencial nas aplicações, sobretudo à física teórica. Lindenstrauss tem resultados profundos em Teoria Ergódica, que tem a sua origem (e implicações práticas!) na Física. Smirnov desenvolveu métodos motivados pelo sistema de Ising. Villani desenvolveu resultados

cruciais sobre a rapidez de convergência longe do equilíbrio no sentido da física estatística de Boltzmann e Landau. E Châu, na área da geometria algébrica, provou o chamado Lema Fundamental do Programa de Langlands, do qual a única coisa certa é que terá, sem dúvida, implicações – ainda é cedo para saber quais.

Segundo facto: desde 1990, os franceses obtiveram seis medalhas Fields em 12. Não há coincidências: o sistema francês promove a excelência. Entre nós, um vaporoso conceito de “equidade” é interpretado como significando que todos os alunos e professores são iguais – não são! Se algo deve ser meritocrático, é o ensino. Contudo, o nivelamento faz-se por baixo: de ano para ano, de reforma em reforma, o nível médio vai soçobrando por um plano inclinado. Isto é a morte de quaisquer veleidades de “excelência”. Portugal teria muito a aprender com a França: não parece, contudo, existir vontade política para que isso aconteça.

*

* *

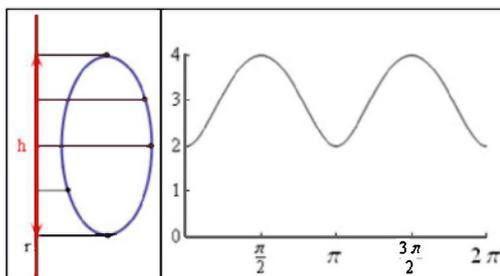
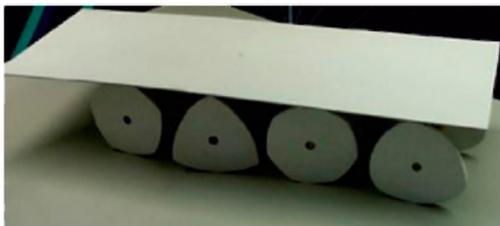
Com o presente número da *Gazeta da Matemática* encerra-se um ciclo. A actual Direcção termina o seu mandato em Dezembro e cederá, com a sensação de dever cumprido, o lugar aos jovens. O meu agradecimento pessoal a todos, que me seria impossível nomear individualmente mas entre os quais estão tantos autores quantos nestes três anos ajudaram neste percurso. Haverá naturalmente uma renovação da equipa editorial, da organização e dos conteúdos. Haverá novos desafios estimulantes, como colocar a *Gazeta online*, conseguir uma boa articulação com alunos do Secundário (como Monteiro defendia ser prioritário!) e tantos outros a que o novo Director, o Prof. Rogério Martins, se dedicará. O desafio maior continua, no entanto, a ser o de sempre: levar aos corações de todos os que estiverem disponíveis as razões do amor pela Ciência a que nos dedicamos. ■

À volta da roda

Quem me dera que a minha vida fosse um carro de bois/Que vem a chiar, manhãzinha cedo, pela estrada,/E que para de onde veio volta depois/Quase à noitinha pela mesma estrada./Eu não tinha que ter esperanças – tinha só que ter rodas...

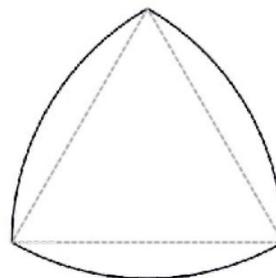
Alberto Caeiro

Num veículo de quatro rodas circulares, cada par delas está unido por um eixo que passa pelos centros das rodas. O formato da roda garante que todos os pontos do seu bordo estão à mesma distância do seu centro, pelo que o eixo se desloca sem oscilações. Mas, se pretendermos transportar um objecto pesado, o sistema de rodas unidas por um eixo pode não ser suficientemente robusto e, por isso, é frequente utilizarem-se rolamentos: os objectos são transportados numa plataforma que rola sobre cilindros de igual secção. Também deste modo o transporte decorre sem oscilações, mas agora a propriedade responsável por este movimento suave é o facto de a circunferência ter *largura constante*.



O que significa isto? Dada uma curva plana e fechada C , a *largura de C numa direcção fixada r* é o comprimento do segmento de recta que se obtém projectando em r cada ponto de C perpendicularmente à recta r . Diz-se que a *largura da curva é constante* se esse comprimento for o mesmo para todas as direcções do plano.

Por exemplo, uma circunferência de diâmetro d tem largura constante d . Mas esta não é uma propriedade que a caracterize, pois há infinitas outras curvas que a satisfazem. A mais simples é o *triângulo de Reuleaux*, que se obtém, a partir de um triângulo equilátero de lado L , se desenharmos três arcos de circunferência com raio L e centro em cada um dos vértices do triângulo. Verifiquemos que a curva assim obtida tem largura constante L .

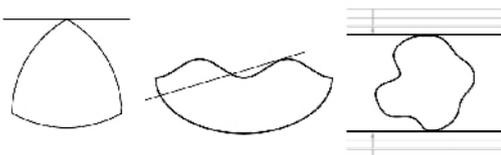


Uma recta suporte de uma curva é uma linha que tem, pelo menos, um ponto de intersecção com a curva e tal que esta fica inteiramente de um dos lados da recta. Note-se que uma recta suporte pode não ser uma recta tangente e uma recta tangente não ser uma recta suporte; e que uma curva fechada tem

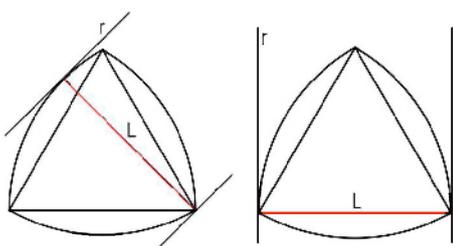
Atractor

[À volta da roda]

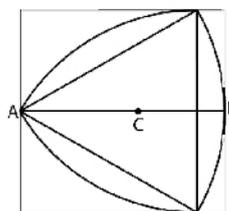
exactamente duas rectas suporte em cada direcção: elas podem ser encontradas colocando a curva entre duas rectas paralelas a essa direcção e deslizando-as, mantendo o paralelismo, até tocarem a curva.



Voltemos ao triângulo de Reuleaux. Consideremos uma direcção e o par de rectas suporte do triângulo de Reuleaux nessa direcção. Se uma destas rectas é tangente a um ponto interior a um dos arcos de circunferência, traçado com centro num vértice, então a outra recta suporte passa por esse vértice e a distância entre elas é o raio da circunferência, L . Se ambas as rectas suporte intersectam a curva em vértices, então elas são tangentes a extremos de arcos de circunferência distintos e a distância entre as duas rectas suporte também é L . Em ambos os casos, a largura da curva na direcção perpendicular à das rectas suporte é o comprimento L do lado do triângulo equilátero que originou o de Reuleaux.



Se agora considerarmos duas direcções perpendiculares e o par de rectas suporte em cada direcção, elas formam um quadrado onde o triângulo de Reuleaux pode ser rodado sem perder contacto com qualquer dos lados do quadrado. (Esta propriedade é válida para todas as curvas de largura constante e, reciprocamente, se ela é satisfeita, então a curva tem largura constante.) Mas, ao contrário da circunferência, durante este movimento o centro geométrico do triângulo de Reuleaux não fica fixo, porque não está a igual distância de pares de rectas suporte paralelas.



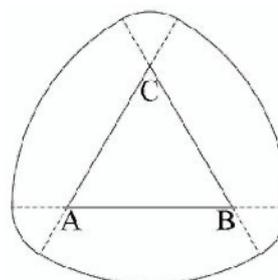
$$AC = \frac{\sqrt{3}}{3} L$$

$$BC = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) L$$

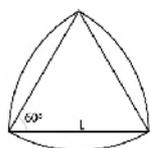
Uma construção análoga a esta desenha polígonos de Reuleaux com um número ímpar de lados que são arcos de circunferência; e, permitindo arcos de raios distintos, podemos obter polígonos com um número par de lados. Contudo, existem outros processos de construir curvas de largura constante sem recorrer a arcos de circunferência [1].



Na imagem em cima estão moedas cujos bordos são curvas de largura constante com os cantos arredondados. Tal arredondamento pode obter-se por processo análogo ao que descreveremos para o triângulo de Reuleaux. Depois de se desenhar um triângulo equilátero $[ABC]$, de lado L , prolongam-se os seus lados e, com centro em cada um dos vértices, traçam-se arcos de circunferência de raio r (arbitrário) compreendidos entre os prolongamentos dos lados do triângulo. Em seguida, com centro nos vértices, traçam-se arcos de raio $L+r$ a unir estes pequenos arcos.



As curvas de largura constante satisfazem várias propriedades da circunferência e partilham algum do seu protagonismo. Por exemplo, todas as curvas com largura constante L são convexas e têm igual perímetro [2] (o da circunferência de diâmetro L , isto é, πL). Para qualquer direcção, cada uma das duas rectas suporte intersecta a curva num só ponto, sendo o segmento que une estes dois pontos de contacto perpendicular às rectas suporte [1]. Além disso, sabemos que, entre todas as curvas de largura constante L – que possuem, portanto, o mesmo perímetro –, a que engloba maior área é a circunferência [3]; a que delimita menor área é o triângulo de Reuleaux [4].



$$\text{Perímetro} = 3 \left(\frac{\pi}{3} L \right) = \pi L$$

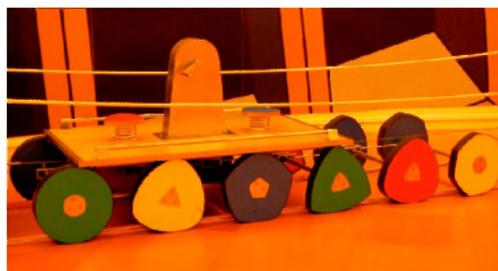


$$\text{Área} = \frac{1}{2} (\pi - \sqrt{3}) L^2$$

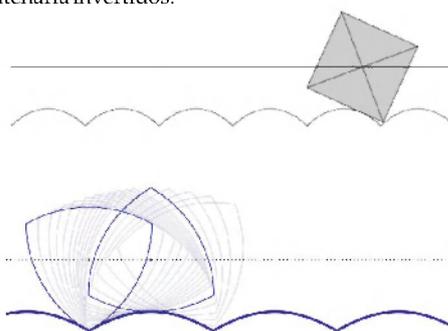
Na exposição Matemática Viva há um carrinho com rodas exóticas cujos bordos são várias curvas de largura constante (de valor igual para todas elas). O utilizador, que se encontra sobre uma tábua, ao dar à manivela, desliza sem oscilações numa estrada plana. Podemos agora perguntar qual a forma da estrada adequada a uma roda sem largura constante. Pretende-se que, durante o movimento, a roda e a estrada se mantenham em contacto, que o comprimento percorrido no bordo da roda seja igual ao descrito sobre a estrada e, além disso, que o centro geométrico da roda se desloque na horizontal (sem oscilações).

Referências:

- [1] Rademacher, Toeplitz "The Enjoyment of Mathematics", Princeton University Press (1970)
- [2] Honsberger, "Ingenuity in Mathematics", MAA (1970)
- [3] Niven, "Maxima and Minima without Calculus", MAA, Dolciani Mathematical Expositions 6 (1981)
- [4] Bonnesen, Fenchel, "Theory of Convex Bodies", BCS Associates (1987)
- [5] Hall, Wagon, "Roads and Wheels", *Mathematics Magazine*, vol. 65, nº5, 283-301 (1992)



Suponhamos, por exemplo, que usamos rodas quadradas. Como deverá ser a estrada, para que alguém que se desloque num carro apoiado em eixos unindo rodas quadradas tenha um movimento horizontal (sem andar aos altos e baixos)? Pode provar-se [5] que uma tal estrada é feita de arcos de catenária invertidos.



Entrada perfeita para o triângulo de Reuleaux



Na exposição Matemática Viva está também patente um módulo em que três rodas de formatos distintos emparelham com uma mesma estrada, perfeita para as três rodas. **M**

Razão e bom gosto: Martin Gardner

Em 22 de Maio passado desapareceu Martin Gardner, o maior divulgador da matemática de sempre. Martin nunca frequentou nenhuma aula de matemática, para além do ensino secundário. Contudo, a sua curiosidade e a sua vontade levaram-no a conseguir expor com clareza conceitos que, reconhece, só apreendeu com dificuldade. Ao longo da sua vida escreveu perto de 200 livros sobre vários temas, da matemática à filosofia, passando pela magia. Em todos podemos apreciar a sua cristalina racionalidade.

Em Dezembro de 1956 surge um trabalho sobre *Hexaflexagons* (inventado por alguns estudantes de Princeton, entre os quais R. Feynman) nas páginas da *Scientific American*, que foi um êxito. O seu autor, Martin Gardner, veio a ser convidado a escrever uma coluna regular a partir de Janeiro de 1957, a célebre "Mathematical Games" que terminou em 1981.

Ao longo destes 25 anos, Martin Gardner tornou-se o maior expoente da divulgação matemática. Alguns resultados, e alguns matemáticos, foram expostos por Gardner pela primeira vez. A correspondência que encetou com grandes matemáticos do século passado revelou-se muito enriquecedora, permitindo originalidade, alcance e correcção aos trabalhos publicados. Estreitou relações com Piet Hein, Conway, Knuth, Diaconis, Graham, Harary, Golomb, Penrose e muitos outros.



Martin Gardner (1914-2010)

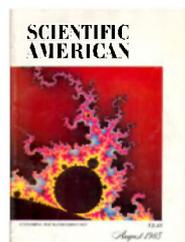
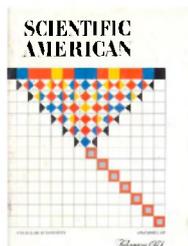
Entre os temas notáveis que surgiram nas colunas da *SA* pela mão de Gardner, conta-se o jogo do Hex, de Piet Hein e John Nash (Julho de 1957), o Jogo da Vida, de Conway (Outubro de 1970), Eleusis, o Jogo de Abbott (Outubro de 1977), a Arte de M. Escher (Abril de 1966), a Criptografia de Chave Pública (1977), os Fractais de Mandelbrot (Agosto de 1985), etc.

Esta coluna de "Jogos Matemáticos" teve um sucesso ímpar. Como Graham disse: "Ele transformou milhares de crianças em matemáticos e milhares de matemáticos em crianças."

Este sucesso não se limitou ao meio matemático, foram inúmeros os leigos que ganharam gosto por temas matemáticos com a leitura de Gardner. Como Richard Guy escreveu, "Gardner brought more math to more millions than anyone else".

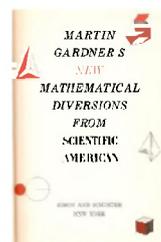
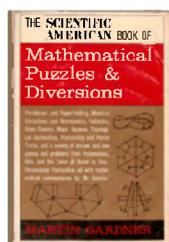
Recreio

[Razão e bom gosto: Martin Gardner]



Uma das suas grandes virtudes residia em relacionar a matemática com muitas outras áreas, de forma natural mas nunca superficial.

Os seus artigos foram coligidos em livros que têm sido sucessivamente reeditados.



A sua paixão pela matemática recreativa levou-o a defender a sua utilização na sala de aula, como método para cativar os alunos. Numa das suas entrevistas conta como, ainda muito novo, foi surpreendido pela professora de Matemática quando investigava o Jogo do Galo. Foi repreendido: “Aqui na aula só nos ocupamos de assuntos matemáticos.” A sua opinião, muitos anos depois, continuava a ser a de que o Jogo do Galo é um ótimo instrumento didático, que permite leccionar sobre vários temas curriculares de uma forma agradável. Além disso, frisava, “quem não conhece este jogo?”

Interessado em magia desde cedo, publicou muitos artigos e livros nesta matéria, mantendo-se sempre um elemento activo na respectiva comunidade.

O reconhecimento a Martin Gardner é geral, mas dos matemáticos e dos mágicos ele recebe um carinho especial.

Martin Gardner foi homenageado no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa, aquando da “Noite do Professor”, em 7 de Setembro passado. Esta homenagem incluiu uma exposição, um conjunto de actividades dinamizadas por vários matemáticos e um espectáculo de magia¹.

Desde 1993 que se realiza regularmente em sua honra, em Atlanta, nos EUA, um encontro sobre Matemática Recreativa e Magia. Trata-se do “Gathering for Gardner” (G4G) que recentemente realizou a sua nona edição (G4G9), em Março de 2010. O principal responsável é Tom Rodgers, sendo a última comissão organizadora composta também pelo matemático E. Berlekamp e pelo mágico M. Setteducati.



O logótipo do G4G9

Um encontro de índole semelhante começa a ganhar corpo na Europa, realizando-se nos anos ímpares em Portugal. O “Recreational Mathematics Colloquium I” aconteceu na Universidade de Évora, numa organização conjunta com a Associação Ludus e a SPM (<http://ludicum.org/rm09/>). A próxima edição é já em 2011 (<http://ludicum.org/rm11/>).²

¹http://wvomat.mat.fc.ul.pt/~jusilva/Gardner_no_PC/index.html

Curvas numa bola de bilhar solitária

Como é que se movem um berlinde, um planeta e uma bola de bilhar? Quando o astro se despe de mares e montanhas, as diferenças são poucas, como Newton postulou... O tamanho não interessa! Mas, se a bola escorrega na mesa de pano, as curvas são outras. Jogue bilhar de sofá e saiba das equações que mostram o *como* e o *porquê*.

Uma bola de bilhar pode descrever curvas complicadas sobre a mesa de jogo. O bilharista experiente sabe disso e treina intensamente os pormenores técnicos de controlo dessas curvas: a posição do corpo, dos braços e mãos que produzem a tacada, a inclinação do taco, o ponto de ataque na bola, a força adequada e o modo de a exercer; se a coisa corre mal, se a trajectória não for a pretendida, repete e altera quanto basta. Uma prática e uma arte experimentais de que aqui se mostram alguns fundamentos teóricos.

Face à complexidade do jogo, o objectivo deste artigo é bem modesto: deduzir as equações das curvas descritas por uma bola de bilhar na ausência de choques com tabelas e outras bolas. Para isso será preciso vasculhar um pouco as leis da Mecânica Clássica tal como foram descobertas por Newton nos seus *Principia* (1687), apuradas matematicamente por Euler, nos seus tratados *Mecânica* (1736) e *Teoria do Movimento dos Corpos Rígidos* (1765) e levadas no séc. XIX à forma que hoje conhecemos. Na parte introdutória, já a seguir, não poderiam faltar referências ao sistema planetário pois foi ele a motivação central de Newton e dos que se lhe seguiram.

Se não estiver muito vento, experimente lançar ao ar uma bola – pode ser um berlinde ou uma bola de futebol, de bilhar ou de basquete – e observe dois fenómenos: o seu centro descreve a tradicional trajectória parabólica de ascensão e queda dos graves

e a bola roda segundo um eixo de direcção *fixa* no espaço, eixo esse *fixo* relativamente à própria matéria da bola. Por muitos trejeitos que faça no lançamento, o resultado é garantido, *q.b.*, caso a sua bola não tenha assimetrias muito pronunciadas e as velocidades que lhe imprima não sejam muito elevadas.

De facto, a bola não está sujeita apenas à força da gravidade; ela desloca-se num fluido, o ar, que exerce sobre a sua superfície forças subtis e complexas cujos efeitos os bons jogadores (de ténis, de futebol, de baseball) sabem controlar. A velocidades baixas, tais forças são negligenciáveis, mas um pontapé violento e com efeito numa bola de futebol fá-las intervir de modo decisivo, determinando trajectórias torças do centro da bola e alterações do eixo de rotação. O futebol lunar vai ser muito menos interessante!

A mesma experiência, quando feita com um objecto bem assimétrico – como um pau toscos, um disco, um martelo ou uma bola de rãguebi – que repetidamente se arremesse com força, tem resultados algo diferentes; a trajectória parabólica, ainda vá, mas a rotação tem o seu quê de caótico: varia de aspecto dum lançamento para outro, é difícil discernir *um* eixo de rotação, muitas vezes rodam bamboleando-se... Quanto mais toscos, mais toscamente voam, aparentemente sem regras. Parece, mas não é assim: há leis bem definidas do movimento de qualquer sólido, matematicamente muito interessantes e difíceis, de que vamos falar.

Para medir posições de pontos em movimento, e suas velocidades e acelerações, vai ser preciso um sistema de referência, $Oxyz$, ortonormado, com orientação directa, e que possamos considerar “em repouso”. Cada ponto P é então identificado pelo seu vector posicional OP ; a sua velocidade, denotada \vec{v}_P , é a derivada de OP (em ordem ao tempo) e a sua aceleração é a derivada de \vec{v}_P . Note que o “repouso” é um conceito relativo: o nosso referencial pode estar em repouso relativamente à Terra, mas ela roda em torno do seu eixo e orbita o Sol, que por sua vez orbita o centro da Via Láctea, e esta dirige-se sabe-se lá para onde, em direcção a Andrómeda. O que verdadeiramente interessa é podermos supor, para efeitos práticos, que as leis de Newton se aplicam ao nosso referencial.

A notação $\vec{u} \wedge \vec{w}$ representa o produto vectorial dos vectores \vec{u} e \vec{w} . Recorde-se que a definição é dada de modo a que $i \wedge j = k$, onde i, j, k denotam, como habitualmente, os versores dos eixos Ox, Oy, Oz , respectivamente.

Numa abordagem simplificada, podemos definir *sistema material* como agregado dum número finito de pontos materiais, P_1, P_2, \dots, P_n com massas m_1, m_2, \dots, m_n concebidos como os *átomos* que o constituem. O *baricentro*, ou *centro de massa*, do sistema é o ponto G dado por $mOG = m_1OP_1 + m_2OP_2 + \dots + m_nOP_n$, onde m é a massa total do sistema. A ideia dum sólido ou dum fluido como um contínuo de matéria é uma abstracção matemática à qual aplicaremos, sem complexos, as conclusões a seguir descritas, apesar das dificuldades teóricas que o contínuo sempre levanta.

A primeira Lei. Derivando duplamente ambos os membros da equação definidora de G e aplicando a cada átomo a famosa segunda lei de Newton do movimento dos corpos, obtemos a equação diferencial

$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{R}_e$$

onde \vec{R}_e designa a resultante das forças que, *do exterior*, se exercem sobre o sistema. De acordo com a referida lei newtoniana, a equação diferencial em destaque lê-se assim: *o baricentro move-se como se fosse um ponto material de massa igual à massa total do sistema, actuado pela resultante das forças exteriores que se exercem sobre o sistema*. Este enunciado, a que costuma chamar-se *primeira lei universal da Mecânica*, mostra que o baricentro é um centro dinâmico do sistema, e esta centralidade dinâmica é reforçada por uma segunda

lei explicada mais adiante. Um momento-chave da demonstração acima esboçada é o facto de a resultante da *totalidade* das forças aplicadas em pontos do sistema ser igual à resultante das forças exteriores, e apenas dessas, pois a terceira lei de Newton (a da *acção e reacção*) implica o cancelamento das forças geradas *no interior* do sistema. As forças interiores não contribuem, pois, para a trajectória do baricentro. Para ilustrar, pensemos num veículo que se desloca no espaço sideral, na ausência de forças exteriores, e que em determinado momento explode, por forças internamente geradas. Como a resultante das forças exteriores é sempre nula, a velocidade do baricentro tem derivada sempre nula, pelo que ele se desloca com movimento rectilíneo uniforme; a explosão fragmenta o sistema, os estilhaços e gases da explosão seguem os mais diversos caminhos, mas o baricentro do sistema de todas essas partículas migrantes segue sempre com velocidade constante.

Rotação dum sólido. De acordo com Euler, o movimento dum sólido pode decompor-se em dois: um movimento do seu baricentro G , dito de translação de G , e uma rotação do sólido em torno de G . A expressão “rodar em torno de G ” designa um movimento do sólido em que G se supõe fixo, melhor dizendo, um movimento observado no referencial $Gxyz$, dito *baricêntrico*, que tem origem G e eixos paralelos aos do nosso referencial “em repouso”; neste novo referencial, que acompanha o sólido no seu movimento, o baricentro está imóvel.

Imagine uma esfera que se move, mantendo-se imóvel o seu centro. Por muito caótico que o movimento seja, vale o seguinte teorema, também de Euler: se, em certo instante, algum ponto da esfera se move, *existem exactamente dois pontos da sua superfície que estão imóveis, e esses pontos são antípodas*; eles determinam o chamado *eixo instantâneo* de rotação da esfera. O teorema permite definir, de modo óbvio, *eixo instantâneo* de rotação de qualquer sólido em torno do seu baricentro.

