

M

N.º 0139

Gazeta de matemática

Publicação quadrimestral
da Sociedade Portuguesa de Matemática
Ano LXX | Dezembro 2009
4,20€

O Corpo dos P-Ádicos



25 | O Jogo da Vida
[António Machiavelo]

41 | O Que é... A Curvatura de uma Superfície?
[José Natário]

Editorial

por Jorge Buescu
[Universidade de Lisboa]

A *Gazeta de Matemática* tem nesta edição o privilégio de contar com um artigo muito especial: o Prof. Graciano de Oliveira, anterior director da *Gazeta* e responsável directo pelo seu ressurgimento no ano 2000 (Ano Mundial da Matemática, recorde-se), fala-nos sobre um objecto de estimação de alguns matemáticos que, no entanto, é em grande medida desconhecido fora de um círculo mais ou menos restrito: o corpo dos números p -ádicos.

Os números p -ádicos, embora não introduzam inovações estruturais, têm a propriedade de serem um corpo não-arquimediano, ao contrário dos reais. Este facto está na base de muitos resultados inesperados e contrários à intuição construída a partir do corpo dos reais. E a partir da análise sobre os corpos p -ádicos podem deduzir-se resultados não-triviais sobre outros ramos da matemática, como a Teoria dos Números. É esta visão da matemática pelas lentes p -ádicas que temos de agradecer ao Prof. Graciano de Oliveira, num artigo extraordinariamente claro e eloquente.

O ensino da matemática continua sempre como tema de primeira linha. No período recente, vários acontecimentos o trazem para as páginas da *Gazeta*. Em 2009 os alunos portugueses obtiveram os seus

melhores resultados de sempre nas Olimpíadas Internacionais de Matemática. Mais um prego no caixão da mentira conveniente de os alunos portugueses serem "geneticamente maus" a Matemática. Pelo contrário, os alunos portugueses podem ser tão bons como os outros. Mas para isso é necessário repensar a forma como a matemática é ensinada desde os graus mais elementares. O célebre livro de Liping Ma *Saber e Ensinar Matemática Elementar*, finalmente publicado em Portugal e aqui comentado por Jorge Nuno Silva, é uma contribuição extraordinária nesse sentido. Se as suas conclusões fossem postas em prática entre nós, muitos dos pseudo problemas do ensino da matemática provavelmente se esfumariam.

Esta edição da *Gazeta* conta com a habitual colaboração dos nossos colunistas, que nos descrevem matemática séria a partir de jogos – o Jogo da Vida de Conway e o Jogo de Sperner – e formulam problemas a partir de máquinas de Turing ou da forma de ocupação de urinóis (sim, até na casa de banho se pode encontrar matemática). E José Natário explica-nos *O que é a curvatura de uma superfície*.

Motivos mais do que suficientes para pensar em matemática por boas razões! ❏



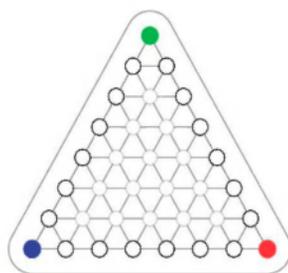
Sobre a Capa

Impressão do artista sobre o disco unitário 3-ádico ilustra a natureza não-arquimediana da distância nos números p -ádicos discutidos no artigo de Graciano de Oliveira. O autor da imagem, o matemático russo Anatoly Fomenko, é um conhecido topólogo, membro da Academia das Ciências Russa e famoso pelas suas representações artísticas de resultados matemáticos. O seu livro *Mathematical Impressions* (AMS, 1990) apresenta uma compilação destes seus trabalhos.

Jogo de Sperner

"When we play games we pass from the incomprehensible universe of given reality into a neat little man-made world, where everything is clear, purposive and easy to understand." Aldous Huxley

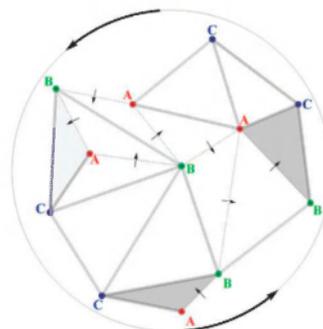
Em 1928, Emanuel Sperner publicou, numa revista da Universidade de Hamburgo, um lema combinatorio de enunciado simples que veio a revelar virtudes e corolários insuspeitados. Nesse trabalho, Sperner apresenta uma prova alternativa de um teorema de Lebesgue que caracteriza o conceito de dimensão e m e s p a ç o s euclidianos, mas foi o resultado auxiliar, hoje conhecido como *Lema de Sperner*, que ganhou notoriedade. Trata-se de colorir os vértices da triangulação de uma região poligonal com três cores, de acordo com certa regra, e deduzir que, desse modo, há sempre um triângulo tricolor. Uma das muitas qualidades deste *Lema* é a de permitir formulações equivalentes, quase todas elementares, que elucidam sobre a natureza da propriedade que descreve e sobre a intervenção dos triângulos. Uma delas transpõe as hipóteses do *Lema* para as regras de um jogo, e a conclusão traduz-se no facto de, nesse jogo, nunca ocorrerem empates. E foi precisamente essa versão lúdica do *Lema* que o Atractor adoptou para construir na exposição *Matemática Viva* um módulo interactivo ([1]) que permita dar uma ideia correcta e completa, em linguagem não técnica, do que é uma demonstração, e conhecer este resultado ilustre. Vejamos os detalhes.



Consideremos uma região poligonal subdividida em triângulos, de modo que cada par de triângulos ou não tem pontos em comum ou partilha um vértice ou

um lado inteiro. Os vértices da triangulação são os destes triângulos que pavimentam a região.

Segundo Sperner, "se os vértices no bordo da região são coloridos com três cores A , B e C , se há no bordo lados com etiquetas $A-B$ ¹ e se todos estes lados $A-B$ aparecem com a mesma orientação, então qualquer coloração dos vértices interiores com estas mesmas três cores produz sempre, pelo menos, um triângulo tricolor."



Uma demonstração sucinta, mas construtiva, consta da referência [2]. Imaginemos que a região poligonal é o chão de um palácio com quartos de formato triangular, sendo as portas os lados $A-B$ (a ponteados na figura), dentro e no bordo, da região poligonal. Os outros lados são paredes do palácio. Há, por hipótese, portas exteriores que dão acesso ao edifício; entrando, tendo em conta a descrição das portas, que obriga a um caminho que deixa os vértices vermelhos sempre à esquerda, e prosseguindo até onde é possível, ou o nosso passeio termina no interior do palácio ou nos leva de volta ao exterior. Contudo, o último cenário é impossível porque, por hipótese, todos os vértices $A-B$ no bordo têm a mesma orientação (ou seja, só permitem entrar). Como há um

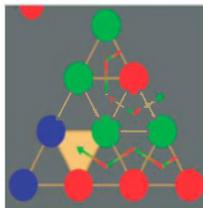
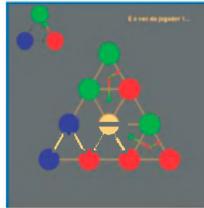
¹Um lado tem etiqueta $A-B$ se A e B são as cores dos seus vértices; a escolha da etiqueta corresponde à escolha de uma das duas ordenações possíveis desses vértices, ou seja, uma das duas orientações do lado.

Atractor

[Jogo de Sperner]

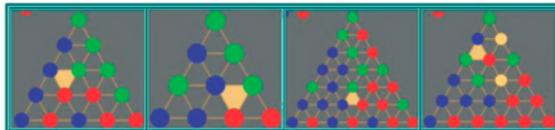
número finito de quartos e o caminho não passa mais de uma vez pelo mesmo quarto (porque nele não pode haver três portas), o caminho tem de parar. O quarto final, onde o caminho termina, é um triângulo etiquetado com as três cores A, B e C .

O “Jogo de Sperner”, entre dois jogadores, decorre num tabuleiro triangular, mas permite que a orientação no bordo não siga a exigência explicitada acima, admitindo que um caminho possa entrar no palácio e sair dele – o que naturalmente exige um argumento de prova mais minucioso. Em resumo, a região/palácio é um triângulo grande, de tamanho arbitrário, dividido em



triângulos menores todos iguais, com os três vértices coloridos com três cores (vermelho, verde e azul). Cada jogador coloca alternadamente um disco colorido num dos vértices por colorir, de modo que: 1) em cada lado do bordo, o jogador só pode

usar uma das duas cores dos vértices desse lado; 2) no interior do tabuleiro pode utilizar qualquer cor. Perde o jogador que completar um triângulo pequeno tricolor.



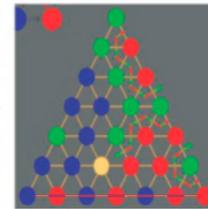
O texto de [1] é acompanhado de um *applet* em *java* que permite algum treino antes de se avançar para a questão mais importante: reparou se alguma vez o jogo terminou com um empate, isto é, sem nenhum vértice por colorir e sem ter entretanto surgido um triângulo pequeno com os três vértices com cores diferentes?

Referências

- [1] <http://www.atractor.pt/mat/Sperner>
- [2] D.I.A. Cohen, On the Sperner lemma, *J. Comb. Theory* 2 (1967) 585-587
- [3] <http://www.atractor.pt/mat/Sperner/sperner4.html>
- [4] Yu. A. Shashkin, *Fixed Points*, Mathematical World 2, AMS (1991)
- [5] http://www.atractor.pt/mat/apli_sperner/hairyBall
- [6] http://www.atractor.pt/mat/apli_sperner/hairyBallEsquema

O *applet* encoraja o leitor a descobrir a resposta, exibindo os caminhos no palácio correspondentes às sucessivas jogadas.

E em [3] é fornecida a resposta e uma justificação. Se um caminho que entra pelo lado direito do triângulo grande não voltar a sair por este lado, então também não sai por nenhum dos outros dois lados do palácio, porque em nenhum deles há simultaneamente as duas cores A e B , que identificam uma porta; além disso, não passa duas vezes por um mesmo triângulo pequeno; e, como há um número finito de triângulos, o caminho tem de parar. Mas, para ser final, um triângulo pequeno tem de estar etiquetado com as três cores. O que falta para terminar esta prova? Garantir que há um percurso que não nos leva de volta ao exterior. Ora, para isso, basta contar as mudanças de cor que acontecem no lado direito do triângulo, registando a alternância na ordem em que as mudanças ocorrem e o facto de elas estarem associadas a entradas e a saídas permitidas por esse lado.



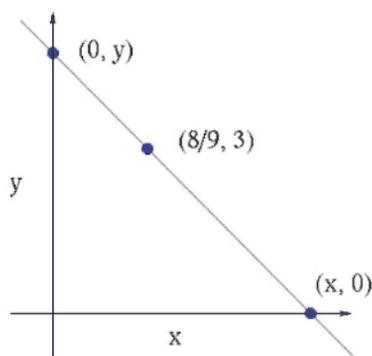
Verifica-se, assim, pela escolha inicial das cores dos dois vértices desse lado, que o número de entradas excede sempre o número de saídas. Isso obriga à existência de, pelo menos, um caminho que entra pelo lado direito do triângulo e não pode sair. (Raciocínio análogo para qualquer um dos outros lados do tabuleiro.)

Do *Lema de Sperner* podem, por exemplo, deduzir-se, sem ter de se recorrer a matemática sofisticada, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (*Toda a função contínua de uma região poligonal convexa do plano em si mesma tem um ponto fixo*) e o Teorema da Esfera Cabeluda (*Um campo de vectores contínuo numa esfera tem sempre uma singularidade – ou toda a cabeça coberta de cabelo tem um corrupio*). O primeiro resultado consta da referência [4]; uma exposição do segundo a partir do *Lema de Sperner* está prevista para o *site* do Atractor, utilizando dois *applets*, esses já prontos ([5] e [6]).[M](#)

Optimizações

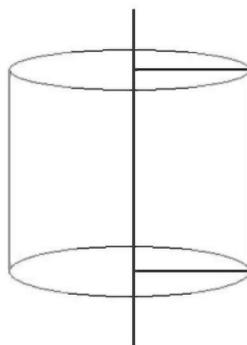
Muitos problemas de optimização são resolvidos por técnicas de Cálculo Diferencial que se tornaram familiares aos alunos ("é só igualar a derivada a zero", ouve-se inúmeras vezes). Contudo, algumas questões ainda encerram surpresas e outras ainda se resolvem por métodos mais prosaicos...

Imaginemos que queremos escolher, entre todos os triângulos rectângulos com catetos nos semieixos positivos do sistema habitual de coordenadas e cuja hipotenusa contém o ponto $(8/9, 3)$, o que tem a hipotenusa mais curta.



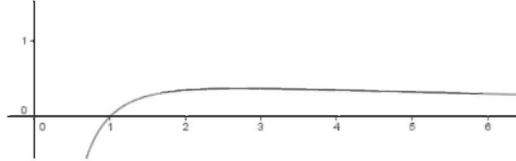
Uma aplicação do velhinho Teorema de Pitágoras e um pouco de Cálculo levam-nos rapidamente à resposta pretendida...

É bem sabido que, fixado o perímetro, o quadrado é o rectângulo de maior área. Este é um problema típico dos primeiros semestres de Cálculo. Mas variemos um pouco a pergunta. Se tivermos o perímetro dado, qual é o rectângulo que gera o cilindro de maior volume por rotação em torno de um dos seus lados? Será ainda o quadrado?



Às vezes, mesmo que um problema esteja enunciado num âmbito restrito, convém inseri-lo num contexto em que se lhe possa aplicar o Cálculo antes de interpretar as soluções aí encontradas. Um exemplo típico é o seguinte. Encontrar todas as soluções naturais de $x^y=y^x$.

Fazendo o estudo sumário de uma função real de variável real apropriada, conclui-se facilmente que tal problema tem solução única...



Terminamos com um problema "da vida real", retirado da obra *The Man's Book*, de Thomas Fink, publicada pela Phoenix em 2007. É bem sabido que, se as senhoras usam muitas vezes os sanitários aos pares, no caso dos homens trata-se de uma actividade mais solitária. Aliás, a tendência para o isolamento nesta situação chega ao ponto de ditar leis quase universais na escolha de um urinol livre. O autor dá alguns exemplos simples. Suponhamos que há uma fila de seis mictórios e que a situação de ocupação é a seguinte:

1	2	3	4	5	6
♂			♂		♂

A posição 2 tem alguma vantagem sobre a 3, a 5 seria sempre uma má escolha.

Admitindo que há uma fila de N urinóis dos quais $q+1$ estão livres e que, durante a sua utilização, um estranho ocupará um dos urinóis livres aleatoriamente, como deve reger a sua escolha? Admitindo que a força de repulsão entre ocupantes dos locais i e k é $1/(i-k)^2$, o autor propõe que o local escolhido seja minimizante da seguinte soma:

$$\sum_{i \text{ ocupado}} \frac{1}{(i-k)^2} + \frac{1}{24} \sum \frac{1}{(i-k)^2} \text{ (na segunda soma } i \neq k \text{ e o lugar } i \text{ não está ocupado).}$$

Com base neste resultado, qual é a sua escolha face à distribuição seguinte?

1	2	3	4	5	6	7
	♂		♂			♂

Nota sobre o problema do número anterior. Seja f um polinómio de coeficientes inteiros e p e q inteiros quaisquer. Como $(p-q) \mid (p^k - q^k)$ para qualquer $k > 0$, segue-se que $(p-q) \mid (f(p) - f(q))$. Se $f(a) = f(b) = f(c) = 2$ e $f(d) = 3$, então, como $f(d) - f(a) = 3 - 2 = 1$, tem-se $(d-a) \mid 1$. Analogamente se conclui que $(d-b) \mid 1$ e $(d-c) \mid 1$. Mas 1 só tem dois divisores (1 e -1) pelo que se conclui, pelo Princípio das Gavetas, que pelo menos dois números entre a , b e c são iguais entre si, o que contraria a hipótese. Logo não existe d tal que $f(d) = 3$. \square

O Corpo dos p -ádicos

A construção do corpo dos números reais via sucessões de Cauchy é bem conhecida. Existem muitos corpos mas o corpo dos reais e o seu fecho algébrico, o dos complexos, desempenham na matemática um papel ímpar. Será possível fazer o mesmo, mas com uma métrica para os racionais diferente da habitual (caso exista outra!)? A resposta é sim e isso leva-nos a um outro e estranho reino, o dos p -ádicos.

1. Introdução

Há anos publiquei numa Folha Informativa distribuída na época pela Sociedade Portuguesa de Matemática o seguinte texto com o título "Uma Equação do Primeiro Grau".

A um matemático (não se sabe se caloiro se muito avançado) foi posto o seguinte problema:

Resolva a equação $x=1+3x$.

O enunciado do problema era este, nem mais palavra nem menos palavra.

O matemático pensou assim: vou utilizar um método iterativo como a forma da equação sugere.

Escreveu

$$x_{n+1}=1+3x_n$$

e tomou para x_0 o valor 1. Obteve sucessivamente

$$x_0=1$$

$$x_1=1+3$$

$$x_2=1+3+3^2$$

...

$$x_n=1+3+3^2+\dots+3^n.$$

Em seguida tomou limites e concluiu que a solução a seria

$$a=\sum_{i=0}^{\infty} 3^i.$$

Pensou que não seria bom apresentar a solução como sendo a soma de uma série. Depois de pensar um momento recordou-se de que

$$1+\alpha+\alpha^2+\dots=\frac{1}{1-\alpha}.$$

Substituiu α por 3 e obteve $-\frac{1}{2}$. Como era cuidadoso voltou à equação, escreveu $-\frac{1}{2}$ em vez de x e verificou que de facto

era raiz. Satisfeito, arrumou os papéis onde tinha feito os cálculos e embrenhou-se noutro problema na esperança de se sair tão bem como neste.

Perguntas: 1. Que comentários faria a esta maneira de resolver a equação? 2. A resolução está certa ou errada? 3. Há razões para dizer que houve milagre?

Só um colega me abordou com respostas (diferentes das que me tinham motivado) a estas perguntas.

Quais seriam as respostas a esperar às perguntas acima formuladas? Provavelmente a grande maioria dos leitores esperaria respostas do tipo:

1. Fez-se o que se faz noutras circunstâncias mas está errado e é surpreendente que o resultado final esteja certo.
2. Errado. A série

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots$$

não converge para $|\alpha| > 1$, logo não se pode substituir α por 3.

3. Até parece que houve milagre. Muito estranho.

Mas, na minha terceira pergunta, muitos não se limitariam a uma resposta tão sucinta. Diriam que quando alguma coisa funciona sem se perceber porquê ou há coincidências ou semelhanças inexplicáveis, há uma razão escondida para isso. Em tais casos, deve procurar-se se é possível construir uma teoria que dê racionalidade, elimine os milagres e torne tudo compreensível. O problema reside em descobrir os conceitos apropriados. Pode recordar-se a Teoria das Distribuições e a função de Dirac, o início dos números complexos e muitos outros exemplos. E vale a pena lembrar as teorias unificadoras (dão unidade a factos dispersos que parecem coincidências) como a Teoria dos Matróides em conjunção com o artigo fundador de H. Whitney publicado na década de trinta.

Voltando ao raciocínio do nosso matemático, verifica-se que só há um ponto fraco: a série $1 + 3 + 3^2 + \dots$ não converge. Será possível fazê-la convergir? Substituamos a série pela sucessão associada em que o elemento u_n é a soma das primeiras $n+1$ parcelas da série. Convergência ou divergência de sucessões é uma questão de topologia, no nosso caso simplesmente uma questão de métrica. No caso vertente, só lidamos com números racionais (para efeitos de convergência até é com inteiros, mas há vantagem em utilizarmos os racionais uma vez que constituem um corpo e assim todos os elementos, distintos de zero, têm inverso). Então atentemos nos números racionais. Dada uma sucessão u_0, u_1, \dots de racionais, é possível fazê-la convergir? Melhor (no nosso caso) será possível definir uma métrica nos racionais de modo que convirja? É melhor começar pelo início, como diria Lapalisse. Vejamos o que é uma métrica e que métricas são possíveis em \mathbb{Q} .

Qual é a métrica usual ou, se preferirmos, o que é a distância de dois números racionais? A distância é definida à custa da noção de valor absoluto: a distância de r a s é o valor absoluto da diferença $r - s$. E o que

é o valor absoluto dum racional? Como sabemos, se o racional $\frac{m}{n}$ é positivo, o seu valor absoluto é ele próprio, se é negativo, é o seu simétrico e se é zero, o valor absoluto é zero.

Notemos que o valor absoluto começa por ser uma aplicação ϕ de \mathbb{Q} em \mathbb{Q}_+ (rationais não negativos). Aplicação essa que, provavelmente, deverá satisfazer certas condições.

Um pouco de estudo leva-nos à conclusão de que o importante não é a concretização da aplicação de \mathbb{Q} em \mathbb{Q}_+ mas sim certas propriedades que ela pode ter (ou não ter). Se se examinarem as demonstrações cuidadosamente, conclui-se que o que essencialmente se utiliza para os grandes resultados são certas propriedades de ϕ , não sendo importante o que ϕ é de facto. São elas as seguintes:

1. $\phi(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$
2. $\phi(rs) = \phi(r)\phi(s)$
3. $\phi(r+s) \leq \phi(r) + \phi(s)$

Qualquer que seja ϕ , praticamente todas as consequências continuam válidas, e com as mesmas demonstrações, desde que satisfaça estas três propriedades.

Surge então a pergunta: existirão outras aplicações $\phi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_+$ que satisfaçam 1, 2 e 3?

A resposta é sim. Uma delas é $\phi(0) = 0$, $\phi\left(\frac{m}{n}\right) = 1$ sempre que $\frac{m}{n} \neq 0$. É o caso chamado trivial, pois não conduz a nada de interessante (tanto quanto se sabe).

Mas há mais, como vamos ver. Pode ser que alguma delas torne convergente a série $\sum_{i=0}^{\infty} 3^i$.

Fixemos um número primo (positivo) p qualquer. Dado um racional $\frac{m}{n}$, onde supomos que m e n são inteiros sem factores comuns, ele pode escrever-se, de maneira única, na forma

$$\frac{m}{n} = p^k \frac{m'}{n'},$$

onde k é um inteiro (positivo, negativo ou nulo) e m' e n' são inteiros não divisíveis por p .

Por exemplo, se tomarmos $p=5$, a fracção $\frac{3}{10}$ escreve-se

$$\frac{3}{10} = 5^{-1} \frac{3}{2}.$$

Definamos um novo valor absoluto (ou norma) de $\frac{m}{n}$, designado por $\rho_p\left(\frac{m}{n}\right)$, do seguinte modo:

$$\rho_p\left(\frac{m}{n}\right) = p^{-k}.$$

No caso do nosso exemplo, será

$$\rho_5\left(\frac{3}{10}\right) = 5.$$

O valor absoluto habitual de $\frac{m}{n}$ será designado por $\rho_\infty\left(\frac{m}{n}\right)$ (há boas razões para escolher o índice ∞ , que aqui não nos interessam). Assim

$$\rho_\infty\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{3}{10}.$$

É um exercício fácil mostrar que ρ_p satisfaz as propriedades 1., 2. e 3. acima. Quanto à propriedade 3., verifica-se, na realidade, uma relação mais forte $\rho_p(r+s) < \max\{\rho_p(r), \rho_p(s)\}$ como facilmente se prova.

Vejamos outro exemplo com o número 93.750. Claro que

$$\rho_\infty(93.750) = 93.750.$$

Calculemos a norma ρ_5 deste número.