Uma câmara de filmar que faz um grande plano numa bola de futebol, seguindo-a no seu movimento, ilustra bem o referencial baricêntrico. Em imagens televisivas obtidas por este método, é perceptível o eixo de rotação baricêntrica e as suas variações complexas provocadas pelo atrito do ar.

Vá a um bazar e traga de lá um giroscópio, brinquedo fascinante para os miúdos e para quem

gosta destas coisas. Faça-o girar com rotação rápida em torno do seu eixo de revolução; segure-o com uma mão em cada chumaceira (a negro, na Figura 1) e force o eixo de simetria de revolução a rodar como na figura; nesta situação, o eixo de rotação euleriano não coincide com o eixo de revolução, pois este está em movimento!

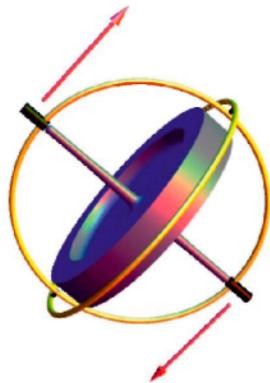


Figura 1

Daqui em diante, chamamos *eixo* dum sólido a qualquer recta que passa pelo baricentro. Admitamos, provisoriamente, que G está imóvel e que o sólido roda em torno dum eixo ε , com rotação uniforme; cada ponto seu tem uma trajectória circular num plano perpendicular a ε (como na Figura 2) descrita com uma certa velocidade angular ω (medida em radianos por segundo), que é a mesma para todos os pontos do sólido. O vector rotação do sólido, denotado por $\vec{\omega}$, define-se assim: tem módulo ω , tem a direcção do eixo de rotação e o sentido é o da progressão dum saca-rolhas rodando como roda o sólido. Tudo foi preparado para que a velocidade de P seja dada por $\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{GP}$. Esta fórmula vale, também, para o caso geral em que o movimento de rotação não é uniforme, isto é, quando ω varia quer em módulo, quer em direcção e sentido. A decomposição euleriana do movimento do sólido numa translação de G e uma rotação em torno de G pode, agora, exprimir-se de modo preciso: a velocidade de cada ponto P é soma de duas: a de G e a velocidade de rotação em torno de G . Em símbolos: $\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GP}$.

A segunda Lei. Quando um sistema não é sólido, o conceito de rotação não é, em geral, viável; o nosso Sistema Solar mostra isso com muita clareza: cada

astro, dentre Sol e planetas, mesmo não sendo sólido, move-se à sua maneira em torno do seu baricentro doméstico, não havendo uma rotação comum concertada. Esses casos não sólidos suscitaram uma generalização muito eficaz do conceito de rotação. O *momento angular* dum ponto material P relativamente a um ponto O é o vector $\vec{OP} \wedge m_P \vec{v}_P$. Isto estende-se com naturalidade a qualquer sistema material: o *momento angular dum sistema* relativamente a O é a soma dos momentos angulares relativos a O dos pontos que o constituem. Note que o momento angular depende muito do ponto O de onde se observa o movimento.

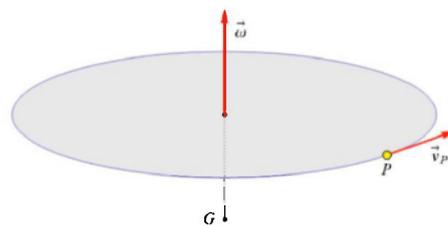


Figura 2

Imagine-se num aeroporto vendo aviões levantar voo. Numa posição bem escolhida está um avião, muito ao longe, parecendo *imóvel a seus olhos*, mas que você sabe que se afasta rapidamente; nesses instantes, o momento angular, relativamente a si, é nulo. De repente, a pequena imagem do avião sobe verticalmente como que arrancada do chão; então, o momento angular é um vector horizontal apontando para a sua direita.

Dada uma força \vec{F}_P aplicada em P , a sua *torção a respeito de O* é, por definição, o vector $\vec{OP} \wedge \vec{F}_P$, para certo sistema, à soma das torções de todas as forças aplicadas nos seus pontos chamamos *torção dessas forças a respeito de O* . Pela segunda equação de Newton é óbvio que, relativamente a O , a *derivada do momento angular de P iguala a torção da força aplicada em P* .¹ Somando tudo, como de costume, prova-se a *segunda lei universal da Mecânica: relativamente ao ponto O , a derivada do momento angular é igual à torção das forças exteriores*. Após mais um esforço, não muito, vem a parte mais interessante da segunda Lei, o reforço anunciado do protagonismo dinâmico do baricentro:

A derivada do momento angular relativamente ao baricentro é igual à torção das forças exteriores relativamente ao baricentro!

¹Na prova, tenha em conta a fórmula de derivação: $(\vec{u} \wedge \vec{v})' = \vec{u}' \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v}'$

100
95
75
25
5
0

Note o sumiço de cena das forças interiores ao sistema, que não surpreende quem já assistiu ao cancelamento dessas forças no caso da primeira Lei. Mas, agora, é preciso supor algo mais: que a acção dum ponto do sistema sobre outro e a correspondente reacção se exercem segundo a recta que une os ditos pontos. Estas duas leis universais são frequentemente denominadas por *Leis de Euler*, apesar de Newton estar bem presente na primeira e de, na segunda, a formulação usada ser posterior a Euler.

Note que o baricentro é uma espécie de média pesada das posições dos pontos dum sistema. Se numa certa zona restrita do sistema se concentra grande parte da massa total, é caso para conjecturar que o baricentro deve andar nas imediações dessa zona. Como exemplo, podemos perguntar-nos: por onde é que anda o baricentro do Sistema Solar? Sabendo nós, como hoje sabemos, que o Sol tem mais de 99,8% da massa total do Sistema, e que ele mais os quatro gigantes gasosos, Júpiter, Saturno, Urano e Neptuno, têm mais de 99,99% da massa total, para efeitos práticos, o baricentro está “no Sol”. Se desprezarmos a influência gravitacional das estrelas da nossa e das outras galáxias, o baricentro, o Sol, desloca-se em movimento rectilíneo uniforme no espaço sideral, e os planetas lá vão atrás dele, orbitando em seu redor. Em 1543, Nicolau Copérnico propôs o seu sistema heliocêntrico pela *simplicidade geométrica* da descrição dos movimentos planetários. As leis de Newton e Euler deram à centralidade do Sol um estatuto de maior nobreza, ao proclamarem-no como centro dinâmico do nosso Sistema.

O baricentro do Sistema não está no centro do Sol; a distância entre estes dois pontos varia, principalmente, de acordo com as posições dos quatro gigantes gasosos; no seu maior afastamento do centro solar, que ocorre na conjunção dos gigantes, o baricentro fica a cerca de um raio solar da superfície do Sol. Para observadores de outras estrelas, os planetas poderão não ser visíveis, mas o Sol aparenta uma vibração em torno de uma posição intermédia, o nosso baricentro. Foram vibrações deste tipo os primeiros indícios que os terráqueos tiveram (em 1992 e hoje confirmados) da existência de planetas extra-solares, já previstos por Giordano Bruno, que pagou com a vida, e, passado um século, por Newton; a nossa tecnologia não consegue, por ora, olhar uma estrela e medir eventuais

acelerações *angulares* causadas por planetas que a orbitem; o que medimos (por efeito *Doppler*) são as acelerações longitudinais de certas estrelas, as quais adquirem, só por isso, o estatuto de centros de sistemas planetários. Hoje existem imagens infravermelhas de planetas extra-solares, mas a maior parte deles são, ainda, fantasmas.

O Sol desloca-se, tremendo, rodeado pelo seu séquito de planetas, em direcção à constelação Hércules e assim será durante toda a nossa vida e mais umas dezenas de milhares de anos. Porém, as forças gravitacionais do centro da Via Láctea implicam um lento encurvamento desta trajectória; o nosso ápex arredar-se-á de Hércules, e levaremos uns 230 milhões de anos a dar a ‘volta inteira’ à Galáxia...

Estes exemplos e os que se seguem ilustram a grande latitude de aplicação das leis da Mecânica Clássica: elas valem na escala do muito pequeno, para sistemas de grãos de areia, berlindes e bolas de bilhar, e na escala do muito grande, para sistemas de planetas e estrelas, de galáxias e enxames de galáxias. Uma regra de ouro a ter em conta é a de que as velocidades envolvidas sejam bem menores do que a velocidade da luz...

Movimento dum sólido. Vamos considerar um corpo sólido e os seus *eixos*, isto é, as rectas que passam pelo baricentro. Numa rotação de eixo ε , o momento angular (relativamente a G) é uma função da rotação $\vec{\omega}$, de estrutura difícil de descrever. Os casos mais simples de tratar são aqueles em que ε é um *eixo de simetria* do sólido², como na Figura 3; nesses casos, o momento angular está alinhado com o eixo, ou seja, o momento é da forma $I_\varepsilon \vec{\omega}$, onde I_ε é uma constante positiva, chamada *inércia* do sólido relativamente ao eixo em causa.³

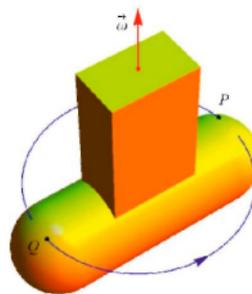


Figura 3

² Isto significa que, para cada ponto P do sistema, o ponto Q oposto a P a respeito do eixo ε (PQ ortogonal a ε) também pertence ao sistema, e P e Q tem a mesma massa. Trata-se, aqui, de simetria *material* e não apenas geométrica. Nesta acepção, uma esfera não homogénea pode bem não ter eixo de simetria nenhum.

³ Basta provar para subsistemas de dois átomos de massas iguais, em posições axialmente opostas, como P e Q na figura. Depois, tenha-se em conta que um sistema material simétrico é reunião de pares de pontos como P e Q .

Defina *corpo esférico* como um sólido limitado cujos eixos são todos de simetria e divirta-se a provar que um tal corpo não é mais do que uma esfera cuja massa específica depende apenas da distância ao centro. Intuitivamente, trata-se duma união de cascas esféricas concêntricas (como uma cebola), em que cada casca é homogénea, podendo cascas distintas ter 'densidades' distintas. Assim, a segunda Lei é particularmente simples para um corpo esférico:

$$\frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \vec{\mathfrak{T}}_e$$

onde $\vec{\mathfrak{T}}_e$ denota a torção das forças exteriores relativamente a G , e I é a inércia comum a todos os eixos. Isto vale para berlindes e bolas de futebol, de basquete, de bilhar e outras.

Já podemos dar a explicação matemática do comportamento da bola lançada ao ar no início do artigo. O movimento parabólico do baricentro é consequência óbvia da primeira Lei e da uniformidade implicitamente assumida do campo gravítico. Para qualquer sólido, é nula a torção relativamente a G das forças gravíticas, dada a uniformidade do campo. Portanto $I\vec{\omega}$ tem derivada nula, e $\vec{\omega}$ é constante!

Imaginemos a Terra como se fosse um corpo esférico no espaço sideral. As forças exteriores devem-se a campos gravíticos, principalmente os do Sol e da Lua. Também neste caso a simetria esférica implica o anulamento da torção das forças exteriores relativamente ao centro da Terra. A segunda Lei determina, pois, que este esférico ideal tem uma rotação uniforme em torno dum eixo fixo. A realidade não anda muito longe disto, mas a Terra não é bem um corpo esférico, sendo o achatamento nas zonas polares o desvio de esféricidade mais notório. Esta assimetria produz, relativamente ao centro da Terra, uma torção não nula das forças de atracção que sobre nós se exercem, suficiente para provocar um movimento muito lento, mas sistemático, do Eixo do Mundo.⁴ Esse movimento, dito de *precessão do eixo*, ou *dos equinócios*, foi descoberto empiricamente por Hiparco de Rodas (séc. II a.C.), considerado por muitos o maior astrónomo da Antiguidade; após Newton e Euler, foi possível explicá-lo à luz das leis da Mecânica.

⁴Hoje, a Estrela Polar indica-nos o norte, por estar, mais coisa menos coisa, na direcção do eixo de rotação da Terra e, por isso, parecer quase imóvel no movimento diurno da Esfera Celeste. Com o deslocamento do nosso eixo, daqui a uma dúzia de milénios, a Polar estará muito longe do Pólo Norte celeste e muitos não perceberão porque é que lhe deram o nome que talvez ainda tenha. Faltará, então, outra dúzia de milénios para voltar à sua posição de privilégio.

Use o giroscópio que comprou por ocasião da Figura 1, e repita a manobra aí recomendada: segure-o com uma mão em cada chumaceira negra, *com delicadeza*, e procure rodar-lhe o eixo no plano da figura. Enquanto mantém o eixo em repouso, $\vec{\omega}$ mantém derivada nula e tudo permanece em paz; mas, mal começa a sua tentativa de rodar o eixo, o giroscópio reage como se tivesse vontade própria, teimando em não lhe obedecer: mostra querer rodar o eixo num plano perpendicular àquele que você pretende! A justificação está na segunda Lei de Euler: o binário que você exerce tem torção $\vec{\mathfrak{T}}_e$ perpendicular ao plano da figura e, sendo a torção a derivada do momento, Euler manda que o momento tenda a alinhar-se com a normal ao plano do binário. Isto é apenas o prelúdio duma análise rigorosa que deixo a seu cargo. O mesmo argumento serve para o irmão pobre do giroscópio, um pião rodando velozmente com o bico assente no solo: o binário é o exercido pelo peso e pela correspondente reacção do solo, e o pião responde fazendo rodar o seu eixo de simetria em torno dum eixo vertical; chama-se a isto *precessão do eixo* e o aspecto geral é a rotação bamboleante típica do pião.

A Terra é um grande pião e um grande giroscópio... O movimento de precessão do nosso eixo é tal e qual o de precessão de qualquer dos dois brinquedos. E a causa é análoga: a Terra é uma esfera bojuda e o Sol (em particular) atrai mais fortemente o bojo equatorial mais próximo dele do que o mais distante, o que origina uma torção não nula causadora da precessão terrestre.

A elevada dificuldade da teoria do movimento dos sólidos permite apenas, neste texto, breves notas ilustrativas. As formulações recentes, gizadas no séc. XIX, entroncam na teoria das quádras e na dos valores e vectores próprios de matrizes simétricas reais.

De um modo geral, a cada sólido está associado um elipsóide homogéneo, solidário com o sólido, com o mesmo baricentro e com a mesma massa, tal que o *comportamento dinâmico* do sólido é exactamente o mesmo que o desse elipsóide. Quer dizer, quando actuado por um certo sistema de forças exteriores, o sólido move-se tal e qual como se moveria o elipsóide sujeito às mesmas forças. Podemos, pois, em vez de sólidos, reduzir o estudo aos elipsóides (homogéneos). Em particular, as inércias I_x são, para

cada eixo, as mesmas para o sólido e para o seu elipsóide.

Os sólidos podem, assim, classificar-se de acordo com os correspondentes elipsóides; aqueles cujo elipsóide é esférico costumam designar-se por *peões esféricos*. Exemplos de peões esféricos são os sólidos esféricos acima definidos e os sólidos platónicos homogéneos! Portanto, se atirar um cubo perfeito ao ar (basta um cubo de Rubik), ele rodará como uma bola de bilhar, em torno dum eixo fixo; com rotações rápidas, a fixidez do eixo é notória. A Figura 4(a) simula um cubo em rotação rápida; trata-se da sobreposição de 20 imagens do cubo rodando em torno dum seu diâmetro; já se vislumbra a envolvente de todas as imagens possíveis constituída por dois cones e um hiperbolóide de revolução. A Figura 4(b) é sobreposição de 200 imagens do dito cubo rodando em torno dum eixo genérico; a envolvente é, também aqui, união de hiperbolóides. O que interessa observar a olho nu é que, no sistema baricêntrico, as cristas circulares da envolvente não variam com o tempo em cada lançamento do cubo ao ar, o que mostra tratar-se dum peão esférico.

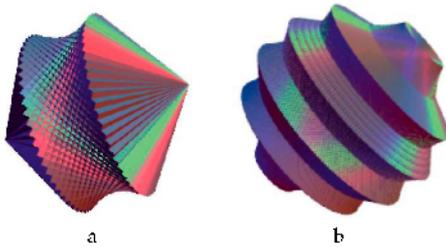


Figura 4

Um eixo diz-se de *rotação livre* se, lançado o sólido no espaço, sem forças exteriores e com rotação inicial em torno desse eixo, a rotação se mantém, uniforme, em torno desse eixo. Um corolário da teoria euleriana é que um eixo é de rotação livre se e só se uma rotação em torno desse eixo produz um momento angular alinhado com o eixo. Mais ainda, os eixos de rotação livre são precisamente os eixos de simetria do elipsóide associado.

Experimente lançar no espaço uma bola de rãguebi, ou um disco de atletismo, procurando gerar uma rotação muito rápida em torno do seu eixo de revolução. E difícil conseguir uma rotação inicial em torno desse eixo mas, caso consiga, o objecto segue com rotação uniforme em torno dele. Nas suas tentativas, o que geralmente observa é um movimento “bamboleante”.

A mesma experiência feita com um *frisbee* de praia tem resultados melhores para a nossa auto-estima porque, no disco de praia, com peso e configuração que amplificam o efeito aerodinâmico, o movimento “bamboleante” tende a desaparecer em pouco tempo. Não é raro que um lançamento muito fraco acabe por se transformar, na parte final da trajetória, num voo magnífico.

Em 1834, Louis Poincot deu uma descrição geométrica completa de todas as possibilidades de movimentos de sólidos supondo nula a torção das forças exteriores. A descrição dos *movimentos de Poincot* (como os dos asteróides à solta) é muito interessante mas, aqui, só há espaço para o caso em que os sólidos cujos elipsóides são de revolução, como são os casos da bola de rãguebi e do disco de atletismo. Matematicamente, movimento *bamboleante* é o de um sólido que roda uniformemente em torno do eixo r de revolução do seu elipsóide, enquanto este eixo, por sua vez, roda em torno de outro eixo, o eixo de precessão. Na Figura 5, $\vec{\omega}_r$ denota a rotação em torno de r e $\vec{\omega}_p$ é a precessão. Os movimentos de Poincot são todos deste tipo, e Poincot deu uma relação precisa entre os valores das duas rotações $\dot{\phi}$, e $\dot{\psi}$. Note-se que esta precessão ocorre espontaneamente nos movimentos de sólidos sob torção nula; a precessão do pião e a do eixo da Terra acima descritas são forçadas por acções exteriores.

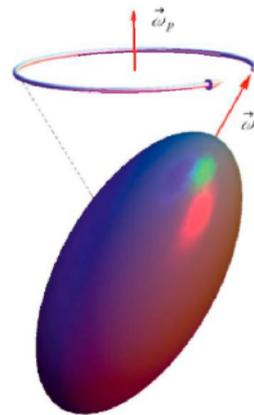


Figura 5



Figura 6

No filme "2001 Odisseia no Espaço", Kubrick e Clarke colocaram a estação espacial em rotação em torno do seu eixo de simetria (Figura 6). O dito eixo é de rotação permanente e permite gerar, por efeito centrífugo, uma gravidade artificial indispensável ao equilíbrio fisiológico da tripulação... Reveja a notável cena de *jogging*! Imagine que uma pequena perturbação exterior, momentânea, desequilibra a nave, pondo-a em movimento de Poinsot com precessão não nula; o desagradável bamboleio tem de ser corrigido de emergência... Nada que Hal não possa resolver de imediato! Mas se fosse o leitor a ter de intervir, como é que estabilizaria a nave?

Movimento duma bola de bilhar. A bola de bilhar que vai estar em jogo é uma esfera homogénea, de massa m e raio r . Conforme vimos, as leis da mecânica dão-nos, neste caso, as equações

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{\mathfrak{R}}_e \quad \text{e} \quad I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\mathfrak{T}},$$

onde $\vec{\mathfrak{R}}_e$ e $\vec{\mathfrak{T}}$ denotam, respectivamente, a resultante das forças exteriores e a torção dessas forças a respeito do baricentro G , e I é a inércia da bola relativamente a qualquer dos seus eixos. Esta inércia não é difícil de calcular; saltamos por cima dessa tarefa de rotina e indicamos o seu valor para o caso da bola de bilhar:

$$I = \frac{2}{5} mr^2.$$

A teoria das equações diferenciais diz-nos que, conhecidos os segundos membros destas equações e conhecidos os valores iniciais de \vec{v}_c e $\vec{\omega}$, denotados por \vec{V}_c e $\vec{\Omega}_c$, então existem funções do tempo, $\vec{v}_c(t)$ e $\vec{\omega}(t)$, unicamente determinadas, que satisfazem as equações e as condições iniciais: $\vec{v}_c(0) = \vec{V}_c$ e $\vec{\omega}(0) = \vec{\Omega}_c$. Por outro lado, uma vez determinada a função velocidade do centro da bola e sabida a sua posição inicial, a trajectória da bola, ou, melhor, do seu centro pode calcular-se por simples primitivação. As equações acima usar-se-ão em dois casos: na

⁵Do francês *masser*. O maço (maça, ou maçaneta) foi o antepassado do taco, de uso corrente até ao séc. XIX; quando encostada à tabela, a bola tinha de ser maçada de cima para baixo, com uma maçaneta de cauda longa e fina. Com o correr do tempo, a cauda da maça passou a utilizar-se com cada vez mais frequência para percutir a bola, dando origem ao taco moderno. O nome "cauda" para taco ainda é usado em francês, *queue*, do qual deriva o inglês *cue*.

determinação do resultado duma tacada e no cálculo da trajectória subsequente.

Tacada. Para um matemático bilharista, *tacada* é a acção duma força \vec{T} sobre um ponto da superfície da bola de bilhar, chamado ponto de *percussão* ou de *ataque* (denotado por A , sempre a amarelo nas figuras). De acordo com as regras do jogo, a bola está em repouso no início da tacada e a força \vec{T} exerce-se durante um tempo Δt muito curto (alguns milésimos de segundo). Para já, admitimos que a bola se encontra isolada no espaço, sem outras forças externas para além da tacada. Supomos, para simplificar a vida, que \vec{T} é constante durante o tempo de acção do taco; nestas condições, as equações de Euler dão-nos os seguintes valores da velocidade do baricentro e da rotação no instante Δt :

$$\vec{V}_c = \frac{\Delta t}{m} \cdot \vec{T} \quad \text{e} \quad \vec{\Omega}_c = \frac{\Delta t}{I} \cdot \vec{GA} \wedge \vec{T}.$$

A Figura 7 dá uma ideia da situação: se o eixo AB do taco passa pelo centro da bola, esta sai da tacada sem rotação; caso contrário, a recta AB e o centro da bola determinam um plano, o do equador vermelho da figura, chamado *equador da tacada*. A rotação à saída da tacada é perpendicular a esse plano.

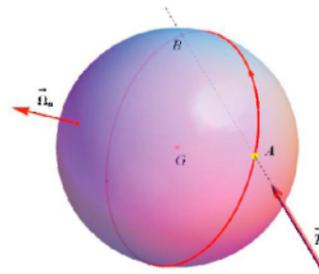


Figura 7

Com a bola assente na mesa de jogo, \vec{T} decompõe-se em duas forças, \vec{T}_H e \vec{T}_N , uma horizontal e a outra normal à mesa, ambas aplicadas no ponto de ataque, como na figura 8. A mesa reage compensando o peso P da bola e a componente \vec{T}_N . As forças exteriores têm resultante \vec{T}_H e a sua torção a respeito de G é a mesma que anteriormente. Assim, as características do movimento da bola à saída da tacada são

$$\vec{V}_c = \frac{\Delta t}{m} \cdot \vec{T}_H \quad \text{e} \quad \vec{\Omega}_c = \frac{\Delta t}{I} \cdot \vec{GA} \wedge \vec{T}.$$

A Figura 8 ilustra a técnica conhecida por *picar a bola*, utilizada sempre que se pretendem regimes elevados de rotação para baixos valores da velocidade V_c do baricentro. Ao ângulo α chamaremos *alça do taco*, sendo claro que quanto maior ela for, maior será a razão Ω_c/V_c .

Veremos mais adiante como se comporta a bola depois de executada uma tacada em *masse*,⁵ que é o nome da gíria bilharista para o caso das tacadas a pique, com alça próxima dos 90° . O leitor atento objectará que as fórmulas dadas para \vec{V}_c e $\vec{\Omega}_c$ são apenas uma primeira aproximação; em particular, alças elevadas originam grandes compressões (\vec{T}_N) da bola sobre a mesa e fortes obstáculos à rotação da bola no intervalo de tempo Δt . Adoptei as ditas fórmulas para facilitar a vida ao leitor, e a mim próprio!

Note que existem pares (V_c, Ω_c) que não podem produzir-se com uma tacada. Deixo ao leitor a determinação desses pares não admissíveis. Vamos estudar a trajectória da bola com valores iniciais $(V_c, \vec{\Omega}_c)$ quaisquer, mesmo os não produzíveis por uma tacada, pois, para além das tacadas, há outros modos de obter velocidades e rotações, nomeadamente através de choques.

Após uma tacada, as únicas forças a considerar são as de atrito do pano, pois o peso da bola é compensado pela reacção da mesa, e as duas, conjuntamente, têm resultante e torção nulas.

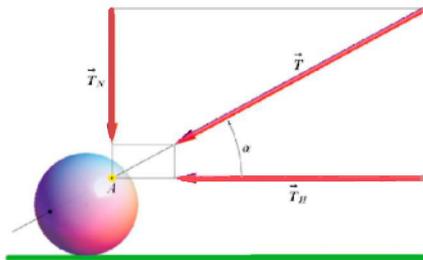


Figura 8

Travagem exponencial. Quando as superfícies de dois materiais se tocam e se movem uma sobre a outra, surgem forças que se opõem a esse movimento. Elas dependem de tantos factores e tão complexos (acções electromagnéticas e de coesão molecular, o granulado das superfícies e as interacções físicas e químicas das

duas substâncias) que as forças de atrito não podem extrair-se de princípios gerais. É preciso, em cada caso, escolher um modelo de atrito à medida das circunstâncias. No bilhar vamos adoptar o modelo *linear de atrito de escorregamento*. Porquê? Porque as previsões que o modelo implica por via lógica estão razoavelmente de acordo com o que a realidade mostra.⁶ Devo confessar outra razão, menos nobre, para tal escolha: os modelos não lineares são tremendamente difíceis de tratar! Admitamos que uma caixa de massa m é lançada sobre uma mesa plana horizontal, com uma certa velocidade inicial \vec{V}_c , como na Figura 9. Postula-se que o escorregamento da caixa sobre a mesa origina, em cada instante, uma força de atrito proporcional e oposta à velocidade \vec{v} da caixa (a velocidade *do baricentro*, claro); a força de atrito \vec{f} tem, pois, uma expressão do tipo $\vec{f} = -\mu\vec{v}$, onde μ é um número positivo, o *coeficiente de atrito*. O movimento de travagem da caixa é regido pela primeira Lei, $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu\vec{v}$, a qual implica que o movimento se faz numa trajectória rectilínea e que o módulo v da velocidade verifica

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m} v.$$

Há apenas uma função $v=v(t)$ que satisfaz esta condição e que toma o valor V_c no instante $t=0$, nomeadamente

$$v = e^{-\mu t/m} V_c.$$

Portanto, a velocidade da caixa diminui exponencialmente com o tempo e tende para zero, mas nunca se anula! Esta *travagem sem paragem* é uma característica pouco realista do modelo linear de atrito, mas há que conviver com ela por mais umas páginas.⁷



Figura 9

⁵Refira-se aqui o modelo de atrito aerodinâmico proporcional ao quadrado da velocidade, um dos dois propostos por Newton. O modelo popularizou-se e terá criado a crença na impossibilidade do voo de máquinas feitas pelo homem e gerado algum atraso na história da aviação. Foi abandonado por não condizer com a realidade, o modelo linear ganhou acolhimento e a história acabou bem.

⁷Um remédio para este desacerto é o abandono do modelo linear em curso. Como isso deita fora as suas virtudes, prefiro manter o modelo e adoptar um critério de paragem muito popular: a caixa declara-se como "parada" quando a velocidade é inferior a um certo valor 'pequeno' prescrito.

As curvas do bilhar. Na bola de bilhar, a força de atrito exerce-se no ponto C , o ponto da bola em contacto com a mesa (cf. Figuras 10 e 11). Portanto, a velocidade de C , que Euler nos diz ser $\vec{v}_c = \vec{v}_o + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, onde \vec{r} denota \vec{GC} , é que determina o atrito. Repare-se que \vec{r} é um vector constante. Temos então

$$\vec{f} = -\mu(\vec{v}_c + \vec{\omega} \wedge \vec{r}).$$

Posto isto, o problema a resolver é o da determinação de duas funções vectoriais do tempo, $\vec{v}_c = \vec{v}_c(t)$ e $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$, que satisfazem as condições

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}_c}{dt} &= -\mu(\vec{v}_c + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) & I \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= -\mu \vec{r} \wedge (\vec{v}_c + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) \\ \vec{v}_c(0) &= \vec{V}_o & \vec{\omega}(0) &= \vec{\Omega}_o. \end{aligned}$$

onde $I = \frac{2}{5}mr^2$ como se indicou. As duas primeiras condições podemos chamar *equações do bilhar*; as duas ultimas são as indispensáveis *condições iniciais*. O problema é simples de resolver analiticamente porque, por detrás da notação vectorial jaz escondido um sistema de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes, ao alcance dos alunos dum segundo ano de cálculo. No entanto, a seguinte abordagem geométrica é ainda mais simples. A força de atrito f varia com o tempo e a sua derivada é fácil de calcular a partir da sua expressão acima; combinando com as equações do bilhar, obtemos a equação

$$\frac{df}{dt} = -\frac{7\mu}{2m} f$$

que é tal e qual a de travagem exponencial estudada antes, com solução pronta a servir:

$$\vec{f}(t) = e^{-ct} \vec{f}(0),$$

onde $c = 7\mu/2m$ e $\vec{f}(0) = -\mu(\vec{V}_o + \vec{\Omega}_o \wedge \vec{r})$. Conclusão: a intensidade da força de atrito tende exponencialmente para 0, mantendo sempre a direcção e o sentido do seu valor inicial $\vec{f}(0)$. Uma vez determinado o valor explícito de $\vec{f}(t)$, a solução formal obtém-se sem dificuldades.

Trajectórias. Está, pois, determinada explicitamente a evolução da força de atrito ao longo do tempo. Para calcular a aceleração de G , basta dividir \vec{f} por m . Portanto, a velocidade do baricentro é a função que tem como derivada \vec{f}/m , e tem como valor inicial \vec{V}_o . Se \vec{V}_o e $\vec{\Omega}_o \wedge \vec{r}$ são paralelos, \vec{V}_o e \vec{f} também são paralelos e a nossa vida fica bem simples,

pois o baricentro tem um movimento rectilíneo. Ora, no caso geral, o baricentro tem trajectórias curvilíneas cuja determinação é melhor que passe pela selecção dum referencial adequado na mesa de jogo. Escolhemos um sistema cartesiano com origem no centro da bola e versores $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, em que \hat{e}_1 é o versor de \vec{V}_o , \hat{e}_3 é o versor da vertical ascendente e $\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1$. Aos versores $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ associamos as variáveis x_1, x_2, x_3 . As trajectórias do baricentro serão dadas por equações paramétricas, do género

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \end{cases}$$

onde φ_1 e φ_2 são funções a determinar. Note-se que a velocidade do baricentro é, em notação cartesiana $\vec{v}_c = (x'_1, x'_2, x'_3)$. Portanto, as equações do bilhar envolvem as coordenadas x_1, x_2, x_3 e as suas derivadas até à segunda ordem; a sua resolução, por qualquer método, conduz às coordenadas paramétricas das trajectórias: fixados os valores das constantes físicas do jogo, m, r e μ , cada sistema de condições iniciais (posição, velocidade e rotação) produz uma curva única.

As expressões de $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ até nem são muito complicadas, só que escrevê-las com este processador de texto seria como voar no parafuso de Leonardo... Em vez de insistir nas fórmulas, que utilizei na execução dos desenhos abaixo, prefiro continuar a discussão no contexto geométrico, com maior apelo intuitivo e com algumas ideias e teoremas matemáticos que talvez interessem à *afición* bilharista.

Rotações elementares. Recorde-se como, para cada par inicial $(\vec{V}_o, \vec{\Omega}_o)$, se instituiu um sistema cartesiano ortonormado $0x_1x_2x_3$, fixado na mesa de jogo, com origem coincidente com G no instante $t=0$.

As Figuras 10 e 11 representam a bola a ser percutida pelo taco, mostrando o que se vê do lado de quem joga: o centro da bola está sobre a folha de papel e a bola vai mover-se para o lado de lá da folha; a velocidade \vec{V}_o e o seu versor \hat{e}_1 são perpendiculares à folha, pelo que o mesmo acontece com o plano da mesa (a traço grosso verde); o versor \hat{e}_3 é vertical e aponta para cima e \hat{e}_2 aponta para a esquerda.

De acordo com isto, decomposmos a rotação inicial numa soma de três vectores, chamados *rotações, ou efeitos elementares*

Construções sem régua

Na escola, a professora propõe o seguinte problema: dados três pontos A, B, Q no plano, indiquem como construir com régua e compasso o pé da perpendicular por Q à recta AB . O Afonso esqueceu-se da régua em casa. Será que ele pode construir o referido ponto somente com o compasso?

Caro Leitor,

Nesta edição vamos analisar alguns exercícios interessantes que se podem colocar a estudantes e professores de qualquer nível de ensino. Na verdade, este tipo de questões acompanhou a própria evolução da matemática.

A perspectiva que utilizamos nesta exposição é construtiva, pelo que o “fazer matemática” vai estar aqui bem presente. Como vantagem adicional temos que as demonstrações se fazem vendo o resultado, sem obviar as questões de existência. Ficará claro que trabalharemos o conceito, indicaremos as ideias fundamentais e definiremos os objectivos a resolver com uma técnica que julgamos ao alcance dos nossos leitores.

Na academia de Platão, como se sabe, todas as construções geométricas tinham de ser feitas com régua e compasso. A investigação do que com eles se pode construir promoveu muito o desenvolvimento de várias áreas da matemática.

No entanto, um milénio e meio mais tarde, o dinamarquês Georg Mohr (1672; trabalho redescoberto em 1928) e, independentemente, o italiano Lorenzo Mascheroni, em 1797, provaram que toda a construção geométrica executável com compasso e régua é executável somente com o compasso.

Uma recta é definida por dois pontos e uma circunferência pelo centro e raio. Na teoria clássica das construções geométricas são-nos dados uma régua e um compasso sem escalas quaisquer e dois pontos. Construir um novo ponto significa obtê-lo como:

- Intersecção de duas rectas ou
- Intersecção de uma recta e uma circunferência ou ainda
- Intersecção de duas circunferências.

Na teoria das construções sem régua, segundo Mohr e Mascheroni, não podemos traçar nenhuma recta; mas dela são sempre visíveis pelo menos dois pontos. Construir um novo ponto significa obtê-lo como intersecção somente de duas circunferências. Devemos então mostrar como reduzir a construção dos dois primeiros tipos de pontos ao terceiro tipo, i.e. à intersecção de circunferências.

Lema 1. Dados dois pontos AB , é possível construir um terceiro ponto E tal que B é o ponto médio do segmento $[AE]$.

Prova. Ver Figura 1. Seja $r=|AB|$. Tracem-se as circunferências $C_1=C(A,r)$, (de centro A e raio r) e $C_2=C(B,r)$. Sejam C, D os pontos de intersecção destas circunferências: $\{C, D\}=C_1 \cap C_2$. Então o triângulo $\Delta[ABC]$ é equilátero.

Logo, o arco $C^{\circ}D$ define $2\pi/3$ radianos. Seja $C_3=C(C, |CD|)$. Então define-se por $\{D, E\}=C_3 \cap C_2$ um ponto E tal que $C^{\circ}E \subset C_3$ define também $2\pi/3$ radianos. Decorre que $A^{\circ}E = A^{\circ}C + C^{\circ}E = \pi/3 + 2\pi/3 = \pi$. Isto significa que A e E são diametralmente opostos a B , e assim obtemos o resultado desejado.

A construção proposta foi feita com vista já posta no lema 2. Se só precisávamos do ponto E , ele podia ser encontrado usando apenas C_2 .

Canto Delfico

[Construções sem régua]

Problema 1. Como?

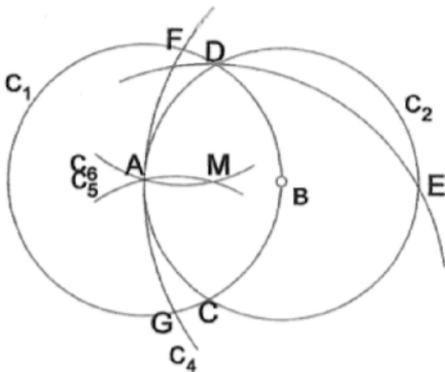


Figura 1

Lema 2. Dados dois pontos A, B , é possível construir o seu ponto médio M .

Prova (esboço). Diremos como construir M (cf. Figura 1).

- i. Com base na construção do lema 1, trace-se $C_i = C(E, |AE|)$ e defina-se $\{F, G\} = C_1 \cap C_i$.
- ii. Tracem-se as duas circunferências simétricas relativamente à recta l_{AB} dadas por $C_3 = C(G, |AG|)$ e $C_4 = C(F, |AF|)$.
- iii. Defina-se $M = (C_3 \cap C_4) \setminus \{A\}$.

Problema 2. Mostrar que M é o ponto médio do segmento $[AB]$.

Lema 3. Seja l uma recta e $P \notin l$ um ponto. Então, é possível construir:

- i. O ponto P' , reflexão do ponto P em l , e
- ii. O ponto L , pé da perpendicular por P a l .

Problema 3. Indicar como construir P' e L como intersecções de circunferências, dada a recta l com apenas dois pontos visíveis e assim provar o lema. (As construções são simples.)

Como último preliminar fundamental para entender certas justificações abaixo, lembramos o teorema da corda e o conceito da potência de um ponto relativamente a uma circunferência.

Teorema (da corda). Considere-se a circunferência $C = C(O, r)$ e um ponto P . Então para qualquer recta l que passa por P e intersecta C nos pontos A e B tem-se que

$$\text{pot}(P, C) = |OP|^2 - r^2 = \vec{PA} \cdot \vec{PB},$$

valor que se diz potência de um ponto relativamente à circunferência C .

O produto de vectores que aqui ocorre é o produto escalar; que é igual a $\varepsilon |PA| |PB|$ com ε igual a $+1$ se os vectores têm o mesmo sentido, e -1 se os vectores têm sentidos contrários.

Agora podemos retomar os nossos problemas principais.

Proposição 1. É possível construir os pontos de intersecção de duas circunferências dadas pelos seus centros e respectivos raios.

Prova. Aqui nada há a provar.

Proposição 2. É possível construir a intersecção de uma circunferência C com uma recta l em ambos os casos possíveis:

- i. No caso em que l não passa pelo centro de C .
- ii. No caso em que l passa pelo seu centro.

Prova.

i. Fica como exercício para o leitor; para a resolução do caso ii, baseamo-nos nos lemas anteriores e no caso i.

ii. Seja $C = C(O, r)$ uma circunferência e $l = l_{OP}$ uma recta por O e outro ponto P . Definamos ainda $\{X, Y\} = C \cap l$. Os pontos X, Y são então os pontos de momento desconhecidos que queremos construir. Sem perda de generalidade (porquê?) podemos assumir a colinearidade de P, X, Y na ordem $P-X-Y$.

Proceda-se assim (cf. Figura 2):

1. Escolhe-se um ponto $B \in C$ e determina-se $\{A, B\} = l_{PB} \cap C =$ segundo parte i.
2. Por intersecção de dois arcos curtos de igual raio $r' > r$ e centros em A, B determina-se um ponto M com $|MA| = |MB| = r'$, e traça-se uma circunferência, $C_1 = C(M, r')$.
3. Escolhe-se um ponto $X' \in C_1$ e constrói-se segundo os lemas 1 e 2, $Y' \in C$, tal que $|X'Y'| = 2r$ e O' = ponto médio do segmento $[X'Y']$.

Problema 4. Explicar os pormenores.

Trace-se a circunferência $C'=C(O', r)$. Note-se que ela é geometricamente igual a C e $[X'Y']$ é um diâmetro.

4. A recta $l_{x'}$ não passa por M , de modo que por parte i da presente proposição podemos determinar a sua intersecção com a circunferência $C_3=C(M, |MP|)$. Desta intersecção escolhe-se aquele ponto P' para o qual se tenha a disposição $P'-X'-Y'$. Como $|MP|=|MP'|$, os pontos P e P' têm relativamente à circunferência C_1 a mesma potência. Isto significa que $|PX||PY|=|PA||PB|=|P'X'||P'Y'|$. Como $|XY|=|X'Y'|$, decorre daí que $|PY|=|P'Y'|$ e $|PX|=|P'X'|$ e, por conseguinte, $|PO|=|P'O'|$.

5. Definamos $B'=C' \cap C(P', |PB|)$. Então temos, pela igualdade dos raios de C' e C , que $\Delta[PBO] \approx \Delta[P'B'O']$. Assim obtemos $B'\hat{O}'Y'=B\hat{O}Y$, logo os triângulos isosceles com dois lados r cada um, definidos por estes ternos de ponto são congruentes.

6. Por isso obtém-se o desejado ponto Y como um dos dois pontos da intersecção $C(B, |Y'B'|) \cap C$.

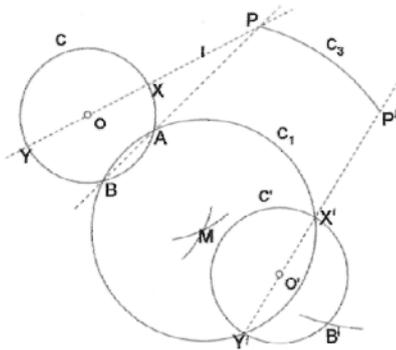


Figura 2

Obtém-se X por procedimento análogo.

Proposição 3. É possível construir o ponto de intersecção de duas rectas.

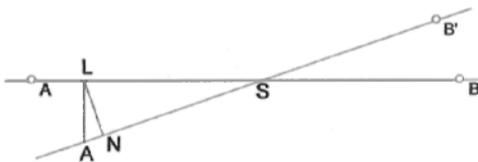


Figura 3

Prova. Ver Figura 3. Sejam A, B os pontos visíveis de uma das rectas, l , e A', B' os da outra l' . Segundo o lema 3.ii, podemos construir $L:=$ pé de A' sobre l , e depois $N:=$ pé de L sobre l' . Juntamente com o ponto desconhecido $S=l \cap l'$ obtemos então triângulos semelhantes $\Delta[LA'N] \approx \Delta[SA'L]$ donde depreendemos $|LA' l : |SA' l = |A'N l : |A'L l|$, o que significa $|A'L l|^2 = |A'N l | |SA' l|$.

Ora visto que conhecemos A', L, N , podemos construir a distância $|SA' l|$ à parte usando o teorema das cordas.

Problema 5. Explicite como.

Finalmente, usando a proposição 2 podemos construir S como intersecção da circunferência $C(A', |SA' l|)$ com a recta.

As três proposições provadas estabelecem o teorema de Mohr-Mascheroni.

Podemos provar-se que é impossível construir somente com régua todos os pontos construíveis com régua e compasso; no entanto, Steiner e Poncelet mostraram que basta ter uma circunferência fixa no plano e uma régua para construir todos os pontos construíveis com régua e compasso.

Deixemos ao leitor um último desafio, que é independente da teoria exposta.

Damos-lhe nada mais do que uma régua com escala e um lápis. Supomo-lo capaz de ler a régua, traçar com ela segmentos e fazer cálculos, em qualquer dos casos, com a precisão desejada. Isto é, supomos que todo o número real existe como um ente bem definido (apesar de poder ter, na realidade, uma infinidade de dígitos).

Problema 6. Seja l uma recta e Q um ponto do plano, mostre que podemos traçar por Q uma perpendicular a l ; e se $Q \notin l$ uma paralela a l .

Envie as soluções para:

Projecto Delfos
Departamento de Matemática de FCTUC
Apartado 3008
EC Universidade
3001-454 Coimbra

100
95
75
25
5
0

Onde calham os primos?

Dizem que, uma vez, um grupo de estudantes se dirigiu a um eminente matemático russo, pedindo ajuda para resolver um somatório de números primos. “Quando será que vão perceber que números primos existem para multiplicar e não para somar?”, respondeu-lhes. O que diria então do mais recente teorema no assunto?

Em 1900, um dos maiores matemáticos do século XX, o alemão David Hilbert, numa conferência em Paris, enunciou o que lhe pareciam ser os principais problemas em aberto da matemática. O sétimo problema consistia em demonstrar ou refutar a afirmação de que um número algébrico (isto é, que seja raiz de algum polinómio de coeficientes inteiros) diferente de 0 ou 1, quando elevado a um número irracional (que não pode ser descrito como uma fracção de números inteiros), é transcendente (ou seja, não é algébrico). Em termos mais imediatos, provar, por exemplo, que 2 elevado à raiz quadrada de 2 não é raiz de nenhum polinómio de coeficientes inteiros.

Tal problema foi resolvido no ano de 1934 pelo matemático russo Aleksandr Gelfond (e, independentemente, no mesmo ano por Theodor Schneider). O mesmo Gelfond, um matemático polivalente que actuou em diversas áreas da matemática (e que não é o russo da introdução!), formulou uma curiosa conjectura sobre os números primos: se somássemos os seus dígitos, aqueles cuja soma é par e os cuja soma é ímpar obedeceriam à mesma distribuição estatística. E, mais importante, independentemente da base em que os números fossem escritos.

Começamos pela base 2, aquela em que os números são escritos como sequências de 0s e 1s. Nesta, 10 é 2, 11 é 3, 100 é 4 e assim por diante. O número que, na base 10 – aquela que usamos no nosso dia – chamamos 324 é escrito na base 2 como

101000100, pois $256+64+4=2^8+2^6+2^2$. A soma dos seus dígitos é $3=1+0+1+0+0+0+1+0+0$.

O número mais pequeno com n dígitos é 1 seguido de $n-1$ zeros, e o maior é uma sequência de n 1s. Excepto para 10 (que equivale a 2), qualquer número da forma 1000... 00 não é primo, pois é uma potência de 2. Assim, o menor número com n dígitos que pode ser primo é dado por 1000... 001, que é o caso de 5, 17, etc. Por outro lado, o maior destes é o 11... 11, como em 3, 7, 31, 127, etc. Desta forma, a soma dos dígitos em base 2 de um primo p , a que chamamos $s_2(p)$ é necessariamente maior ou igual a 2 e menor ou igual a n .

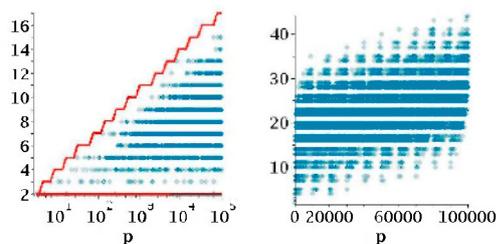


Figura 1: Gráfico da função $s_2(p)$ (esquerda) e $s_{10}(p)$ (direita) em escala semilogarítmica até 100.000. Em vermelho estão marcados os limites inferior e superior da função $s_2(p)$ discutidos no texto. De cada vez que o gráfico encontra a linha vermelha, temos um primo de Mersenne ou de Fermat.

Os primos tais que $s_2(p)=2$ são da forma 2^n+1 e são conhecidos como “primos de Fermat”, enquanto aqueles que em base 2 se escrevem $111\dots 1$ são os primos de Mersenne, dados por 2^n-1 . Conhecem-se muitos primos de Mersenne, poucos de Fermat (de facto, apenas quatro), no entanto não se sabe se estes conjuntos são finitos ou infinitos. Se forem infinitos, então a função $s_2(p)$ assume uma infinidade de vezes os seus limites superior e inferior, o que mostra o quão complicada ela deve ser.

A conjectura de Gelfond, finalmente demonstrada em 2010 por Mauduit e Rivat [1], dois investigadores em Luminy (Marselha, França), fala sobre a distribuição da função $s_q(p)$, a soma dos dígitos do primo p na base q . Na figura 1 vemos esta função para q igual a 2 e 10.

Vamos estudar os exemplos da base 10 e considerar apenas quando a função $s_{10}(p)$ é par ou ímpar, mas sempre tendo em mente que os resultados demonstrados são muito mais gerais.

Enunciamos o principal resultado do artigo de Mauduit e Rivat: a quantidade de primos menores do que um certo número x tal que a soma dos seus dígitos em base 10 seja par é a metade do número total de primos mais um termo correctivo que se torna menos e menos relevante à medida que x cresce. O mesmo vale para aqueles cuja soma dos dígitos é ímpar. Veja a figura 2, que torna fácil acreditar que as duas funções de contagem são muito semelhantes. Na legenda da mesma figura também dividimos os primos até 100 nos dois casos de interesse.

Referências

[1] C. Mauduit e J. Rivat, “Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers.” *Annals of Mathematics*, Vol 171 (3), 1591-1646 (2010).