Como $93.750 = 5^6 \times 6$, teremos

$$\rho_5(93.750) = 5^{-6} = \frac{1}{15.625} = 0,000064.$$

Em termos intuitivos dir-se-ia que na norma ρ_∞ o número em causa é grande, mas na norma ρ_5 é muito pequeno. Como consequência, na norma ρ_∞ os números 93.751 e 1 estão a grande distância, mas na norma ρ_5 estão próximos. Depois destas observações, não é de espantar que os resultados que se obtêm a respeito de convergência sejam muito diferentes.

Com $p=3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = 0$. De facto, $\rho_3(3^n) = \frac{1}{3^n}$. Como

$$1+3+3^2+\dots+3^n = \frac{1-3^{n+1}}{1-3}$$

tomando limites quando $n \rightarrow \infty$ podemos escrever

$$1+3+3^2+\dots+3^n+\dots = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}.$$

Significa que a série que apareceu a propósito da resolução da equação $x=1+3x$ é convergente com a norma ρ_3 .

E mais, converge para $-\frac{1}{2}$ pelo que o raciocínio do nosso matemático está correcto. Basta supor que a norma utilizada era a norma ρ_3 . A situação só parece insólita quando se pressupõe a utilização da norma habitual ρ_2 .

2. A construção dos números reais

Vamos explorar mais o conceito de ρ_p . Como veremos, chegaremos a um mundo novo de cuja existência nem suspeitávamos.

É bem conhecida a construção dos números reais a partir dos racionais. Vamos recordá-la rapidamente.

Uma sucessão de racionais u_0, u_1, \dots diz-se de Cauchy se para todo o número racional, positivo mas arbitrário ϵ , existe um número natural n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |u_{n+r} - u_n| < \epsilon,$$

qualquer que seja o número natural r .

Dois sucessões de Cauchy u_0, u_1, \dots e v_0, v_1, \dots dizem-se equivalentes se para todo o racional, positivo, arbitrário ϵ existe um inteiro n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |u_n - v_n| < \epsilon.$$

Trata-se de uma relação de equivalência compatível com as operações de adição e produto. Isto significa que se

$$u_0, u_1, \dots, u_n, \dots \sim v_0, v_1, \dots, v_n, \dots$$

e

$$u'_0, u'_1, \dots, u'_n, \dots \sim v'_0, v'_1, \dots, v'_n, \dots$$

então

$$u_0 + u'_0, u_1 + u'_1, \dots, u_n + u'_n, \dots \sim v_0 + v'_0, v_1 + v'_1, \dots, v_n + v'_n, \dots$$

e

$$u_0 u'_0, u_1 u'_1, \dots, u_n u'_n, \dots \sim v_0 v'_0, v_1 v'_1, \dots, v_n v'_n, \dots$$

Devido a estas propriedades, as classes de equivalência podem somar-se e multiplicar-se, obtendo-se um corpo. Não entraremos em mais pormenores, diremos só que o que se obtém é o corpo dos números reais. E depois pode estender-se aos números reais a noção de valor absoluto que já existia nos racionais do seguinte modo. Seja $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ uma sucessão qualquer da classe de equivalência do real r . Será, por definição,

$$\rho_\infty(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\infty(u_n)$$

que existe e não depende da sucessão particular escolhida para representar r como se pode demonstrar. Agora, define-se a distância de r a s como sendo $\rho_\infty(r - s)$.

O corpo dos reais tem uma propriedade importantíssima que os racionais não tinham: toda a sucessão de Cauchy de números reais converge para um número real.

Como representar um número real (que não é mais do que uma classe de equivalência, contendo uma infinidade de sucessões)? Haverá, em cada classe, uma sucessão canónica? Vamos estudar este problema.

Por exemplo o número π (real, mas não racional) costuma representar-se pela sucessão

$$3, 3 + \frac{1}{10}, 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2}, 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3}, 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4}, \dots$$

ou seja, como soma da série

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4}, \dots$$

De maneira notacionalmente mais simples, costuma escrever-se $\pi = 3,1415\dots$ o que nos dá os coeficientes das sucessivas potências de 10 na série, como é bem conhecido. Além de nos dar os coeficientes das sucessivas potências de 10, não encerra qualquer ambiguidade, representando um número real bem definido. A 3,1415... chama-se dízima. Temos pois a seguinte propriedade: todo o número real se pode representar como soma

de uma série cujos termos são certos coeficientes (um número de 0 a 9) multiplicados pelas sucessivas potências de 10, as de expoente positivo em número finito, as de expoente negativo em número finito ou infinito.

Vejam a questão da unicidade, ou seja, vamos tentar responder a esta pergunta: um número tem sempre uma só dízima? Nem sempre é assim, há casos em que tem duas. É bem sabido que

$$31,2574 = 31,257399999\dots$$

Designemos este número por r . Quando escrevemos $r=31,2574$ queremos dizer que

$$r = 3 \times 10 + 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{4}{10^4}$$

e quando escrevemos $r=31,25739999\dots$ queremos dizer que

$$r = 3 \times 10 + 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \frac{9}{10^7} + \dots$$

Reconhece-se que não há qualquer contradição, notando que

$$\frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \frac{9}{10^7} + \dots = \frac{1}{10^4}$$

Portanto o número 31,2574 tem duas dízimas distintas, o que significa que pode escrever-se como soma de uma série de potências de 10 de duas maneiras diferentes. São os casos deste tipo os únicos em que não há unicidade da dízima. Não apresentaremos aqui os pormenores das demonstrações, pois pressupomos esta matéria bem conhecida, só pretendemos recordar.

3. A construção dos números p -ádicos

Depois desta digressão pelos números reais, imaginemos o seguinte. Façamos o mesmo que fizemos para, a partir dos racionais, construir os reais com uma ligeira alteração: sempre que necessitarmos de uma norma, utilizemos a norma ρ_p (p um primo qualquer) em vez da norma habitual ρ_∞ .

Obtém-se igualmente um corpo que se chama corpo dos números p -ádicos e se representa por \mathbb{Q}_p . Claramente contém os racionais mas é muito diferente do corpo dos reais em diversos aspectos. Por exemplo, a série

$$1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^n + \dots$$

é convergente. Isso é fácil de provar. É claro que

$$1 + p + p^2 + \dots + p^n = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p}$$

Como $\rho_p(p^{n+1}) = \frac{1}{p^{n+1}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{n+1} = 0$. Então podemos escrever

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{1}{1-p}$$

Outro exemplo de uma propriedade inesperada é o seguinte:

Dada uma série de p -ádicos

$$\sum_{i=0}^{\infty} u^i,$$

ela converge se e só se $\lim u_n = 0$.

A demonstração é fácil. Sabemos que qualquer que seja a métrica (designemos uma métrica não especificada por ρ), para que uma série de termo geral u , convirja é necessário e suficiente que dado um número real positivo e exista sempre um n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \rho(u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+t}) < \varepsilon$$

para todo o t .

Isto vale para qualquer norma e implica $u_n \rightarrow 0$.

Se considerarmos a norma ρ_p , e recordarmos que

$$\rho_p(u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+k}) < \max\{\rho_p(u_n), \rho_p(u_{n+1}), \dots, \rho_p(u_{n+k})\},$$

deduz-se facilmente que $u_n \rightarrow 0$ implica a convergência da série.

A situação no caso dos p -ádicos é, portanto, muito mais simples do que no caso dos reais.

Voltemos ao problema de como representar cada número p -ádico. Existirá algo de parecido com a dízima? Pode provar-se que sim. Cada p -ádico pode representar-se como soma de uma série do tipo

$$s = \frac{a_{-k}}{p^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{p} + a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots \quad (1)$$

onde cada coeficiente a_i é um número inteiro satisfazendo $0 < a_i < p-1$.

Esta representação é única, sem qualquer excepção.

Há outra diferença importante em relação aos reais. O número de potências de expoente negativo de p é sempre finito e é o número de potências de expoente positivo que pode ser finito ou infinito. Obviamente o p -ádico acima pode, de maneira mais simples, escrever-se na forma

$$a_{-k} \dots a_{-1} a_0 a_1 \dots a_n \dots \quad (2)$$

com $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

A convenção é que a_i é o coeficiente de p^i e que a vírgula se põe depois do coeficiente de p^0 .

É como no caso dos reais em que, em vez de

$$b_k 10^k + \dots + b_1 10 + b_0 + \frac{b_{-1}}{10} + \dots + \frac{b_{-n}}{10^n} + \dots,$$

onde cada b_i é um inteiro satisfazendo $0 < b_i < 9$, costuma escrever-se

$$b_k \dots b_1 b_0 b_{-1} \dots b_{-n} \dots$$

Com os números reais nesta forma, existem algoritmos (que antigamente se aprendiam na Escola Primária, hoje 1.º ciclo do Ensino Básico) para as 4 operações fundamentais e outras, como a raiz quadrada.

Para os p -ádicos a situação é idêntica, existem também esses algoritmos e são fáceis de utilizar.

Vamos exemplificar com a soma (atenção aos casos em que há *transporte* como nos reais). De um exemplo, apreende-se facilmente o algoritmo e começaremos por um caso em que não há *transporte*. Utilizaremos a forma (1) em vez da forma (2).

Com $p=5$ calculemos a soma dos números

$$2p^3 + 1p^2 + 0p^1 + 4 + 3p + 1p^2 + \dots$$

e

$$3p^2 + 4p^1 + 0 + 1p + 1p^2 + \dots$$

Pode fazer-se assim

$$\begin{array}{r} 2p^3 + 1p^2 + 0p^1 + 4 + 3p + 1p^2 + \dots \\ 3p^2 + 4p^1 + 0 + 1p + 1p^2 + \dots \\ \hline 2p^3 + 4p^2 + 4p^1 + 4 + 4p + 2p^2 + \dots \end{array}$$

Este esquema compreende-se sem mais explicações.

Quando há *transporte*, é ligeiramente mais complicado como, aliás, no caso dos reais, havendo mesmo quem defenda que o seu ensino aos muito jovens pode traumatizar para toda a vida. Se, por exemplo, onde, na primeira parcela, está $1p^2$ estivesse $4p^2$ é claro que como soma de $4p^2$ com $3p^2$ se obteria $7p^2$. O coeficiente 7 excede p , que é 5, em 2 unidades. Faz-se como no caso de *transporte* com os reais: $7p^2 = (p+2)p^2 = 2p^2 + p^1$, pelo que, na soma, onde está $4p^2$ dever-se-ia pôr $2p^2$ e adicionar p^1 à parcela seguinte que levaria a substituir $4p^1$ por $5p^1$. Como $5p^1 = 1$ e este adicionado a 4 dá p , deveríamos substituir $4p$ por $5p = p^2$ que com $2p^2$ dará $3p^2$. O total passaria a ser

$$2p^3 + 2p^2 + 0p^1 + 0 + 0p + 3p^2 + \dots$$

O estudo cuidadoso deste exemplo é suficiente para compreender a ideia. O leitor mais desejoso de dominar a técnica só tem uma coisa a fazer: praticar.

Poderíamos apresentar algoritmos para outras operações (que não são muito difíceis de reinventar para o leitor interessado).

A métrica (ou norma) ρ_p definida em \mathbb{Q} pode estender-se a \mathbb{Q}_p como no caso dos reais. O p -ádico s , da fórmula (1), é o limite da soma S_m dos primeiros m termos da série. Ora, qualquer que seja m , $\rho_p(S_m) = p^k$, donde $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_p(S_m) = p^k$ que é, por definição, a norma ρ_p do p -ádico em questão. Conclui-se que quando temos um número p -ádico escrito naquela forma, é fácil determinar a sua norma ρ_p .

Os p -ádicos x cuja norma satisfaz $\rho_p(x) < 1$ chamam-se inteiros p -ádicos. São, pois, os p -ádicos em que na forma (1) não aparecem potências de p de expoente negativo. Eles constituem um domínio de integridade contido em \mathbb{Q}_p . Como exercício, pode o leitor tentar provar esse facto.

4. Como encontrar as dízimas dos racionais

Como sabemos $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$. Portanto os racionais são p -ádicos e admitem desenvolvimentos do tipo (1). Como os conseguir? Quando é finita a dízima?

Se

$$q = \frac{b_m}{p^m} + \dots + \frac{b_1}{p} + b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n,$$

é fácil verificar que q é um número racional, não negativo cujo denominador é uma potência de p . O inverso será verdadeiro? É. Começemos com um inteiro não negativo r . Dividindo por p , teremos

$$r = pq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < p - 1.$$

Dividindo agora o quociente q_1 por p ,

$$q_1 = pq_2 + r_2$$

donde

$$r = p^2 q_2 + pr_2 + r_1.$$

Prosseguindo, acaba por se ter o número r escrito segundo potências de p de expoente não negativo e coeficientes em $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Podemos dizer que todo o inteiro positivo se pode representar como polinómio em p

cujos coeficientes são não negativos e inferiores a p . Uma fracção $s = \frac{r}{p^m}$ pode obviamente representar-se como

o número q acima. Para o conseguir basta escrever r na forma $a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n$ o que dá (supondo, para fixar ideias, $m < n$)

$$s = \frac{a_0}{p^m} + \frac{a_1}{p^{m-1}} + \dots + a_n p^{n-m}.$$

Como representar como série de potências de p os números fraccionários em geral, incluindo os números negativos? Por exemplo,

$$-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \dots \quad (3)$$

e a justificação é simples.

De facto,

$$(p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \dots = (p-1)(1 + p^2 + p^3 + \dots)$$

e como sabemos que $1 + p + p^2 + \dots = \frac{1}{1-p}$, fica a justificação completa.

Examinemos melhor o que significa $s_n = \sum_{i=0}^n (p-1)p^i$ convergir para -1 . Para os sucessivos valores de n temos

$$\begin{aligned} s_0 &= -1+p \\ s_1 &= -1+p^2 \\ s_2 &= -1+p^3 \\ &\dots \\ s_n &= -1+p^{n+1} \end{aligned}$$

Ou seja, a diferença entre S^n e -1 torna-se muito pequena e, desde que tomemos n suficientemente grande, tão pequena quanto queiramos. Isto corresponde a dizer que a diferença entre S_n e -1 se torna divisível por potências de p de expoentes elevados, e, desde que tomemos n suficientemente grande, torna-se divisível por potências de p com expoentes tão grandes quanto queiramos.

Como fazer para outros números inteiros negativos? Claro que se -1 é dado por (3), será

$$\begin{aligned} -2 &= (p-2) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \dots \\ -3 &= (p-3) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \dots \\ &\dots \\ -p &= (p-1)p + (p-1)p^2 + \dots \end{aligned}$$

Propomos agora ao leitor que procure continuar com $-p-1, -p-2$, etc. Não deve esquecer-se de que todos os coeficientes das potências de p devem pertencer a $\{0, 1, \dots, p-1\}$. E propomos um problema mais geral: dado um número s por (1), determinar a representação (na mesma forma) do seu simétrico.

Se quisermos fazer o desenvolvimento de, por exemplo, $\frac{11}{2}$, como proceder? Se $p=2$, é fácil pois $11=2^3+2+1$ de onde tiramos $\frac{11}{2}=2^2+1+\frac{1}{2}$.

Suponhamos $p \neq 2$, por exemplo, $p=5$. Como $\rho_2\left(\frac{11}{2}\right)=1$, o desenvolvimento será da forma

$$\frac{11}{2} = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots$$

com $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ e certamente $a_0 \neq 0$. Note-se que o segundo membro não pode ter um número finito de parcelas porque se tivesse seria um inteiro não negativo.

Podemos escrever

$$11 = 1 + 2 \times 5 = 2a_0 + 2a_1p + 2a_2p^2 + \dots \quad (4)$$

onde o coeficiente $2a_0$ é um inteiro positivo satisfazendo $0 < 2a_0 < 2(p-1)$. Note-se que $1+2 \times 5$ é um desenvolvimento da forma (1) mas $2a_0 + 2a_1p + \dots$ não é necessariamente um desenvolvimento desse tipo porque pode haver coeficientes $2a_i$ que não pertençam a $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Não se pode, pois, invocar a unicidade dos desenvolvimentos do tipo (1) para concluir que $2a_0=1$. Mas podemos proceder de outro modo. Sendo $2a_0$ um inteiro não negativo, ele pode escrever-se na forma $2a_0 = a'_0 + a'_1p + \dots + a'_ip^i$ com $a'_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Agora, pela unicidade, pode concluir-se que $a'_0=1$ ou, o que é o mesmo, $2a_0 \equiv 1 \pmod{p}$, $a_0 \in \{0, 1, 3, 4\}$. Será, pois, $a_0=3$. Entrando com este valor em (4) e tendo em conta que $2a_0=6=1+p$ vem

$$1 + 2 \times 5 = (1+p) + 2a_1p + 2a_2p^2 + \dots = 1 + (2a_1+1)p + 2a_2p^2 + \dots$$

Um raciocínio simples mostra que deverá ser

$$2a_1 + 1 = 2 \pmod{p}$$

de onde se tira $a_1=3$. Como $2a_1+1=7=2+p$, podemos agora escrever

$$1 + 2 \times 5 = 1 + (2+p)p + 2a_2p^2 + \dots = 1 + 2p + (2a_2+1)p^2 + 2a_3p^3 + \dots$$

donde

$$2a_2 + 1 = 0 \pmod{5}$$

que dá $a_2 = 2$.

Portanto

$$1 + 2 \times 5 = 1 + 2p + (2a_3 + 1)p^3 + \dots,$$

devendo ser

$$2a_3 + 1 = 0 \pmod{5}$$

o que dá $a_3 = 2$, etc.

Conhecidos os valores de a_0, a_1, a_2, \dots podemos escrever

$$\frac{11}{2} = 3 + 3p + 2p^2 + 2p^3 + \dots$$

O que é fácil de confirmar:

$$3 + 3p + 2p^2 + 2p^3 + \dots = 3 + 3 \times 5 + 2 \times 5^2 (1 + p + p^2 + \dots) = 18 + 50 \left(\frac{1}{1-5} \right) = \frac{11}{2}.$$

Ainda outro exemplo. Calculemos, com $p=5$, a raiz quadrada de 7. Como $\rho_5(7) = 1$, a raiz quadrada de 7, caso exista, será da forma

$$\sqrt{7} = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots$$

e deveremos ter

$$(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)^2 = 7 = 2 + 1 \times 5,$$

donde $a_0^2 = 2 \pmod{5}$. Como esta equação não tem solução, podemos afirmar que, em \mathbb{Q}_5 , $\sqrt{7}$ não existe. Como exercício, verifique-se que para $p=17$, existem duas raízes quadradas de 7.

Vejamos o que acontece com $\sqrt{6}$, ainda no caso $p=5$. Se existir deverá ser um inteiro p -ádico e satisfazer

$$(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)^2 = 1 + 1 \times 5.$$

Daqui tira-se que a_0 pode ser igual a 1 ou a 4. Continuando o processo, encontram-se as duas raízes que de facto existem em \mathbb{Q}_5 . Recordamos que \mathbb{Q}_5 é um corpo e portanto nunca poderia haver mais do que duas.

Procuramos as raízes quadradas de -1 em \mathbb{Q}_5 .

$$(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)^2 = -1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \dots$$

com $p=5$, $a_0^2 = 4 \pmod{5}$ donde $a_0 = 2$ ou $a_0 = 3$.

Proseguindo, conclui-se que -1 tem duas raízes quadradas dentro de \mathbb{Q}_5 .

Quanto às raízes cúbicas de 6 em \mathbb{Q}_5 , devemos começar com a equação

$$x^3 = 6$$

ou

$$(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)^3 = 6$$

Pode ser $a_0 = 3, 5, 6$ e continuando obtêm-se três raízes.

Estes exemplos, e as analogias entre eles, levam a suspeitar de que deve existir um algoritmo mais geral. É o que vamos ver na secção a seguir.



Impressão de Anatoly Fomenko, matemático russo e conhecido topólogo, sobre o disco unitário 3-ádico.

5. Lema de Hensel

Podemos dizer que \mathbb{Q}_p é um corpo com propriedades extraordinariamente diferentes das de \mathbb{R} .

Nos exemplos que acabámos de dar estamos a utilizar, sem o saber, uma proposição de grande importância conhecida por Lema de Hensel. Vamos descrever essa proposição. Antes, recordemos que um inteiro p -ádico é um p -ádico x que satisfaz $\rho_p(x) < 1$.

Lema de Hensel *Seja $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ um polinómio cujos coeficientes são inteiros p -ádicos. Seja $f(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$.*

Seja $a_0 = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1p + \tilde{a}_2p^2 + \dots$ um inteiro p -ádico que satisfaça

$$f(a_0) \equiv 0 \pmod{p}$$

e

$$f'(a_0) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Então existe um único inteiro p -ádico, a tal que

$$f(a) = 0 \text{ e } a \equiv a_0 \pmod{p}.$$

Não daremos a demonstração, mas vamos explicar como obter aproximações sucessivas, a_0, a_1, a_2, \dots , da raiz que se diz existir.

A primeira aproximação é \tilde{a}_0 (primeiro coeficiente de a_0). Para as restantes é conveniente introduzir nova notação. Designaremos por $C_p^n(f(a_0))$ o coeficiente de p^n no desenvolvimento de $f(a_0)$. A segunda aproximação será dada por $a_1 = \tilde{a}_0 + b_1p$ com b_1 calculado por

$$b_1 = -\frac{C_p(f(a_0))}{f'(a_0)} \pmod{p}, \quad b_1 \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

A terceira aproximação será $a_2 = \tilde{a}_0 + b_1p + b_2p^2$ com b_2 calculado por

$$b_2 = -\frac{C_p(f(a_1))}{f'(a_1)} \pmod{p}, b_2 \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

A seguinte será $a_3 = \tilde{a}_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3$ com

$$b_3 = -\frac{C_p(f(a_2))}{f'(a_2)} \pmod{p}, b_3 \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

etc.

O Lema de Hensel é o equivalente ao método de Newton para o cálculo de raízes de funções.

6. Séries de potências

Séries de potências são séries da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

com $a_n \in \mathbb{Q}$, e $x \in \mathbb{Q}_p$. Como era de esperar, saber para que valores de x converge é um problema importante.

Teorema 6.1 *Seja*

$$R = \frac{1}{\limsup (\rho_p(a^n))^{1/n}}$$

a) Se $R=0$ a série só converge para $x=0$ e se $R=\infty$, converge para todo o x de \mathbb{Q}_p .

b) Se $R \neq 0, \infty$, há dois casos: (i) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_p(a_n) R^n = 0$, $f(x)$ converge se e só se $\rho_p(x) < R$; (ii) Se não se verificar aquela condição, $f(x)$ converge se e só se $\rho_p(x) < R$.

Não damos a demonstração deste teorema, que não é difícil. E salientamos uma propriedade notável: a série ou converge para todos os valores da fronteira da região de convergência ou não converge para nenhum. Logo, dada uma série, se se descobrir o que acontece num só ponto dessa fronteira, fica-se a saber o que acontece em todos. Podemos agora pensar em generalizar aos p -ádicos a exponencial, as funções trigonométricas, etc. Adivinha-se como o fazer. Vamos concentrar-nos no logaritmo.

Por definição (e como era de esperar)

$$\log(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Para simplificar, designaremos $\log(1+x)$ por $g(x)$.

Qual o raio de convergência? Vamos estudar como se comporta $\rho_p(a_n)$ quando $n \rightarrow \infty$. Temos

$$\rho_p(a^n) = \rho_p\left(\frac{1}{n}\right) = p^{t(n)}$$

onde $t(n)$ é o expoente da maior potência de p que divide n : $n = p^{t(n)} n'$ e p não divide n' . Daqui vem $\sqrt[n]{\rho_p\left(\frac{1}{n}\right)} = p^{t(n)/n}$. De $n = p^{t(n)} n'$ tira-se

$$\frac{t(n)}{n} \leq \frac{\log n}{\log p}$$

pele que $\frac{t(n)}{n} \rightarrow 0$ e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho_p\left(\frac{1}{n}\right)} = 1.$$

Por conseguinte, $R=1$. Que acontece para $x=1$? Para $x=1$, o termo geral da série não converge para zero. Por isso

$$g(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

converge se e só se $\rho_r(x)<1$.

Estes factos permitem-nos conclusões curiosas.

Como $\rho_r(-2)=\frac{1}{2}$ (estamos a tomar $p=2$), para $x=-2$ a série converge, o que nos dá

$$-\log(-1)=2-\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}-\frac{2^4}{4}+\dots$$

Para $x=0$ vem $\log(1)=0$. Ora $2\log(-1) = \log(-1)^2$ (esta propriedade mantém-se) ou seja $2\log(-1)=0$. Como estamos num corpo de característica zero (contém os racionais), deverá ser $\log(-1)=0$. Podemos escrever

$$2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\dots+\frac{2^n}{n}+\dots=0.$$

À primeira vista (pensando em termos de números reais) esta igualdade parece absurda. Se se pensar que estamos no corpo dos reais dir-se-á que uma série de termos positivos não pode convergir para 0 e logo se notará

que $\frac{2^n}{n}$ tende para infinito pelo que a série nem sequer converge. Mas como estamos no corpo \mathbb{Q}_2 , converge!

Isso significa que se pode escolher n suficientemente grande para que o número racional positivo

$$2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\dots+\frac{2^n}{n}$$

tenha um numerador divisível por qualquer potência de 2 de expoente previamente dado. Com mais rigor, acabámos de provar o:

Teorema 6.2 *Dado um inteiro m positivo, é sempre possível escolher n_0 tão grande que a soma*

$$\sum_{i=1}^n \frac{2^i}{i}$$

tenha um numerador divisível por 2^m para todo o $n>n_0$.

Terminamos com uma nota sobre a possibilidade de ordenar \mathbb{Q}_p . Dissemos que "uma série de termos positivos não pode convergir para zero" (nos reais). Em \mathbb{Q}_p nem sequer se pode falar de elementos positivos porque (como acontece com o corpo dos complexos) \mathbb{Q}_p não é um corpo ordenado. Vimos num exemplo atrás que, em \mathbb{Q}_5 , -1 tem raízes quadradas. Isso mostra que \mathbb{Q}_5 não é formalmente real e, em consequência, não é ordenado. Pode demonstrar-se que a situação é idêntica para outros valores de p . ■

Bibliografia

- [1] **F. Q. Gouvêa** (1993), *p-adic Numbers*. Springer Verlag.
- [2] **N. Koblitz** (1977), *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions*. Springer Verlag.
- [3] **L. Rédei**, *Algebra*, Pergamon Press.
- [4] **H. Whitney** (1935), *On the Abstract Properties of Linear Dependence*, Amer. J. Math. Vol. 57 509-533.

Máquinas de Turing

Caro Leitor,

Propomos-lhe a construção, em essência, de computadores ideais, apresentada por A.M. Turing, e dotados não propriamente de inteligência artificial, mas de testes e algoritmos que nos ajudam a compreender a complexidade humana.

Um dos conceitos-chave das ciências de computação é o de *máquina de Turing*. Este modelo simplista de um computador fictício foi inventado pelo matemático inglês Alan Mathison Turing (1912-1954) num famoso trabalho de 1936 intitulado *On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem*, citado, aliás, no artigo de Paulo Mateus, “O que é o problema $P \neq NP$?”, *Gazeta de Matemática*, 157, 2009, 49-51, no qual se indica que com a sua solução se pode ganhar um milhão de dólares. Nesta altura, expressões tais como *métodos efectivos* ou *procedimentos mecânicos*, etc., foram introduzidas para aludir a métodos sistemáticos para o cálculo de objectos como, por exemplo, o máximo divisor comum de dois inteiros positivos à maneira de Euclides, ou decisões como a da primalidade de um número p , testando sucessivamente os números $2, \dots, \lfloor \sqrt{p} \rfloor$ como candidatos a divisores. O seu nome está ainda ligado à nossa história recente, como se pode ver no artigo de A. Machiavelo, “ENIGMA: uma história que devia ser melhor contada”, *Gazeta de Matemática*, 147, 2004, 14-15, mostrando que a matemática pode alimentar o sonho de liberdade do Homem e salvar milhares de vidas.

Na famosa palestra “Mathematische Probleme” proferida em 1900, o influente matemático David Hilbert enunciou como o seu décimo problema: *dada uma equação diofantina arbitrária, dar um método que permita decidir num número finito de passos se a equação tem uma solução no conjunto dos números inteiros*.

Aparentemente Hilbert estava convicto da solubilidade deste problema, i.e. da existência de um tal método mecânico-algorítmico, para resolver tais questões para quaisquer equações diofantinas.

O artigo de Turing contém, se bem que em linguagem diferente, argumentos convincentes de que as funções $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ computáveis ou problemas decidíveis, no sentido vago anterior exposto, são exactamente aqueles calculáveis ou decidíveis por máquinas automáticas, hoje chamadas máquinas de Turing. Na verdade, apenas através de uma clara e convincente definição técnica dos conceitos de computabilidade e decidibilidade é possível dar respostas demonstravelmente negativas a tais questões. Nesse trabalho foram ainda demonstradas a não computabilidade de certas funções e a não decidibilidade (por métodos efectivos) de certas questões. Com efeito, o autor demonstra que o seu conceito de computabilidade equivale aos conceitos, aparentemente muito diferentes, da λ -definibilidade de Church e, um pouco mais tarde, mostra também a equivalência com o conceito de computabilidade proposto por Gödel, que usa funções recursivas – conceitos estes que na altura estavam por definir. A equivalência da calculabilidade efectiva de Herbrand com a λ -definibilidade foi mostrada por Church. Estas equivalências dão credibilidade à tese de Turing e Church de que todos os procedimentos efectivos em matemática – aqueles efectuáveis por quem obedece rigorosamente a uma sucessão de instruções – são implementáveis por máquinas de Turing.

Na última secção do artigo citado, Turing escreve: "Proponho-me demonstrar que não existe um procedimento geral para determinar se uma dada fórmula do cálculo funcional K é demonstrável."

Deste modo fica resolvido, de forma negativa, o importante problema, denominado "Entscheidungsproblem" (i.e. problema da decisão), do famoso livro de Hilbert e Ackermann de 1931, "Grundzüge der Theoretischen Logik" (i.e. Linhas condutoras da lógica teórica).

Essencialmente, uma *máquina de Turing* consiste numa cabeça apta a ler e escrever 0's e 1's numa fita infinita de papel dividida em células e numa tabela que indica como actuar face ao seu estado interno e ao símbolo lido. A partida, a fita está preenchida com os símbolos 0 e 1. Cada passo de uma computação decompõe-se em outros três passos elementares executados pela seguinte ordem:

- o símbolo lido é alterado ou reescrito;
- a cabeça move-se zero (O) ou um passos para a esquerda (L de "left") ou para a direita (R de "right");
- o estado da máquina é alterado ou reassumido.

	0	1
1		OR2
2	1L3	1R2
3	OR4	1L3

¹
0111011

OR2

²
0011011

1R2

²
0011011

1R2

²
0011011

1L3

³
0011111

1L3

³
0011111

1L3

³
0011111

OR4

⁴
0011111

A tabela que doravante vamos identificar com a própria máquina M tem um número finito de filas indexadas com certos inteiros positivos, chamados os *estados da máquina*, e duas colunas indexadas por 0 e 1. Para o estado $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ de M e o símbolo lido $\delta \in \{0, 1\}$, o comando a obedecer é o que está na intersecção da fila i com a coluna δ , i.e. na entrada $M_{i\delta}$ da máquina. A entrada pode ser vazia ou não existir; neste caso, a máquina, por definição, pára. Por exemplo, na máquina ao lado, se $i=2, \delta=1$, então $M_{i\delta}=M_{21}=1R2$.

O comando 1R2 significa: "escrever 1, ir um passo para a direita e assumir o estado 2". A coluna ao lado exemplifica uma computação.

A máquina começa com a fita mais acima; as partes da fita que não vemos são supostamente preenchidas com 0's. Está no estado 1 e lê um 1. Logo, o comando a executar é $M_{11}=0R2$. A cabeça substitui então o símbolo que lê por 0, vai para a direita, e a máquina assume o estado 2. Agora a máquina lê no estado 2 um 1. Portanto faz como manda a entrada $M_{21}=1R2$: escreve um 1, vai para a direita, e assume o estado 2; etc. O leitor verifique o resto da computação. A máquina pára quando chega ao estado indefinido 4.

A computação mostrada transforma uma fita com um bloco de três 1's e um de dois 1's, separados por um único 0, num único bloco de $3+2=$ cinco 1's, e pára com a cabeça sobre o primeiro 1 do bloco produzido. De facto, esta máquina transforma qualquer

fita, $0111\dots1011\dots1$ consistindo em dois blocos de m e n 1's, respectivamente num único bloco de $m+n$ 1's, e parará com a cabeça sobre o primeiro 1 do primeiro bloco.

Reflectindo um pouco, vê-se porquê. A máquina implementa a ideia de "apagar o primeiro 1, ir com a cabeça até ao 0 separador dos blocos de 1's, substituir esse 0 por 1, e voltar ao início". Ideias como estas guiam a construção de uma máquina.

A máquina que acabámos de descrever demonstra a computabilidade da função $\text{IN}^2 \ni (m, n) \rightarrow m+n \in \text{IN}$, i.e. da função soma, no sentido da definição técnica seguinte, que utiliza a notação 0^r ou 1^r para indicar blocos de r 0's ou r 1's consecutivos; assim, por exemplo, $01^40^21^3$ é o mesmo que 0111100111 .

Uma função $g: \text{IN}^k \rightarrow \text{IN}$ diz-se *computável* se existir uma máquina que para todo o k -uplo $\underline{n} = (n_1, \dots,$

$n_k) \in \text{IN}^k$ transforma a fita $01^{n_1}01^{n_2}0\dots01^{n_k}$ numa fita

$0^s 1^{g(\underline{n})}$ (com s natural certo), e pára.

Se escrevemos, como aqui, 1^{n_1} ou 1^{n_2} , então supomos que a cabeça está sobre o 1 mais à esquerda do bloco (e a máquina em estado 1 ou num estado não especificado, respectivamente). Esta definição traduz que a máquina, se alimentada com a codificação natural de um k -uplo $\underline{n} = (n_1, \dots, n_k)$, i.e. uma fita contendo k blocos de 1's de comprimentos respectivos n_1, \dots, n_k , separados por 0's isolados, vai parar quando atingir a sua forma de dizer $g(\underline{n})$, i.e. quando atingir um único bloco de $g(\underline{n})$ símbolos 1.

Como mencionámos, as máquinas de Turing podem também ser usadas para problemas de decisão. Vejamos um exemplo.

Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é *decidível* se a função indicatriz $1_X: \mathbb{N} \rightarrow \{1,2\}$, definida por $1_X(n)=1$ se $n \in X$ e $1_X(n)=2$ se $n \notin X$, for computável.

Devolver 1 ou 2 é uma forma para uma máquina dizer "sim" ou "não" quando "interrogada" sobre se $n \in X$.

É neste contexto que surgem os seguintes problemas.

	0	1	Problema 1. Mostre que o conjunto $X = \{1, 3, 5, \dots\}$ dos naturais ímpares é decidível. Para tal, mostre que, se a máquina do lado arrancar com uma fita da forma 0111...1 com n 1s, ela devolve 011 se n for ímpar, e 01 se n for par.
1	1R2	1R2	
2	0L6	0R3	
3	0L4	0R2	
4	0L4	1R5	
5	1L6		
6	0L6	1O7	

Preparado com estas análises, o leitor pode consolidar a sua perícia respondendo aos problemas 2, 3, e 4 a seguir.

Problema 2. Mostrar que a função $\mathbb{N} \ni n \mapsto n+1$ é computável (por uma máquina com não mais do que cinco filas).

Problema 3. Mostrar que a função

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \begin{cases} n & \text{se } n \in \{1, 2, 3\} \\ n-2 & \text{se } n > 4 \end{cases} \text{ é computável.}$$

Problema 4. Mostrar que o conjunto $X = \{3, 6, 9, \dots\}$ dos inteiros positivos divisíveis por 3 é decidível.

Envie as soluções para:

Projecto Delfos
Departamento de Matemática da FCTUC
Apartado 3008
EC Universidade
3001-454 Coimbra

No entanto, não se esqueça o leitor de que indecidibilidade algorítmica ou indemonstrabilidade automática não é o mesmo que qualquer tipo de indecidibilidade absoluta ou indemonstrabilidade informal. Os humanos são genuinamente mais complexos do que os autómatos...

Apresentamos agora as propostas de resolução dos problemas 2 e 3 do *Canto Delfico* na *Gazeta de*

Matemática 157, 2009, por Carlos Alberto Silva Gomes, Escola S/3 Amarante.

Problema 2: Considere-se uma pirâmide com altura H e área de base F . Mostre que o volume da pirâmide é igual a $FH/3$.

Solução: Dividindo a altura em n partes iguais e traçando por elas planos paralelos ao plano da base, obtemos n prismas V_k , com altura H/n . O seu volume vem dado por $F_k H/n$. Uma vez que

$$\frac{F_k}{F} = \left(\frac{kH/n}{H}\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

tem-se $F_k = F(k/n)^2$ e, assim, o volume de $V_k = FH(k^2/n^3)$.

O volume da pirâmide será então dado por:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{FH}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = FH \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\text{i.e. } V = \frac{FH}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

Logo, o volume da pirâmide será:

$$V = \frac{FH}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{FH}{3}$$

Problema 3: Considere-se a semiesfera de raio R dividida em n planos com espessura R/n . Sendo o raio de cada um destes cilindros resultantes r_k , mostre por um processo análogo ao do problema 2 que o volume

da esfera é $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Solução: O volume de cada um dos cilindros é $V_k = F_k R/n$, em que F_k é a sua base. Mas

$$\frac{F_k}{F} = \left(\frac{r_k}{R}\right)^2 = \frac{r_k^2}{R^2}, \text{ logo } F_k = F \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right).$$

Temos então que $V_k = \frac{FR}{n} \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)$, logo

$$\sum_{k=1}^n \frac{FR}{n} \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) = FR - \frac{FR}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\right)$$

e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[FR - \frac{FR}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right] = \frac{2}{3} \pi R^3$$

Assim,

$$V_{\text{esfera}} = 2 \times \left(\frac{2}{3} \pi R^3\right) = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad \square$$

O Referee Perfeito

Convidar a *Isabelle* para verificar as nossas contas pode ser uma maneira simpática de começar um longo dia de trabalho. Vamos descobrir, no entanto, um revisor implacável, capaz de encontrar a mais pequena falha de raciocínio. E que não vai aceitar um convite para jantar no fim da jornada.

Formalizar a matemática é um velho sonho dos profissionais no assunto. Desde Euclides, pelo menos, há a preocupação de escrever o conjunto de conhecimento já adquirido de uma forma simples, sistemática, puramente dedutiva. A princípio, a matemática consiste em duas partes: um conjunto de verdades *a priori*, os “axiomas” ou “postulados” e uma máquina de produção de verdades derivadas, a *lógica*. [1,2,3]

Para cumprir esta tarefa, precisamos de uma linguagem formal, como, por exemplo, escrever “ p e q ” na forma “ $p \wedge q$ ” ou então “ p implica q ” como apenas “ $p \rightarrow q$ ”. As vantagens do uso de uma linguagem formal são muitas: a primeira e mais óbvia é a clareza do que se está a dizer. Não há ambiguidade. Uma outra vantagem é tornar claros os raciocínios válidos, como por exemplo “se p é verdade e p implica q , então q é verdade”:

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q}$$

Um teorema, então, é um conjunto de hipóteses, uma implicação, e uma conclusão tal que sempre que as hipóteses forem verdadeiras, a conclusão também o será. Uma demonstração deste teorema é escrever, a partir das hipóteses, uma série de passos aceites (como o acima) até chegarmos à conclusão do teorema. Podemos programar um computador para, a partir das regras do jogo, tentar concluir um certo teorema. Constituirão o *input* do “provador automático de teoremas” as hipóteses do teorema e a

conclusão desejada. Aguardamos um pouco e recebemos como *output* uma longa sequência de encadeamentos lógicos que é a demonstração desejada.

Esta abordagem sistemática da investigação matemática não é, definitivamente, muito popular entre os profissionais do assunto. O primeiro problema é que raríssimos matemáticos são capazes de escrever o seu próprio trabalho em linguagem formal, e sem isto não há nada que o computador possa fazer. O segundo é que a intuição é um ótimo guia: com os programas ora existentes, um simples exercício de Análise 1 demora uma semana a ser demonstrado.

A maior crítica, no entanto, não é esta. Quando usamos um computador para executar uma demonstração, esta pode ser tão longa que a verificação humana se torne

inviável. Porque deveríamos então acreditar no computador? Será possível uma matemática intrinsecamente não humana, com teoremas tão complexos que só nos resta aceitar o veredicto último das máquinas? Sabemos que os computadores erram, frequentemente por erro do programador, mas em

O Teorema da Curva de Jordan

$$\begin{aligned} & \forall C. \text{simple_closed_curvetop2 } C \rightarrow \\ & (\exists A B. \text{top2 } A \wedge \text{top2 } B \wedge \text{connected top2 } A \wedge \text{connected top2 } B \wedge A \neq \emptyset \\ & \wedge B \neq \emptyset \wedge A \cap B = \emptyset \wedge A \cap C = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset \wedge A \cup B \cup C = \text{euclid2}) \end{aligned}$$

Figura 1 – Formulação do Teorema da Curva de Jordan em linguagem formal. $\text{top2 } A$ significa que A é aberto na topologia usual de \mathbb{R}^2 , $\text{connected top2 } A$, que é conexo. O teorema afirma que uma curva simples fechada divide o plano \mathbb{R}^2 (euclid 2) em duas regiões abertas que com a própria curva (todas disjuntas dois a dois) formam o plano.

alguns casos por *bug* da própria arquitectura da máquina.

Inicialmente, devemos lembrar que os seres humanos são falíveis e a História está cheia de exemplos de teoremas provados cuja demonstração foi posteriormente desacreditada. Um exemplo particularmente importante é a demonstração do Teorema das Quatro Cores cujo erro na “demonstração” de Kempe (1879) só foi encontrado dez anos depois. Voltaremos em breve a este exemplo.

No entanto, o trabalho humano pode sempre ser verificado por outros seres humanos. (É por isto que os erros são finalmente encontrados). Quem verifica o trabalho dos computadores?

Existem vários sistemas automáticos para demonstração de teoremas, com algumas diferenças fulcrais entre si. *Isabelle*, *Hol Light* ou *Coq* são apenas alguns *softwares* especialmente

desenhados para outros propósitos (como para a optimização da aerodinâmica de um avião) ou em arquitecturas de *hardware* (pelo menos um *bug* em microprocessadores da Intel foi descoberto desta forma). Considerando que alguns assuntos, como o controle de tráfego aéreo ou a distribuição de energia, são por demais críticos para nos darmos ao luxo de errar e por demais extensos para serem deixados em mãos puramente humanas, verificadores automáticos são sempre bem-vindos.

O Teorema das Quatro Cores, referido acima, foi um dos primeiros teoremas provados com a ajuda intensiva de um computador, em 1976. Como a correcção da construção computacional de cada um dos quase dois mil casos em que o problema foi dividido não podia ser jamais verificada por um ser humano, muitos matemáticos não aceitaram a demonstração como definitiva. Recentemente, em 2005, um outro grupo de investigadores usando um provador automático, o *Coq*, reproduziu o resultado com uma verificação formal de cada passo, que a princípio pode ser verificada por qualquer um – mas sobretudo, por outro provador automático [4].

Outros teoremas recentemente formalizados são o Teorema da Curva de Jordan e o do Ponto Fixo de Brouwer. Na lista de actividades para os próximos anos está o Último Teorema de Fermat, demonstrado em 1994 – e assim vão os computadores criando o *genoma* matemático. **M**

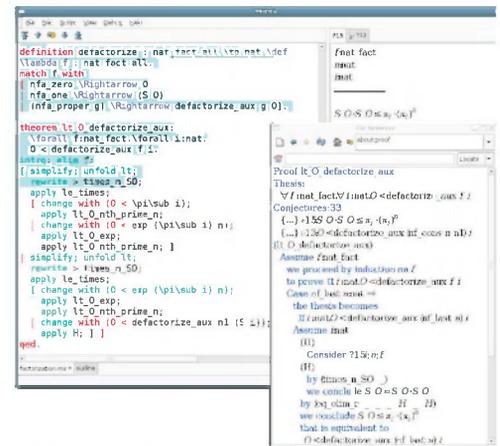


Figura 3 – Um *screenshot* de uma demonstração no provador automático *Matita*.

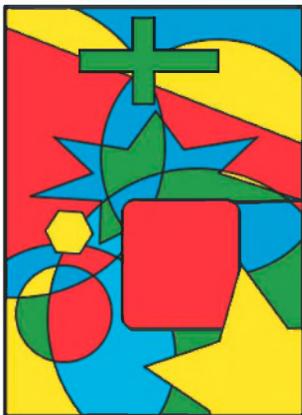


Figura 2 – O Teorema das Quatro Cores: é possível colorir qualquer mapa plano, onde cada região é conexa (não há enclaves) tal que dois países adjacentes (que partilham uma aresta, não um único ponto) tenham cores distintas com apenas quatro cores.

desenhados para esta função. A demonstração elaborada por um programa pode ser verificada por outro. Desta forma, o *referee* de um teorema provado por computador será um outro computador (esta é uma extensão natural do conceito de “revisão pelos pares”). Este procedimento já levou a pelo menos uma correcção: o *Hol Light* foi capaz de encontrar um erro da demonstração da conjectura de Robbins feita pelo provador *Reveal* em 1995. Aos seres humanos resta pagar a conta da electricidade.

Cada teorema formalizado entra numa biblioteca particular e pode ser usado em demonstrações posteriores, tal qual nós fazemos.

Além de provar teoremas, tais programas têm outra função: a de procurar *bugs* em *softwares*

Referências

- [1] Hales, Thomas C. “Formal Proof” *Notices of the American Mathematical Society* 55(11), 1370-1380.
- [2] Harrison, John. “Formal Proof – Theory and Practice”. *Notices of the American Mathematical Society* 55(11), 1395-1406.
- [3] Wiedijk, Freek. “Formal Proof – Getting Started”. *Notices of the American Mathematical Society* 55(11), 1408-1414.
- [4] Gonthier, Georges. “Formal Proof – The Four Color Theorem”. *Notices of the American Mathematical Society* 55(11), 1382-1393.