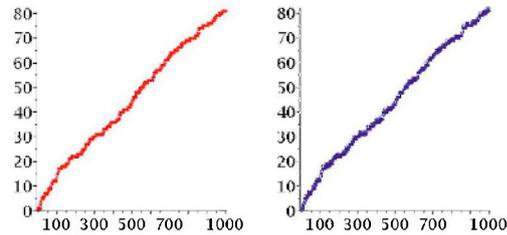


Figura 2: Gráfico da função que indica a quantidade de primos cuja soma dos dígitos em base 10 é par (esquerda) e ímpar (direita) menores ou iguais a x com x entre 2 e 1000. Note a similaridade entre os dois gráficos. Os primos até 100 cuja soma dos dígitos é par são 2, 11, 13, 17, 19, 31, 37, 53, 59, 71, 73, 79 e 97; aqueles cuja soma é ímpar são 3, 5, 7, 23, 29, 41, 43, 47, 61, 67, 83, 89.

Resultados deste tipo, que incluem um termo correctivo que não é determinado explicitamente mas que se sabe menos e menos importante à medida que a variável da função cresce, são conhecidos como assintóticos. Este tipo de abordagem não é desconhecida de quem se interessa pela distribuição de números primos: Gauss já havia dedicado o seu tempo a este estudo, concluindo que a quantidade de números primos menores ou iguais a um certo valor x é assintoticamente equivalente a $x/\log x$; o que os dois investigadores fizeram agora é um enorme refinamento do estudo da distribuição estatística dos números primos, que responde a várias questões deixadas em aberto por gerações e gerações de matemáticos. [M](#)

Espécies mutantes de dominós

Os poliminós, generalizações naturais dos dominós, inspiraram jogos como o Tetris, desempenharam papéis importantes em livros de ficção e estiveram para aparecer no filme “2001: Odisseia no Espaço”, de Stanley Kubrick. Estão na origem de muitos *puzzles* e de várias questões matemática e computacionalmente interessantes.

No início das férias grandes que se seguiram a ter terminado o ensino secundário, li a obra *Terra Imperial* de Arthur C. Clarke, editada em dois volumes na colecção Argonauta¹. Nessa história, o protagonista recorda a certa altura² como a sua avó³ lhe apresentou um *puzzle* envolvendo figuras formadas por cinco quadrados idênticos, cada um ligado a pelo menos um outro por uma aresta: os *pentaminós*. A sua primeira tarefa foi determinar exactamente quantos pentaminós distintos existem, supondo que estes podem ser virados e rodados à vontade. São 12 e estão ilustrados na Figura 1, juntamente com o nome por que são usualmente conhecidos.

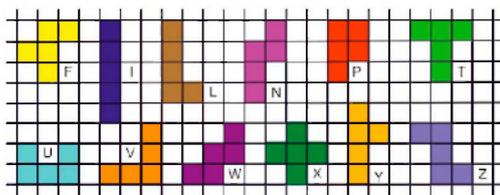


Figura 1 - Os 12 pentaminós e os seus nomes

De seguida, a avó desafiou-o a arranjar os 12 pentaminós num rectângulo⁴ 6x10, dizendo-lhe que, apesar de existirem 2339 maneiras distintas de o fazer,

não é fácil encontrar uma. No início da obra de Clarke está impressa uma solução, a da esquerda na Figura 2. No entanto, o assunto intrigou-me bastante, pelo que decidi fazer uns pentaminós de cartão e procurar outras soluções. Confirmei assim que, de facto, não era mesmo nada fácil encontrá-las! Mas, após algumas horas e inúmeras tentativas falhadas, eu e um meu amigo⁵ tínhamos encontrado algumas soluções, não só para o rectângulo 6x10, como também para os rectângulos 5x12 e 4x15, que Clarke menciona na sua história, sem dar exemplos. Uma semana depois, encontrámos uma configuração que nos deu particular satisfação, em que os pentaminós se dividem em dois grupos de seis, cada um formando um rectângulo 5x6, obtendo-se assim, em simultâneo, uma solução para o rectângulo 6x10 e uma para o rectângulo 5x12. Consegue o leitor encontrá-la?

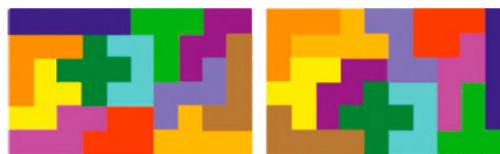


Figura 2 - Duas soluções para o rectângulo 6x10

¹Números 281 e 282.

²Capítulo VII.

³Não exactamente no sentido biológico do termo, pois a personagem em questão é um clone.

⁴Aqui, e no que se segue, a expressão “rectângulo $a \times b$ ” refere-se a um rectângulo formado por quadrados idênticos aos das respectivas figuras, sejam pentaminós ou similares, com a quadrados num lado e b quadrados no outro.

⁵Miguel Beltrão e Reis, que morreu demasiado cedo. A configuração da direita na Figura 2 é uma das soluções por ele encontrada, cerca das 18h00 do dia 17/6/1981, segundo um velho bloco de notas meu. Este artigo é uma pequena homenagem minha à sua memória e aos muitos bons momentos que passámos juntos.

Apanhados na Rede

[Espécies mutantes de dominós]

Num conjunto de notas no final do segundo volume, Arthur C. Clarke informa que há apenas duas pavimentações do rectângulo 3x20 por pentaminós, exibindo-as, e menciona o curioso facto de que numa primeira versão de "2001: Odisseia no Espaço", Stanley Kubrick filmou HAL a jogar um jogo baseado nos pentaminós com os astronautas, tendo posteriormente esta cena sido substituída por uma em que se joga xadrez. Fica-se ainda a saber que foi através de um dos livros de Martin Gardner que Clarke se tornou viciado nos *poliminós*, as figuras formadas por quadrados iguais, com a condição acima referida de que cada quadrado tem de estar ligado a pelo menos um outro por uma aresta. Nessas notas é ainda mencionada a obra "Polyominoes"⁶, ainda hoje imprescindível, de Solomon W. Golomb, o matemático que iniciou o estudo destes seres, descendentes mutantes dos dominós: triminós, tetraminós, pentaminós, hexaminós, etc. Claro que sem deixar de lado o próprio dominó e o seu antepassado, o monominó!

Apesar de vários problemas envolvendo poliminós terem aparecido antes, em especial na revista *Fairy Chess Review*, foi Golomb quem iniciou o seu estudo sistemático. Tudo começou com uma apresentação que este fez no Clube de Matemática de Harvard, em 1953, que no ano seguinte foi publicada com o título "Checkerboards and Polyominoes", na revista *The American Mathematical Monthly*⁷. Mas foi o artigo de Martin Gardner, na sua coluna "Mathematical Games" da *Scientific American*, em Maio de 1957, que tornou os poliminós conhecidos de um vasto público.

O que mais me intrigou em toda a história de Arthur C. Clarke foi a menção de que havia exactamente 2339 (um número primo!) maneiras distintas, sem contar com reflexões ou rotações, de preencher um rectângulo 6x10 com os 12 pentaminós. Seria verdade? Como teria este número sido obtido? Por algum raciocínio subtil? Por exaustão, tentando de algum modo todas as possibilidades, com a ajuda de um computador? Por uma mistura de raciocínio e cálculos computacionais? Na altura não tinha como averiguar ou descobrir as respostas a estas perguntas.

Errata:

No *Apanhados na Rede* da edição n.º 161 da *Gazeta de Matemática*, por erro de paginação, o símbolo $|x|$ foi substituído pelo símbolo (x) , na terceira linha da coluna esquerda, página 20. Pedimos as nossas desculpas aos leitores.

⁶Publicada originalmente pela editora Charles Scribner's Sons, em 1965, e mais recentemente, em 1994, pela Princeton University Press, numa edição revista e aumentada.

⁷Vol. 61, n.º 10, December 1954.

Um ano e tal depois, adquirei o meu primeiro computador: um ZX Spectrum com 16Kb de RAM. Voltei a pensar no assunto: como se programaria um computador para determinar o número de soluções, mesmo que por exaustão? Era claro que tal implicava alguma arte e engenho que eu então não possuía. Passaram-se muitos anos até eu perceber como tal poderia ser feito. Recentemente descobri na Internet um artigo de Donald Knuth, mestre supremo da arte de programar, na qual o assunto é magistralmente exposto. Esta pequena obra-prima está disponível em:

<http://www-cs-faculty.stanford.edu/~unol/papers/dancing-color.ps.gz>
e em

<http://arxiv.org/abs/cs/0011047>

O leitor que se tenha sentido intrigado pelas questões que me perseguiram durante vários anos não poderá fazer melhor do que ler este artigo.

Não se conhece nenhuma fórmula simples nem um método rápido de calcular o número de *n*-minós para um dado *n*. A enumeração de poliminós é feita com algum engenho e custo computacional elevado, sendo apenas conhecido o número exacto de *n*-minós sem buracos para valores de *n* até 27. Estes valores foram calculados por Tomás Oliveira e Silva, do Departamento de Electrónica, Telecomunicações e Informática da Universidade de Aveiro. Ver a sua página sobre este assunto, no endereço:

<http://www.ieeta.pt/~tos/animals/a44.html>

Para saber mais sobre estes intrigantes seres e outros "animais" congéneres, ver "The Geometry Junkyard", uma colecção de *links* mantida por David Epstein, da Universidade da Califórnia em Irvine, que tem uma secção dedicada a estes "bicharocos", em:

<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/polyomino.html>

A terminar ficam aqui três problemas para os leitores mais aventureiros e que não os conheçam já: 1) determinar o número de hexaminós distintos, quando virar e rodar é permitido; 2) mostrar que não se pode pavimentar com dominós um quadrado 8x8 em que foram retirados dois cantos diametralmente opostos; 3) mostrar que não se pode pavimentar nenhum rectângulo com os hexaminós. **M**

Bartoon

por Luis Afonso



Publicação gentilmente autorizada pelo autor.

Público, 26/12/2009

Ficha Técnica

Director Jorge Buescu [Universidade de Lisboa]
Vice-Directores J. Pimentel Nunes [Instituto Superior Técnico]
Adérito Araújo [Universidade de Coimbra]
Rogério Martins [Universidade Nova de Lisboa]
Conselho Editorial Afonso Pedrosa Pinto [Escola S/3 S. Pedro Vila Real]
Carlota Simões [Universidade de Coimbra]
Elisabete Rodrigues [Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Lisboa]
Graciano de Oliveira [Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia]
Henrique Leitão [Universidade de Lisboa]
João Filipe Queiró [Universidade de Coimbra]
José Francisco Rodrigues [Universidade de Lisboa]
José Miguel Rodrigues de Sousa [Escola Secundária Felismina Alcântara, Mangualde]
Juan-Miguel Gracia [Univ. Vitoria, Espanha]
Lina Fonseca [Escola Superior de Educação, Viana do Castelo]
Luís Madureira [antigo professor na Esc. Sec. Padre António Vieira]
Maria do Céu Pinto [Universidade de Coimbra]
Manuel Domingos Oliveira Cadete [Universidade Agostinho Neto]
Paulus Gerdes [Universidade Eduardo Mondlane, Maputo, Moçambique]
Raquel Escórcio [E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho]
Roberto Ramalho [Univ. Pernambuco, Recife, Brasil]
Teresa Almada [Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia]

Redactores António Pereira Rosa [ES Mª Amália Vaz de Carvalho]
Daniel Pinto [Universidade de Coimbra]

Assistentes Editoriais Renata Ramalho [SPM]
Ana Figueiredo [SPM]
Sílvia Dias [SPM]

Revisão Margarida Robalo

Concepção e manutenção do portal Web Pedro Quaresma [Universidade de Coimbra]

Design Filipe Branco

Impressão Dossier - Comunicação e Imagem.

Propriedade Sociedade Portuguesa de Matemática,
Av. da República 45, 3º Esq. 1050-187 Lisboa
Tel.: 21 793 97 85 | Fax: 21 795 23 49
E-mail: spm@spm.pt

Tiragem 1.900 Exemplares

ISSN 0373-2681

ICS 123299

Depósito Legal 159725/00

Capa Fotografia alusiva ao artigo
"Curvas duma bola de bilhar solitária"



Os triângulos de Herão e as curvas elípticas

Dois triângulos com lados iguais são necessariamente iguais. Contudo, se tiverem o mesmo perímetro, não são necessariamente congruentes. E se tiverem a mesma área e o mesmo perímetro?

1. Uma história sobre dois triângulos

A seguinte questão surgiu a um grupo de professores enquanto trabalhavam no projecto *Focus on Math*, constituído por professores e matemáticos¹:

Se dois triângulos tiverem a mesma área e o mesmo perímetro, são necessariamente congruentes?

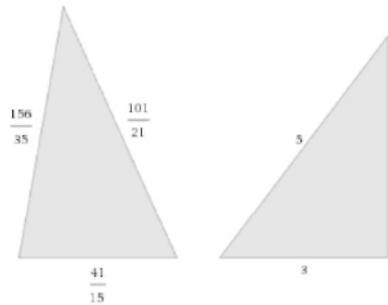


Figura 1: Dois triângulos não congruentes com a mesma área e o mesmo perímetro.

A resposta a esta pergunta é não. Por exemplo, o triângulo cujos lados medem 3, 4 e 5 tem a mesma área e o mesmo perímetro que o triângulo cujos lados medem $\frac{41}{15}$, $\frac{101}{21}$ e $\frac{156}{35}$ (ver Fig. 1). De facto, o perímetro vale

$$\frac{41}{15} + \frac{101}{21} + \frac{156}{35} = \frac{287 + 505 + 468}{105} = \frac{1260}{105} = 12 = 3 + 4 + 5.$$

O triângulo com lados 3, 4 e 5, tem área $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$. Para calcular a área do triângulo da esquerda usamos a fórmula de Herão, que afirma que a área de um triângulo com lados de comprimento a , b e c é dada por

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

onde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ é o semiperímetro do triângulo. Assim, o triângulo da esquerda também tem área

$$\sqrt{6 \left(6 - \frac{41}{15}\right) \left(6 - \frac{101}{21}\right) \left(6 - \frac{156}{35}\right)} = 6.$$

¹Uma descrição de como os professores e os matemáticos do projecto *Focus on Math* desenvolveram este problema pode ser consultada em S. Rosenberg, M. Spillane e D. Wulf, "Delving Deeper: Heron triangles and moduli spaces", *Mathematics Teacher* 101 (2008), n.º9, 656.

100
95
75
25
5
0

2. O espaço dos triângulos

Como é que poderemos encontrar exemplos como o que referimos anteriormente? O segredo consiste em representar de forma apropriada o conjunto de todos os triângulos. Há muitas formas de representar este conjunto; por exemplo, podemos pensar no conjunto dos triângulos como um subconjunto dos ternos $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ que correspondem às medidas dos três lados do triângulo. É claro que nem todos os ternos de \mathbb{R}^3 corresponderão a triângulos, já que as coordenadas desses ternos terão, no caso de representarem triângulos, de ser positivas. Talvez o leitor queira encontrar outras restrições.

Há outra forma de definir as coordenadas no espaço dos triângulos, usando ângulos em vez de lados. De facto, qualquer triângulo tem uma circunferência inscrita e existe uma relação simples entre o raio r desta circunferência, a área A do triângulo e o semiperímetro s , nomeadamente

$$A = rs. \quad (1)$$

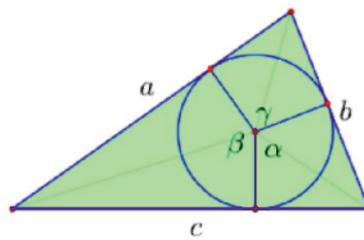


Figura 2: Os três ângulos α , β e γ determinam um triângulo.

Para se verificar a veracidade deste resultado, tracemos perpendiculares a partir do centro da circunferência dirigidas para os lados do triângulo, tal como se representa na Figura 2. Estas perpendiculares formam as alturas de três triângulos mais pequenos cujas bases são os lados do triângulo original e cujos vértices estão no centro da circunferência inscrita. Somando as áreas destes três triângulos, obtém-se a equação (1).

A equação (1) diz-nos que se dois triângulos têm a mesma área e o mesmo perímetro, então o raio das suas circunferências inscritas também é o mesmo. Assim, se estamos à procura de dois triângulos com a mesma área e o mesmo perímetro, vamos poder encontrá-los no conjunto de todos os triângulos circunscritos a uma dada circunferência fixa. Em vez de comprimentos de lados para parametrizar este conjunto, vamos usar os ângulos formados pelos três raios da circunferência, tal como se ilustra na Figura 2.

3. Uma curva de triângulos com área e perímetro constantes

Dentro deste conjunto vamos poder encontrar curvas que correspondem a uma família de triângulos com os mesmos valores de A e de s .

Expresse-se, antes de mais, s em termos dos ângulos α , β e γ , e do raio r da circunferência inscrita. Os raios e os segmentos que ligam os vértices do triângulo original ao centro da circunferência dividem o triângulo original em seis triângulos rectângulos (ver Figura 2). Como os segmentos de recta que unem os vértices ao centro bissectam os ângulos do triângulo original, estes triângulos dividem-se em três pares de triângulos congruentes. Tomando o comprimento da base de cada par e adicionando, obtém-se

$$s = r \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right). \quad (2)$$

Combinando as equações (1) e (2), resulta que, se a área A e o semiperímetro s são constantes, então também é constante a soma das seguintes tangentes:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{s^2}{A}. \quad (3)$$

De seguida vamos transformar esta igualdade numa equação que define uma curva no plano.

Sejam $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ e $z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$. Como, $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, temos

$$\frac{\gamma}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2},$$

logo,

$$z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}(\pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) = -\operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = -\frac{x+y}{1-xy}.$$

Assim, se k for a constante $\frac{s^2}{A}$, a equação (3) pode reescrever-se na forma

$$x + y - \frac{x+y}{1-xy} = k,$$

ou seja,

$$x^2y + xy^2 + kxy = k.$$

Qualquer triângulo com área A e semiperímetro s determina um ponto nesta curva, e cada ponto desta curva numa determinada região do plano corresponde a um triângulo. A região corresponde a ângulos que de facto fazem sentido na Figura 1, nomeadamente a ângulos que satisfazem $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ e $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, que corresponde à região definida por $x > 0, y > 0$ e $xy > 1$ (uma vez que $z > 0$).

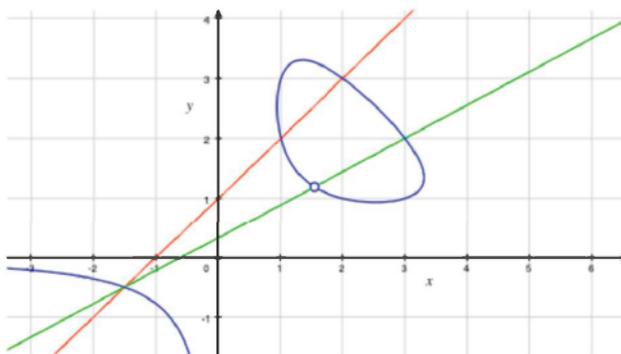


Figura 3: A curva dos triângulos.

A Figura 3 representa esta curva para $k=6$, o valor que corresponde ao triângulo com lados 3, 4 e 5. Qualquer ponto na parte desta curva que se situa no 1.º quadrante corresponde a um triângulo cujos lados são $a = x + y$, $b = y + z$ e $c = z + x$. Em particular, os pontos (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (1,3) e (3,1) correspondem todos ao triângulo com lados 3, 4 e 5, com os lados tomados por ordem diferente.

4. À procura de pontos na curva

Como a curva representada na Figura 3 está definida por uma equação do 3.º grau, podemos encontrar pontos nela, usando o método da secante. Dois pontos na curva determinam uma secante que corta a curva num outro ponto; encontrar esse ponto resume-se a resolver uma equação cúbica com duas raízes já conhecidas. Como já conhecemos seis pontos na curva, existem várias possibilidades para secantes, e conhecendo mais pontos, temos ainda mais possibilidades. Na verdade, a curva contém infinitos pontos com coordenadas

racionais. Pelo procedimento da secante ilustrado na Figura 3, somos conduzidos ao ponto $(\frac{54}{35}, \frac{25}{21})$ (indicado

com um círculo) que corresponde ao triângulo de lados $\frac{41}{15}$, $\frac{101}{21}$ e $\frac{156}{35}$.

O método da secante funciona em qualquer cúbica no plano. Estas curvas denominam-se *curvas elípticas* (não porque se tratam de elipses, mas sim porque surgem no estudo de uma classe específica de funções complexas chamadas *funções elípticas*). O método da secante permite definir uma estrutura de grupo no conjunto dos pontos racionais de uma curva elíptica (isto é, pontos cujas coordenadas são números racionais).

5. A moral matemática

O estudo das curvas elípticas é uma área central de investigação em teoria de números, com aplicações à criptografia subjacente à segurança das transacções financeiras que são feitas na Internet. Além disso, as curvas elípticas desempenharam um papel fundamental na demonstração do último teorema de Fermat.

A história descrita neste artigo mostra a unidade notável da matemática, começando pela forma como se apresenta na escola e terminando na investigação. Ao longo do percurso, encontramos uma ideia fundamental da matemática moderna: a ideia da resolução de um problema sobre um determinado tipo de objectos (triângulos com área 6 e perímetro 12, por exemplo), situando-o num conjunto mais alargado (o espaço dos triângulos, neste caso) e encontrando uma forma correcta de parametrizar esse conjunto. 

Nota do Director:

Este artigo foi traduzido por Elfrida Ralha da Submitted Klein Vignete intitulada "Heron Triangles and Elliptic Curves", de acesso livre em <http://www.kleinproject.org/>, em Setembro de 2010, sob a licença "Creative Commons". A sua única referência reduz-se ao artigo de Steven Rosenberg, Michael Spillane e Daniel B. Wulf, "Delving Deeper: Heron Triangles and Moduli Spaces", *Mathematics Teacher* 101 (2008), n.º 9, 656, o qual descreve como os matemáticos e professores de Matemática trabalharam nesta questão em *Focus on Math* daquela revista da associação americana NCTM.

Chamada de contribuições para o Projeto Klein

A Comissão Coordenadora do Projeto Klein em Língua Portuguesa convida pesquisadores e professores a submeterem contribuições na forma de "pequenos artigos Klein", como descrito abaixo. As propostas devem ser enviadas no formato PDF para os coordenadores do Projeto Klein:

Yuriko Yamamoto Baldin (yuriko.baldin@uol.com.br) e Mario Jorge Dias Carneiro (carneiro@mat.ufmg.br) até 31 de janeiro de 2011.

Os artigos selecionados poderão ser indicados ao "Klein Project for 21st century" da ICMIIMU (International Commission on Mathematics Instruction – International Mathematics Union), e também poderão servir de ponto de partida para trabalhos mais extensos no âmbito do Projeto Klein. Aos autores dos artigos selecionados serão pagos direitos autorais no valor de 400 (quatrocentos) reais.

Pequenos artigos Klein

Textos de 2 a 4 páginas, em português, que apresentem tópicos relevantes da Matemática que se conectem a conhecimentos matemáticos de nível médio ou expliquem aplicações modernas significativas, proporcionando aos professores uma visão do estado da arte da Matemática. Os artigos devem atender às seguintes recomendações:

1. Motivar o assunto com um exemplo ou um problema estimulante que seja de interesse para o professor do ensino médio.
2. Chegar a avanços matemáticos recentes (do século XX, se possível).
3. Explicitar as idéias matemáticas envolvidas, mas evitando argumentos técnicos.

4. Apontar a importância do tema.

5. Fornecer referências acessíveis, por exemplo, na internet, que permitam aprofundar a reflexão matemática ou buscar aplicações no ensino da Matemática.

Alguns exemplos, em inglês, podem ser encontrado nos sítios:

wikis.zum.de/dmuw/index.php/Heron_Triangles_and_Elliptic_Curves, wikis.zum.de/dmuw/index.php/Calculators%2C_Power_Series_and_Chebyshev_Polynomials e wikis.zum.de/dmuw/images/f/f8/Google_klein_2.pdf

Projeto Klein em Língua Portuguesa

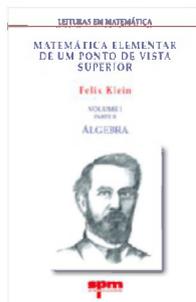
O projeto Klein em Língua Portuguesa é um projeto de ensino e pesquisa em parceria da SBM com a SBEM, SBHMat, SBMAC e OBMEP. O projeto é uma contribuição do Brasil ao "Klein Project for 21st century" da ICMI - IMU. Outras informações poderão ser obtidas no sítio www.sbm.org.br, clicando em *Projeto Klein em Língua Portuguesa*.

O objetivo central do "Klein Project for the 21st century" é produzir um livro, preparado em mais de 10 línguas, direcionado a professores do Ensino Médio para comunicá-los o fôlego e a vitalidade da pesquisa em matemática conectando-os ao conteúdo curricular da escola em nível secundário. O livro, em torno de 300 páginas, conterá "pequenos artigos" escritos de modo a inspirar professores em apresentar aos alunos uma perspectiva mais informada do campo cada vez mais interconectado e crescente da Matemática no mundo actual. O livro terá ainda suporte de redes, textos impresso e DVDs. Para mais informações, veja o sítio www.kleinproject.org.

Felix Klein Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior

Na nota introdutória da parte II relativa à Álgebra, Felix Klein escreve:

“Todos os meus desenvolvimentos algébricos convergem numa direcção, nomeadamente a sua aplicação à resolução de equações usando métodos gráficos e, mais geralmente, métodos de percepção geométrica. Este assunto, só por si, é um capítulo da álgebra muito extenso e relaciona-se amplamente com muitas outras áreas da matemática, sendo obviamente possível seleccionar apenas os pontos mais importantes e interessantes. Ao fazer isso, vamos criar uma relação orgânica com os mais variados temas. Em primeiro lugar, vamos estudar equações reais de variável real, de modo que possamos prosseguir, mais tarde, com as que envolvem quantidades complexas.”



Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior
(Volume I, parte II) Felix Klein
“Leituras em Matemática” SPM
102 páginas | 7€ (sócios) 8€ (não-sócios)

Transcrevemos em seguida um pequeno excerto deste estudo que diz respeito à resolução de equações reais de variável real envolvendo um parâmetro.

Começamos com um caso muito simples, que é susceptível de tratamento geométrico. Trata-se de uma equação real algébrica na variável x , com um parâmetro λ :

$$f(x, \lambda) = 0.$$

Para obter uma representação geométrica basta substituir o parâmetro λ por uma segunda variável, y , e encarar

$$f(x, y) = 0$$

como uma curva no plano xy (ver Figura 1). Os pontos de intersecção desta curva com a recta $y = \lambda$, paralela ao eixo dos x , dão-nos as raízes reais da equação $f(x, \lambda) = 0$. Quando esboçamos a curva, o que se pode fazer caso f não seja muito complicada, fazendo variar o λ na recta $y = \lambda$ podemos ver como o número de raízes reais varia. Este método revela-se particularmente eficaz quando f é linear em λ , isto é, com equações da forma

$$\varphi(x) - \lambda \psi(x) = 0.$$

Se φ e ψ são racionais, a curva $y = \varphi(x)/\psi(x)$ também é racional, e é fácil de desenhar. Nestes casos torna-se vantajoso o uso deste método a fim de calcular, aproximadamente, as raízes das equações.

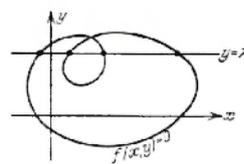


Figura 1

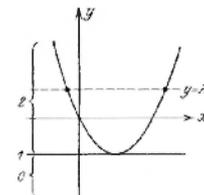


Figura 2

Como exemplo, consideremos a equação quadrática

$$x^2 + ax - \lambda = 0.$$

A curva $y = x^2 + ax$ é uma parábola, sendo possível ver de imediato para que valores de λ esta equação admite duas, uma ou nenhuma raiz real, correspondendo às situações em que a recta horizontal $y = \lambda$ corta a parábola em dois, um ou nenhum ponto (ver Figura 2). Parece-me que a apresentação deste tipo de construções simples e óbvias seria muito apropriada em aulas avançadas do ensino secundário. 

Espaço-tempo de Minkowski: a física como geometria

A Teoria da Relatividade, descoberta por Einstein em 1905, leva a conclusões surpreendentes e muitas vezes contra-intuitivas. Minkowski, um antigo professor de matemática de Einstein, mostrou como estas estranhas consequências da Relatividade podem ser compreendidas e calculadas utilizando uma nova geometria.

Uma das descobertas fundamentais da física do século XX deve-se ao matemático alemão Hermann Minkowski, que em 1908 compreendeu que a recém-descoberta Teoria da Relatividade podia ser reformulada como uma nova geometria num espaço-tempo a quatro dimensões.



Figura 1- Hermann Minkowski (1864-1909)

A Teoria da Relatividade tem como axioma central o facto experimental de que a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores, independentemente do seu movimento. Uma consequência imediata deste facto é que relógios com diferentes velocidades medem intervalos de tempo

diferentes entre os mesmos acontecimentos. Minkowski descobriu que este fenómeno é inteiramente análogo ao facto de curvas diferentes unindo os mesmos dois pontos não terem necessariamente o mesmo comprimento.

O espaço-tempo de Minkowski é o conjunto de todos os acontecimentos, idealizados como pontos do espaço num dado instante de tempo. Escolhido um referencial (isto é, um sistema de eixos ortogonais), podemos identificar o espaço-tempo de Minkowski com \mathbb{R}^4 , uma vez que cada acontecimento é univocamente determinado pelas coordenadas cartesianas (x, y, z) do ponto em que ocorreu e pelo instante t em que ocorreu (registado por um observador em repouso no referencial), ou seja, pelo vector (x, y, z, t) .

Fisicamente, faz sentido que as quatro coordenadas de um acontecimento sejam medidas nas mesmas unidades. Isso pode ser feito utilizando a velocidade da luz como factor de conversão (por exemplo, medindo o tempo em anos e as distâncias em anos-luz). Deste modo a velocidade da luz passa a ser exactamente 1 (sem unidades), e qualquer outra velocidade é um número adimensional, indicando a fracção da velocidade da luz que representa.

Nestas unidades, a descoberta de Minkowski pode ser resumida da seguinte forma: um relógio que se mova com velocidade constante entre dois acontecimentos (x_1, y_1, z_1, t_1) e (x_2, y_2, z_2, t_2) mede um intervalo de tempo s dado por

$$s^2 = -(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 + (t_2 - t_1)^2.$$

Esta fórmula é muito parecida com a fórmula para a distância euclidiana entre os dois pontos, dada pelo Teorema de Pitágoras, excepto pelos sinais negativos. Estes sinais e o facto de que $s^2 \geq 0$ têm como consequência

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\right)^2 + \left(\frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}\right)^2 < 1,$$

ou seja, a velocidade do relógio tem de ser inferior à velocidade da luz.

Uma vez que é difícil visualizar um espaço a quatro dimensões, consideraremos aqui situações em que apenas uma dimensão espacial é relevante, de modo que o espaço-tempo pode ser identificado com R^2 . Se estivermos a analisar uma viagem da Terra à Lua, por exemplo, podemos representar por (x,t) um acontecimento que ocorre a uma distância x da Terra no instante t . Deste modo, a história da Terra é representada pela recta $x=0$, ao passo que a história da Lua é representada pela recta $x=L$, em que L é a distância da Terra à Lua.

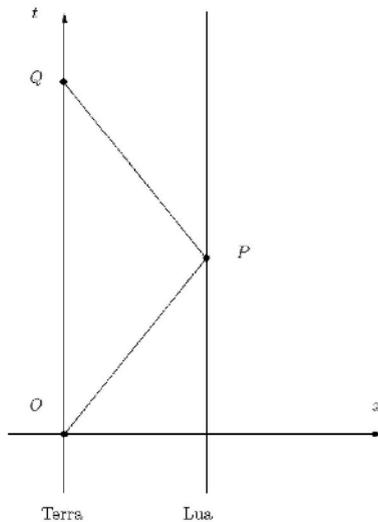


Figura 2 - Paradoxo dos gémeos

Consideremos agora a história de uma nave espacial que se move entre a Terra e a Lua com velocidade constante v . Se decidirmos que a partida se dá no instante $t=0$, correspondendo ao acontecimento $O = (0,0)$, vemos que a história da nave na viagem de ida será um segmento da recta $x=vt$. Portanto, o

acontecimento P em que a nave chega à Lua é a intersecção das rectas $x=vt$ e $x=L$, ou seja, $P = \left(L, \frac{L}{v}\right)$.

Um astronauta a bordo da nave espacial mede então para a viagem de ida uma duração

$$s = \sqrt{-L^2 + \frac{L^2}{v^2}} = \frac{L}{v} \sqrt{1 - v^2}.$$

Analogamente, a história da nave na viagem de regresso será representada por um segmento da recta $x=2L - vt$, e portanto o acontecimento Q em que a nave regressa à Terra é a intersecção dessa recta com a recta

$x=0$, ou seja, $Q = \left(0, \frac{2L}{v}\right)$. É fácil ver que a duração

medida pelo astronauta para a viagem de regresso é igual à da viagem de ida, o que resulta numa duração total

$$s_{\text{astronauta}} = \frac{2L}{v} \sqrt{1 - v^2}.$$

Por outro lado, um relógio na Terra mede entre os acontecimentos O e Q um intervalo de tempo

$$s_{\text{Terra}} = \frac{2L}{v},$$

ou seja, o astronauta mede uma duração menor para a viagem! Este efeito, conhecido como o paradoxo dos gémeos, é de facto real e já foi medido experimentalmente. Para velocidades habituais é muito pequeno (por exemplo, a máxima velocidade atingida pelas naves Apollo, que de facto viajaram à Lua, foi de 11 quilómetros por segundo; como a velocidade da luz é de 300.000 quilómetros por segundo, isto corresponde a $v \approx 0,00004$, pelo que $\sqrt{1 - v^2} \approx 0,9999999992$). Uma vez que a nossa experiência quotidiana é a de um mundo em que os objectos se movem a velocidades muito inferiores à da luz, o paradoxo dos gémeos parece-nos surpreendente. Do ponto de vista da geometria do espaço-tempo de Minkowski, no entanto, trata-se da afirmação perfeitamente razoável de que a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo não é em geral igual ao comprimento do outro lado. Note-se, no entanto, que a desigualdade triangular na geometria de Minkowski é inversa à habitual desigualdade triangular da geometria euclidiana: o comprimento de um dos lados do triângulo (tempo medido na Terra) é maior do que a soma dos comprimentos dos outros dois (tempo medido pelo astronauta).

Espaço-tempo de Minkowski: a física como geometria

Apesar de a Teoria da Relatividade ser sobretudo relevante em situações que envolvem velocidades comparáveis à velocidade da luz, a geometria de Minkowski é aplicável em qualquer situação. Um exemplo prático é o chamado efeito de Doppler, que consiste na diminuição da frequência da luz quando medida por um observador que se afasta. Para calcular esta diminuição de frequência, imaginamos uma fonte luminosa na origem $x=0$ que emite sinais luminosos com um certo período T , os quais são posteriormente detectados por um observador que se afasta com velocidade v . Uma vez que a velocidade da luz é igual a 1, as histórias de dois sinais luminosos consecutivos são rectas da forma $x=t-t_0$ e $x=t-t_0-T$, ao passo que a história do observador que se afasta é a recta $x=vt$. Deste modo, os acontecimentos correspondentes à detecção dos sinais, ou seja, as intersecções das duas primeiras rectas com a terceira, são os pontos

$$\left(\frac{vt_0}{1-v}, t_0\right) \text{ e } \left(\frac{v(t_0+T)}{1-v}, t_0+T\right).$$

Portanto, o observador mede um intervalo de tempo

$$s = \sqrt{\left(\frac{vT}{1-v}\right)^2 + \left(\frac{T}{1-v}\right)^2} = \frac{T}{1-v} \sqrt{1-v^2} = T \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$$

entre as detecções. Por outras palavras, se a radiação luminosa é emitida com período T , então é detectada com período

$$T' = T \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$$

Este desvio de frequência pode ser medido facilmente, sendo usado pela Polícia para controlar a velocidade dos automóveis e pelos astrónomos para medirem a velocidade das estrelas.

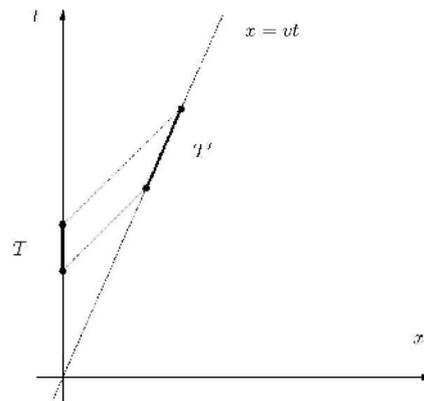


Figura 3 - Efeito de Doppler

Quando os astrónomos começaram a medir os espectros das galáxias distantes, descobriram que quase todas se estavam a afastar, com uma velocidade proporcional à sua distância. Para explicar esta expansão do Universo, bem como noutras situações em que a força da gravidade desempenha um papel relevante (e.g. buracos negros), é necessário recorrer a geometrias curvas, mais complicadas do que a geometria de Minkowski. Mas isso já é outra história...

RECREATIONAL MATHEMATICS COLLOQUIUM II

April 27th - April 30th 2011
University of Évora

Contactos

<http://ludicum.org/rm11/>
rm11@ludicum.org

Este Colóquio está em processo de acreditação pelo Conselho Científico e Pedagógico da Formação Contínua nos grupos de docência 230, do 2º ciclo do Ensino Básico, e 500, do 3º ciclo do Ensino Básico e Secundário.

Organizers



Ludus



AGÊNCIA NACIONAL
PARA A CULTURA
CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Sponsors





por Pedro J. Freitas
[Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa]

O cubo de Rubik aos 30 anos

Apesar de já ter 30 anos, o cubo de Rubik continua a suscitar interesse, quer de quem gosta de *puzzles*, quer de matemáticos, que gostam de perceber como os *puzzles* funcionam.

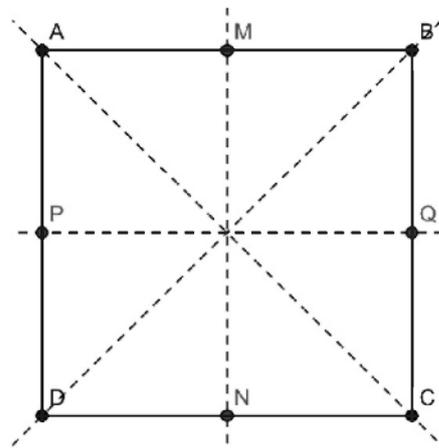
Neste ano de 2010, o cubo de Rubik fez 30 anos! Embora Erno Rubik tenha construído o primeiro protótipo em 1974, só em 1975 é que o *puzzle* começou a ser comercializado e só em 1980, quando Rubik deu a licença de comercialização à Ideal Toys, é que ganhou popularidade. Foi justamente no início dos anos 80 que um dia o meu pai apareceu em casa com um cubo de Rubik. Na altura já fazia furor e diziam ser muito difícil. Pelo sim pelo não, o vendedor tinha o cubo "feito", isto é, com uma face de cada cor, para que os clientes não viessem depois reclamar, dizendo que o *puzzle* não se conseguia resolver.

Na altura eu era aluno do secundário e não sabia nada de teoria de grupos, o que eu queria era resolver o problema, coisa que não consegui fazer sozinho. Finalmente, acabaram por aparecer no jornal algumas soluções, que o meu pai copiou de forma mais clara e que apresento aqui no fim do artigo. Nelas se apresenta uma proposta de solução, que é feita por partes, do nível inferior para o superior. Mas antes de chegar lá, queria falar um pouco da história e da matemática do cubo, e de como esta última pode ser usada para explicar o algoritmo para a solução.

A descrição matemática do funcionamento do Cubo de Rubik é feita usando o conceito matemático de grupo. Um grupo é um conjunto onde está definida uma operação que é associativa, não necessariamente comutativa, que tem elemento neutro e para a qual todos os elementos têm inverso. Um exemplo simples é o conjunto dos números inteiros relativos, \mathbb{Z} , com a operação de adição: neste caso, o elemento neutro é o zero e o oposto de cada elemento é o seu simétrico.

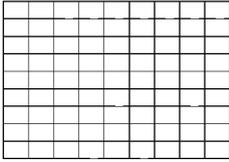
Este exemplo tem uma particularidade: a operação em questão é comutativa, coisa que não

acontece em geral. De facto, um grupo, para além da sua definição formal, pode sempre ser entendido como um conjunto de aplicações que preservam uma certa estrutura, considerando-se neste caso a operação de composição, que como sabemos não é comutativa. Vejamos dois exemplos.



Os pontos M, N, P, Q são os pontos médios dos lados do quadrado.

Consideremos todas as transformações do plano que deixam este quadrado invariante. São elas: a identidade, três rotações, de 90° , 180° e 270° , em sentido anti-horário, e quatro reflexões, em relação às rectas MN, PQ, AC e BD . Se chamarmos id à identidade, r_1, r_2 e r_3 às três rotações e s_1, s_2, s_3 e s_4 às quatro reflexões, na ordem apresentada, obtemos o seguinte quadro para a composição. Por exemplo: $r_2 \circ s_4 = s_3$.



o	id	r ₁	r ₂	r ₃	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄
id	id	r ₁	r ₂	r ₃	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄
r ₁	r ₁	r ₂	r ₃	id	s ₃	s ₄	s ₂	s ₁
r ₂	r ₂	r ₃	id	r ₁	s ₂	s ₁	s ₄	s ₃
r ₃	r ₃	id	r ₁	r ₂	s ₄	s ₃	s ₁	s ₂
s ₁	s ₁	s ₄	s ₂	s ₃	id	r ₂	r ₃	r ₁
s ₂	s ₂	s ₃	s ₁	s ₄	r ₂	id	r ₁	r ₃
s ₃	s ₃	s ₁	s ₄	s ₂	r ₁	r ₃	id	r ₂
s ₄	s ₄	s ₂	s ₃	s ₁	r ₃	r ₁	r ₂	id

Analisando a tabela, podemos ver que, por exemplo, o conjunto $\{id, r_1, r_2, r_3\}$ é, por si só, um grupo para a mesma operação de composição – basta para isto olhar para as primeiras quatro linhas e colunas da tabela. Por causa disso, diz-se um *subgrupo* do grupo original. O conjunto $\{id, s_3\}$ é outro subgrupo, e este tem a particularidade de manter fixos os pontos A e C. Convidamos o leitor a tentar encontrar outros subgrupos, também com dois elementos, e encontrar os seus pontos fixos.

O grupo que nos interessa aqui é o chamado *Grupo Simétrico em n elementos*, que denotamos S_n . É constituído por todas as aplicações bijectivas do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ em si próprio, chamadas *permutações*. É simples de ver que são em número de $n!$ e que formam um grupo para a composição. Este grupo tem grande importância matemática, não só como objecto teórico mas também como ferramenta, por exemplo, na teoria de Galois. É um facto espantoso (embora simples de demonstrar) que qualquer grupo finito (quaisquer que sejam os seus elementos) pode ser visto como um subgrupo de S_n , para um n adequado. Assim, os grupos S_n contêm em si todos os grupos finitos que se possa imaginar – e contêm o grupo que nos vai interessar para o cubo de Rubik.

Antes de avançar, uma questão de notação. Sendo os elementos de S_n aplicações, alguns são chamados ciclos: aqueles em que um certo elemento é aplicado noutra, este num terceiro, e assim sucessivamente, até se chegar a um que é aplicado no primeiro. Por exemplo, a aplicação

$$1 \rightarrow 3; 3 \rightarrow 4; 4 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 1$$

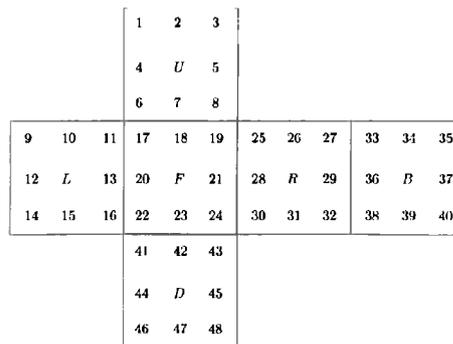
é um ciclo, que é um elemento de S_4 . Denotamo-lo da seguinte maneira: (1342). Podíamos também ter

escrito (3421) ou (2134).

Com esta notação, torna-se agora simples descrever qualquer permutação, como produto de ciclos. Por exemplo, a permutação de S_6 , que a cada n faz corresponder $6-n$ pode ser escrita como (15)(24).

Chamamos suporte de um ciclo aos números que aparecem na sua expressão escrita. É bem conhecido o teorema fundamental da aritmética, que afirma que qualquer número natural ou é primo ou é produto de primos, que estão bem definidos, a menos da ordem dos factores. O grupo simétrico tem um teorema semelhante: qualquer elemento de S_n se escreve como produto de ciclos, de suporte disjunto, de forma única – a menos da ordem dos factores, que, neste caso particular, por serem de suporte disjunto, comutam.

Pensemos agora nesta planificação do cubo, retirada de [1].



As letras U, L, F, R, B e D dizem respeito às faces (*upper, left, front, right, back e down*). Cada uma destas faces pode rodar tantas vezes como se queira. Depois de numerados os vértices, podemos representar cada um destes movimentos (rotações de 90 graus) por uma permutação, apresentada aqui como produto de ciclos:

Rotação de F: (17,19,24,22)(18,21,23,20)(6,25,43,16)(7,28,42,13)(8,30,41,11)

Rotação de L: (9,11,16,14)(10,13,15,12)(1,17,41,40)(4,20,44,37)(6,22,46,35)

Rotação de R: (25,27,32,30)(26,29,31,28)(3,38,43,19)(5,36,45,21)(8,33,48,24)

Convidamos o leitor a descrever deste modo as rotações em torno das outras faces, U, D e B. Assim, como se vê, conseguimos descrever as rotações do

cubo como elementos de S_6 . Ao tomarmos agora o menor subgrupo de S_6 que contém estas permutações (o que corresponde a tomar todas as composições possíveis destas seis permutações), obtemos o chamado Grupo do Cubo.

A cada elemento deste grupo corresponde então uma posição possível para o cubo de Rubik. Com esta descrição, é possível calcular o número de posições possíveis do cubo, ainda que a conta não seja simples de fazer à mão, seria preciso desenvolver mais teoria acerca do Grupo do Cubo para o calcular. O número é:

$$8! \times 3^7 \times 12! \times 2^{10} = 43,252,003,274,489,856,000.$$

Para se ter uma ideia do tamanho deste número, pensemos que temos um cubo, com 5,6 cm de lado como habitualmente, representando cada uma destas disposições. Se isso acontecesse, os cubos cobririam toda a superfície da Terra (continentes e mares) até uma altura de 15 metros.

Apesar desta enorme quantidade de posições possíveis, foi demonstrado em 2008 que qualquer posição (por exemplo, a posição do cubo “resolvido”) pode ser atingida em apenas 22 movimentos (ver [2]). Naturalmente, o problema é encontrar estes 22 movimentos, para cada posição do cubo.

Em geral, as pessoas que conseguem resolver o cubo em pouco tempo conjugam vários métodos de resolução. O recorde actual é 7,08 segundos e pertence

a Erik Akkersdijk, segundo a World Cube Association [3]. Neste momento, a resolução do habitual cubo com dimensões $3 \times 3 \times 3$ é apenas uma das muitas variantes que já existem: há já cubos de maiores dimensões e competições feitas com os olhos vendados (recomenda-se uma visita ao *YouTube* para ver algumas destas espantosas resoluções).

A resolução aqui apresentada é uma das duas mais tradicionais e baseia-se em certos movimentos que produzem os resultados pretendidos, construindo a resolução por níveis. Em termos de teoria de grupos, o que se passa aqui é que é possível encontrar subgrupos do Grupo do Cubo que mantêm invariante uma certa parte deste e permitem uma movimentação completa da parte restante, dentro das possibilidades do *puzzle* – no jargão da teoria de grupos, diz-se que actua transitivamente nesta segunda parte. Também no modesto grupo de simetrias do quadrado havia subgrupos (com dois elementos) que preservavam dois vértices opostos, trocando os outros dois. Teoricamente a situação é semelhante, apesar da maior complexidade do Grupo do Cubo.

Sem mais delongas, então, aqui fica a resolução que, nesse início dos anos 80, saiu num jornal português e que é uma das duas mais conhecidas. Para os leitores que nunca resolveram o cubo até ao fim, aconselho a experiência de ver a teoria de grupos em acção na ponta dos dedos. \square

Referências

- [1] Adventures in Group Theory – Rubik's Cube, Merlin's Machine and Other Mathematical Toys.
- [2] T. Rokicki, “Twenty-Two Moves Suffice”, <http://cubezzz.homelinux.org/drupal/?q=node/view/121> (consultado a 15 de Julho de 2010)
- [3] World Cube Association, <http://www.worldcubeassociation.org/> (consultado a 15 de Julho de 2010)

Bibliografia

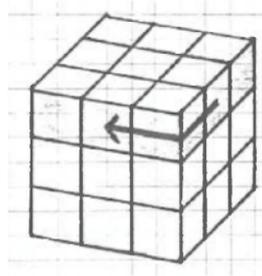
- Bandelow, Christoph** (1982), *Inside Rubik's cube and beyond*, Birkhauser
- Rokicki, Tomas**, “Twenty-Five Moves Suffice for Rubik's Cube”, <http://arxiv.org/abs/0803.3435> (consultado a 15 de Julho de 2010)

Anexo: Solução do cubo de Rubik (método de Luís Santos)

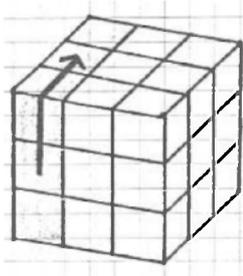
Código:

S^+ , E^+ , F^+ e D^+ significam as rotações de 90° esquematizadas.