Um Jogo para Zero Pessoas: o Jogo da Vida¹

O "Jogo da Vida" de John Conway não é um jogo no sentido usual do termo, embora seja uma excelente fonte de entretenimento: é um mundo plano onde habitam seres únicos e exóticos; é um universo automático recheado de surpresas inesperadas e com profundos mistérios por resolver.

Um *autómato celular* – conceito introduzido na década de 1950-60 por John von Neumann para demonstrar a existência de máquinas auto-reprodutoras – consiste num conjunto de "células" em que cada uma delas pode estar num certo número finito de estados, juntamente com uma noção de "vizinhança" entre células e um conjunto de regras de transição de uma configuração de células para outra configuração. Em Outubro de 1970, Martin Gardner divulgava na sua rubrica *Mathematical Games* da revista *Scientific American*² um autómato celular criado por John H. Conway, por este baptizado de "Vida". Com regras de transição muito simples, o "Jogo da Vida", como ficou conhecido, tem propriedades notáveis, e tornou-se imediatamente num sucesso sem precedentes nem rivais no mundo dos autómatos celulares.

No autómato de Conway, as células são os quadrados de um tabuleiro infinito de *Go*, o famoso jogo milenar de origem chinesa³ (ou, equivalentemente, um tabuleiro de xadrez sem cores) e podem estar em dois estados: "inactivas" ou "activas". As regras de transição aplicam-se a cada célula, usando o estado dos seus oito vizinhos (ver figura 1) para determinar o estado desta na configuração seguinte, e são: uma célula inactiva torna-se activa ("nasce") exactamente quando tem três vizinhos activos; uma célula activa mantém-se activa ("sobrevive") quando tem dois ou três vizinhos

activos; nos outros casos, uma célula activa torna-se inactiva ("morre"), ou por "isolamento", quando tem menos de dois vizinhos activos, ou por "excesso populacional", quando tem mais de três vizinhos activos. Na figura 2, em que as células activas estão representadas a preto, ilustra-se a transição da configuração mais à esquerda para a seguinte, o "u" à direita; a imagem do meio mostra o destino das diferentes células, representando-se a amarelo as que morrem de "isolamento", a azul as que morrem por "excesso populacional", a verde as que nascem as que continuam activas a preto, e as que continuam inactivas a branco⁴.

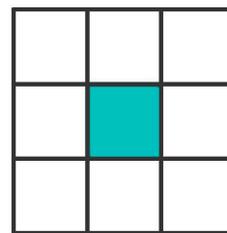


Figura 1- Vizinhança de uma célula.

¹Relembro que o objectivo desta rubrica é sugerir viagens matemáticas pela internet e que a sua leitura deve ser suplementada com a consulta das páginas sugeridas, o que é particularmente relevante no presente artigo.

²"The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game 'life' ", *Scientific American* 223 (October 1970) pp. 120-123. Disponível online.

³Ver [http://en.wikipedia.org/wiki/Go_\(game\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Go_(game)).

⁴No *YouTube*, pesquisando «"Game of Life" "John Conway"» encontram-se extractos de um programa da BBC intitulado "What We Still Don't Know: Are We Real?", onde o próprio Conway fala da sua criação. Disponível também em *Google Videos*.

Apanhados na Rede

[Um Jogo para Zero Pessoas: O Jogo da Vida]

É claro que o "Jogo da Vida" não é um jogo no sentido convencional do termo, uma vez que nele não intervêm quaisquer jogadores. Nem sequer pertence à família dos jogos para uma só pessoa, os "solitários" ou "quebra-cabeças", nos quais o jogador tem de descobrir os movimentos certos, fazer as escolhas apropriadas. Como é observado algures⁵, o "Jogo da Vida" é "um jogo sem jogadores". Quando muito, é um jogo para "criadores" que decidem apenas a configuração inicial do universo – quais as células activas –, que evolui então a partir desse estado inicial, automática e deterministicamente.

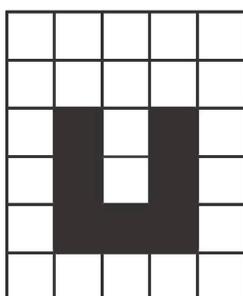
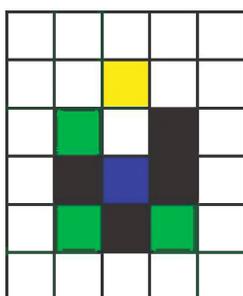
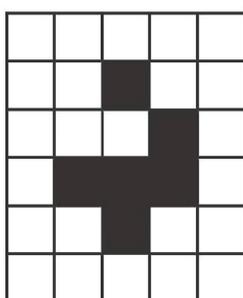
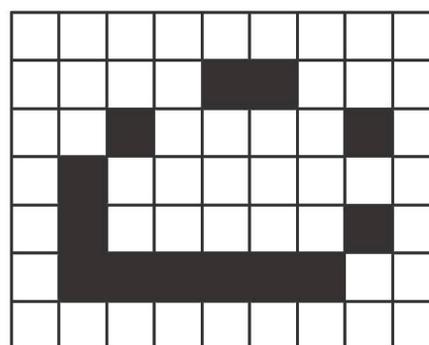
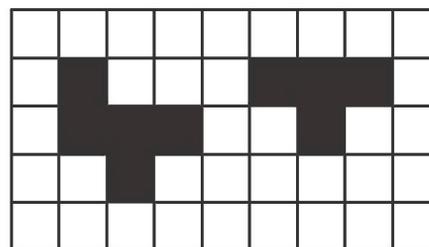
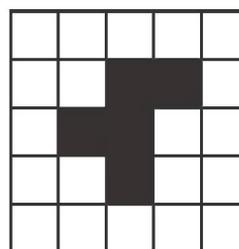
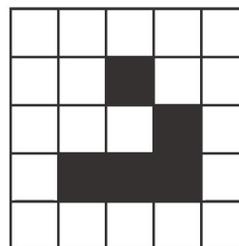


Figura 2- O nascimento do "u".



Figuras 3, 4, 5 e 6 - Um "planador", o pentaminó "R" (ou "F"), os "coelhos" e uma nave espacial.

⁵Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy, *Winning Ways for your Mathematical Plays*, Academic Press, 1982, capítulo 25.

Sugere-se aqui que, antes de prosseguir, o leitor explore um pouco o “Jogo da Vida”, usando o *applet* disponível em <http://www.ibiblio.org/lifepatterns>, experimentando “organismos” por si construídos, assim como os apresentados nas figuras 3, 4, 5 e 6. Para perceber que, apesar das regras simples, a “Vida” é bastante complexa, observe a evolução de uma linha de n células consecutivas, para $n=1,2,\dots,10$.

Desde cedo se descobriu toda uma fascinante variedade de criaturas habitando o curioso mundo da “Vida”, nomeadamente: planadores ou deslizadores (*gliders*), pisca-piscas (*blinkers*), osciladores, pulsares, naves espaciais, locomotivas a vapor (*puffers*), devoradores (*eaters*), matusaléns, canhões de planadores (*glider guns*) e muitas outras – ver a página “O Léxico da Vida”, em <http://www.argentum.freemove.co.uk/lex.htm>, assim como o *LifeWiki*, em <http://conwaylife.com/wiki>.

Uma consequência interessante de um resultado de um dos pioneiros da teoria dos autómatos celulares, Edward F. Moore, é a existência de “jardins do éden”⁶ – configurações para as quais não há um predecessor. O resultado é óbvio para o “Jogo da Vida” quando este é restrito a universos finitos (por exemplo, um rectângulo), pois a aplicação que leva uma configuração desse universo na configuração seguinte, não sendo injectiva, não é, neste caso, sobrejectiva, por haver apenas um número finito de configurações.

No entanto, a demonstração no caso do universo infinito no qual a “Vida” se desenrola é um pouco mais subtil – ver o artigo de Moore “Machine Models of Self-Replication”⁷. São conhecidos alguns jardins do éden (ver *LifeWiki*), mas não se sabe quais as dimensões mínimas que devem ter.

Para os aficionados da “Vida”, o autómato de Conway é designado pelo diminutivo *B3/S23* – “B” para “birth” e “S” para “survival” – ou seja, para nascer são necessários três vizinhos activos, para sobreviver

dois ou três, e nos casos restantes há morte ou não-activação, consoante o caso. Há algumas variantes que, mais recentemente, têm merecido especial atenção. Entre outras, os autómatos *B36/S23*, conhecido por *HighLife*, e *B3678/S34678*, conhecido por *Day&Night*. Para mais detalhes ver <http://members.pcug.org.au/~dbell>.

As últimas notícias relacionadas com o “Jogo da Vida” são divulgadas no *site*: <http://pentadecathlon.com/lifeNews>. Um dos desenvolvimentos mais recentes é a criação, em Julho do corrente ano, por Nathaniel Johnston⁸, do *The Online Life-Like CA Soup Search*, um estudo sistemático de sopas primordiais – configurações iniciais geradas aleatoriamente – com o objectivo de estudar a frequência relativa dos vários “organismos”: ver <http://conwaylife.com/soup>.

Usando os planadores e canhões de planadores, Conway⁹ demonstrou que se pode construir uma máquina universal de Turing dentro do seu autómato celular. Ou seja, o “Jogo da Vida” é programável, podendo nele implementar-se um qualquer programa de computador. Em particular, existem configurações que se auto-reproduzem! Mais ainda, é de esperar que de “sopas primitivas” suficientemente grandes surjam algumas destas criaturas auto-reprodutoras¹⁰. Havendo matéria-prima em abundância, criaturas reprodutoras e mutações, que podem surgir simplesmente da interferência de outros organismos na reprodução (planadores, por exemplo, que podem desempenhar o papel de raios cósmicos), então a selecção natural aparece naturalmente... Será que existem “sopas” a partir das quais se desenvolvem organismos auto-reprodutores e inteligentes? Quais serão as dimensões mínimas de tais “caldos”? Será algum deles um jardim do éden?

Uma coisa é certa: mesmo na versão estruturalmente muito simples de Conway, a “Vida” tem ainda muitos mistérios por desvendar! 

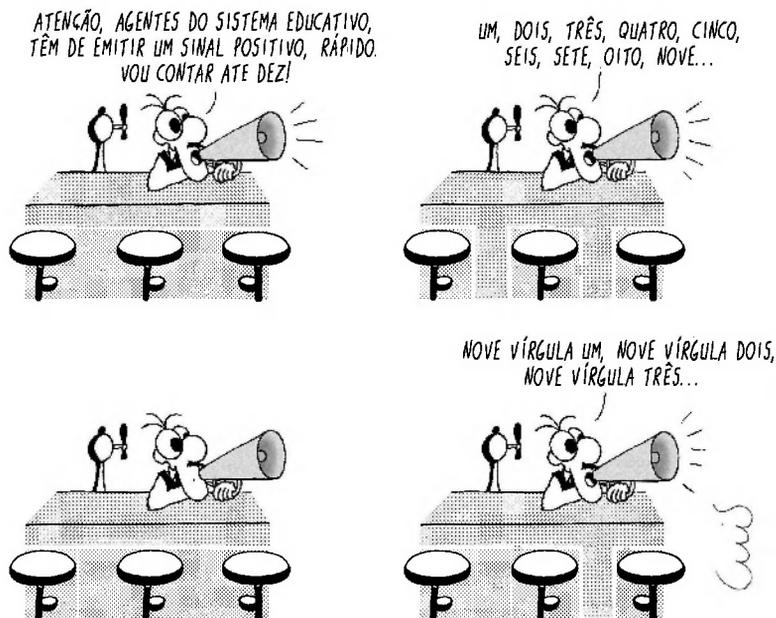
⁶Nomenclatura obviamente inspirada na mitologia bíblica, com origens mesopotâmicas.

⁷Publicado em: R. Bellman (ed.), *Mathematical Problems in the Biological Sciences – Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, XIV, American Mathematical Society, 1962, pp. 17–33, disponível em *Google Books*.

⁸Ver o anúncio no seu *blog*, em <http://www.nathanieljohnston.com/index.php/2009/07/the-online-life-like-ca-soup-search>.

⁹Ver o livro *Winning Ways*, acima citado.

¹⁰*Winning Ways*, pp. 848–849.



Publicação gentilmente autorizada pelo autor.

Público, 04/03/2008

Ficha Técnica

Director	Jorge Buescu [Universidade de Lisboa]	Redactores	António Pereira Rosa [ES M ^a Amália Vaz de Carvalho] Daniel Pinto [Universidade de Coimbra]
Vice-Directores	J. Pimentel Nunes [Instituto Superior Técnico] Adérito Araújo [Universidade de Coimbra] Rogério Martins [Universidade Nova de Lisboa]	Assistentes Editoriais	Ana Figueiredo [SPM] Sílvia Dias [SPM]
Conselho Editorial	Afonso Pedrosa Pinto [Escola S/3 S. Pedro Vila Real] Carlota Simões [Universidade de Coimbra] Elisabete Rodrigues [Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Lisboa] Graciano de Oliveira [Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia] Henrique Leitão [Universidade de Lisboa] João Filipe Queiró [Universidade de Coimbra] José Francisco Rodrigues [Universidade de Lisboa] José Miguel Rodrigues de Sousa [Escola Secundária Felismina Alcântara, Mangualde] Juan-Miguel Gracia [Univ. Vitoria, Espanha] Lina Fonseca [Escola Superior de Educação, Viana do Castelo] Luís Madureira [antigo professor na Esc. Sec. Padre António Vieira] Maria do Céu Pinto [Universidade de Coimbra] Manuel Domingos Oliveira Cadete [Universidade Agostinho Neto] Paulus Gerdes [Universidade Eduardo Mondlane, Maputo, Moçambique] Raquel Escórcio [E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho] Roberto Ramalho [Univ. Pernambuco, Recife, Brasil] Teresa Almada [Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia]	Revisão	Margarida Robalo
		Concepção e manutenção do portal Web	Pedro Quaresma [Universidade de Coimbra]
		Design	B-Design
		Impressão	Dossier - Comunicação e Imagem.
		Propriedade	Sociedade Portuguesa de Matemática, Av. da República 45, 3 ^o Esq. 1050-187 Lisboa Tel.: 21 793 97 85 Fax: 21 795 23 49 E-mail: spm@spm.pt
		Tiragem	1.800 Exemplares
		ISSN	0373-2681
		ICS	123299
		Depósito Legal	159725/00
		Capa	Ilustração de Filipe Branco sobre concepção do disco unitário do 3-ático.

Moeda Universal

Através de um só lançamento de uma moeda equilibrada podemos realizar uma escolha aleatória com dois resultados possíveis e equiprováveis. No texto é apresentado um algoritmo que generaliza este procedimento para o caso em que os dois resultados possíveis têm probabilidades quaisquer, p e q , $p+q=1$.

1. Introdução

Através do lançamento de uma moeda equilibrada podemos realizar uma escolha aleatória com dois resultados possíveis e equiprováveis.

Exemplo:

A senha de almoço numa cantina permite escolher um prato de peixe ou um prato de carne. No caso de alguém estar indeciso sobre a escolha a fazer pode recorrer ao lançamento de uma moeda equilibrada, depois de previamente associar 'carne' a uma face e 'peixe' à outra.

Considere-se agora o seguinte problema. O João costuma estudar com a Maria ou com a Paula. Um dia resolve convidar uma delas para ir ao cinema, mas está indeciso sobre quem convidar. "Vou atirar uma moeda ao ar", diz para si mesmo, retirando uma moeda do bolso. Mas detém-se por uns instantes e põe em causa a justeza do procedimento: "no último mês estudei cinco vezes com elas, duas das quais com a Maria e as restantes três com a Paula. Parece-me mais justo convidar a Paula", pensou. E continuou com os seus pensamentos, olhando para a moeda que tinha na mão. "O que me dava jeito era uma moeda desequilibrada de cujo lançamento pudesse resultar uma das faces, com probabilidade $2/5$, que eu associava à Maria, ou a outra face, com probabilidade $3/5$, que eu associava à Paula." Foi então que lhe ocorreu a questão: "Haverá maneira de fazer a escolha por meio de lançamentos de uma moeda equilibrada,

respeitando as probabilidades dos resultados Maria e Paula?"

A secção 2 deste texto apresenta um algoritmo muito simples, cuja execução permite fazer uma escolha aleatória com dois resultados possíveis, com probabilidades p e q , $p + q = 1$. Designamos este algoritmo por *Moeda Universal*. A sua execução requer apenas a representação na base 2 de uma qualquer das probabilidades envolvidas e uma moeda equilibrada. O algoritmo *Moeda Universal* fornece uma interpretação interessante do desenvolvimento na base 2 de um número real r , $0 < r < 1$.

2. Algoritmo para realizar uma escolha aleatória com dois resultados possíveis, com probabilidades p e q , $p+q=1$, por meio de lançamentos sucessivos de uma moeda equilibrada.

Vamos descrever o procedimento para o caso do problema do João, salientando os seus pontos essenciais. Cada etapa do procedimento consiste

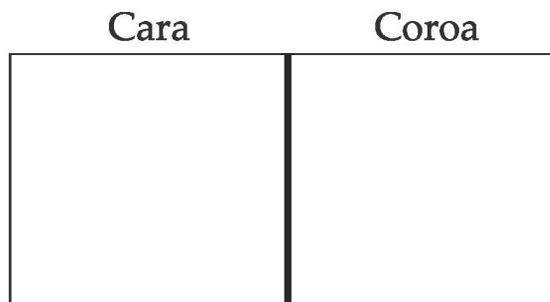


Figura 1

no lançamento de uma moeda equilibrada e na interpretação do resultado obtido, por meio de um rectângulo desenhado previamente. Cada rectângulo é dividido em duas partes iguais, que representam cada uma das faces da moeda (figura 1).

Começamos por obter o primeiro rectângulo do processo, representado na figura 2. Para tal, dividimos o rectângulo da figura 1 em cinco partes iguais. Três dessas partes, a cinzento na figura 2, representam o resultado possível Paula. As restantes duas partes, a branco na figura 2, representam o resultado possível Maria. Em cada um dos rectângulos gerados ao longo do processo, as cores cinzento e branco estão sempre associadas aos resultados possíveis Paula e Maria, respectivamente. A metade Cara de cada rectângulo é sempre associada à cor dominante (que pode variar com o decorrer do processo – ver seguimento do exemplo).

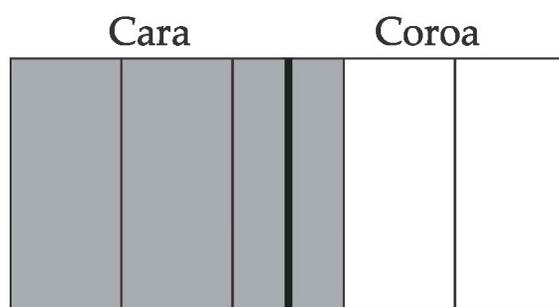


Figura 2

Efectua-se então o primeiro lançamento da moeda, interpretando o seu resultado do seguinte modo:

– Se a face obtida for Cara, então o resultado da escolha é Paula, uma vez que a metade Cara do rectângulo, por ter cor cinzenta, está associada ao resultado Paula. O processo termina;

– Se a face obtida for Coroa, então nada fica decidido, uma vez que a metade Coroa do rectângulo, por ter duas cores, não está associada exclusivamente a um dos resultados possíveis, Paula ou Maria. Neste caso, tem lugar um novo lançamento.

Para interpretar o novo lançamento desenha-se um novo rectângulo, no qual se respeita a proporção branco/cinzento, 4/1, que ocorre na metade Coroa da figura 2, tendo a atenção de fazer corresponder à metade Cara a cor dominante, isto é, a cor branca

(figura 3). Se a proporção branco/cinzento fosse 1/1, então qualquer uma das metades do rectângulo ficaria a cinzento e a outra metade a branco.

Se a face obtida no novo lançamento for Cara, então o resultado da escolha é Maria, uma vez que a metade Cara no rectângulo, por ter cor branca, está associada ao resultado Maria. O processo termina. Se a face obtida for Coroa, então tem lugar um novo lançamento que vai ser interpretado num novo rectângulo, no qual se mantém a proporção das áreas das cores na metade Coroa da figura 3, e tudo se repete.

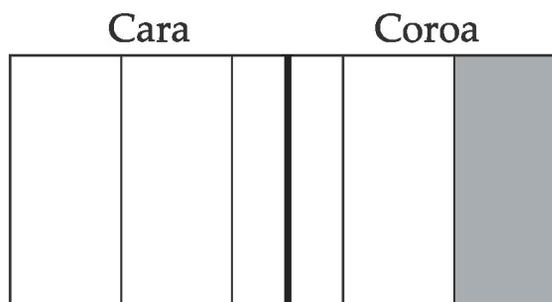


Figura 3

As figuras 4, 5 e 6 representam os três rectângulos seguintes gerados pelo processo, no caso de o resultado dos primeiros quatro lançamentos da moeda ser uma sequência de quatro Coroas. Note-se que os rectângulos das figuras 2 e 6 são iguais, pelo que a sequência de rectângulos é, neste caso, periódica – as representações na base 2 das probabilidades envolvidas são números racionais de período igual a 4.

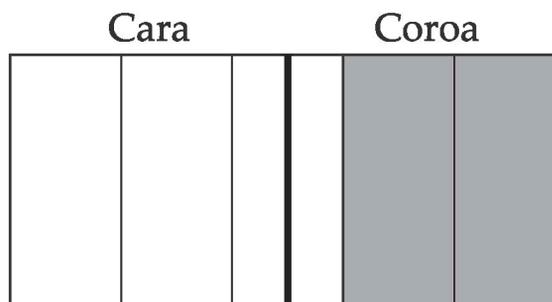


Figura 4

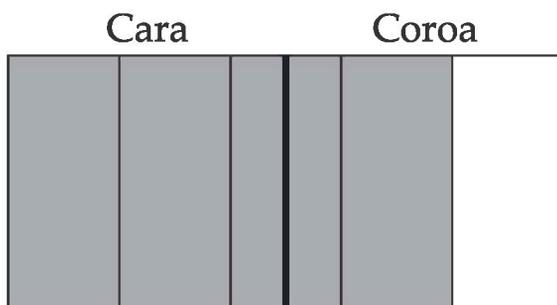


Figura 5

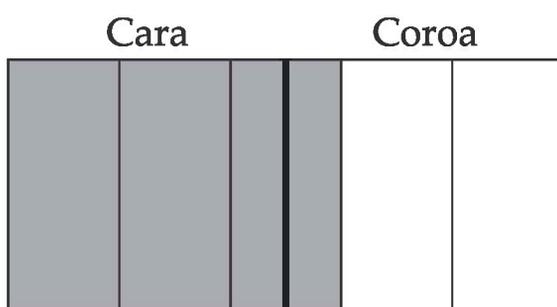


Figura 6

Este processo corresponde à execução do algoritmo seguinte.

Algoritmo 1

Algoritmo para realizar uma escolha aleatória com dois resultados possíveis, com probabilidades p e q , $p+q=1$, por meio de lançamentos sucessivos de uma moeda equilibrada.

1. Considerar um retângulo como o da figura 1.
 - a. O retângulo tem área igual a 1.
 - b. O retângulo é preenchido com duas cores, cada uma delas representando um dos dois resultados possíveis.
 - c. A área correspondente a cada cor é igual à probabilidade do resultado que lhe está associado.
 - d. A região correspondente a cada cor é um retângulo.
 - e. A metade Cara do retângulo é totalmente preenchida com a cor do resultado de maior probabilidade. Se os resultados tiverem igual probabilidade, então a metade Cara pode ser preenchida com qualquer uma das cores, sendo a metade Coroa preenchida com a outra cor.

f. Designar este retângulo por R_i . Fazer $i=i+1$.