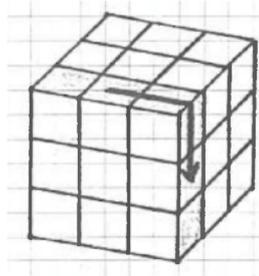
S^+ (superior)



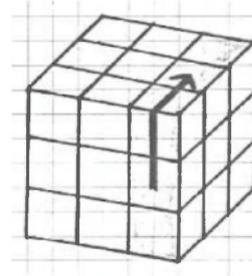
E^+ (esquerda)



F^+ (frente)



D^+ (direita)



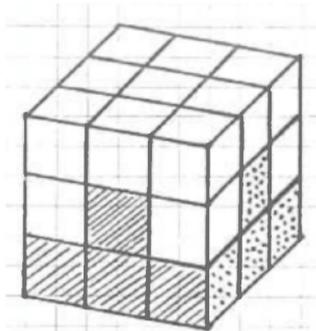
S^- , E^- , F^- , D^- significam as rotações esquematizados, em sentido contrário.

1ª FASE: execução de um 1.º piso

2ª FASE: execução do 2.º piso

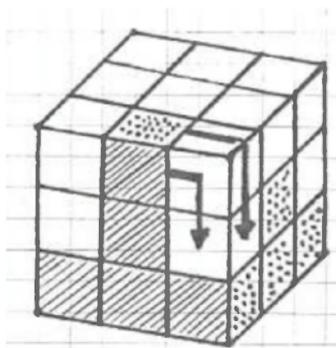
a) Colocação do cubo:

- Voltar para baixo a face correcta do cubo;
- Girar o 2.º piso até acertar os centros com o piso correcto.



b) Girar o 3.º piso até que se verifique uma das situações seguintes e efectuar o movimento indicado.

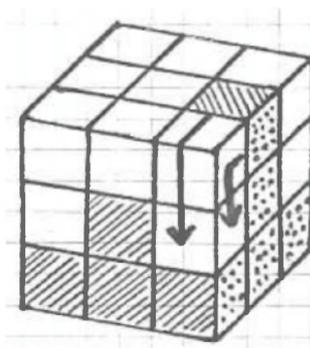
Situação A



Movimento 1

$S^+ D^+ S^- D^- S^+ F^- S^- F^+$

Situação B



Movimento 2

$S^- F^- S^+ F^+ S^+ D^+ S^- D^-$

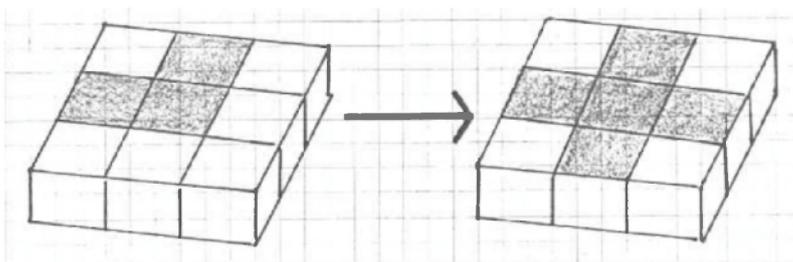
c) Efectuar b) tantas vezes quanto as necessárias até completar o 2.º piso.

As fases seguintes destinam-se a executar o 3.º piso pelo que apenas esse será figurado.

3ª FASE: Fazer a cruz na face de cima (independentemente das cores adjacentes e das contas)

Posição inicial correcta

Posição final



Movimento 3 $D^- S^- F S^+ F^+ D^+$

Observação: Se a posição inicial correcta não for imediatamente possível após a 2ª fase, executar o Movimento 3 a partir de uma posição inicial qualquer até que a posição correcta seja viável.

4ª FASE: Colocação dos cantos

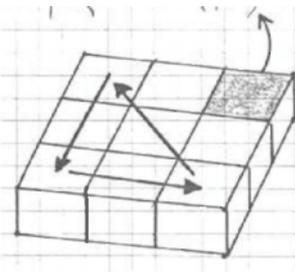
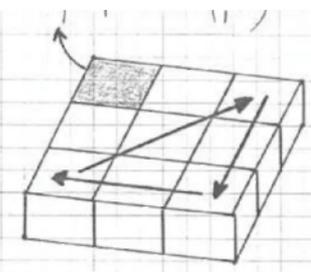
Pretende-se trocar os cantos no 3.º piso para que fiquem na sua posição correcta (cores certas com as dos 1.º e 2.º pisos, ainda que as cores das faces se cada um dos cantos não fiquem na sua posição correcta). Para o efeito, rodar o piso até que se verifique uma das situações seguintes e efectuar o movimento indicado.

Situação A

Situação B

“posição boa” (fixa)

“posição boa” (fixa)



Movimento 4

$E^+ D^+ S^+ E^+ S^- D^+ S^+ E^+ S^+ E^+$

Movimento 5

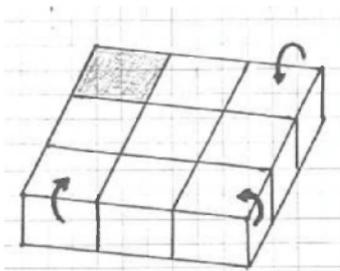
$E^- D^- S^- D^+ S^+ E^+ S^- D^+ S^+ D^+$

Observação: Se nenhuma das situações ocorrer, fixar uma "posição má" e efectuar os movimentos 4 ou 5 até que uma das situações A ou B seja obtida.

5ª FASE: Torção dos cantos

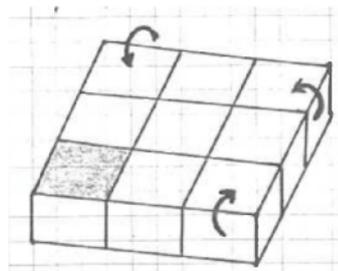
Pretende-se "torcer" os cantos no 3.º piso para que as cores fiquem na posição correcta. Para o efeito, rodar o cubo até que se verifique uma das situações seguintes e efectuar o movimento indicado.

Situação A



"posição boa" (fixa)

Situação B



"posição boa" (fixa)

Movimento 6

$D^- S^- D^+ S^- D^- S^{180^\circ} D^+ S^{180^\circ}$ *

*na fase seguinte S^+

Movimento 7

$D^+ S^+ D^- S^+ D^+ S^{180^\circ} D^- S^{180^\circ}$ **

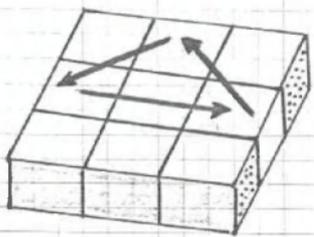
**na fase seguinte S

Observação: Se nenhuma das situações se verificar, fixar criteriosamente um canto numa "posição má" e efectuar um dos movimentos 6 ou 7 de forma a que uma das situações desejadas ocorra.

6ª FASE: Trocar os bordos

Pretende-se trocar a posição dos cubos centrais das facetas laterais do 3.º piso para que passem a ocupar a sua posição correcta. Para o efeito, rodar o cubo até que se verifique uma das situações seguintes e efectuar o movimento indicado.

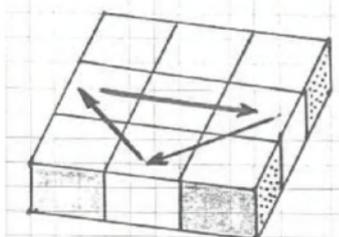
Situação A



Movimento 8

Movimento 6, com S^+ no 8.º passo, seguido do Movimento 7, com S^- no 8.º passo.

Situação B



Movimento 9

Movimento 7, com S^- no 8.º passo, seguido do Movimento 6, com S^+ no 8.º passo.

Observação: Se nenhuma das situações se verificar, efectuar criteriosamente o Movimento 8 ou o Movimento 9 de forma a que uma das situações desejadas ocorra.

12 DE DEZEMBRO
14H ÀS 18H

FESTA DE ANOS DA SPM
70 ANOS
NO MUSEU DE CIÊNCIA

WORKSHOPS
EXPOSIÇÕES
FILMES MATEMÁTICOS
ACTIVIDADES
TEATRO

spm
SOCIETY FOR PROMOTING MATHEMATICS

MUSEU DE CIENCIA
100
UNIVERSIDADE DE LISBOA

A função Gama?

Quanto é um meio factorial?

Em menos um factorial

O factorial de um inteiro positivo n é o produto de todos os inteiros entre 1 e n e escreve-se $n!$ ("n factorial"). Para todo o n tem-se $(n+1)(n!)=(n+1)!$ e, definindo $0!=1$, esta regra continua válida sempre que n é um inteiro não negativo. Esta função não se pode prolongar a -1 ou qualquer outro inteiro negativo de modo a que a mesma regra continue válida para todo o n (porque eventualmente se chega a $n=-1$). Por outro lado, existem infinitas funções f de variável real (ou complexa) definidas no complementar do conjunto dos inteiros negativos que satisfazem a identidade $f(z+1)=(z+1)f(z)$.

Uma generalização do factorial a todos os reais positivos pode definir-se da seguinte maneira:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dx. \quad (1)$$

O integral acima é chamado *segundo integral de Euler* e converge sempre que x é um real positivo. Verifica-se facilmente que $\Gamma(1)=1$ e integrando por partes demonstra-se que Γ satisfaz a seguinte regra do produto: $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$. Em particular, se n for um inteiro positivo, então $\Gamma(n)=(n-1)!$.

O nosso objectivo é convencer o leitor de que esta função, hoje conhecida por **função Gama**, é a generalização natural de $(n-1)!$ aos reais positivos.¹

Generalizações "naturais"

Se tivermos uma função definida num conjunto de inteiros, como a representada na Figura 1 e procurarmos um "prolongamento natural" a um intervalo que contenha estes números, acreditamos que o prolongamento representado na Figura 2 seja geralmente considerado mais "natural" do que o representado na Figura 3. A razão é que as Figuras 1 e 2 partilham uma importante característica geométrica, ausente na Figura 3: se unirmos os pontos da Figura 1 por segmentos de recta, obtemos o gráfico de uma função no intervalo [2,5], e os conjuntos de todos os pontos do plano que ficam por cima desse gráfico e do representado na Figura 2 são convexos, isto é, se contiverem dois pontos A e B, também contém o segmento [AB].

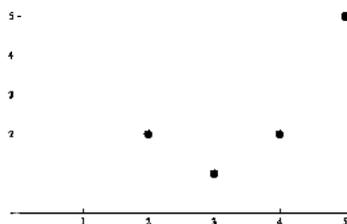


Figura 1

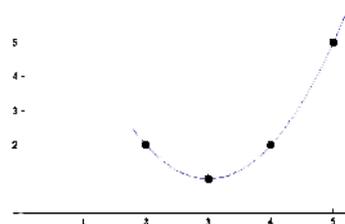


Figura 2

¹Não parece ser clara a razão por que se define $\Gamma(n)=(n-1)!$ e não $n!$ (o que causa a diferente formulação da regra do produto). No seu livro [3], H. Edwards atribui a Legendre a notação actual.

O Que É...

[A Função Gama?]

As funções cujos gráficos têm esta propriedade chamam-se *funções convexas* e têm grande importância em diversas áreas da matemática e das suas aplicações. Se uma função definida num intervalo aberto da recta real tiver segunda derivada, então é convexa se e só se a sua segunda derivada nunca for negativa. Mas a função que associa a cada real x o seu módulo $|x|$ é convexa e não tem sequer derivada em $x=0$.

Acontece que se representarmos graficamente o logaritmo de $(n-1)!$ para cada inteiro positivo n (Figura 4) obtemos um gráfico com a mesma propriedade do da Figura 1: unindo os pontos consecutivos por segmentos de recta, formamos o gráfico de uma função convexa. Isto acontece porque, como o logaritmo é uma função crescente, o declive dos segmentos de recta vai aumentando (ver Figura 4).

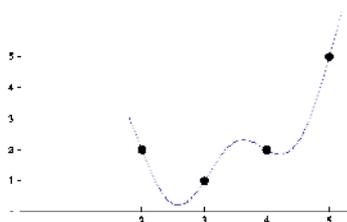


Figura 3

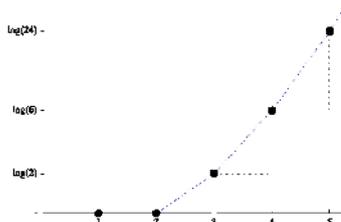


Figura 4

Se concordarmos com as considerações que abrem esta secção, um prolongamento natural g de $(n-1)!$ aos reais positivos deverá ter as seguintes propriedades:

- Propriedade do produto: para todo o $x > 0$, $xg(x) = g(x+1)$.
- A função $\log(g)$ é convexa.

No seu livro *Lærebog i Kompleks Analyse (Manual de Análise Complexa)*, de 1922, H. Bohr² e J. Mollerup demonstram que a função Gama é o único prolongamento de $(n-1)!$ aos reais positivos que satisfaz estas condições. E. Artin ([2]) chama a este facto notável *Teorema de Bohr-Mollerup*.

Uma fórmula de Gauss

Suponhamos que existe uma função g que satisfaz as condições do Teorema de Bohr-Mollerup.

Por causa da regra do produto, os valores de $\log(g)$ no intervalo $]0,1[$ determinam g nos reais positivos. Por exemplo, dado x em $]0,1[$, $g(x+3) = (x+2)(x+1)g(x)$. Além disso, se soubermos o valor de $g(x+3)$, podemos calcular $g(x)$. Se o gráfico de $\log(g)$ fosse rectilíneo no intervalo $[3,4]$ (como na Figura 4), teríamos: $\log(g(3)) = \log 2$, $\log(g(4)) = \log 6$, e então $\log(g(x+3))$ seria $\log 2 + x(\log 6 - \log 4)$, ou seja, $\log 2 + x \log 3$. Isto está errado, evidentemente.

Quando n é um inteiro positivo, os declives dos segmentos de recta $[(n, \log((n-1)!)), (n+1, \log(n!))]$ e $[(n+1, \log(n!)), (n+2, \log((n+1)!))]$ são respectivamente $\log n$ e $\log(n+1)$. A diferença entre estes dois declives é $\log(1+1/n)$, que tende para zero quando n tende para infinito. Ou seja, quando n é muito grande, esses dois segmentos de recta são quase paralelos.

A convexidade de $\log(g)$ tem agora uma consequência crucial: se prolongarmos ambos os segmentos ao intervalo $[n, n+2]$, em todo o intervalo o gráfico de $\log(g)$ tem de permanecer entre estes segmentos³ (ver Figura 5).

Isto significa que embora $\log 2 + x \log 3$ seja apenas uma estimativa de $\log(g(x+3))$, a diferença entre $\log(g(x+n))$ e a estimativa $\log(g(n)) + x(\log(g(n+1)) - \log(g(n)))$ tende para zero quando n tende para infinito. Ora, são conhecidos os valores de g nos inteiros positivos e, pela regra do produto, tem-se $g(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)g(x)$. Assim,

$$\log(g(x)) = \lim \left[\log(g(n)) - x(\log(g(n+1)) - \log(g(n))) - \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k) \right] = \lim \left[\log((n-1)!) + x \log(n) - \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k) \right] \quad (2)$$

²"H" de Harald. Não confundir com Niels Bohr, que propôs o primeiro modelo atómico que explicava os números quânticos e foi um dos fundadores da Mecânica Quântica. Esse era o irmão mais velho de Harald.

e, tomando a exponencial destas expressões, obtém-se a **fórmula do produto de Gauss**:

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}$$

Dado um inteiro positivo n , verifica-se facilmente que a segunda derivada da função

$$f_n(x) = \log((n-1)!) + x \log n - \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k)$$

é positiva em \mathbb{R}^+ , sendo portanto f_n uma função convexa. O limite pontual de funções convexas, quando existe, é uma função convexa. Assim, a existência da função g é equivalente à existência de limite positivo na fórmula de Gauss, que é por sua vez equivalente à existência do limite em (2). Uma demonstração directa da existência deste limite será esboçada na última secção.

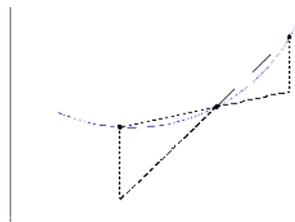


Figura 5

Menos um meio factorial

Por comodidade, iremos chamar “log-convexa” a uma função f com valores positivos num intervalo I tal que $\log f$ é uma função convexa em I . Recordemos que uma propriedade fundamental de g é que esta função é log-convexa. Do mesmo modo que a soma de duas funções convexas e o produto de uma função convexa por um real positivo são funções convexas (o que é fácil de demonstrar), o mesmo acontece para funções log-convexas (o que já não é tão fácil, embora seja simples - “simples” e “fácil” não são sinónimos).

Para cada $t > 0$ fixo, a função $f(x) = e^{-x} t^{x-1}$ é log-convexa em \mathbb{R}^+ , visto que o seu logaritmo é $(\log t)(x-1) - x$ (repetimos, t é um parâmetro positivo fixo e a variável é x). Se prestarmos atenção ao segundo integral de Euler (1), vemos que ele representa o limite de somas de funções da forma $(\Delta t) e^{-x} t^{x-1}$, que são log-convexas porque Δt é um número positivo. Isso quer dizer que o segundo integral de Euler define um prolongamento log-convexo de $(n-1)!$ aos reais positivos que satisfaz a regra do produto. Fica assim demonstrado que a função g que procuramos é a função Gama. Isto também demonstra a existência de limite positivo na fórmula do produto de Gauss.

De modo análogo se prova que o primeiro integral de Euler:

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt, \quad x, y > 0 \quad (3)$$

é igual a $\Gamma(x) \Gamma(y) / \Gamma(x+y)$: fixando $y > 0$, a função $g(x) = \Gamma(x+y) B(x,y) / \Gamma(y)$ satisfaz as condições do Teorema de Bohr-Mollerup⁴ e portanto tem de ser a função Gama. Em particular, tem-se $B(1/2, 1/2) = \Gamma(1/2)^2$. Fazendo em (3) a substituição $t = \sin^2(\theta)$ obtém-se $B(1/2, 1/2) = \pi$, logo $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Como seria de esperar, outros valores da função Gama são ainda menos fáceis de calcular. Alguns podem ser consultados de forma rápida e cómoda, tal como o gráfico da função nos reais positivos, por exemplo, em [4].

Na verdade, a função Gama pode ser prolongada “de forma natural” ao conjunto de todos os números complexos, excepto o zero e os inteiros negativos. Esse prolongamento é único, não tem zeros e satisfaz a regra do produto. O leitor interessado poderá consultar [1].

⁴Verifica-se que $B(1,y) = 1/y$, a propriedade do produto prova-se integrando por partes (com um pouco de álgebra no fim) e a função dentro do integral é log-convexa.

100
95
75
25
5
0

O Que É...

[A Fórmula Gama?]

A constante de Euler

Seja n um inteiro positivo e x em $]0,1[$. É um exercício simples mostrar que existe uma função contínua h no intervalo $] -1, +\infty[$ tal que $\log(1+y) - y = h(y)y^2$. Agora,

$$\log((n-1)!) - x \log n - \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k) = x \log n - \log x - \sum_{k=1}^{n-1} \log(1+x/k) = x \left(\log n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) - \log x - \sum_{k=1}^{n-1} h(x/k) \frac{x^2}{k^2}.$$

Como h é limitada no intervalo $[0,x]$, o último somatório acima converge quando n tende para infinito (porque a série $\sum 1/k^2$ é convergente). A sucessão $\gamma_n = \log n - \sum_{k=1}^{n-1} 1/k$ também é convergente: o seu termo de ordem n é igual ao integral $\int_1^n (C(x) - 1/x) dx$ (onde $C(x)$ designa o maior número inteiro não superior a x). A Figura 6 demonstra geometricamente que esta sucessão é crescente e converge para um certo real do intervalo $]1/2, 1[$. Esta é a demonstração directa prometida da existência de limite positivo na fórmula do produto de Gauss, ou seja, do limite em (2).

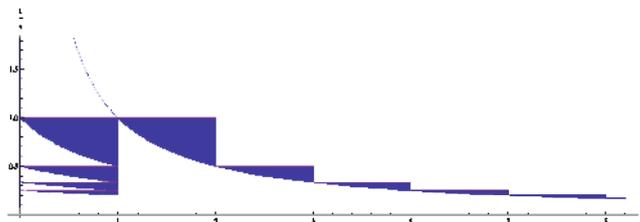


Figura 6

O limite da sucessão (γ_n) é chamado *constante de Euler* e habitualmente representado por γ , e o seu valor aproximado é 0.5772... O matemático Stefan Kramer, da Universidade de Gottingen, lidera actualmente um projecto ([5]), que visa reunir (e aumentar) toda a informação que existe sobre esta constante. Ninguém sabe sequer se γ é um número irracional. Usando meios computacionais, conhece-se hoje o seu valor com tal precisão que se sabe que, se γ for um número racional, o numerador e o denominador da fracção irredutível terão (pelo menos) centenas de milhares de algarismos. Mas isso não prova nada. As distâncias entre as estrelas e entre as galáxias mostram bem que os mistérios do Universo não estão feitos à medida das conveniências humanas. □

Referências

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978.
- [2] E. Artin. "The Gamma Function". Translated by Michael Butler. Athena Series: Selected Topics in Mathematics. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.
- [3] H. M. Edwards. *Riemann's Zeta Function*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2001.
- [4] E.W. Weisstein, "Gamma Function." From *MathWorld* - A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html>
- [5] <http://www.math.uni-goettingen.de/skraemer/gamma.html>

Regras de boa vizinhança

Descobrir que padrões podemos obter num espaço regularmente dividido, em que existe um número de cores determinado e uma certa regra de coloração, pode ser um problema mais complexo do que se julga.

Imagine o leitor que possui azulejos quadrados, todos do mesmo tamanho mas de duas cores diferentes, pretos e brancos, e que pretende cobrir uma parede com os azulejos, fazendo coincidir os vértices. Considerando que cada azulejo tem quatro vizinhos (os que com ele partilham uma aresta), pode colocar a si mesmo o desafio de tentar que cada azulejo preto tenha quatro vizinhos brancos e que cada azulejo branco tenha quatro vizinhos pretos.

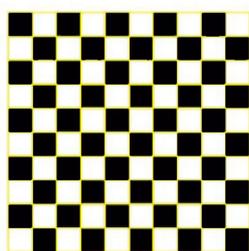


Figura 1 - Tabuleiro de xadrez.

Após um momento de reflexão, descobrirá que a esta regra de coloração corresponde o padrão do tabuleiro de xadrez da Figura 1.

Satisfeito com o resultado, o leitor passa para a parede seguinte e cria uma nova regra. Por exemplo, que cada azulejo preto tenha quatro vizinhos brancos e que cada azulejo branco tenha dois vizinhos pretos (e dois brancos). Não é tão fácil como o anterior, mas o leitor consegue chegar a um dos resultados seguintes,

que são semelhantes mas em que um está rodado em relação ao outro – Figuras 2 e 3.

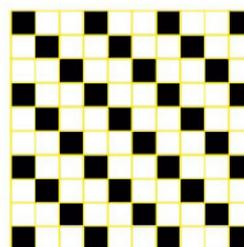


Figura 2 - Padrão que satisfaz a regra de coloração: cada azulejo preto tem quatro vizinhos brancos e cada azulejo branco tem dois vizinhos pretos (e dois brancos).

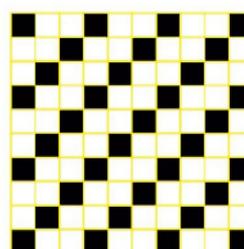


Figura 3 - Padrão da Figura 2 rodado.

Provavelmente o leitor chegou a esta solução por um processo de tentativa-erro como o descrito nas Figuras 4, 5 e 6.

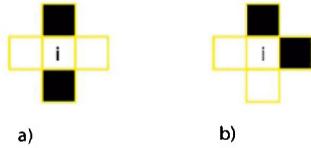


Figura 4 - Começando com um azulejo branco (i), sabe que pode dispor os dois vizinhos pretos em lados opostos – caso a) – ou em lados contíguos – caso b).

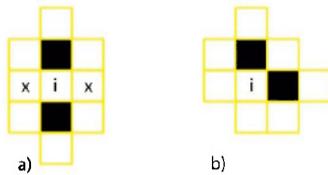


Figura 5 - Seguindo a regra de coloração, preenche com azulejos brancos a vizinhança dos azulejos pretos. No entanto, os azulejos assinalados com X, no caso a), ficam com três vizinhos brancos, o que é incompatível com a regra de coloração. Portanto, conclui que os vizinhos pretos de um azulejo branco nunca podem estar em lados opostos.