2. Efectuar o i -ésimo lançamento de uma moeda equilibrada e interpretar o resultado usando o retângulo R_i do seguinte modo:

2.1 Se a face obtida for Cara, então o resultado da escolha é o que está associado à cor da metade Cara de R_i . A execução do algoritmo termina;

2.2 Se a face obtida for Coroa, fazer o seguinte:

2.2.1 Se a metade Coroa de R_i tiver apenas uma cor, então o resultado da escolha é o que está associado a essa cor. A execução do algoritmo termina;

2.2.2 Se a metade Coroa de R_i tiver duas cores, então:

- Somar 1 ao valor de i ;
- Obter um novo retângulo preenchido com as duas cores da metade Coroa de R_{i-1} , na mesma proporção de áreas ocupadas, e respeitando as condições das alíneas 1d e 1e;
- Designar este novo retângulo por R_i ;
- Ir para o passo 2 do algoritmo.

Vamos mostrar que este algoritmo é correcto, i.e., a sua execução representa de facto um processo de escolha aleatória com dois resultados possíveis, de probabilidades p e q .

Para facilitar a exposição que se segue, vamos associar às faces Cara e Coroa da moeda equilibrada os dígitos 1 e 0, respectivamente. Com esta notação, a sequência 0010, por exemplo, lida da esquerda para a direita, representa o resultado Coroa, Coroa, Cara, Coroa, de quatro lançamentos sucessivos de uma moeda equilibrada. Ao longo do texto, representamos um número decimal qualquer, x , na base 2, escrevendo x_2 .

Os resultados que se seguem usam a notação e a terminologia do algoritmo 1.

Proposição 1

Se $p, q \in \mathbb{R}^+$ são tais que $0 < p, q < 1$, $p+q=1$, $p_2=0.d_1d_2d_3\dots$, então q admite uma representação na base dois, $q_2=0.d'_1d'_2d'_3\dots$, tal que $d_i+d'_i=1, i=1,2,3,\dots$

Prova

Fazendo

$$d'_i = 1 - d_i = \begin{cases} 0, & \text{se } d_i = 1 \\ 1, & \text{se } d_i = 0 \end{cases}$$

obtemos $d_i+d'_i=1, i=1,2,3,\dots$ e $p_2+q_2=0.1(1)=1$.

Como exemplo, sejam $p_2=0.11$ e $q_2=0.01$, $p+q=1$. Podemos representar p e q das formas $p_2=0.10(1)$,

$q_2=0.01(0)$ ou $p_2=0.11(0)$, $q_2=0.00(1)$, de modo a termos $d_i+d'_i=1$, $i=1,2,3,\dots$. No seguimento deste texto, assume-se que as representações na base 2 de duas probabilidades, p_2, q_2 , com $p+q=1$, são tais que $d_i+d'_i=1$, $i=1,2,3,\dots$

Proposição 2

$p_2=0.d_1d_2d_3\dots$ e $q_2=0.d'_1d'_2d'_3\dots$ são as probabilidades dos dois resultados possíveis de uma escolha aleatória, então as áreas correspondentes às cores p e q do rectângulo R_i , $i=1,2,3,\dots$, em que é interpretado o resultado do i -ésimo lançamento de uma moeda equilibrada, são iguais a $p^i_2=0.d_1d_2\dots d_i$ e $q^i_2=0.d'_1d'_2\dots d'_i$, respectivamente.

Prova

A prova vai ser feita por indução sobre o número i de lançamentos. A proposição é válida para $i=1$, uma vez que no rectângulo inicial, R_1 , as áreas correspondentes às cores p e q são $p^1_2=p_2=0.d_1d_2d_3\dots$ e $q^1_2=q_2=0.d'_1d'_2d'_3\dots$, respectivamente. Tomemos agora como hipótese de indução a validade da proposição para $i=k$, ou seja, as áreas associadas às cores p e q no rectângulo R_k são $p^k_2=0.d_1d_2\dots d_k$ e $q^k_2=0.d'_1d'_2\dots d'_k$, respectivamente. Vamos mostrar que, no caso de ter lugar um novo lançamento, o $(k+1)$ -ésimo, o seu resultado vai ser interpretado no rectângulo R_{k+1} com as áreas $p^{k+1}_2=0.d_1d_2\dots d_{k+1}$ e $q^{k+1}_2=0.d'_1d'_2\dots d'_{k+1}$, associadas às cores p e q , respectivamente.

Estamos a supor que o resultado em cada um dos primeiros k lançamentos é Coroa (senão não haveria lugar a um $(k+1)$ -ésimo lançamento). Suponhamos também, sem perda de generalidade, que $p^k_2 > q^k_2$ (a metade Cara do rectângulo R_k é totalmente preenchida com a cor de p). Podemos afirmar o seguinte:

– A área correspondente à cor p na metade Coroa

do rectângulo R_k é igual a $p^k_2 - \frac{1}{2} = 0.d_1d_2\dots d_k$

– A área correspondente à cor q na metade Coroa do rectângulo R_k é igual a $q^k_2 = 0.d'_1d'_2\dots d'_k$

– Quando se constrói o rectângulo R_{k+1} , o que se faz é atribuir a cada uma das cores o dobro da área que lhe corresponde na metade Coroa do rectângulo R_k (ver subpasso 2.2.2 do algoritmo 1). Notemos que multiplicar por 2 um número na base 2 corresponde a deslocar uma casa para a esquerda, em relação

à vírgula, toda a sequência fraccionária do número. Neste caso temos:

$$2\left(p^k_2 - \frac{1}{2}\right) = 0.d_{k+1}d_{k+2}\dots p^{k+1}_2$$

e

$$2q^k_2 = 0.d'_{k+1}d'_{k+2}\dots q^{k+1}_2$$

Concluimos que as áreas associadas a p e q , no rectângulo R_{k+1} , são iguais a p^{k+1}_2 e q^{k+1}_2 , respectivamente, o que completa a prova por indução.

A proposição seguinte é consequência da anterior.

Proposição 3

Se $p_2=0.d_1d_2d_3\dots$ e $q_2=0.d'_1d'_2d'_3\dots$ são as probabilidades dos dois resultados possíveis de uma escolha aleatória, então a metade Cara do rectângulo R_i , no qual é interpretado o resultado do i -ésimo lançamento de uma moeda equilibrada, está associada a p , se $d_i=1$, ou a q , se $d'_i=1$, $i=1,2,3,\dots$

Prova

Da proposição 2 sabemos que as áreas associadas a p e q no rectângulo R_i são $p^i_2=0.d_1d_2\dots d_i$ e $q^i_2=0.d'_1d'_2\dots d'_i$, $i=1,2,3,\dots$, respectivamente.

Por ser $d \neq d'$ e

$$\max(p^i_2, q^i_2) = \begin{cases} p^i_2, & \text{se } d_i = 1 \\ q^i_2, & \text{se } d'_i = 1 \end{cases}$$

e também pelo facto de a cor da metade Cara de R_i ser a que corresponde à maior área, decorre a validade da proposição.

Proposição 4

Se A é um dos dois resultados possíveis de uma escolha aleatória e $p_2=0.d_1d_2d_3\dots$ a probabilidade que lhe está associada, então a probabilidade de a execução do algoritmo terminar com a escolha de A

no i -ésimo lançamento da moeda é igual a $\frac{d_i}{2^i}$, $i=1,2,\dots$

Prova

Da proposição 3 sabemos que se $d_i=0$ então a metade Cara de R_i está associada a q , pelo que a probabilidade de o resultado da escolha ser A no

i -ésimo lançamento é igual a 0, i.e., igual a $\frac{0}{2^i} = \frac{d_i}{2^i}$. Se

$d_i=1$, então a metade Cara de R_i está associada a p . Existem 2^i sequências de 0s e 1s com comprimento i .

Só uma delas, 00...01, corresponde à obtenção de Coroa em cada um dos primeiros $i-1$ lançamentos e de Cara no i -ésimo lançamento, pelo que a probabilidade de o resultado da escolha ser A no i -ésimo lançamento

$$\text{é igual a } \frac{1}{2^i} = \frac{d_i}{2^i}.$$

A proposição seguinte mostra que o algoritmo é correcto.

Proposição 5

Se A é um dos dois resultados possíveis de uma escolha aleatória e $p_2=0.d_1d_2d_3\dots$ a probabilidade que lhe está associada, então:

a) A probabilidade de a execução do algoritmo terminar com a escolha de A , em não mais de i

lançamentos, é igual a $\sum_{k=1}^i \frac{d_k}{2^k}$;

b) A probabilidade de a execução do algoritmo terminar com a escolha de A tende para p quando consideramos sequências de lançamentos cujo comprimento tende para infinito.

Prova

a) Consequência imediata da proposição 4.

$$\text{b) } \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \frac{d_i}{2^i} = p$$

A proposição seguinte garante que o algoritmo 1 termina.

Proposição 6

Qualquer execução do algoritmo 1 termina.

Prova

Toda a execução do algoritmo termina quando o resultado do lançamento da moeda é Cara. A probabilidade de tal acontecer tende para 1 com o número de lançamentos.

As proposições anteriores permitem-nos reescrever o algoritmo atrás apresentado sem recorrer a figuras, utilizando apenas uma moeda equilibrada e a representação na base 2 de uma das duas probabilidades envolvidas. Designamos por *Moeda Universal* esta nova forma do algoritmo. A moeda é lançada até resultar a face que se associou a 1 (escolhida previamente). Se tal sucede no i -ésimo lançamento, então o resultado da escolha

é o correspondente à probabilidade cujo i -ésimo dígito da parte fraccionária é igual a 1.

Algoritmo 2: Moeda Universal

Algoritmo de escolha aleatória com dois resultados possíveis, designados por A e B , com probabilidades p e q , respectivamente, $p + q = 1$ por meio de lançamentos sucessivos de uma moeda equilibrada. Sejam $p_2=0.d_1d_2d_3\dots$ e $q_2=0.d'_1d'_2d'_3\dots$, tais que $d_i+d'_i=1$, $i=1,2,3,\dots$

1. Numerar as faces da moeda com 0 e 1.
2. Seja $i=1$.
3. Efectuar o i -ésimo lançamento da moeda. Seja R o número da face resultante.
4. Se $R=0$, então somar 1 ao valor de i . Ir para o passo 3 do algoritmo.
5. Se $R=1$, então o resultado da escolha é A (B) se $d_i=1$ ($d_i=0$). A execução do algoritmo termina.

Exemplo 1

Fazer uma escolha aleatória com dois resultados possíveis, de probabilidades $p = \frac{1}{5}$ e $q = \frac{4}{5}$.

Na base 2 temos $p_2=0.0011(0011)$ e $q_2=0.1100(1100)$. Podemos efectuar lançamentos sucessivos da moeda até surgir a primeira Cara (1), utilizando depois a sequência obtida para executar o algoritmo. Consideremos a sequência de lançamentos correspondente a 001 (da esquerda para a direita). A execução do algoritmo envolve os seguintes passos:

- Passo 2. $i=1$
- Passo 3. $R=0$
- Passo 4. $i=2$
- Passo 3. $R=0$
- Passo 4. $i=3$
- Passo 3. $R=1$
- Passo 5. $R=1=d_3$

A execução do algoritmo termina com o resultado associado a p .

Se as probabilidades envolvidas forem iguais, então a execução do algoritmo 1 necessita apenas de um lançamento. Neste caso, porém, o algoritmo 2 é menos eficiente do que a comum escolha com um único lançamento da moeda, podendo ser necessários vários lançamentos para efectuar a escolha.

Exemplo 2

Fazer uma escolha aleatória com dois resultados

possíveis, de probabilidades $p_1=0.1(0)$ e $q_2=0.0(1)$,

$$p = q = \frac{1}{2}.$$

Se o resultado associado a p não é escolhido no primeiro lançamento, então o algoritmo termina com o resultado associado a q , uma vez que $p_2=0.d_1d_2d_3\dots$, com $d_i=0, i=2,3,\dots$

Comentário final

Outra forma de fazer uma escolha aleatória com dois resultados possíveis, por meio de lançamentos sucessivos de uma moeda equilibrada, foi sugerida por um leitor de uma versão inicial deste texto, e consiste em tomar os resultados dos lançamentos da moeda para gerar um número aleatório r , $0 < r < 1$, sendo o resultado da escolha p , se $r < p$, ou q , se $r > p$. O algoritmo correspondente é o seguinte. Seja $p_2=0.d_1d_2d_3\dots$. Designar os resultados dos sucessivos lançamentos da moeda por $d'_i, i=1,2,3,\dots$. Se for $d'_i=d_i$, então fazer um novo lançamento; se for $d'_i \neq d_i$, então escolher p se $d'_i < d_i$, ou q se $d'_i > d_i$.

Exemplo 3

Seja $p_2=0.011011$. Se o resultado dos três primeiros lançamentos for 010, então temos $d'_3 < d_3$ e o resultado da escolha é p ; se o resultado dos quatro primeiros lançamentos for 0111, então $d'_4 > d_4$ e o resultado da escolha é q .

Existe uma diferença entre este algoritmo e o algoritmo *Moeda Universal*, que torna o último vantajoso. O exemplo 3 mostra que a execução do algoritmo agora apresentado pode terminar com o resultado Cara ou com o resultado Coroa, pelo que a sequência de lançamentos da moeda, só por si, não contém informação suficiente para marcar o final da execução (este depende também dos dígitos de p). Na execução do algoritmo *Moeda Universal*, no entanto,

o número de lançamentos a efectuar é independente das probabilidades envolvidas (os lançamentos terminam quando resulta o primeiro 1). Esta independência do critério de paragem, em relação aos objectos da escolha, caracteriza o algoritmo *Moeda Universal* e justifica a sua designação, dado ser também uma propriedade de uma escolha aleatória com dois resultados possíveis, equiprováveis, por meio de um só lançamento de uma moeda equilibrada.

A razão de ser desta diferença entre os dois algoritmos é a seguinte: o algoritmo apresentado neste comentário final procede por comparações dos resultados dos sucessivos lançamentos da moeda, com os dígitos binários da parte fraccionária de uma das probabilidades envolvidas d_1, d_2, d_3, \dots , enquanto o algoritmo *Moeda Universal* usa, para esta comparação, não os dígitos binários da parte fraccionária de uma das probabilidades envolvidas, mas sim os dígitos binários de uma sequência infinita de zeros (quaisquer que sejam as probabilidades envolvidas). Esta sequência de zeros funciona como uma sequência canónica para a escolha.

O interesse do algoritmo *Moeda Universal* reside na interpretação que sugere da parte fraccionária binária de um número positivo menor do que 1, e também na particularidade do critério de paragem referida neste comentário final. Questões de eficiência computacional não foram consideradas.

O autor agradece, por antecipação, todos os comentários dos leitores. Em particular, agradece todas as referências bibliográficas de publicações que apresentem um algoritmo idêntico ao que neste texto se designa por *Moeda Universal*.

A bibliografia abaixo indicada tem por finalidade permitir ao leitor esclarecer eventuais questões sobre fundamentos de probabilidades ([1], Capítulo VII) e representação de números na base 2 ([2], Capítulo 2). □

Referências

- [1] Silva, José Sebastião e (1978), *Compêndio de Matemática*, 1.º vol., 2.º tomo.
- [2] Sandige, Richard S. (1990), *Modern Digital Design*, McGraw-Hill Publishing.

Saber e Ensinar Matemática Elementar

por Jorge Nuno Silva
[Universidade de Lisboa]

A didática da Matemática Elementar é hoje central no debate pedagógico da Matemática, tanto no âmbito nacional como internacional. Neste contexto, a obra de Liping Ma, há pouco publicada em Portugal, é incontornável e de leitura obrigatória. Sem o aconchego de repetir ideias partilhadas com os habituais centros de pressão (os velhos pedagogos, os novos pedagogos, etc.), Ma discute efectivamente a substância central do tema.

Este importante livro de Liping Ma, que surgiu nos EUA em 1999, foi agora publicado em Portugal pela Gradiva e pela SPM. Trata-se de uma obra muito importante que muitos deviam ler.

A autora compara, por intermédio de entrevistas, os desempenhos dos professores de Matemática Elementar chineses e norte-americanos.

Começemos pelo fim: Ma conclui, face aos dados que recolhe, que a capacidade pedagógica dos

docentes chineses está muito acima da dos americanos. E que a diferença advém do facto de os docentes orientais terem um conhecimento mais profundo das matérias que ensinam do que os seus colegas. Esta conclusão deve surpreender-nos, já que os americanos têm licenciaturas, enquanto os chineses, após o nono ano, têm somente mais três anos de preparação escolar.

Liping Ma não pretende ter desenvolvido um trabalho estatisticamente sofisticado

ou significativo. Também não compara a formação dos americanos globalmente com a dos chineses. Cinge-se a um tema muito concreto – as competências de ambos no ensino da Matemática Elementar – e aborda-o com questões muito precisas.

A autora conduziu os questionários a 23 docentes americanos e 72 chineses, baseando-se na colocação de quatro questões simples, versando os temas: algoritmo da subtração, algoritmo da multiplicação, divisão por fracções e uma questão relacionando áreas com perímetros. Vamos exibir somente um exemplo, já que o consideramos suficiente para convencer os leitores a ler a obra integralmente.

Foi pedido aos professores que explicassem como ensinariam a divisão de $7/4$ por $1/2$.

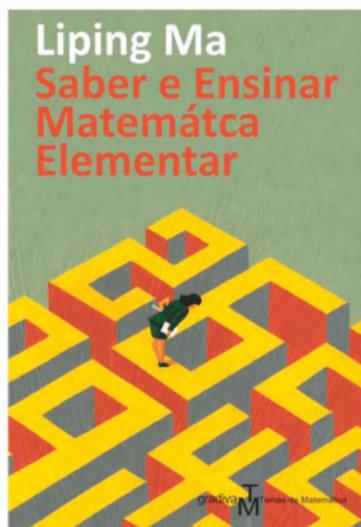
Os docentes orientais utilizavam histórias apropriadas, que correspondem à operação proposta. Alguns exemplos:

– Um grupo de trabalhadores constrói $1/2$ km de estrada por dia. Quantos dias demora a construir uma estrada de $7/4$ km de comprimento?

– Demorei $7/4$ horas a percorrer metade da distância entre as cidades A e B. Quanto vai demorar a viagem toda?

– Metade de uma corda mede $7/4$ metros. Quanto mede a corda toda?

Para mais exemplificações, alguns apelavam ainda ao facto de a característica da divisão ser a operação inversa da multiplicação. Em caso de



Saber e Ensinar Matemática Elementar
Liping Ma
"Temas de Matemática" SPM/Gradiva
276 páginas | preço sócio SPM 14,40 €

necessidade, estavam prontos a provar aos alunos as suas afirmações. Forneceram vários expedientes técnicos para o cálculo da expressão, mostrando que, no dia-a-dia do ensino, fomentam a descoberta de formas de resolução adequadas a cada problema. Um exemplo que evita a utilização de multiplicações:

$$7/4 \div 1/2 = (7 \div 4) \div (1 \div 2) = 7 \div 4 \div 1 \div 2 = 7 \div 4 \div 1 \times 2 =$$

$$7 \div 1 \div 4 \times 2 = (7 \div 1) \div (4 \div 2) = \frac{7 \div 1}{4 \div 2} = \frac{7}{2}$$

Os americanos, além de não produzirem contextos para a operação, tinham dificuldades técnicas na respectiva execução.

Vale a pena categorizar, seguindo Liping Ma, as instâncias da divisão:

– *Measurement method* (“agrupamento”, na versão portuguesa)

$$\text{Exemplo: } 8 \text{ metros} / 2 \text{ metros} = 4$$

– *Partitive method* (“repartição”, na versão portuguesa)

$$8 \text{ metros} / 2 = 4 \text{ metros}$$

– *Product and factors* (“produto e factores”, na versão portuguesa)

$$8 \text{ metros quadrados} / 2 \text{ metros} = 4 \text{ metros}$$

Quando se ensina esta matéria, convém usar exemplos dos diversos tipos. É assim que se desenvolve a noção da operação.

Claro que este livro, que provocou uma onda de choque do outro lado do Atlântico, nos interessa mais pelo que nos diz sobre nós próprios e os nossos problemas educativos.

A contra-capla da edição portuguesa é clara a esse respeito. Além da opinião do presidente da SPM, foram colhidas opiniões de Arsélio Martins, presidente da APM (que apresentou publicamente a obra com o autor destas linhas e com Peter Gothen, na Biblioteca Municipal de Viana do Castelo, no dia 4 de Setembro passado), e Carlos Pereira dos Santos, vice-presidente da Associação Ludus, que se encontra presentemente a realizar um trabalho semelhante ao de Liping Ma entre nós.

Este livro adianta algumas das razões por trás do desempenho deficiente dos professores americanos. Algumas das quais talvez se encontrem no nosso sistema e, por isso, vale a pena meditar sobre elas.

A mais notória é os docentes chineses apresentarem conhecimento profundo das matérias que ensinam, ao contrário dos colegas norte-americanos. Ora estes têm mais estudos, o que levanta muitas interrogações. Parece poder concluir-se que para ensinar bem uma matéria é muito importante conhecê-la em profundidade, mesmo que se trate de Matemática Elementar. Como diz Ron Aharoni, esta não é complexa, mas é profunda! A actuação dos professores chineses ilustra esta afirmação. A situação americana é semelhante à nossa: as universidades ensinam matemática avançada mas irrelevante para os futuros professores, outras instituições ensinam mais a forma de ensinar do que os conteúdos, pelo que temos os dois extremos, a “carne dura e a sopa rala” de que fala Elon Lima. A preparação dos docentes chineses é curta mas eficaz, centra-se nas matérias que estes irão ensinar.

A utilização de bons manuais também é mencionada por Ma. Estes são estudados pelos professores chineses, individualmente e em grupo, durante a preparação das aulas. São de grande qualidade e revistos amiúde. Em Portugal, como nos EUA, existe a tendência para esperar que os professores preparem as suas lições através de investigações pessoais, que são invariavelmente morosas e menos eficientes. O superior conhecimento dos professores chineses é adquirido enquanto desempenham a sua função docente, porque lá, ao contrário de cá, acredita-se que há muito a aprender sobre a matemática dos primeiros anos. É que é exactamente quando se trata de ensinar uma matéria que se constata que o respectivo conhecimento profundo é de extrema importância. Não é quem sabe mais matemática que ensina melhor a Matemática Elementar, é quem melhor conhece a Matemática Elementar que o faz.

A conclusão global que o livro de Ma expõe é a de que a circularidade da situação em que nos encontramos poderá ser quebrada na formação de professores. Urge ensinar aos futuros professores as matérias que estes vão ensinar, já que presumir que estas estão implícitas na “carne dura” ou que mais vale a “sopa rala” são erros a evitar. Os apologistas dos dois extremos devem meditar sobre isto. *Saber e Ensinar Matemática Elementar* termina exactamente com uma citação de Dewey, apelando à compaginação destas duas atitudes. Para isso, que tal começar por ler este livro?

A Matemática no Tempo do Mestre José Vizinho

por António Costa Canas e Maria Eugénia Ferrão [Coords]
[Universidade de Lisboa e Universidade da Beira Interior]

A Matemática no Tempo do Mestre José Vizinho é a mais recente obra dos “Temas de Matemática”, a colecção SPM/Gradiva.