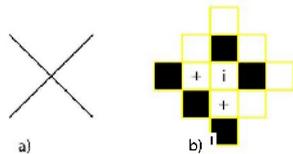


Figura 6 - Ao acrescentar azulejos ao caso b) da Figura 5, completando a vizinhança dos azulejos assinalados com +, o leitor apercebe-se de um padrão que se pode estender por uma parede tão grande quanto se queira.

Nesta altura o leitor está a pensar que talvez haja uma maneira mais simples de chegar ao padrão final a partir da regra de coloração.

Entretanto, continua a experimentar e verifica que não consegue cobrir a parede com a regra: cada azulejo preto tem quatro vizinhos brancos e cada azulejo branco tem três vizinhos pretos (e um branco).

A regra de coloração – cada azulejo preto tem um vizinho branco (e três pretos) e cada azulejo branco tem dois vizinhos pretos (e dois brancos) – dá origem a dois padrões diferentes (papel quadriculado e caneta chamados a participar). Quando chega à regra – cada azulejo preto tem dois vizinhos brancos e cada azulejo branco tem dois vizinhos pretos, – surgem muitos padrões diferentes. Tanto pode ter padrões certinhos, que se repetem periodicamente (os dois padrões periódicos das Figuras 7 e 8) como padrões mais soltos (Figuras 9 e 10).

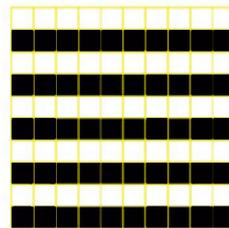


Figura 7 - Padrão periódico que satisfaz a regra de coloração: cada azulejo preto tem dois vizinhos brancos e cada azulejo branco tem dois vizinhos pretos.

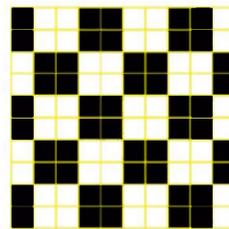


Figura 8 - Padrão periódico que satisfaz a mesma regra de coloração da Figura 7.

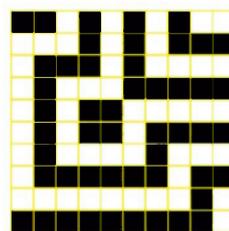


Figura 9 - Padrão não periódico que satisfaz a mesma regra de coloração da Figura 7.

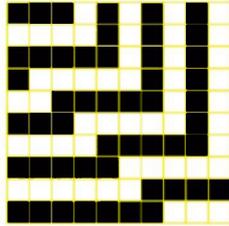


Figura 10 - Padrão não periódico que satisfaz a mesma regra de coloração da Figura 7

O leitor desconfia que pode passar uma temporada entretido com este problema e começa a organizar as ideias. Para começar, como ter a certeza de que experimentou todas as regras de coloração? E se tiver azulejos quadrados de três cores diferentes, pretos, brancos e cinzentos? E de quatro cores diferentes? A família e os amigos, nesta altura, contribuem com cadernos quadriculados e combinações de cores improváveis.

Deambulando pela rua – então e se usar aqueles azulejos hexagonais (Figura 11) que viu na loja, unindo-os vértice com vértice, de forma a que cada azulejo tenha seis vizinhos? Deambulando pela casa – então e se usar os cubos dos filhos e os sobrepuer, vértice com vértice (Figura 12), cada um com seis vizinhos: o de cima, o de baixo e os quatro dos lados?

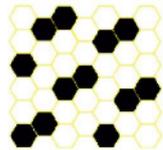


Figura 11 - Padrão periódico que satisfaz a regra de coloração: cada azulejo preto tem um vizinho preto e cinco vizinhos brancos; cada azulejo branco tem dois vizinhos pretos e quatro brancos.

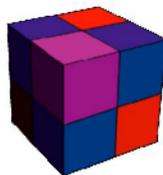


Figura 12 - Cubos iguais sobrepostos, vértice com vértice

O artigo que tem em mãos nasceu de questões desta natureza.

Há muitos modelos científicos que tentam descrever fenómenos reais e que subdividem o espaço em porções pequenas, todas iguais, que se relacionam de determinada maneira. Para o leitor é prático cobrir uma parede grande com azulejos quadrados pequenos e com a regra de fazer coincidir os vértices. Também um cientista que pretenda estudar o desenvolvimento, ao longo do tempo, de uma mancha de bolor numa parede ou de uma espécie de arbusto no deserto, pode dividir a parede, ou a superfície do deserto, numa quadrícula. A partir dessa divisão descreve o alastramento do arbusto, quadrado a quadrado, sabendo que o arbusto só aparece num quadrado se estiver presente em algum dos quadrados vizinhos. As duas cores que o leitor utilizou podem codificar a propriedade que o cientista estuda, o quadrado é preto se não tem arbusto e branco se tem arbusto. Numa situação diferente, em que se estude a concentração de uma determinada substância, pode considerar-se três cores: nas quadrículas pretas a concentração é inferior a 30%, nas quadrículas brancas é superior a 70% e nas quadrículas cinzentas a concentração é superior a 30% e inferior a 70%. O leitor pode imaginar vários casos diferentes.

A matemática que agora lhe apresentamos aborda com muita generalidade o tipo de problemas que até aqui referimos, tentando perceber o que há de comum entre todos os exemplos, independentemente de termos bolor, arbustos ou concentrações, independentemente de termos duas, três, ou k cores, independentemente de termos uma superfície (como uma parede) ou um volume (como uma sala) ou um espaço de maior dimensão. A nossa motivação vem das equações diferenciais. Se cada célula na rede representa um sistema de equações diferenciais ordinárias que depende das células vizinhas, encontrar um padrão corresponde a identificar um subespaço vectorial do espaço de fase do sistema infinito de equações diferenciais que é deixado invariante pelo sistema. Ou, por outras palavras, qualquer solução do sistema que passe por tal subespaço, afinal permanece lá durante todo o tempo. Neste artigo não desenvolveremos esta vertente do problema. O leitor interessado pode encontrar mais detalhes nos artigos [1] [2] e referências lá citadas.

A questão a que tentamos responder é: num problema em que o espaço está regularmente dividido e em que temos k cores, dada uma regra local de coloração, quais os padrões que podemos obter?

O leitor poderá ficar perplexo por não existir uma resposta imediata, embora o treino com os azulejos de duas cores tenha revelado resultados tão diversos: regras de coloração às quais corresponde apenas um padrão, regras às quais correspondem dois padrões, regras às quais corresponde uma aparente infinidade de padrões (sim, garantimos que são em número infinito) e regras às quais não corresponde nenhum padrão.

Na primeira parte do artigo, vamos clarificar os significados de "regularmente dividido" e de "regra de coloração". Na segunda parte, apoiadas por um exemplo, vamos descrever resultados da nossa investigação matemática. Na terceira parte, expomos, de forma muito breve, esses resultados na sua generalidade.

1. Ferramentas

Tomemos a quadrícula formada pelo revestimento de azulejos (Figura 13) e coloquemos uma bola no centro de cada quadrado, unindo duas bolas com setas se os lados dos respectivos quadrados se tocam (Figura 14). Obtemos assim uma estrutura que descreve as propriedades da quadrícula inicial. Atribuímos às bolas (que passamos a chamar *células*) a cor do azulejo correspondente e representamos as relações de vizinhança (ou *acoplamentos*) por setas, todas do mesmo tamanho. Todas as células têm o mesmo número de vizinhos, pois consideramos que esta estrutura é uma *rede infinita* (ver Figura 15).

Agora está claro porque é que nos encontramos numa área de investigação chamada "redes de células acopladas"!

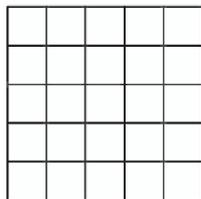


Figura 13 - Quadrícula formada pelo revestimento de azulejos quadrados.

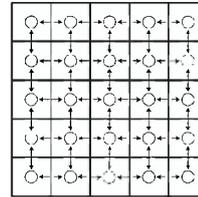


Figura 14 - Construção da rede de células acopladas a partir da quadrícula.

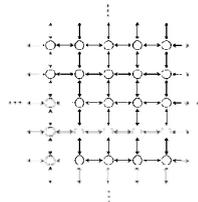


Figura 15 - Rede infinita de células acopladas.

Quando falamos de vizinhança, se X é vizinho de Y , então Y é vizinho de X , relação que representamos com uma seta de duas pontas (seta bidirecional), entre X e Y . Relações mais gerais, no entanto, exigem setas com uma ponta e uma cauda, imagine o leitor uma linha de montagem ou uma árvore genealógica. Uma seta bidirecional significa duas setas unidireccionais em direcções opostas.

Formalmente, para o caso dos azulejos quadrados, as células ocupam as posições (x, y) do plano, que pertencem ao conjunto

$$L = \{ x(1,0) + y(0,1) : x,y \text{ em } \mathbf{Z} \}.$$

Caso queira aprofundar o estudo, acrescentamos que os nossos resultados são válidos para qualquer *rede euclidiana* L em \mathbf{R}^1 , isto é, um reticulado (que denotamos igualmente por L) com n geradores linearmente independentes, em \mathbf{R}^1 , que pertencem ao conjunto dos vizinhos mais próximos da origem. A rede hexagonal e a cúbica são exemplos de redes euclidianas.

Para definirmos as regras de coloração de uma forma consistente temos de considerar o número de cores e a *valência* característica de cada rede, em que valência é o nome dado ao número de vizinhos de cada célula.

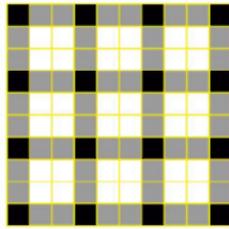


Figura 16 - Padrão que satisfaz a regra de coloração descrita pela matriz A .

Por exemplo, no padrão da Figura 16 tomamos as cores pela ordem preto, branco e cinzento. A regra de coloração pode então ser descrita pela matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A primeira linha indica que uma célula da primeira cor (preto) tem 0 vizinhos da primeira cor, 0 vizinhos da segunda cor (branco) e 4 vizinhos da terceira cor (cinzento); de forma análoga, a segunda e a terceira linhas indicam as cores dos vizinhos das células brancas e cinzentas, respectivamente.

O leitor já está familiarizado com a tarefa de distribuir cores pelos vizinhos, e concordará que com matrizes é mais fácil garantir que não nos esqueçamos de nenhuma hipótese. Se prosseguir o estudo verá que, para k cores e valência v , tem de considerar todas as matrizes $k \times k$ com entradas inteiras não negativas e cuja soma, ao longo das linhas, é v . Basta enumerar as matrizes a menos de permutações das cores, pois não é relevante a ordenação que escolheu para as cores.

2. Um exemplo

É possível colorir as células da rede quadrada infinita com duas cores, digamos preto e cinzento, de acordo com a regra A ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

O leitor já sabe, desde o início deste artigo, que a resposta é positiva (ver Figura 2). Mas já reparou que os padrões obtidos são periódicos segundo duas direcções diferentes? Sendo $l_1 = (1,0)$ e $l_2 = (0,1)$, note os períodos não colineares $3l_1$ e $2l_1 + l_2$ do padrão da Figura 17.

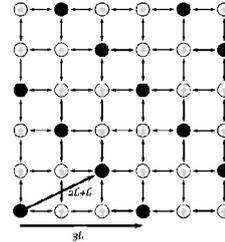


Figura 17 - Padrão periódico segundo duas direcções diferentes.

Repare o leitor que podemos introduzir naturalmente o conceito de relações de vizinhança (acoplamentos) agora entre um conjunto finito de objectos (células). Obtemos *redes finitas* de células acopladas. Analogamente, faz sentido considerar colorações das células de acordo com uma determinada regra.

Por exemplo, cada uma das redes da Figura 18 tem 3 células, cada célula tem 4 vizinhos e as células estão coloridas de acordo com a regra de coloração descrita pela matriz A . Tal como anteriormente, uma seta entre duas células (que poderão coincidir, tal como na rede G_2) simboliza uma relação de vizinhança entre as duas células. Como cada célula tem 4 vizinhos, ambas as redes têm valência 4. Note que para verificar a valência, no caso das setas que unem uma célula a si mesma, o leitor tem de contar as pontas da seta em torno dessa célula.



Figura 18 - Duas redes de três células em que cada célula tem 4 vizinhos. As células estão coloridas de acordo com a regra descrita pela matriz A .

Um resultado da nossa investigação afirma que existem padrões espacialmente periódicos com uma dada regra de coloração se e só se existirem redes bidireccionais finitas com a mesma regra de coloração e mais algumas propriedades específicas.

O que vamos fazer de seguida é construir o padrão periódico que acabámos de ver começando pela regra A e passando pela rede finita G_1 .

Proporção de cores. Começamos por determinar a proporção p_i , para $i = 1, 2$, das células de cor preta e cor cinzenta, respectivamente, numa qualquer coloração que respeite a regra A de qualquer rede (finita ou infinita) bidireccional em que cada célula tem 4 vizinhos. Neste caso calculamos o vector próprio à esquerda da matriz A , cuja soma das coordenadas é 1, associado ao valor próprio 4, isto é, (p_1, p_2) tal que $p_1 + p_2 = 1$ e $(p_1, p_2) A = 4 (p_1, p_2)$. Obtemos $(p_1, p_2) = (1/3, 2/3)$, significando que a proporção de células pretas é $1/3$ e a de células cinzentas é $2/3$.

Redes bidireccionais finitas. Uma vez que $3(1/3, 2/3) = (1, 2)$, uma rede finita bidireccional de valência 4 e que admita uma coloração de acordo com a regra A terá de ter, pelo menos, 3 células. É fácil de ver que G_1 e G_2 são as únicas redes de 3 células nessas condições.

Sendo $\{c_1, c_2, c_3\}$ o conjunto de células, em que a célula preta é c_1 e as células cinzentas são denotadas por c_2 e c_3 , as matrizes de adjacência B_1 e B_2 destas redes bidireccionais são

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Em ambas as matrizes, a entrada na linha i e coluna j representa o número de setas direccionadas da célula c_i para a célula c_j . As matrizes de adjacência descrevem a forma destas redes sem o recurso ao desenho. As redes são bidireccionais e, por isso, as matrizes de adjacência são simétricas em relação à diagonal.

Decomposição em ciclos. Cada uma das matrizes pode ser decomposta na soma de duas matrizes simétricas com linhas cujas entradas somam 2:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente, cada uma das redes G_1 e G_2 admite uma decomposição em duas redes de valência 2, contendo as células c_1 , c_2 e c_3 (ciclos), tal como apresentamos na Figura 19.

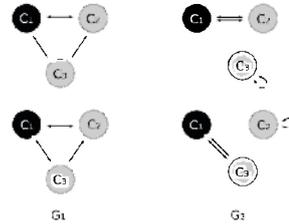


Figura 19 - Decomposições de G_1 e G_2 em ciclos contendo as células c_1 , c_2 e c_3 .

Cada um dos ciclos acima é composto por setas bidireccionais e pode ser decomposto em dois ciclos direccionados – um a rodar no sentido dos ponteiros do relógio e outro em sentido contrário. Quando percorremos as células seguindo um destes ciclos direccionados, obtemos uma sequência repetitiva de células, ou permutação. De seguida, traduzimos a decomposição em ciclos direccionados para linguagem de matrizes.

Cada uma das matrizes pode ser escrita como uma soma $M_\sigma + M_\sigma^T$ para alguma matriz de permutação M_σ associada a uma permutação σ em S_3 (grupo de permutações de 3 símbolos). Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se M_{σ_1} é a matriz associada à permutação $\sigma_1 = (c_1 c_2 c_3)$,

$$M_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

então $M_{\sigma_1^{-1}}$ é a matriz associada a $\sigma_1^{-1} = (c_1 c_3 c_2)$ e, tomando $\sigma_2 = \sigma_1$, então B_1 é a soma

$$B_1 = (M_{\sigma_1} + M_{\sigma_1}^T) + (M_{\sigma_2} + M_{\sigma_2}^T) = 2(M_{\sigma_1} + M_{\sigma_1}^T)$$

Construção do padrão periódico. Uma vez que σ_1 e σ_2 comutam, os nossos resultados garantem que podemos construir uma coloração periódica da rede quadrada respeitando a regra da coloração fixada. Começando com uma qualquer célula c_i na posição l em L , a célula na posição $l+l_j$ será $\sigma_j(c_i)$, para $j=1,2$, obtendo o padrão da rede quadrada infinita apresentado na Figura 17. Na prática, estamos a associar às direcções horizontal e vertical as sequências periódicas de células, dadas pelos ciclos direccionados de G_1 (ver a Figura 20).

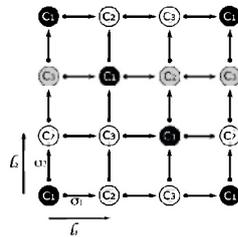


Figura 20 - Associação das permutações σ_1 e σ_2 às direcções l_1 e l_2 .

Uma decomposição semelhante da matriz B , leva a

$$B_1 = (M_{\sigma_1} + M_{\sigma_2}^T) + (M_{\sigma_3} + M_{\sigma_4}^T)$$

em que $\sigma_3 = (c_1 c_2)(c_3)$ e $\sigma_4 = (c_1 c_3)(c_2)$. Contudo, estas permutações não comutam e não é possível fazer uma construção análoga à anterior.

3. Outras redes e outras regras

O exemplo apresentado na secção anterior representa um caso especial do problema que pode ser descrito mais geralmente da seguinte forma: dada uma rede euclidiana L em \mathbb{R}^1 , e uma regra de coloração descrita por uma matriz A quadrada $k \times k$, encontrar uma condição necessária e suficiente para que exista um padrão da rede, espacialmente periódico, que respeite a regra de coloração A .

Algumas das vantagens deste resultado:

- (a) O problema na rede infinita é traduzido num problema finito.
- (b) O novo problema finito – existência de redes bidireccionais finitas com certas propriedades – é fácil de tratar usando métodos *standard* em teoria de matrizes.
- (c) O método é construtivo.

De seguida apresentamos informações técnicas acerca dos resultados e das provas para o leitor interessado em aprofundar o tema.

Seja v a valência da rede L , um número par positivo dado que L é euclidiana, a condição que obtemos envolve a existência de uma rede finita bidireccional, de valência v , e que admita uma coloração de acordo com A .

Em geral, são muitas as redes bidireccionais finitas nas condições exigidas. Para cada uma delas,

garantimos uma decomposição (factorização) em redes com as mesmas células e de valência 2 usando um resultado clássico de Teoria de Grafos (ver [3]). Um grafo bidireccional diz-se v -regular se o número de setas incidentes em cada célula for v . Um 2-factor de um grafo G com conjunto de células C é uma união de subgrafos de G , todos 2-regulares, com conjuntos de células disjuntos cobrindo C . Qualquer grafo v -regular, em que v é par, admite uma factorização em 2-factores.

Para cada uma destas decomposições, associamos Σ , um conjunto de permutações das células, uma permutação para cada 2-factor. O resultado diz que:

Teorema 1 (ver [1]). *Na rede euclidiana L , de valência v , existe um padrão espacialmente periódico respeitando a regra A se e só se existe uma rede bidireccional finita de valência v , com células coloridas de acordo com a regra A , e com uma decomposição Σ tal que o reticulado é homomorfo ao grupo de permutações $\langle \Sigma \rangle$.*

Demonstração. [Esboço da prova de que a existência de um homomorfismo entre L e $\langle \Sigma \rangle$ garante a existência de um padrão na rede L]

Seja $\Phi: L \rightarrow \langle \Sigma \rangle$ um homomorfismo de grupos e C o conjunto de células da rede finita que admite a decomposição Σ . Prova-se que existe uma função $\Pi: L \rightarrow C$ tal que

$$\Pi(l+g) = \sigma_g(\Pi(l))$$

Em que $\sigma_g = \Phi(g)$. Sendo a coloração uma função que atribui uma cor a cada célula da rede considerada, defina-se a coloração ξ_L da rede L a partir da coloração ξ da rede bidireccional finita:

$$\xi_L(l) = \xi(\Pi(l)) \quad (l \text{ em } L).$$

Por construção, ξ_L é espacialmente periódica, e prova-se que satisfaz a regra A .

Um dos objectivos do nosso trabalho é, fixada uma rede euclidiana L de valência v e uma regra de coloração A , enumerar todos os padrões espacialmente periódicos da rede L respeitando a regra A . Usando o Teorema 1, isto equivale a enumerar, a menos de simetrias, todas as redes finitas bidireccionais de valência v com a coloração A e admitindo uma decomposição nas condições do

Teorema. A construção de uma rede finita em tais condições garante a existência de um número infinito de outras redes que geram o mesmo padrão. Assim, em [2], introduzimos o conceito de *root networks*, as redes finitas com menor número de células que geram os padrões em L .

Cada *root network* admitirá várias decomposições em ciclos que poderão originar distintos padrões em L . O Teorema 5.2 de [2] mostra que a enumeração dos padrões distintos depende das simetrias da *root network*. Mais precisamente, dos diferentes subgrupos abelianos de ordem M do grupo de automorfismos da *root network*, em que M é o número das suas células. **M**

Referências:

[1] **A.P.S. Dias e E.M. Pinho**, (2009). "Spatially Periodic Patterns of Synchrony in Lattice Networks", *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 8 (2), 641-675.

[2] **A.P.S. Dias e E.M. Pinho**, (2010). "On the Enumeration of Periodic Patterns of Synchrony via Finite Bidirectional Networks", *Proceedings A of the Royal Society of London*, 466, 891-910.

[3] **Bondy, J. A. e Murty, U. S. R.**, (1976). "Graph Theory with Applications", *American Elsevier Publishing*, New York.

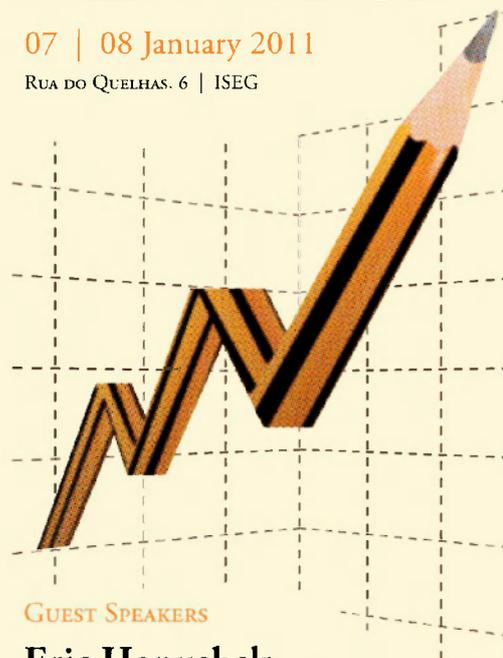
Eliana Manuel Pinho usufruiu da bolsa SFRH/BPD/29975/2006 durante a realização do trabalho aqui descrito e usufrui actualmente da bolsa SFRH/BPD/61266/2009, ambas da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

First Lisbon Research Workshop

ECONOMICS and ECONOMETRICS of EDUCATION

07 | 08 January 2011

RUA DO QUELHAS. 6 | ISEG



GUEST SPEAKERS

Eric Hanushek

STANFORD UNIVERSITY

Daniele Checchi

UNIVERSITY OF MILAN

Brian P. McCall

UNIVERSITY OF MICHIGAN

William Schmidt

MICHIGAN STATE UNIVERSITY

INFORMATION, REGISTRATION AND CONTACT

<http://cemapre.iseg.utl.pt/1e3/>

cemapre@iseg.utl.pt

ORGANIZERS

Luís Cabral NEW YORK UNIVERSITY | Nuno Crato UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Sara Morteira BANCO DE PORTUGAL | Margarida Rodrigues UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Miguel St. Aubyn UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



O maior centro de formação de matemática do País tem mais cinco formações em 2010/2011

Com as novas acções de formação, a SPM continua a contribuir para um contínuo aprofundar de conhecimentos nas diversas áreas da matemática.

O Centro de Formação SPM (CFSPM) continua a crescer, tentando, com sucesso, ir sempre ao encontro das solicitações formativas dos professores, renovando a oferta de acções de formação a cada novo ano lectivo e mantendo a qualidade que já o caracteriza. Terminado o ano lectivo de 2009-2010, é altura de fazer o balanço.

Foi um ano de muito trabalho. Foram ministradas 79 acções de formação a 1523 professores por todo o País. Rever as avaliações feitas pelos formandos, de forma anónima, ao desempenho do(a) formador(a) e à acção em si dá ao CFSPM vontade de continuar, acreditando novas acções de formação para dinamizar ainda mais o Centro.

O CFSPM apresenta neste ano lectivo de 2010-2011 cinco novas acções de formação.

Duas foram delineadas com o propósito de ajudar os professores na aplicação do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico: “Novos Programas: Questões de Matemática Elementar” e “Novos Programas: Materiais Didácticos”. A primeira, acreditada para educadores de infância e professores de 1.º Ciclo, pretende explorar situações observadas em actividades de supervisão das práticas lectivas e algumas das necessidades aí detectadas ao nível dos conhecimentos, com o objectivo de contribuir para que os formandos tenham oportunidade de aprofundar os seus conhecimentos científicos e valorizar as suas competências profissionais. A segunda acção de formação, estando o CFSPM consciente de que, para as crianças que frequentam os primeiros ciclos de ensino, o trabalho com materiais didácticos manipuláveis, como os calculadores multibásicos e os blocos lógicos, é um meio facilitador das aprendizagens, pretende aprofundar os conhecimentos científicos relativos aos conceitos associados àqueles materiais didácticos e abrir um

leque de possibilidades da sua utilização prática.

A formação “Treinador Olímpico” surge pelo facto de existir um número crescente de alunos a aderir a competições envolvendo resolução de problemas, como por exemplo as Olimpíadas de Matemática. Sabendo que a resolução de problemas tem um lugar natural na sala de aula em qualquer nível do ensino da matemática, esta formação tem como objectivo incentivar a realização regular de sessões locais de discussão de problemas, produzindo actividades para serem usadas não só na sala de aula mas também fora dela.

Sendo “Aplicações do Geogebra” uma das acções mais requisitadas pelos professores, foi delineada a acção “Aplicações e Modelação Matemática com o Geogebra” com o objectivo de aprofundar ainda mais os conhecimentos nesta área. Muito dedicada à vertente prática e ao estudo de formas interessantes de criar e explorar materiais interactivos ou de modelar situações de contexto real através da utilização de recursos informáticos, acreditamos que será do agrado de muitos.

Finalmente, a acção “Estatística no Excel” foi pensada de forma a abranger todos os grupos disciplinares dos Ensinos Básico e Secundário, uma vez que esta é uma ferramenta que pode ser usada por professores de qualquer área disciplinar. Neste sentido, sabendo o CFSPM que o Excel é, cada vez mais, uma ferramenta facilitadora das tarefas e do trabalho de todos os professores, decidimos alargar e investir nesta acção para outras áreas específicas para além da matemática.

Espera-se assim que os professores continuem a apostar no CFSPM como meio de obtenção de conhecimentos teórico-práticos e pedagógicos que contribuam, ainda mais, para a excelência do Ensino da matemática em [Portugal.M](#)

Quatro matemáticos galardoados com Medalhas Fields



Elon Lindenstrauss, Ngô Bào Châu, Stanislav Smirnov e Cédric Villani foram os matemáticos premiados com as Medalhas Fields, atribuídas no dia 19 de Agosto em Hyderabad, na Índia, durante o Congresso Internacional de Matemáticos (ICM). O prémio, que é concedido de quatro em quatro anos pela União Internacional de Matemática (IMU), tem distinguido investigadores até aos 40 anos de idade que tenham realizado trabalhos excepcionais na área. O russo Stanislav Smirnov é professor

na Universidade de Genebra, na Suíça, e o seu trabalho debruça-se sobre análise, sistemas dinâmicos, probabilidades e física matemática. Smirnov nasceu em 1970 em São Petersburgo e esteve recentemente em Portugal para participar nas celebrações dos 10 anos do Programa Novos Talentos em Matemática, da Fundação Calouste Gulbenkian. Elon Lindenstrauss foi premiado pelo seu trabalho em teoria ergódica e pelas suas aplicações à teoria de números. Nasceu em Jerusalém em 1970 e é doutorado em Matemática pela Universidade de Hebrew, onde é professor desde 2008, tendo leccionado em Princeton. Havia sido já galardoado com o Prémio da Sociedade Europeia de Matemática, em 2004, e com o Prémio Salem, em 2003. A distinção de Ngô Bào Châu deve-se à sua demonstração do chamado Lema Fundamental, um dos grandes obstáculos ao desenvolvimento do programa proposto por Robert Langlands em 1967, que previa a existência de relações profundas entre diferentes áreas da matemática. Nasceu em 1972 em Hanói, Vietname, estudou na Universidade Paris VI e doutorou-se em Orsay sob a supervisão de Gérard Laumon, juntamente com quem foi galardoado com o prémio de investigação Clay, em 2004. Actualmente é professor na Faculdade de Ciências de Orsay, membro do Instituto de Estudos Avançados de Princeton e iniciou recentemente funções na Universidade de Chicago. Em 2007, foi agraciado com o Prémio Sophie Germain e o Prémio Oberwolfach. O francês Cédric Villani possui uma interpretação matemática particular do conceito físico de entropia, que aplicou para resolver problemas importantes inspirados pela física. Nasceu em 1973 e é professor na Escola Normal Superior de Lyon desde 2002. Em 2009, foi nomeado director do Instituto Henri Poincaré, em Paris, e conquistou o Prémio Fermat. Anteriormente, tinha sido galardoado com o Prémio da Sociedade Europeia de Matemática e o Prémio Henri Poincaré, da Associação Internacional de Física Matemática. [M](#)

Nevanlinna, Gauss e Chern

Durante o ICM foram atribuídos outros prémios, nomeadamente o Gauss, que consagra a descoberta de aplicações significativas fora do campo matemático, entregue a Yves Meyer. O prémio Nevanlinna, que recompensa trabalhos vinculados às ciências da informação, foi atribuído a Daniel Spielman. A medalha Chern, uma estreia entre os prémios de matemática, atribuída em memória do matemático chinês Shiin-Shen Chern (1911-2004), foi entregue a Louis Nirenberg pelo seu trabalho ao nível das equações diferenciais parciais elípticas não lineares. [M](#)

Marcelo Viana é vice-presidente da IMU

O luso-brasileiro Marcelo Viana, vice-presidente da Sociedade Brasileira de Matemática e investigador do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, no Brasil, foi eleito vice-presidente da IMU, durante a Assembleia-Geral realizada na Índia, no passado mês de Agosto. A norte-americana Ingrid Daubechies foi eleita presidente. Na mesma ocasião, foi anunciado que o Weierstrass Institute Berlin, na Alemanha, acolherá o Secretariado da instituição a partir de Janeiro de 2011. [M](#)

Mathematicians of the World, Unite! compila história do ICM

Guillermo Curbera lançou recentemente o livro *Mathematicians of the World, Unite!*, sobre o percurso histórico do Congresso Internacional de Matemáticos (ICM), o encontro que, de quatro em quatro anos, reúne matemáticos de todo o mundo. A obra passa em revista os 25 congressos realizados ao longo de mais de um século (entre 1897 e 2006), bem como as mudanças que ocorreram na cultura matemática desde então. O título evoca Félix Klein que, em 1893, no Congresso Mundial de Chicago, lançou o apelo "*Mathematicians of the world, unite!*" A ideia do nascimento do ICM é, aliás, atribuída ao matemático alemão e ao russo Georg Cantor, que defendiam a criação de um encontro internacional de matemáticos. Assim, em 1897 realizava-se o primeiro ICM, em Zurique, com 16 países participantes. Em 2014, passados mais de cem anos da primeira edição, o Congresso terá lugar na Coreia do Sul. 

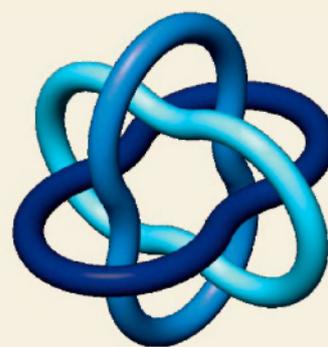
Benoît Mandelbrot, pai dos fractais, morreu aos 85 anos



Desapareceu no passado dia 14 de Outubro, aos 85 anos, Benoît Mandelbrot, cujo nome ficará para sempre ligado ao surgimento dos fractais. O matemático franco-americano, nascido em 1924, foi responsável por descrever uma nova classe de objectos matemáticos nos anos 70 que viria a ter implicações em várias áreas, como a biologia, a física, a astronomia ou o sistema financeiro. O matemático iniciou a vida académica em Paris, depois de abandonar a Polónia, a sua terra natal, aos 11 anos de idade devido às perseguições nazis. Em 1952, concluiu o doutoramento em ciências matemáticas na capital francesa e em 1958 mudou-se para os

Estados Unidos para trabalhar na IBM, onde desenvolveu investigação científica durante cerca de três décadas. No final dos anos 80 passou a leccionar na Universidade de Yale, onde ficou até à sua reforma, em 2005. A descoberta que o tornaria célebre aconteceu no ano de 1975, quando inventou o termo fractal para descrever objectos matemáticos fragmentados e irregulares, cuja estrutura se repete a diferentes escalas. A imagem de fractais mais conhecida chama-se Conjunto de Mandelbrot e foi gerada por computador, exibindo uma estética elaborada, que inspirou a cultura pop. Mandelbrot popularizou estes objectos matemáticos em 1982 com a publicação de *Les objets fractals*. *Objectos Fractais* seria editado em Portugal pela Gradiva em 1991, após um encontro organizado pela IBM, que trouxe o matemático a terras lusas. 

IMU recomenda boas práticas para revistas científicas de matemática



A IMU divulgou um documento com recomendações de boas práticas para revistas científicas de matemática. O texto aborda as questões dos direitos e responsabilidades dos autores, *referees* e editores, questiona as práticas abusivas e orienta quanto ao que deve ser um processo claro de aceitação ou rejeição de artigos científicos. As recomendações foram aprovadas na Assembleia-Geral da IMU, que se realizou no passado mês de Agosto, em Bangalore, Índia. A sua redacção nasceu da colaboração entre o Committee on Electronic Information and Communication e Douglas Arnold, presidente da Sociedade para a Matemática Aplicada e Industrial, que elaborou recentemente um estudo sobre práticas abusivas. O documento já está a ser adoptado por diversas publicações, entre as quais a *Portugaliae Mathematica*, publicada pela SPM. 

Investigadores internacionais reflectem em Óbidos sobre popularização da matemática



Foram três dias de debate, partilha de ideias e reflexão. Entre 26 e 29 de Setembro, quase meia centena de matemáticos nacionais e internacionais estiveram reunidos em Óbidos no *workshop* internacional "Raising European Public Awareness of Mathematics". Este promoveu a reflexão sobre a imagem que a matemática tem junto do público em geral e procurou inspirar acções que despertem a consciência para a importância das ciências matemáticas na sociedade actual. O evento foi organizado em conjunto pelo Centro Internacional de Matemática e pelo Raising Public Awareness of Mathematics Committee da European Mathematical Society (EMS), com o apoio da SPM. Além das sessões dirigidas aos investigadores, o *workshop* contemplou diversas actividades abertas ao público, como a exibição de alguns filmes matemáticos na sessão "IMAGINARY – Mathematical Creations and Experiences", que animou o auditório da Casa da Música. O evento foi também o ponto de partida de mais uma temporada das Tardes de Matemática, com "A Matemática dos Descobrimentos", apresentada por Henrique Leitão (Centro de História das Ciências da Universidade de Lisboa). A inauguração da exposição "Medir o Tempo, Medir o Mundo, Medir o Mar" marcou também o encontro. Organizada pela SPM em parceria com o Museu de Ciência da Universidade de Lisboa, a mostra ficou patente até ao final de Outubro na Galeria da Casa Pelourinho e circula actualmente pelas escolas. Durante o *workshop*, o Raising Public Awareness of Mathematics Committee da EMS anunciou ainda o lançamento de um portal europeu de matemática, que reúne já centenas de artigos (ver caixa). ■

Portal europeu de matemática lançado em Portugal



Saber como se diz "raiz quadrada" em turco ou como se lê o símbolo de Pi em polaco ficou à distância de um clique. Durante o *workshop* "Raising Public Awareness of Mathematics", que decorreu em Óbidos, no passado mês de Setembro, foi lançado o portal www.mathematics-in-europe.eu, a pensar em todos aqueles que têm interesse pela matemática. O *site* disponibiliza informação variada dirigida a diferentes tipos de públicos: de jornalistas a professores, de estudantes do ensino secundário a matemáticos profissionais. Além de textos científicos, é também possível encontrar no portal informações sobre investigação, história da matemática, dicionários e ainda material que os professores podem usar nas salas de aula. O *site*, que pretende promover a imagem da matemática perante um público alargado, está já a ser traduzido para 11 línguas. A versão portuguesa está a cargo da SPM. ■

Portugal obtém o seu melhor resultado de sempre nas Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática



A participação dos olímpicos portugueses na última edição das Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática (OIM), que se realizaram em Setembro no Paraguai, não poderia passar despercebida. Portugal conquistou a sua melhor posição de sempre: 5.º colocado, com 81 pontos. Os quatro jovens matemáticos que constituíram a equipa trouxeram para casa uma medalha de prata e três de bronze. Ricardo Moreira, o veterano da equipa e vencedor de duas medalhas de bronze nas Olimpíadas Internacionais (2009 e 2010), junta agora à sua colecção a medalha de prata, somando 23 pontos. As medalhas de bronze foram conquistadas por João Pedro dos Santos e Diana Mesquita Macedo, ambos com 20 pontos, e por Miguel Amaral, com 18 pontos. No próximo ano, a Costa Rica será o país anfitrião desta competição e a equipa portuguesa terá mais uma oportunidade para mostrar o seu valor. 

Número de participantes das Olimpíadas Portuguesas de Matemática aumenta com expansão

Já está a decorrer uma nova edição das Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM), que este ano lectivo traz novidades. A expansão da competição permitirá que alunos a partir do 3.º ano participem nesta competição, organizada pela SPM. O prazo para as inscrições nas categorias mais elevadas já terminou, mas o das recém-criadas Mini-Olimpiadas estende-se até 30 de Abril do próximo ano. Com a expansão anunciada este ano, as OPM passaram a abranger as seguintes categorias: as Mini-Olimpiadas, para os 3.º e 4.º anos; as Pré-Olimpiadas, para o 5.º ano; e a categoria Júnior, para os 6.º e 7.º anos. As categorias A e B mantêm-se para os 8.º, 9.º, 10.º, 11.º e 12.º anos, respectivamente. A final das OPM 2010/2011 realiza-se na cidade de Braga. 

Olimpíadas de Matemática da Lusofonia já têm data marcada

Portugal acolherá as primeiras Olimpíadas de Matemática da Lusofonia (OML), entre 23 de Julho e 1 de Agosto do próximo ano. A par da competição realizar-se-á a Semana Olímpica da Lusofonia, com cursos e conferências. O evento pretende unir estudantes dos países lusófonos através da matemática, incentivar o desenvolvimento da disciplina nestes países, aprofundar a sua cooperação nesta área e apoiar a criação de sociedades científicas. A organização da OML foi definida este ano por diversos representantes dos países de Língua Portuguesa. 

Publicações da Sociedade Brasileira de Matemática disponíveis na SPM

São mais de 20 as obras da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) que já estão disponíveis na loja da SPM. *Medida e Forma em Geometria*, de Elon Lages Lima, *Primalidade em Tempo Polinomial*, de S. G. Coutinho, ou *21 Aulas de Matemática Olímpica*, de Carlos Yuzo Shine, são alguns dos títulos com o cunho da instituição brasileira que podem agora ser adquiridos em Portugal, ao abrigo do protocolo estabelecido entre a SPM e a SBM. O acordo nasceu da vontade de se estabelecerem relações cada vez mais estreitas entre as duas entidades, tornando possível aos respectivos associados o acesso a material científico produzido do outro lado do oceano. 

SPM e BES juntos “No Banco da Escola”



Começaram em Outubro as primeiras sessões do projecto “No Banco da Escola”, uma parceria entre a SPM e o Banco Espírito Santo (BES). A iniciativa pretende levar aos alunos dos 3.º e 4.º anos do Ensino Básico de todo o País sessões lúdico-pedagógicas no âmbito da actividade financeira. O projecto tem como objectivo contribuir para a formação de jovens esclarecidos relativamente a esta matéria, capacitando-os com conhecimentos sobre alguns conceitos fundamentais do mundo das finanças e da relação com o dinheiro. Além disso, demonstra a importância da matemática para as actividades do dia-a-dia. As sessões, sem custos para as escolas, realizam-se nos balcões do BES e pontualmente nos estabelecimentos de ensino. Para participar, as escolas deverão enviar os seguintes dados para nobancodaescola@bes.pt: nome da escola, pessoa responsável, contacto telefónico e endereço de *e-mail* e ainda número de turmas a inscrever (uma por sessão) e número de alunos por turma. 

Encontro Ibérico reuniu matemáticos em Braga

Entre os dias 1 e 3 de Outubro, Braga recebeu a 3.ª edição do Encontro Ibérico de Matemática, que contou com a presença de diversos investigadores portugueses e espanhóis. Lógica Matemática, Fundamentos e Computação, Análise Numérica e Optimização e Teoria de Cordas e Física Matemática foram as áreas científicas em discussão. O Encontro, uma organização conjunta da Real Sociedad Matemática Española e da SPM, reforçou mais uma vez os seus objectivos principais: incentivar a colaboração entre matemáticos dos dois países e desenvolver a investigação matemática na Península Ibérica. Nesta edição, o programa cultural não foi esquecido e os participantes tiveram a oportunidade de assistir a um concerto da Orquestra da Universidade do Minho e de fazer um passeio turístico pela cidade de Braga. 

Japonês bate recorde no cálculo de número de casas decimais do Pi

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169...$$

Shigeru Kondo, de 55 anos, calculou o valor do Pi em cinco triliões de dígitos, com a ajuda de um computador construído por si próprio. O engenheiro de sistemas ultrapassou assim o recorde anterior, que se situava nos 2,7 triliões de casas decimais, alcançado no ano passado pelo engenheiro francês Fabrice Bellard. O aparelho construído por Kondo levou 90 dias e sete horas a fazer o cálculo, teve um custo de cerca de 14 mil euros e possui um disco rígido com uma capacidade de 32 terabytes. Ainda assim, o engenheiro afirma que foram utilizados apenas 60 por cento da capacidade do computador e que pretende alcançar com a máquina os 10 triliões de dígitos. O japonês espera agora que o Livro de Recordes do Guinness reconheça o seu feito. 

SPM celebra 70 anos de existência



No próximo dia 12 de Dezembro, a SPM comemora 70 anos. Foram décadas dedicadas ao progresso da matemática em Portugal e ao crescimento da investigação, da divulgação e do ensino desta ciência. A Sociedade nasceu da actividade extraordinária que Portugal conheceu na área da matemática nas décadas de 1930 e 1940, impulsionada por uma geração composta por nomes históricos como Bento de Jesus Caraça, Ruy Luís Gomes, António Aniceto Monteiro, Manuel Zaluar, Alfredo Pereira Gomes e Pilar e Hugo Ribeiro. No entanto, as perseguições políticas perpetradas pelo Estado Novo obrigaram muitos matemáticos a abandonar as suas actividades, e alguns dos seus sócios fundadores e grandes dinamizadores partiram para o exílio. A SPM entrou assim em declínio e só viria a recompor-se no pós-25 de Abril, em 1977, quase 40 anos após a sua fundação.

Actualmente, a SPM é responsável por várias publicações, como a *Gazeta de Matemática*, pela edição de livros, pelo maior centro de formação em matemática do País e pela organização de iniciativas e eventos que mobilizam cada vez mais pessoas a nível nacional, como as Olimpíadas Portuguesas de Matemática, as Tardes de Matemática ou as exposições temáticas. No próximo ano ampliará a sua intervenção além fronteiras com a criação das Olimpíadas da Lusofonia, ao mesmo tempo que tem procurado trazer a Portugal destacados investigadores internacionais. Tem também estabelecido parcerias internacionais cada vez mais sólidas, como no caso da Real Sociedad de Matemática Espanola, a Sociedade Brasileira de Matemática e a European Mathematical Society. Reflexo do seu dinamismo é também o espaço crescente que tem vindo a ocupar nos meios de comunicação social, o que tem contribuído para consolidar a sua imagem de instituição de referência no seu campo de actuação. Não descurou também a importância de acompanhar as novas tendências e encontra-se hoje representada em várias plataformas na Internet.

São sete décadas de história e progresso que serão devidamente assinaladas no próximo mês de Dezembro. Acompanhe as informações sobre as comemorações no nosso site (www.spm.pt).

Tardes de Matemática animam cidades portuguesas



Já começou mais uma temporada das Tardes de Matemática, organizadas pela SPM. Novas sessões serão apresentadas, como já é habitual, em vários pontos do país, que vão ficar a saber os segredos da matemática e como esta ciência influencia o nosso quotidiano. Matemáticos, por vezes acompanhados de especialistas nas áreas tratadas, continuarão a levar a matemática da magia, dos neurónios ou das explorações marítimas a um público cada vez mais vasto, numa linguagem acessível e cativante. As Tardes de Matemática foram criadas pela SPM em 2001, em Lisboa, e rapidamente se estenderam a outras cidades portuguesas. A iniciativa surgiu com o objectivo de dar resposta à necessidade de se divulgar a matemática e de mostrar como esta ciência está presente em todos os aspectos da nossa vida. A organização das Tardes conta com o apoio de professores do ensino básico, secundário e superior e com várias parcerias.

Cartas da Direcção

por Miguel Abreu
[Instituto Superior Técnico]

SPM, EMS, IMU e a promoção da matemática

A parceria com as instituições internacionais em prol da matemática é fundamental para o progresso da área em Portugal e no mundo.

A direcção da SPM para o biénio 2010/2012 tomou posse no passado dia 22 de Julho. Nestes primeiros meses, a vertente internacional da nossa sociedade esteve bastante em evidência, com a participação da nova direcção e de sócios representantes em reuniões e eventos organizados pela Sociedade Europeia de Matemática (EMS) e pela União Matemática Internacional (IMU).

A SPM é sócia fundadora e membro institucional da EMS desde 1990. Nos últimos anos, a sua contribuição alargou-se com a transferência da publicação da revista *Portugaliae Mathematica* (PM) para a Publishing House da EMS, tendo a propriedade sido mantida pela SPM. Na última reunião do Conselho da instituição europeia, que teve lugar em Sofia, Bulgária, a 10 e 11 de Julho, Marta Sanz-Solé, da Universidade de Barcelona, Espanha, foi eleita a nova presidente da EMS, sucedendo a Ari Laptev a partir de Janeiro de 2011. A SPM esteve representada nessa reunião por Rui Loja Fernandes, da Universidade Técnica de Lisboa e actual editor em chefe da PM, que foi eleito para o Comité Executivo da EMS. A participação portuguesa em comités da EMS inclui Joana Teles, da Universidade de Coimbra e actual vice-presidente da SPM, no Committee for Developing Countries, Pedro Freitas, da Universidade Técnica de Lisboa, no Committee for Applied Mathematics e José Francisco Rodrigues, da Universidade de Lisboa, no Committee for Electronic Publishing.

A actuação em divulgação da matemática da EMS conta também com a colaboração portuguesa. Nuno Crato, da Universidade Técnica de Lisboa e actual presidente da Assembleia Geral da SPM, é membro do Raising Public Awareness of Mathematics (RPAM) Committee da EMS, um grupo de trabalho dedicado à divulgação da matemática. Uma das

tarefas deste comité foi a construção de um portal de divulgação da matemática (<http://mathineurope.eu/>), apresentado no passado dia 26 de Setembro em Óbidos, por ocasião da abertura do Workshop RPAM que contou com uma Tarde de Matemática da SPM. A SPM está a colaborar neste portal, nomeadamente na construção da versão em português.

Na IMU, a representação de Portugal é assegurada pela Comissão Nacional de Matemática (CNM), de que a SPM faz parte. Tive a oportunidade de estar presente com José Francisco Rodrigues, actual presidente da CNM, na Assembleia Geral da IMU que teve lugar em Bangalore, Índia, a 16 e 17 de Agosto. Na assembleia, foi eleita a nova presidente da instituição: Ingrid Daubechies, da Universidade de Princeton, EUA, que sucede a László Lovász. O matemático luso-brasileiro Marcelo Viana, do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Brasil, é um dos dois novos vice-presidentes. Foi também criada a Commission for Developing Countries, que substitui as extintas Commission on Development and Exchanges e Developing Countries Strategy Group.

A actuação da SPM e dos seus sócios vai mais além. Luís Saraiva, da Universidade de Lisboa e Coordenador Geral do Seminário Nacional de História da Matemática, uma secção autónoma da SPM, é membro do Comité Executivo da International Commission on the History of Mathematics. Jaime Carvalho da Silva, da Universidade de Coimbra, é o actual secretário-geral da International Commission on Mathematical Instruction.

A promoção da matemática nos países em desenvolvimento é uma prioridade tanto para a EMS como para a IMU. Esta deve também ser uma prioridade para a SPM, em particular no que toca aos países de língua portuguesa. Vamos trabalhar nesse sentido. 