O período que ficou conhecido entre os historiadores como Renascimento caracteriza-se, como o seu nome indica, por um renascer da cultura clássica. O homem renascentista demonstra um interesse elevado pela filosofia, pela arte e pelas ciências gregas e romanas.

Para a difusão dos textos clássicos foi fundamental o contributo de Árabes e de Judeus. Estas comunidades traduziram e comentaram muitas obras gregas de geografia, astronomia, matemática, e de

outros ramos do saber. Este interesse pela ciência levou-os também a realizar investigação nessas áreas, contribuindo desse modo para o respectivo desenvolvimento. A ciência europeia do Renascimento é devedora em grande medida dos contributos destes sábios.

Uma obra que a tradição historiográfica considera de elevada importância para o desenvolvimento da ciência náutica portuguesa é o *Almanach Perpetuum* de Abraão Zacuto. Redigido originalmente pelo seu autor em hebraico, viu os seus cânones traduzidos para Latim e depois para Castelhana, pelo Mestre José Vizinho. Os dados que temos sobre a vida deste último indicam que deverá ter nascido na Covilhã.

Estes anos finais do século XV representam um período de elevado desenvolvimento da matemática no mundo ocidental, quer através da redescoberta de obras clássicas, quer pelo desenvolvimento de novas abordagens. Portugal tem um papel bastante activo neste processo. O expoente máximo desses contributos é Pedro Nunes, cuja actividade floresceu em meados do século seguinte. No entanto, uma das “forças motrizes” do interesse de Nunes pelos assuntos náuticos foi certamente a necessidade sentida em Portugal de encontrar soluções para os problemas que quotidianamente se deparavam aos homens do mar. E para solucionar esses problemas muito contribuíram diversos outros homens de saber, cuja existência permaneceu pouco conhecida até aos dias de hoje. Todos eles contribuíram para que Portugal ocupasse o papel estratégico no domínio do conhecimento e das técnicas fundamentais à navegação.

A personagem homenageada neste livro, Mestre José Vizinho, é um desses “ilustres desconhecidos”. A principal explicação para esse desconhecimento é a escassez de dados nas fontes históricas que possibilitem um conhecimento completo da forma como se desenvolveu a ciência náutica nesses primeiros anos dos Descobrimentos Portugueses. No



A Matemática no Tempo do Mestre José Vizinho
António Costa Canas e Maria Eugénia Ferrão (Coords)
"Temas de Matemática" SPM/Gradiva
210 páginas | preço sob consulta

entanto, é nossa convicção que o Mestre José desempenhou um importante papel em todo este processo, daí que tenhamos decidido organizar esta obra. O projecto mereceu todo o apoio da Sociedade Portuguesa de Matemática – Delegação Regional do Centro e da Gradiva – e conta com o patrocínio da Universidade da Beira Interior e do banco BPI.

O livro *A Matemática no Tempo do Mestre José Vizinho* tem dois propósitos principais. O primeiro é recordar o nome e obra do Mestre José Vizinho no ano internacional da Astronomia; o segundo é contribuir para a difusão do conhecimento sobre os progressos proeminentes que se fizeram na matemática e na astronomia naquela época. Nestes termos, o livro versa temas sobre os aspectos da vida e obra do Mestre José Vizinho e a descrição do contexto social e cultural em Portugal e na Europa, sobre as contribuições dos portugueses para o avanço da matemática e da ciência naquela época e sobre o desenvolvimento da matemática na Europa.

Apresenta-se em seguida uma breve síntese de cada capítulo do livro.

Os Judeus, os astros e a astrologia, Maria José Tavares

O capítulo aborda os saberes daquela época bem como os seus praticantes à luz das fontes históricas e literárias posteriores ao século XV. São mencionados factos históricos, desde o reinado de D. Dinis, para encontrar uma explicação para o interesse pela astrologia, por exemplo através da sua associação com a prática da medicina e, conseqüentemente, a relevância do cálculo das horas e dos dias favoráveis a determinado empreendimento. Ao longo do capítulo torna-se evidente o importante papel dos judeus na sociedade, em particular do Mestre José Vizinho, que juntamente com o Mestre Rodrigo foram os primeiros a medir a latitude astronómica no equador e a construir as respectivas tábuas de declinação solar que permitiriam aos portugueses navegar para sul do Equador e que depois seriam também aplicadas à navegação no hemisfério norte.

Mestre José Vizinho e a Junta de Matemáticos de D. João II, Carlos Manuel Valentim.

O texto "Mestre José Vizinho e a Junta de Matemáticos de D. João II" baseia-se essencialmente em fontes primárias contendo dados sobre a vida e obra de Mestre José. O objectivo do autor foi tentar

lançar alguma luz sobre a personagem homenageada neste livro, uma vez que "pouco se sabe sobre a vida de mestre José Vizinho, e a sua identidade mergulha no mais completo mistério".

Partindo dos elementos contidos nas fontes, procurou responder a diversas questões: "Quem se refere a este astrólogo? Onde aparece o seu nome? Que tipo de informação nos chegou?". Fazendo uma análise crítica a estas questões conseguiu "ficar na posse de uma ideia mais nítida acerca de um judeu sefardita que influenciou numa forma determinante as navegações portuguesas nos séculos XV e XVI".

A Renascença Matemática, Natália Bebiano

O texto traça o panorama do conhecimento e desenvolvimento da matemática na Europa a partir do século XV. Em particular, aborda temas como as primeiras aritméticas, o desenvolvimento da álgebra, da álgebra retórica à álgebra simbólica, os avanços da trigonometria, a presença da matemática na arte renascentista, entre outros.

Pedro Nunes e as linhas de rumo, João Filipe Queiró

A linha de rumo é uma curva que corta todos os meridianos segundo um mesmo ângulo. O seu interesse é enorme para os navegantes, uma vez que o instrumento que utilizam para obter as direcções, a bússola, tem como referência o meridiano.

Pedro Nunes foi quem primeiro estudou, de um modo sistemático, esta curva e os problemas associados à sua representação nas cartas de marear. Após esclarecer o que são as linhas de rumo e a sua importância em termos náuticos, o autor explica as mesmas em termos matemáticos.

A génese da navegação astronómica em Portugal, António Costa Canas

As técnicas de navegar usadas pelos portugueses no início dos Descobrimentos foram aprendidas com os povos do Mediterrâneo. Conforme os navegantes se iam afastando cada vez mais para o largo, essas técnicas revelaram-se insuficientes. Foi então desenvolvida uma navegação oceânica, baseada no recurso a observações astronómicas.

Foram adaptados instrumentos para medir a altura dos astros, desenvolvidas técnicas de cálculo para determinação da latitude e criadas tabelas que forneceram alguns dados necessários para esses

Livros Contados

[A Matemática no Tempo do Mestre José Vizinho]

cálculos. Em todo este processo de desenvolvimento destas técnicas de navegação, recorrendo à observação de astros, foi fundamental o papel dos astrónomos, nomeadamente de José Vizinho.

O *Almanach perpetuum* e o impacto da imprensa na astronomia e na náutica dos séculos XV e XVI, Luís Tirapicos

Num texto de revisão, analisa o impacto que a invenção da imprensa – em meados do século XV – teve na difusão de tratados e efemérides astronómicas e náuticas. Em particular, foca a sua atenção sobre as obras que influenciaram a composição do *Almanach perpetuum* (um dos primeiros livros impressos em Portugal) e aquelas que, possivelmente, foram influenciadas por este. Analisou ainda a forma como vários astrónomos/astrologos dos séculos XV e XVI integraram a imprensa nos seus programas de renovação da astronomia.

Aritméticos portugueses dos séculos XVI e XVII. Teresa Costa

Graças aos descobrimentos marítimos, Portugal conhece um período de prosperidade e de

grande actividade comercial durante o século XVI. O desenvolvimento do comércio favorece a criação de métodos aritméticos práticos e eficazes. Foi nesta época que apareceram algumas obras de referência em aritmética tais como o *Tratado da Pratica Darismetica*, de Gaspar Nicolas, *A Pratica Darismetica*, de Ruy Mendes, de 1540, o *Tratado da arte d' Arismetica*. A autora analisa o desenvolvimento da aritmética a partir desse período de grande prosperidade até ao século XVIII.

Jogos de outros tempos, Jorge Nuno Silva

O capítulo descreve jogos de outros tempos, a partir do *Rithmomachia* ou *Jogo dos Filósofos* até aos jogos de João de Barros. O *Rithmomachia* era um jogo pedagógico, criado para ilustrar a aritmética pitagórica. O *Rithmomachia*, que no século XV começou a ser usualmente designado por *Ludus Philosophorum*, beneficiou da expansão dos estudos humanísticos na Europa, bem como da evolução do ensino da matemática. Nesse século aparece outro jogo erudito em ambiente universitário, o *Ludus Astronomorum*.^[1]

A Curvatura de uma Superfície?

Todos temos a noção intuitiva de quando é que uma superfície é curva. Mas o que é a curvatura de uma superfície? Será a superfície de um cilindro verdadeiramente curva? E qual a relação disto tudo com o pêndulo de Foucault, ou com o satélite no interior do qual rodam as "esferas mais esféricas jamais construídas"?

A superfície mais simples é o plano, cuja geometria foi estudada em detalhe por Euclides no seu *Elementos* (cerca de 300 a.C.). Entre outras coisas, Euclides escreveu que:

- Duas rectas distintas intersectam-se no máximo uma vez;
- Existem rectas que não se intersectam (paralelas);
- Os ângulos internos de um triângulo somam 180° .

Em muitas situações, porém, é necessário estudar a geometria de outras superfícies. Para planejar uma viagem de longo curso, por exemplo, é preciso compreender a geometria da esfera¹. Em geral, uma superfície curva não contém qualquer recta; se pensarmos, no entanto, que a principal propriedade da recta é o facto de minimizar a distância entre quaisquer dois dos seus pontos, podemos substituir o conceito de recta pelo conceito de **geodésica**, definida como uma curva ao longo da superfície que minimiza a distância (medida sobre a superfície) entre quaisquer dois dos seus pontos². No caso da esfera, por exemplo, não é difícil provar que as geodésicas são os **círculos máximos**, isto é, as intersecções da esfera com planos que passam pelo seu centro (por exemplo, o equador ou os meridianos, mas não os paralelos, no caso da superfície da Terra). É por isso que um avião viajando entre o Porto e Nova Iorque, que ficam aproximadamente à mesma latitude (41° N), não voa directamente para oeste, mas sim inicialmente para

noroeste, virando depois para oeste e finalmente para sudoeste (ver figura 1).

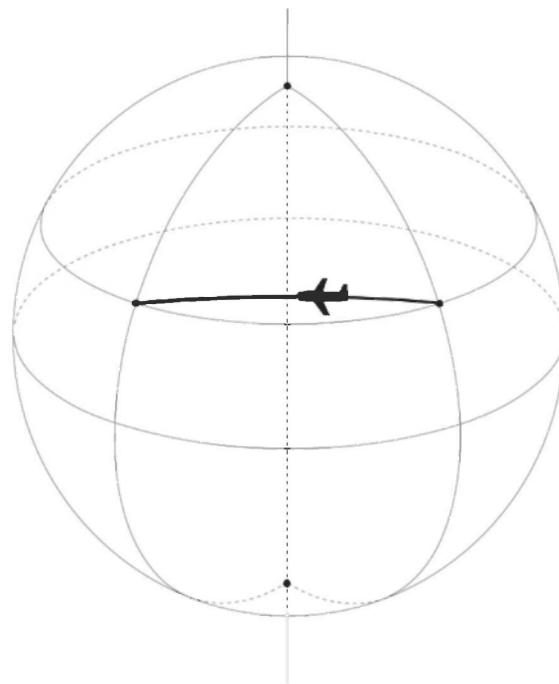


Figura 1

No caso da esfera, as três afirmações de Euclides acima deixam de ser verdade, devendo ser substituídas por:

¹Por "esfera" deve entender-se "superfície esférica".

²Desde que suficientemente próximos.

O Que É...

[A Curvatura de uma Superfície?]

- Duas geodésicas distintas intersectam-se exactamente duas vezes;
- Não existem paralelas;
- Os ângulos internos de um triângulo somam sempre **mais** do que 180° .

Na figura 2, por exemplo, encontra-se representado um triângulo esférico com três ângulos rectos. Uma vez que é possível dividir a esfera em oito destes triângulos, a sua área é de $4\pi R^2/8$ (em que R é o raio da esfera). Consequentemente, a **curvatura média** do triângulo, definida como a razão entre o excesso da soma dos seus ângulos internos em relação a 180° (medido em radianos) e a sua área, é

$$(\pi/2)/(\pi R^2/2)=1/R^2.$$

Não é difícil mostrar que a curvatura média de qualquer triângulo na esfera possui o mesmo valor³. Diz-se então que a esfera é uma **superfície de curvatura constante** igual a $1/R^2$.

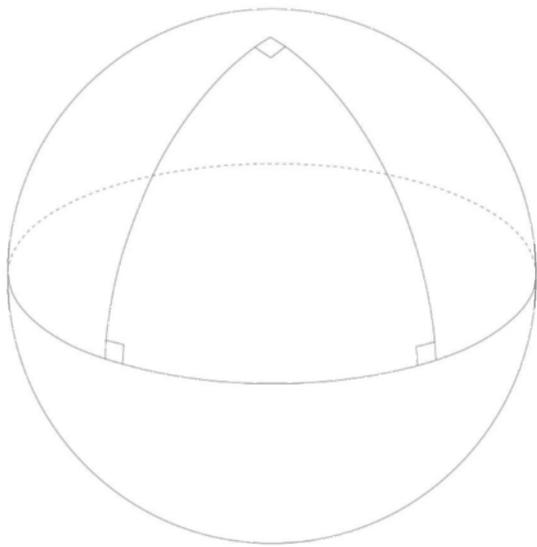


Figura 2

³Isto é particularmente simples para triângulos com vértices no equador e num dos pólos.

⁴Em particular este limite existe, o que não é óbvio. Note-se que a soma dos ângulos internos de triângulos cada vez mais pequenos tende para 180° , como seria de esperar, uma vez que localmente qualquer superfície é bem aproximada pelo seu plano tangente.

⁵No sentido que tem contacto de segunda ordem.

⁶Porque o conjunto das direcções possíveis (circunferência) é compacto. É possível mostrar que as geodésicas correspondentes são ortogonais.

⁷A curvatura média ser zero é a condição para uma superfície possuir área mínima.

⁸É fácil ver isto no caso da esfera.

Para superfícies gerais, a curvatura média varia de triângulo para triângulo. A curvatura da superfície é então uma função, definida em cada ponto como o limite das curvaturas médias de triângulos cada vez mais pequenos desenhados em torno desse ponto⁴. Intuitivamente, mede o quanto a geometria local da superfície difere da geometria do plano.

Historicamente, a definição de curvatura de uma superfície surgiu a partir da definição de curvatura de uma curva. Esta é simplesmente o inverso do raio da circunferência que melhor aproxima⁵ a curva num dado ponto. No conjunto de todas as geodésicas de uma superfície curva que passam num determinado ponto, existe uma que possui curvatura mínima e outra que possui curvatura máxima⁶. A **curvatura média** da superfície é a soma destas curvaturas⁷; a **curvatura de Gauss** foi por este definida como o seu produto. Pode mostrar-se que a curvatura de Gauss coincide exactamente com a definição de curvatura de uma superfície em termos de triângulos⁸, dependendo portanto apenas da geometria intrínseca da superfície. Por exemplo, é possível enrolar uma folha de papel na superfície de um cilindro ou de um cone, pelo que estas superfícies possuem a geometria local do plano; consequentemente, a sua curvatura de Gauss é zero (apesar de a curvatura média não o ser). Gauss ficou tão satisfeito com este resultado que lhe chamou o **Theorema Egregium** (Teorema Notável).

Uma forma conveniente de medir os ângulos internos de um triângulo numa superfície é através do chamado **transporte paralelo**. Este consiste em mover um vector tangente à superfície ao longo do triângulo sem o deixar rodar. Num triângulo plano o vector regressaria à posição inicial após um circuito, mas numa superfície curva não é esse o caso. Por exemplo, para o triângulo da figura 2 o vector regressa rodado de 90° (ver figura 3). Estes 90° coincidem exactamente com o excesso da soma dos ângulos internos do triângulo em relação a 180° . De igual modo, para um triângulo geral, o vector regressa rodado de um ângulo igual à curvatura da esfera ($1/R^2$) multiplicada

pela área do triângulo⁹. Facilmente se mostra que o mesmo é verdade para uma linha poligonal fechada qualquer e, portanto, por aproximação, para qualquer curva fechada simples na esfera.

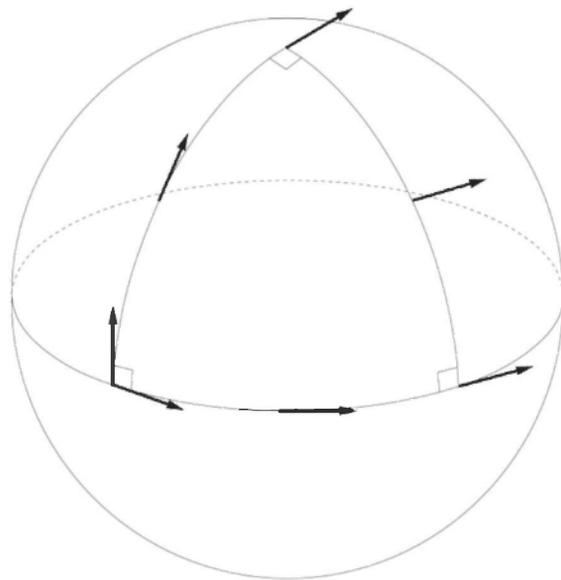


Figura 3

Estas ideias encontram uma aplicação prática no **Pêndulo de Foucault**. Trata-se de um pêndulo vulgar, mas suficientemente comprido e pesado para se manter a oscilar durante alguns dias¹⁰. Em virtude do movimento de rotação da Terra, o plano de oscilação deste pêndulo roda ao longo do dia, a uma taxa que depende da latitude. Por exemplo, é fácil compreender que este plano roda 360° por dia nos pólos, e que não roda de todo no equador. A uma dada latitude l , o pêndulo tenta manter o seu plano de oscilação constante à medida que a rotação da Terra o arrasta ao longo do paralelo. Por outras palavras,

a direcção do plano de oscilação é transportada paralelamente. Após 24 horas, o pêndulo regressou ao mesmo ponto¹¹ e, portanto, a direcção do plano de oscilação rodou um ângulo de

$$(1/R^2)(2\pi R^2(1-\sin l))=2\pi(1-\sin l) \text{ radianos}$$

no sentido directo¹², ou seja,

$$2\pi-2\pi(1-\sin l)=2\pi \sin l \text{ radianos}$$

no sentido horário.

Uma aplicação mais subtil destas ideias é fornecida pela Teoria da Relatividade Geral de Einstein. De acordo com esta teoria, o espaço¹³ tridimensional em redor de um objecto com massa não é exactamente Euclidiano, mas sim muito ligeiramente curvo (no sentido em que as suas secções planas não possuem a geometria do plano, mas sim de uma superfície muito ligeiramente curva). Por exemplo, se fosse possível medir o raio da Terra a partir do seu centro, obter-se-ia um valor cerca de 1 milímetro e meio superior ao valor do raio inferido a partir da sua circunferência¹⁴. Esta ligeira curvatura do espaço ao redor da Terra foi confirmada pelo satélite Gravity Probe B, lançado em Abril de 2004. No interior deste satélite encontravam-se as cinco “esferas mais esféricas jamais construídas” (esféricas com uma precisão de uma parte num milhão¹⁵), rodando sobre si mesmas e em queda livre. Se o espaço fosse plano, o seu eixo de rotação permaneceria fixo; uma vez que o espaço é curvo, o eixo de rotação é transportado paralelamente e, portanto, regressa rodado ao fim de cada órbita ao redor da Terra. O valor previsto para o ângulo de rotação (0,0018° por ano¹⁶) foi confirmado pelas medições¹⁷. □

⁹Se a curvatura não é constante deve ser integrada no interior do triângulo.

¹⁰Existe um pêndulo de Foucault no Museu da Ciência de Lisboa.

¹¹Do ponto de vista do referencial inercial no qual o centro da Terra está em repouso.

¹²A área da região limitada pelo paralelo obtém-se facilmente do facto de a projecção cilíndrica preservar áreas.

¹³Em rigor o espaço-tempo.

¹⁴Assumindo que a Terra é uma esfera perfeita de densidade constante. A geometria do espaço no interior da Terra é a de uma 3-esfera de raio cerca de 26 800 vezes superior ao raio da Terra.

¹⁵Se a Terra fosse esférica com este grau de precisão, não existiriam relevos com mais de 2 metros de amplitude.

¹⁶Sabendo que cada órbita demora cerca de 100 minutos, o leitor atento poderá calcular que o ângulo devido à curvatura do espaço deveria ser de 0,0012°; os restantes 0,0006° provêm, grosso modo, da curvatura do tempo.

¹⁷Este não era porém o objectivo principal da experiência, que pretendia medir um efeito mais pequeno ainda.

Maneiras de Estudar Matemática

Como estudar Matemática? Deve dar-se prioridade à compreensão dos conceitos ou à resolução de muitos exercícios? O melhor método (caso exista um melhor método) variará de pessoa para pessoa? Dependerá do grau de ensino e da maturidade do estudioso?

Como se deve estudar Matemática? Mais concretamente, qual a importância relativa do estudo da teoria e da prática? Entendemos estes termos no sentido que os estudantes (sobretudo os do ensino superior) lhes dão: teoria é o estudo dos teoremas com a compreensão das demonstrações ao pormenor, prática é a resolução de exercícios.

Tradicionalmente, os estudantes põem a prática em primeiro lugar. Não só os de Engenharia, mas também os de Matemática. A justificação faz-se com afirmações do género: “a prática é que interessa” e “a teoria é coisa livresca”.

Nalgumas matérias, este ponto de vista dá resultados razoáveis, pelo menos para efeitos de exames. Por exemplo, é possível, juntando um pouco de sorte, conseguir algum êxito na discussão de um sistema de equações algébricas lineares com fraco entendimento do que se está a fazer. É também possível calcular derivadas, primitivas e integrais sem perceber bem o que isso seja, mas de modo a alcançar uma pontuação aceitável num teste. Ou traçar uma curva. Para isso basta saber que se a derivada é positiva, a curva sobe, se a segunda derivada for positiva, a barriga da curva é para baixo, mesmo que não se tenha apreendido a definição de derivada nem a de convexidade (basta o conceito de barriga). Pode não se saber bem o que se faz, mas faz-se o suficiente para se obter mais de 50% da pontuação.

Há, porém, muitas matérias em que o fraco conhecimento dos quês e porquês conduz inevitavelmente ao desastre. São exemplo disso disciplinas como Topologia e Álgebra, em que

aparecem numerosos exercícios que começam com “demonstre que...”. São clássicas as queixas dos alunos, mesmo a respeito de problemas muito simples, de que não se vê por onde se lhes pegar, não é como com as derivadas.

Há quem pense que nesta maneira de estudar (dando toda a prioridade à prática...) reside uma boa parte da explicação das dificuldades com a Matemática. É que quem se preocupar primeiro com a compreensão fina da teoria, incluindo o estudo das demonstrações até ao mais ínfimo pormenor e sua memorização, notará em breve que sabe o que está a fazer. Que não dará respostas sem tom nem som na esperança de que peguem (para utilizar uma palavra muito comum) porque sabe reconhecer quando não pegam. E notará que muitos exercícios tidos como difíceis não passam, afinal, de meras concretizações de teoremas gerais. Quem tiver os teoremas gerais sabidos, assimilados, digeridos e principalmente bem presentes na memória, resolve de olhos fechados.

A *Gazeta* gostaria de saber a sua opinião quanto à dicotomia acima descrita.

1. Qual a sua opinião sobre o equilíbrio entre as duas vertentes (i) estudo da teoria, (ii) estudo da prática?

2. Que importância atribui ao estudo detalhado das demonstrações, tanto no ensino superior como no secundário?

3. Fala-se na beleza da matemática. Onde a encontramos, na teoria ou na resolução de exercícios?

Glória Cravo, Universidade da Madeira

Qual a sua opinião sobre o equilíbrio entre as duas vertentes (i) estudo da teoria, (ii) estudo da prática?

Para começar, convém mencionar que a matemática é, por natureza, uma ciência com uma forte componente teórica. Deste modo, a componente teórica assume um papel fundamental, que não pode simplesmente ser substituído pela resolução sistemática de exercícios. É na componente teórica que são adquiridos os conceitos, só sendo possível a sua manipulação quando devidamente introduzidos. É essencial a consolidação dos conteúdos teóricos para posteriormente passar-se à resolução de problemas/exercícios, caso contrário, corre-se o grave risco de se criar maus hábitos de estudo, inculcando nos estudantes técnicas e regras básicas de resolução de exercícios. Este é um risco a ser evitado, pois é extremamente importante capacitar os estudantes para a compreensão dos conteúdos matemáticos inerentes à resolução dos problemas/exercícios propostos. Há que os incentivar a estimular o seu raciocínio, bem como o seu espírito crítico e criativo.

Penso ser vital o conhecimento do trajecto percorrido até à obtenção de uma resposta. Por conseguinte, é fundamental dar-se prioridade à compreensão dos conceitos. Para alcançar esse objectivo terá de existir uma boa articulação entre o estudo da teoria e o estudo da prática, de modo a permitir uma "simbiose" natural entre estas duas componentes. É com a obtenção desse equilíbrio que contribuiremos para uma melhor formação matemática.

Que importância atribui ao estudo detalhado das demonstrações, tanto no ensino superior como no secundário?

Na minha opinião, o estudo das demonstrações (em ambos os níveis de ensino) é extremamente importante. Por um lado, é fundamental que os alunos constatem que os resultados apresentados têm uma justificação natural, que não surgem sem qualquer

suporte. Por outro lado, as demonstrações têm a capacidade de estimular a imaginação e, por conseguinte, proporcionam um maior poder de abstracção que é essencial na aprendizagem da matemática. Afinal, a matemática não é um repositório de receitas para resolver exercícios. A aprendizagem matemática passa por vários níveis: apresentação dos conceitos, interiorização e manipulação dos mesmos e, finalmente, a sua aplicação. Estas etapas são essenciais para uma boa aprendizagem. Sem dúvida, o estudo/análise das demonstrações (mesmo que sejam omitidos certos detalhes) tem a capacidade de fomentar este processo.

Em relação ao ensino secundário, só gostaria de referir que não há necessidade de se apresentar muitas demonstrações, mas apenas as mais importantes. Evidentemente, alguns detalhes podem ser omitidos. O mais importante é incentivar o espírito crítico e criativo dos estudantes, estimulando a sua imaginação, bem como inculcando-lhes hábitos de análise, discussão e iniciativa na resolução de problemas. E a análise das demonstrações contribui indiscutivelmente para alcançar estes objectivos.

Fala-se na beleza da matemática. Onde a encontramos, na teoria ou na resolução de exercícios?

A matemática é, por natureza, uma ciência extremamente rica e bela. A sua beleza encontra-se um pouco por todo o lado. Por exemplo, ao olharmos para um simples calendário (gregoriano) é curioso constatar que está subjacente a noção de congruência módulo 7. Em muitas outras situações da nossa vida deparamo-nos com diversos conceitos matemáticos. E, de facto, fascinante constatar a importância e a presença constante da matemática nas nossas vidas.

Mas, sem dúvida, o seu lado mais belo e criativo encontra-se associado à componente teórica. A teoria possibilita incentivar a imaginação e a criatividade. E que há de mais belo do que a criatividade? Ser criativo é ver para além daquilo que é apresentado... É dar mais um "passo", ir mais além, é procurar respostas e encontrar novos problemas... É caminhar em busca de novos desafios! E note-se que este processo tem vindo a repetir-se ao longo dos tempos, facultando a obtenção de respostas e gerando novos problemas. Assim, identifico a profunda beleza da matemática nesta busca contínua de respostas e esta busca insere-se no âmbito da teoria.

António Bivar, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (professor aposentado)

Qual a sua opinião sobre o equilíbrio entre as duas vertentes (i) estudo da teoria, (ii) estudo da prática?

Os exercícios não são mais (nem menos) do que pequenos teoremas suficientemente simples para que seja razoável esperar que os alunos a que se destinam sejam capazes de os demonstrar e, em certos casos, acabar de os enunciar. Quando um aluno resolve o exercício $12 + 5 = ?$ respondendo “17”, está a enunciar um corolário do teorema que legitima o algoritmo da soma que utilizou. A demonstração desse corolário é precisamente a aplicação do teorema-algoritmo a esse caso particular, que tem de ser reconhecido como tal, fazendo, além disso, apelo a um dos importantes resultados que constituem a chamada tabuada. Por este exemplo se percebe que é muitas vezes indispensável conhecer conjuntos de teoremas antes que seja possível estudar pormenorizadamente as respectivas demonstrações; o objectivo, nesses casos, não é escamotear a actividade dedutiva mas, pelo contrário, centrar a atenção na obtenção rigorosa de resultados ao alcance do aluno na fase da aprendizagem em que se encontra. A natureza da própria matemática determina, em cada nível de ensino, quais os resultados que é necessário conhecer sem demonstração, aqueles cujas demonstrações podem ser compreendidas com utilidade em cada momento e, finalmente, os que podem ser deduzidos e demonstrados pelos próprios alunos e que constituem os chamados exercícios. Estes deverão ser suficientes para que o aluno, pelo menos, comece a encarar os resultados fundamentais do curso como essencialmente “familiares”.

Que importância atribui ao estudo detalhado das demonstrações, tanto no ensino superior como no secundário?

Lembrarei apenas que tal estudo constitui o contacto directo com uma apresentação sintética e elegante de porções relevantes da matemática já feita; dispensá-lo impede esse contacto, salvo raras excepções.

Fala-se na beleza da matemática. Onde a encontramos, na teoria ou na resolução de exercícios?

O que aqui se chama “teoria” é como uma obra de arte cuja contemplação só despertará sentimentos estéticos quando formos capazes de a compreender; a resolução de exercícios apela à nossa própria criatividade, mas num âmbito mais modesto. Assim, podemos encontrar essa beleza em ambos os campos, não se conhecendo limites para a que podemos apreciar na “teoria”, ou seja, na contemplação da matemática já feita, e havendo a oportunidade essencial para saborear um pouco da “beleza do ponto de vista do artista”, ainda que em porções mais limitadas, na resolução de exercícios.

António Leal Duarte, Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra

Qual a sua opinião sobre o equilíbrio entre as duas vertentes (i) estudo da teoria, (ii) estudo da prática?

Creio que a nível inicial o estudo terá de ser apenas prático (os algoritmos das operações aritméticas aprendem-se apenas com a prática); mesmo na manipulação de expressões algébricas ou no cálculo de derivadas, a prática é fundamental! Em níveis avançados, a teoria será mais importante do que a prática, sem que esta última seja excluída. Recordo que na minha aprendizagem, aos 12-13 anos, foi-me ensinado um algoritmo para extracção das raízes quadradas; nunca o consegui fixar, pois não via nele nenhuma relação com a raiz quadrada! Parece-me também que para aplicar qualquer noção matemática numa situação nova dever-se-á ter compreendido bastante bem essa noção (nomeadamente com o estudo de demonstrações que a envolvam), isto é, a respectiva teoria e não apenas uma quantidade de algoritmos ou cálculos.

Que importância atribui ao estudo detalhado das demonstrações, tanto no ensino superior como no secundário?

As demonstrações desempenham um papel fundamental no estabelecimento de verdades

matemáticas; não nos devemos esquecer, no entanto, também do papel da intuição/raciocínios heurísticos/exemplos, nomeadamente nas demonstrações por absurdo.

Tendo conhecimento de meia dúzia de procedimentos, é possível obter 10 num exame (mas não notas altas). No entanto, tais estudantes estão sujeitos a diversas rasteiras (nomeadamente provocadas por erros de cálculo).

A necessidade de estudar as demonstrações deve ir aumentando à medida que se avança no nível de ensino; em certos casos (e níveis) um exemplo pode ser mais elucidativo do que uma demonstração. Parece-me, no entanto, grave que um jovem acabe o 12.º ano de Matemática convencido de que a veracidade de uma proposição matemática se estabelece com alguns exemplos: temo que seja isso que esteja a acontecer; dar exemplos é útil! O que se

deveria também dizer é que há sempre necessidade de uma demonstração (que pode ser omitida naquele nível de ensino).

Fala-se na beleza da matemática. Onde a encontramos, na teoria ou na resolução de exercícios?

A matemática foi, desde sempre, quer um meio de resolver problemas práticos quer apenas uma actividade intelectual; ao longo do seu desenvolvimento histórico, estes aspectos estiveram sempre presentes. Penso, pois, que os dois aspectos teoria/aplicações deverão sempre estar presentes. Para mim, um dos aspectos mais belos da matemática consiste no facto de teorias desenvolvidas sem nenhuma relação com aplicações virem a encontrar aplicações.



por António Pereira Rosa
[Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho]

A Transformação de Tschirnhaus

Em 1683, o matemático germânico Ehrenfried Walter von Tschirnhaus apresentou um novo processo para a resolução de equações polinomiais. Desde os algebristas italianos do século XVI até Abel, foram feitas tentativas de resolução de equações de grau arbitrário por meio de radicais. Este método, posteriormente desenvolvido e generalizado por Bring e Jerrard, foi talvez aquele que mais próximo esteve do sucesso.

1. Introdução

O primeiro passo para a resolução da equação do terceiro grau $ax^3+bx^2+cx+d=0$ é a eliminação do termo quadrático por meio da substituição $y=x+b/3a$, que alguns autores atribuem a Tartaglia. Obtém-se uma equação da forma $x^3+px+q=0$, que pode então ser resolvida por diversos métodos, como o processo original de del Ferro, Tartaglia e Cardano, o método de Lagrange ou a famosa “substituição milagrosa” de Viète (veja-se [1], página 80). Neste trabalho vamos estudar um método, publicado em 1683, que se deve ao matemático germânico Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (ou Tschirnhausen), que viveu de 1651 a 1708. De todas as tentativas de resolução de equações polinomiais de grau arbitrário por meio de radicais, este método e as suas generalizações foram os que mais se aproximaram do objectivo final (que, desde os trabalhos de Ruffini, Abel e Galois, sabemos ser, em última análise, inatingível).

A ideia de Tschirnhaus é simples: já que se consegue suprimir o termo em x^2 por meio de uma mudança de variável afim, talvez seja possível desembaraçar a equação dos termos em x^2 e em x por meio de uma mudança de variável quadrática $y=x^2+\alpha x+\beta$, com α e β coeficientes a determinar, obtendo-se uma equação binomial $y^3=k$, de resolução imediata¹. Como vamos ver, a ideia está correcta, mas a determinação destes coeficientes é extremamente morosa; sugerimos ao leitor interessado em refazer alguns dos nossos cálculos a utilização de *software* de cálculo simbólico adequado, como o *Derive*, o *Mathematica* ou o *Maxima*.

2. A substituição de Tschirnhaus

É fácil de ver que há equações do terceiro grau que não podem ser reduzidas à forma binomial por meio de uma mudança de variável afim; a tentativa de fazer essa redução por meio de uma sequência finita de tais transformações fracassa também, uma vez que a composta de duas transformações afins é ainda uma transformação afim. Concentremo-nos então nas mudanças de variáveis quadráticas, começando por recordar alguns resultados que nos vão ser necessários (apresentamos versões adequadas às nossas necessidades; os dois teoremas seguintes são muito mais gerais).

Teorema 1 (Fórmulas de Viète) Dado um polinómio $p(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, de raízes² x_1 , x_2 e x_3 , então $a_1=-(x_1+x_2+x_3)$; $a_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$; $a_3=-x_1x_2x_3$.

¹Uma alternativa interessante é o uso de uma mudança de variável de tipo homográfico ou de Möbius, conforme se pode ver em [2].

²Reais ou complexas e tendo em conta as multiplicidades.

[A Transformação de Tschirnhaus]

Em particular, se $p(x)=x^3+px+q$, então tem-se que $0=(x_1+x_2+x_3)$, $p=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ e $q=-x_1x_2x_3$.

Demonstração Basta desenvolver o segundo membro da identidade $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3)$ e igualar os coeficientes das potências do mesmo grau.

Teorema 2 (Fórmulas de Newton) Dadas as três indeterminadas x_1, x_2 e x_3 , sejam $s_k = \sum_{i=1}^3 x_i^k$ e

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ \sigma_3 &= x_1x_2x_3.\end{aligned}$$

Então tem-se

$$\begin{aligned}s_1 &= \sigma_1 \\ s_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ s_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \\ s_4 &= s_3\sigma_1 - s_2\sigma_2 + s_1\sigma_3 \\ s_5 &= s_4\sigma_1 - s_3\sigma_2 + s_2\sigma_3 \\ s_6 &= s_5\sigma_1 - s_4\sigma_2 + s_3\sigma_3.\end{aligned}$$

Demonstração Não vamos apresentá-la; o leitor interessado pode consultar a referência [3].

Considerem-se então as equações

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1)$$

$$y^3 + r = 0 \quad (2)$$

em que (1) é a equação dada e (2) é a sua transformada por meio da substituição $y=x^2+\alpha x+\beta$. Sejam ainda x_1, x_2 e x_3 as raízes de (1) e y_1, y_2 e y_3 as raízes de (2).

Escrevamos as expressões dos $s_j (j=1,2,3,4,5,6)$ para as raízes da equação (1). Pelas fórmulas de Viète, tem-se

$$\begin{aligned}\sigma_1(x_i) &= s_1(x_i) = 0 \\ \sigma_2(x_i) &= p \\ \sigma_3(x_i) &= -q\end{aligned}$$

donde, atendendo a que $\sigma_1(x_i)=0$, se segue das fórmulas de Newton que

$$s_1(x_i) = 0 \quad (3)$$

$$s_2(x_i) = -2p \quad (4)$$

$$s_3(x_i) = -3q \quad (5)$$

$$s_4(x_i) = 2p^2 \quad (6)$$

$$s_5(x_i) = 5pq \quad (7)$$

$$s_6(x_i) = -2p^3 + 3q^2. \quad (8)$$

Procedendo de igual forma para a equação (2), temos

$$\sigma_1(y_i) = s_1(y_i) = 0$$

$$\sigma_2(y_i) = 0$$

$$\sigma_3(y_i) = -r$$

e

$$\begin{aligned}s_1(y_i) &= 0 \\ s_2(y_i) &= 0 \\ s_3(y_i) &= -3r \\ s_4(y_i) &= 0 \\ s_5(y_i) &= 0 \\ s_6(y_i) &= 3r^2\end{aligned}$$

Por outro lado, como $y_i = x_i^2 + \alpha x_i + \beta$, vem

$$\begin{aligned}s_1(y_i) &= y_1 + y_2 + y_3 \\ &= (x_1^2 + \alpha x_1 + \beta) + (x_2^2 + \alpha x_2 + \beta) + (x_3^2 + \alpha x_3 + \beta) \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \alpha(x_1 + x_2 + x_3) + 3\beta\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}s_2(y_i) &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ &= (x_1^2 + \alpha x_1 + \beta)^2 + (x_2^2 + \alpha x_2 + \beta)^2 + (x_3^2 + \alpha x_3 + \beta)^2 \\ &= (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + 2\alpha(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (\alpha^2 + 2\beta)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &\quad + 2\alpha\beta(x_1 + x_2 + x_3) + 3\beta^2.\end{aligned}$$

Tendo então em conta que $s_1(y_i) = s_2(y_i) = 0$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} s_2(x_i) + \alpha s_1(x_i) + 3\beta = 0 \\ s_4(x_i) + 2\alpha s_3(x_i) + (\alpha^2 + 2\beta)s_2(x_i) + 2\alpha\beta s_1(x_i) + 3\beta^2 = 0 \end{cases}$$

o qual, considerando as expressões anteriormente obtidas para $s_i(x_i)$, se pode escrever na forma

$$\begin{cases} -2p + \alpha \cdot 0 + 3\beta = 0 \\ 2p^2 + 2\alpha(-3q) + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot (-2p) + 2\alpha\beta \cdot 0 + 3\beta^2 = 0 \end{cases}$$

ou, após simplificações óbvias mas morosas,

$$\begin{cases} \beta = 2p/3 \\ p\alpha^2 + 3q\alpha - p^2/3 = 0. \end{cases}$$

A última equação deste sistema é do segundo grau em α ; escolhendo uma qualquer³ das suas raízes, está concluída a determinação dos coeficientes da mudança de variável. Falta, no entanto, obter a equação transformada: não é, em princípio, tarefa fácil⁴ eliminar x no sistema

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0 \\ y - x^2 + \alpha x + \beta. \end{cases}$$

Procederemos por via indirecta: dada a equação transformada $y^3 + r = 0$, de raízes y_1 , y_2 e y_3 , tem-se imediatamente $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = -3r$. Atendendo a que $y_i = x_i^2 + \alpha x_i + \beta$, segue-se que

$$r = \frac{y_1^3 + y_2^3 + y_3^3}{-3} = \frac{\sum_{i=1}^3 (x_i^2 + \alpha x_i + \beta)^3}{-3} \quad (9)$$

³É indiferente qual delas se escolhe, como veremos.

⁴Veremos mais adiante que este problema se pode simplificar bastante recorrendo à *resultante*.

[A Transformação de Tschirnhaus]

Desenvolvendo os cálculos de forma semelhante ao feito anteriormente⁵ para $s_2(y)$, podemos determinar o valor de r . Uma vez resolvida a equação $y^3+r=0$, as suas três soluções y_1, y_2 e y_3 permitem determinar seis⁶ possíveis soluções para a equação original, já que $y_i=x_i^2+\alpha x_i+\beta$; por substituição na equação original, eliminam-se as soluções estranhas.

3. Um exemplo

Nesta secção vamos resolver a equação $x^3+3x+5/6=0$ pelo método de Tschirnhaus.

Tom-se $p=3$ e $q=5/6$. Começamos por determinar os coeficientes α e β da substituição. Obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \beta = \frac{2 \times 3}{3} \\ 3\alpha^2 + 3 \times \frac{5}{6} \alpha - \frac{3^2}{3} = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são

$$\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -3/2 \vee \alpha = 2/3. \end{cases}$$

Escolhendo, por exemplo, a solução $\alpha=-3/2$ e $\beta=2$, a substituição é $y=x^2-\frac{3}{2}x+2$. Para determinar r na equação transformada, devemos começar por obter $s_j(x_i)$ ($j=1,2,\dots,6$). Substituindo $p=3$ e $q=5/6$ nas equações (3)-(8), temos que

$$\begin{aligned} s_1(x_i) &= 0 \\ s_2(x_i) &= -6 \\ s_3(x_i) &= -5/2 \\ s_4(x_i) &= 18 \\ s_5(x_i) &= 25/2 \\ s_6(x_i) &= -623/12. \end{aligned}$$

Efectuando os cálculos na equação (9), vem

$$r = \frac{8s_6 - 36s_5 + 102s_4 - 171s_3 + 204s_2 + 192}{-3 \times 8}$$

Substituindo os valores de $s_j(x_i)$ ($j=1,2,\dots,6$) e simplificando, chega-se finalmente a

$$r = -\frac{2197}{144}$$

Temos pois de resolver a equação $y^3=2197/144$; as suas soluções são

$$\sqrt[3]{\frac{2197}{144}}, \sqrt[3]{\frac{2197}{144}} \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ e } \sqrt[3]{\frac{2197}{144}} \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right).$$

Em seguida, devem resolver-se as três equações quadráticas

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{3}{2}x + 2 - \sqrt[3]{\frac{2197}{144}} &= 0 \\ x^2 - \frac{3}{2}x + 2 - \sqrt[3]{\frac{2197}{144}} \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= 0 \\ x^2 - \frac{3}{2}x + 2 - \sqrt[3]{\frac{2197}{144}} \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= 0. \end{aligned}$$

⁵Não vamos explicitar todos os cálculos, uma vez que estes são muito morosos; veja-se o exemplo da secção seguinte e as observações sobre a resultante.

⁶Repare-se que, ao contrário das transformações vistas anteriormente, a transformação $y_i=x_i^2+\alpha x_i+\beta$ não é invertível; Tschirnhaus aparentemente não se apercebeu deste problema.

Finalmente, por substituição na equação original, eliminam-se as três soluções estranhas. Apresentamos apenas o resultado final, obtido por meio do *Derive*.

Primeira solução (real)

$$\frac{3}{4} - \sqrt[3]{\frac{6877^3\sqrt{12}}{1024} - \frac{3887^3\sqrt{18}}{384} + \frac{452929}{36864}}$$

Segunda solução

Parte real:

$$\frac{-3^{2/3} \times \sqrt{\frac{1587 \times 3^{13}}{4} + 1352 \times 2^{1/3} + 299 \times 6^{2/3}} - \frac{23 \times 3^{2/3}}{2} - 13 \times 2^{2/3}}{12} + \frac{3}{4}$$

Parte imaginária:

$$\frac{-3^{2/3} \times \sqrt{\frac{1587 \times 3^{13}}{4} + 1352 \times 2^{1/3} + 299 \times 6^{2/3}} + \frac{23 \times 3^{2/3}}{2} + 13 \times 2^{2/3}}{12}$$

Terceira solução

Trata-se, obviamente, do complexo conjugado da segunda solução.

Este exemplo mostra que o método de Tschirnhaus (como, em geral, todos os métodos não numéricos para a resolução de equações de grau superior ao segundo) tem um interesse *prático* reduzido⁷; não deixa de ser elucidativo constatar que com uma simples calculadora se obtêm as soluções da equação $x^3+3x+5/6=0$ com nove casas decimais:

$$\begin{aligned} x_1 &\sim -0,271133778 \\ x_2 &\approx 0,135566889 + 1,747894489i \\ x_3 &\approx 0,135566889 - 1,747894489i \end{aligned}$$

A conhecida fórmula de Tartaglia para a equação $x^3+px+q=0$,

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

dá também resultados muito mais satisfatórios, obtendo-se, após algumas simplificações triviais, a raiz $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

Comparando os resultados obtidos pelos métodos de Tschirnhaus e Tartaglia, obtém-se uma curiosa igualdade⁸ envolvendo números irracionais:

$$\frac{3}{4} - \sqrt[3]{\frac{6877^3\sqrt{12}}{1024} - \frac{3887^3\sqrt{18}}{384} + \frac{452929}{36864}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

Antes de abordarmos as generalizações e algumas importantes consequências teóricas do método de Tschirnhaus, veremos como se pode simplificar bastante a determinação da equação transformada recorrendo à

⁷A este respeito consulte-se também [3] ou [4].

⁸Que seria certamente muito difícil de justificar de forma directa...

[A Transformação de Tschirnhaus]

resultante de dois polinómios⁹, uma ferramenta de que Tschirnhaus não dispunha. Supondo já determinados α e β , consideremos o sistema nas incógnitas x e y

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta - y = 0. \end{cases}$$

Vamos eliminar x recorrendo à resultante. Tem-se

$$\text{Res}_x(x^3 + px + q, x^2 + \alpha x + \beta - y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 1 & \alpha & 2p/3 - y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 2p/3 - y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 2p/3 - y \end{vmatrix}$$

O valor deste determinante é

$$-y^3 + \left(\frac{p^2}{3} - \alpha^2 p - 3\alpha q\right)y + \frac{2p^3}{27} + \frac{2\alpha^2 p^2}{3} + \alpha p q + q^2 - q\alpha^3$$

Igualando a zero¹⁰ e tendo em conta que $\frac{p^2}{3} - \alpha^2 p - 3\alpha q = 0$ (é a equação que α deve verificar, como se viu anteriormente), tem-se a equação transformada

$$-y^3 + \frac{2p^3}{27} + \frac{2\alpha^2 p^2}{3} + \alpha p q + q^2 - q\alpha^3 = 0$$

que se pode escrever na forma

$$y^3 = -\frac{9q^3\alpha}{p^2} - \frac{4\alpha p q}{3} + \frac{8p^3}{27} + 2q^2 \quad (10)$$

se repararmos que de $\frac{p^2}{3} - \alpha^2 p - 3\alpha q = 0$ se deduz sucessivamente que

$$\alpha^2 = \frac{p}{3} - \frac{3\alpha q}{p}$$

e que

$$\alpha^3 = \frac{p\alpha}{3} - q \cdot \frac{9\alpha q^2}{p^2}.$$

Por substituição dos valores de α , p e q na equação (10), obtém-se novamente a equação transformada $y^3 = 2197/144$.

4. Desenvolvimentos posteriores do método

Tschirnhaus tinha um objectivo muito mais ambicioso do que apresentar apenas um novo método para resolver a equação cúbica¹¹; ele pretendia reduzir uma qualquer equação de grau n a uma equação do tipo $y^n = k$, o que resolveria definitivamente o problema da determinação exacta¹² das raízes de polinómios. Para tanto, começou por observar que o método que desenvolvera para a equação cúbica podia ser usado para eliminar os

⁹Para a definição e para as propriedades básicas da resultante, veja-se o Apêndice.

¹⁰Veja-se a Proposição 4 do Apêndice.

¹¹Ou a quártica: Tschirnhaus abordou este último problema reduzindo a equação geral do quarto grau a uma equação biquadrada por meio de uma substituição *quadrática* conveniente, apresentando assim uma alternativa ao conhecido método de Ferrari. É de referir que a equação geral do quarto grau pode ser reduzida à forma binomial $y^4 = k$ por meio de uma substituição *cúbica*; vejam-se [5] e [6].

¹²Em princípio, por meio de radicais, o tipo de resolução que os matemáticos da época procuravam.

termos de grau $n-1$ e $n-2$ numa equação de grau n , o que está correcto; em particular, a equação do quinto grau $x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0$ pode ser reduzida à chamada *forma principal* $x^5+b_3x^2+b_4x+b_5=0$. O passo seguinte seria remover o termo em x^2 , passando a uma equação do tipo $x^5+c_4x+c_5=0$, que é actualmente conhecida por *forma de Bring-Jerrard*; aparentemente por analogia com as equações do terceiro grau, pensou que isso seria possível por meio de uma substituição cúbica, $z=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Infelizmente, a tentativa falhou, pois a determinação dos coeficientes α , β e γ conduz a uma equação do sexto grau (veja-se [7]). Em 1796, o matemático sueco Erland Samuel Bring (1736-1798) foi bem sucedido onde Tschirnhaus falhara, conseguindo passar da equação geral do quinto grau para a forma que tem o seu nome, recorrendo a uma substituição *quártica*, $z=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, e a uma série de artifícios sumamente engenhosos. Este notável trabalho passou, no entanto, despercebido. Os resultados de Bring foram recuperados e generalizados de forma independente em 1835 pelo matemático inglês George Birch Jerrard (1804-1863). Concretamente, Jerrard conseguiu por meio de uma substituição conveniente remover os termos de grau $n-1$, $n-2$ e $n-3$ na equação geral de grau n . Infelizmente, as suas esperanças de resolver equações de grau arbitrário foram desfeitas pelo famoso matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), que, no seu relatório sobre os trabalhos de Jerrard, apontou uma série de limitações que inviabilizavam essa ideia¹³. Jerrard não ficou convencido com os argumentos de Hamilton e gerou-se uma longa e acerba polémica que acabou por dar razão a este último e que teve como principal aspecto positivo contribuir para desenvolver e tornar mais conhecidos os trabalhos de Abel e Galois sobre resolubilidade de equações algébricas¹⁴.

Voltando à equação quártica, os resultados referidos anteriormente mostram que se fosse possível resolver por meio de radicais as quárticas na forma de Bring-Jerrard, seria possível resolver por meio de radicais qualquer quártica, o que, como se sabe, é impossível¹⁵. É, no entanto, fácil de ver que qualquer quártica na forma de Bring-Jerrard pode ser escrita na forma $y^5+y-c=0$, um tipo de equação cujas raízes são conhecidas como *ultrarradicais* ou *radicais de Bring*. Assim, podemos resumir os resultados anteriores dizendo que qualquer quártica pode ser resolvida por meio de radicais e de ultrarradicais. As transformações anteriores foram também essenciais em estudos posteriores da equação do quinto grau, como a sua resolução por Charles Hermite (1822-1901) em termos de funções modulares elípticas ou a famosa resolução de Felix Klein (1849-1925) por meio de funções hipergeométricas; refira-se que Hermite tinha grande admiração pelos resultados de Jerrard, que considerava serem os maiores avanços no estudo da equação do quinto grau desde os trabalhos de Abel. 

Referências bibliográficas

- [1] Toth, G. (2002) - *Glimpses of Algebra and Geometry* (2nd edition), Springer-Verlag, New York.
- [2] Santos, J. C. (2005) - *Transformadas de Möbius e Equações do Terceiro Grau*, Boletim da SPM n.º 52, págs. 53-58.
- [3] Kurosh, A. (1973) - *Cours d'Algebre Supérieure*, Éditions Mir, Moscou.
- [4] Oliveira, J. S. (1978) - *As Equações Algébricas dos 3.º, 4.º e 5.º Graus*, Boletim da SPM n.º 1, págs. 20-31.
- [5] Boyer, C. B. e Merzbach, U. C. (1989) - *A History of Mathematics* (2nd edition), John Wiley & Sons, New York.

¹³Mais precisamente, Hamilton mostrou que se o grau da equação a transformar estiver abaixo de um certo valor, a transformação proposta conduz a um múltiplo da equação e é portanto inútil – é o que acontece no caso de uma equação quártica, quando tentamos reduzi-la a uma equação binomial eliminando os termos de grau 4, 3, 2 e 1 (veja-se [8]).

¹⁴Alem de alguns erros nos trabalhos de Jerrard, boa parte da polémica foi devida ao facto de a noção de resolubilidade por meio de radicais não estar ainda definida de forma muito clara; a questão foi agravada por uma má compreensão de certas partes do relatório, como a impossibilidade da resolução da equação do quarto grau pelos métodos de Jerrard.

¹⁵Um exemplo de equação não resolúvel por meio de radicais sobre \mathbb{Q} é $x^5-6x+3=0$; veja-se [9].

[A Transformação de Tschirnhaus]

[6] Estrada, M. E, Sá, C. C., Queiró, J. F., Silva, M. C. e Costa, M. C. (2000) - *História da Matemática, Universidade Aberta, Lisboa.*

[7] Adamchick, V. S. e Jeffrey, D. J. (2003) - *Polynomial Transformations of Tschirnhaus, Bring e Jerrard*, ACM SIGSAM Bulletin, Vol. 37, No. 3, September (disponível em <http://www.apmaths.uwo.ca/~djeffrey/Offprints/Adamchick.pdf>).

[8] Hamilton, W. R. (1836) - *Inquiry into the validity of a method recently proposed by George B. Jerrard, Esq., for transforming and resolving equations of elevated degrees*, British Association Report (págs. 295-348), Bristol (editado em 2000 por David R. Wilkins e disponível em <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Jerrard/>).

[9] Monteiro, A. J. e Matos, I. (1995) - *Álgebra Um Primeiro Curso*, Escolar Editora, Lisboa.

[10] Costa, A. A. (1968) - *Cours d'Algèbre Générale (Vol. II)*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

Bibliografia

Garcia, A. e Lequain, Y. (1988) - *Álgebra: um curso de introdução*, Projecto Euclides, Rio de Janeiro.

Gonçalves, A. (1979) - *Introdução à Álgebra*, Projecto Euclides, Rio de Janeiro.

Hollingdale, S. (1991) - *Makers of Mathematics*, Penguin Books, London.

MacLane, S. e Birkhoff, G. (1979) - *Algebra (Second Edition)*, MacMillan Publishing Company, Inc., New York.

Struik, D. J. (1992) - *História Concisa das Matemáticas (2.ª edição)*, Gradiva, Lisboa.

Consultámos ainda o site www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians (School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland), no qual se podem obter indicações biográficas detalhadas acerca dos diversos matemáticos referidos.

$Res(p, q) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} := -a(b^2 - 4ac)$. Atendendo a que $a \neq 0$ e a que uma raiz α de um polinómio p do segundo grau é dupla quando $p'(\alpha) = 0$, obtemos por aplicação da Proposição 1 a conhecida regra para a existência de uma raiz dupla na equação $ax^2 + bx + c = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

O nosso interesse na resultante está relacionado com a sua aplicação à resolução de sistemas de duas equações polinomiais com duas incógnitas, tendo em vista a sua utilização na determinação da equação transformada no método de Tschirnhaus.

Sejam então p e q polinómios em duas indeterminadas x e y , que vamos escrever ordenados segundo as potências decrescentes de x :

$$p(x, y) = a_0(y)x^k + a_1(y)x^{k-1} + \dots + a_{k-1}(y)x + a_k(y)$$

e

$$q(x, y) = b_0(y)x^l + b_1(y)x^{l-1} + \dots + b_{l-1}(y)x + b_l(y).$$

Estamos interessados na resolução do sistema

$$\begin{cases} a_0(y)x^k + a_1(y)x^{k-1} + \dots + a_{k-1}(y)x + a_k(y) = 0 \\ b_0(y)x^l + b_1(y)x^{l-1} + \dots + b_{l-1}(y)x + b_l(y) = 0 \end{cases}$$

Vamos representar por $Res_x(p, q)$ a resultante dos polinómios p e q , considerados como polinómios na indeterminada x . Tem-se o seguinte resultado correspondente à Proposição 1:

Proposição 4 *Se $x = \alpha$, $y = \beta$ é uma solução do sistema anterior, então β é um zero de $Res_x(p, q)$, reciprocamente, se β é um zero de $Res_x(p, q)$ ou os polinómios $p(x, \beta)$ e $q(x, \beta)$ têm um zero comum ou os coeficientes dos seus termos de maior grau são nulos: $a_0(\beta) = b_0(\beta) = 0$.*

Este resultado reduz a pesquisa das soluções do sistema anterior à resolução de uma equação com uma só incógnita; diz-se que a incógnita x foi *eliminada* do sistema. Uma das suas aplicações é precisamente justificar a utilização da resultante no método de Tschirnhaus.

A Matemática na Ibéria



Foto: Jacques Descloitres, MODIS Rapid Response Team, NASA/GSFC

Viajar deixou de ser, no final do século XX, um privilégio de classes endinheiradas ou uma aventura apenas ao alcance de homens destemidos. Progressivamente, multiplicaram-se as formas de chegar de uma cidade a outra cidade, de um país a outro país ou de um continente a outro continente. Longe vão os tempos, dos antigos navios, em que cruzar o Atlântico levava meses. Hoje, bastam algumas horas para voar da América até à Europa e motivos não faltam para que, todos os anos (sobretudo no Verão), milhares de pessoas queiram abandonar temporariamente a sua pátria, com o intuito de descansar noutras paragens ou conhecer culturas menos familiares. A *Mathematical Association of America*, por exemplo, inventa cada ano um novo motivo para atrair os seus associados para uma viagem. Na sua oitava edição, em 2010, a *Annual Mathematical Study Tour* propõe trazer os interessados a Portugal e a Espanha e dar-lhes a conhecer, durante quase 15 dias, as riquezas da Península Ibérica. Acompanhados de um historiador da matemática e de um guia, os participantes irão de Lisboa a Sevilha, passando pelas Universidades de Coimbra e de Salamanca, por Madrid, Córdoba e Granada. 

Matemática e o Resto

Matemática &
ciclo de conferências

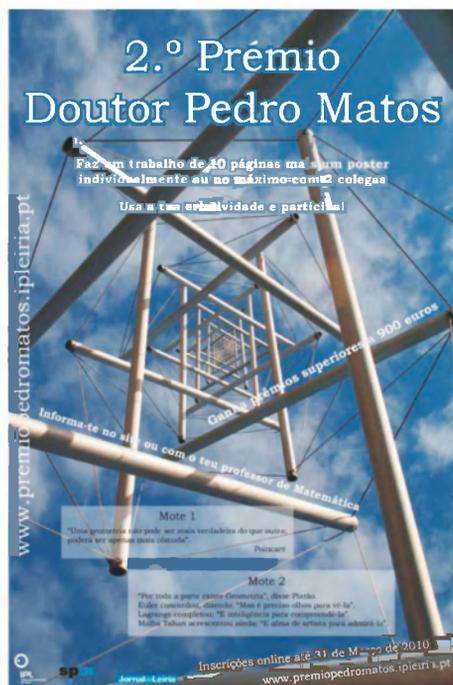
O Auditório da Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova vai acolher, durante os próximos meses, um ciclo de conferências em que a matemática se irá cruzar com outras actividades: política, música, literatura, arte, geografia e indústria. Até ao fim de Maio, a organização promete uma conferência todos os meses, sempre pelas 15h00 e com entrada gratuita. 

O Sucessor de Hawking



O físico britânico Michael Green é o novo titular da cátedra *Lucasiana* de Matemática na Universidade de Cambridge, substituindo Stephen Hawking. Green ocupará, durante os próximos anos, uma das mais prestigiantes posições do meio académico, um lugar que já foi de Isaac Newton e Paul Dirac, entre outros. 

Leiria dá Prémios



O “Prémio Doutor Pedro Matos”, atribuído pela Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria e destinado a alunos do Ensino Secundário, terá, em 2010, a sua segunda edição. Podem candidatar-se ao Prémio estudantes do ensino secundário, individualmente ou em grupo (com o máximo de três estudantes). Do grupo pode ainda fazer parte um professor do ensino secundário, a quem caberá o papel de orientador. As inscrições devem ser realizadas online até dia 31 de Março de 2010, através do endereço: <http://www.premioedromatos.ipleiria.pt> (sítio onde pode também ser consultado o regulamento completo e os vencedores da edição anterior). O “Prémio Doutor Pedro Matos” tem como

objectivo fomentar a criatividade e o interesse pela matemática e suas aplicações, e incentivar o aparecimento de novos talentos. A entrega dos prémios da segunda edição será realizada a 16 de Julho de 2010, durante o MatOeste.

Matemática entre as Mulheres

2010 será o ano em que a Índia irá receber o Congresso Internacional de Matemáticos. A sessão de abertura está marcada para dia 19 de Agosto mas, dois dias antes desse início, irá decorrer uma mini-conferência (a ICWM), especialmente dedicada às mulheres investigadoras em matemática. Este evento é dirigido sobretudo a participantes no ICM, mas está também aberto a outras pessoas (inclusivamente a homens), e a organização espera, sobretudo, contar com uma elevada participação de jovens asiáticos. As inscrições abrem dia 1 de Janeiro e podem ser efectuadas por e-mail: Shobha Madan (madan@iitk.ac.in).

Mais informações em: <http://www.icm2010.org.in/icwm2010.php>.

Medir os Céus

Foi inaugurada, no passado dia 22 de Outubro, a exposição “Medir os Céus para Dominar a Terra”, no Museu de Ciência da Universidade de Lisboa (MCUL), integrada na programação do Ano Internacional da Astronomia 2009. Esta exposição estará patente até dia 30 de Abril de 2010. A iniciativa é resultado de uma cooperação entre o MCUL e a Sociedade Portuguesa de Matemática, e tem o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian, da Ciência Viva e do Ano Internacional da Astronomia 2009. Paralelamente, decorreu um ciclo de conferências subordinado ao tema “A Astronomia na Escola Politécnica de Lisboa (1837 – 1911)”.



O Legado de Darwin



O Centro Internacional de Matemática e a Sociedade Europeia para a Matemática e Biologia Teórica juntaram-se para organizar, em Lisboa, uma conferência dedicada aos modelos matemáticos da Teoria da Evolução, numa altura em que se comemoram os 150 anos da publicação do livro *A Origem das Espécies* de Charles Darwin. Foram muitos os tópicos em análise durante a conferência "The Mathematics of Darwin's Legacy". Da Teoria de Jogos até aos modelos probabilísticos, os oradores convidados procuraram fazer uma abordagem geral à matemática mais importante para entender os principais aspectos da Teoria de Darwin e os seus posteriores refinamentos. W. Ewens, Peter

Schuster, Peter Taylor e Benoit Pertham foram alguns dos cientistas que estiveram presentes no Complexo Interdisciplinar da Universidade de Lisboa, nos dias 23 e 24 de Novembro.

Estados Unidos na Frente

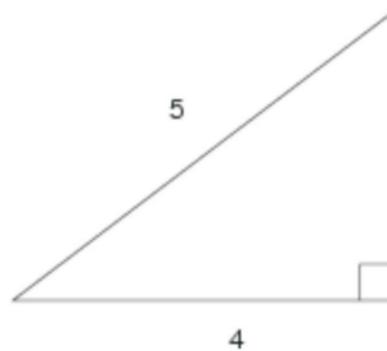


A *International Mathematical Union* divulgou, em Setembro, a lista dos oradores convidados para as conferências plenárias do IMC 2010. Dessa lista constam 20 nomes de matemáticos de grande reputação, 12 deles americanos, o que mostra que os Estados Unidos continuam a liderar a investigação matemática do planeta, gerando ou atraindo os mais talentosos.

As Melhores Traduções

Paulo Ventura Araújo, professor do departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e colaborador da *Gazeta de Matemática*, foi distinguido com uma menção honrosa pela tradução científica e técnica para Língua Portuguesa do livro *Como Resolver Problemas de Matemática*, de Terence Tao, matemático vencedor da medalha Fields e o mais jovem medalhado de sempre nas Olimpíadas Internacionais de Matemática. O livro faz parte da colecção *Olimpíadas de Matemática*, publicada pela Sociedade Portuguesa de Matemática em parceria com a Texto Editores.

Números Congruentes



Recentemente, uma equipa internacional de matemáticos conseguiu obter um número elevadíssimo de *números congruentes*. O problema é antigo (foi proposto pelo matemático persa al-Karaji) e consiste em tentar saber que números inteiros podem corresponder à área de um triângulo rectângulo cujos lados são também números inteiros ou fracções. A área desses triângulos é designada por *número congruente*. Por exemplo, 6 é um número congruente pois corresponde à área do triângulo de lados 3-4-5. A equipa envolvida nesse projecto foi formada por Robert Bradshaw, William B. Hart, David Harvey, Gonzalo Tornaria e Mark Watkins, e contou com a ajuda de vários computadores com discos rígidos de grande capacidade.

A Biografia de Martin Gardner



Martin Gardner, o famoso autor da coluna de jogos matemáticos da revista *Scientific American* e de mais de 70 livros de divulgação, completou 95 anos no passado dia 21 de Outubro. Gardner, que se licenciou em Filosofia e nunca foi um matemático profissional, revelou ao *The New York Times* que o grande sucesso da sua coluna se deveu ao facto de ele não saber muito de matemática e que isso o obrigou a esforçar-se bastante para perceber bem os assuntos, antes de conseguir escrever de forma clara sobre eles. Martin Gardner está neste momento a redigir uma autobiografia que será lançada em breve. [M](#)

Promoção de Natal na loja SPM

Agora, e até ao dia 31 de Dezembro, por cada 20 euros em compras na loja SPM oferecemos-lhe um DVD *Memória da Matemática – Melhores Momentos*. Este volume reúne o melhor das quatro entrevistas que compõem a primeira fase deste projecto. Através de uma narrativa em forma de reportagem, pretende dar a conhecer alguns dos momentos mais marcantes da história da matemática portuguesa. [M](#)

SPM e SPE iniciaram o trabalho de avaliação de manuais escolares de Matemática

A Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) e a Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE) já começaram a trabalhar na avaliação de manuais escolares. A primeira reunião teve lugar no dia 7 de Novembro e teve como principal objectivo a apresentação de todos os avaliadores. As comissões de peritos propostas pela SPM com apoio da SPE foram aprovadas, pelo Ministério da Educação, para avaliar e certificar os manuais escolares de todas as disciplinas de Matemática do Ensino Básico e Secundário e em todos os ciclos de escolaridade. Outras entidades foram igualmente aprovadas, mas apenas para algumas disciplinas e ciclos. [M](#)



Encontros 2010

Os associados da SPM têm bons motivos para estarem atentos à agenda de actividades do próximo ano. Do Encontro Nacional da SPM ao III Encontro Ibérico de Matemática, passando pelas habituais Tardes de Matemática, são vários os eventos a não perder.

O ano de 2010 será marcado por diversas actividades interessantes para a comunidade matemática portuguesa. Aos projectos promovidos habitualmente pela SPM, tais como as Tardes de Matemática e as Jornadas de Matemática SPM/CIM, junta-se em 2010 a celebração do Encontro Nacional da SPM e do III Encontro Ibérico de Matemática.

O Encontro Nacional terá lugar nos dias 8, 9 e 10 de Julho de 2010, na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria e está estruturado em torno de três eixos distintos: a investigação, o ensino e a divulgação da matemática. Por essa razão, para além dos eventos ligados à investigação, o encontro contará também com sessões vocacionadas para professores de todos os níveis de ensino, estudantes e curiosos da matemática em geral. Como tal, pensamos que se trata de um encontro de grande interesse para todos os associados da SPM.

Este encontro comemora os 70 anos da criação da SPM e conta com a colaboração especial da APDIO e da SPE, que aceitaram amavelmente o convite para celebrar o evento connosco e para organizar sessões temáticas em Investigação Operacional e em Probabilidades e Estatística. É uma colaboração que muito nos orgulha e que esperamos que seja um incentivo a laços mais estreitos entre as nossas sociedades.

As sessões temáticas dinamizadas pela APDIO e pela SPE constituem duas das nove sessões paralelas do encontro, sendo as outras: Álgebra e Combinatória, Análise e EDPs, Geometria e Topologia, Sistemas Dinâmicos, Ensino da Matemática, História da Matemática e Matemática nas Ciências e Tecnologia. A estrutura geral do encontro será a usual: para além das nove sessões paralelas, haverá conferências plenárias proferidas

por matemáticos de renome e mesas redondas para discussão da situação da matemática em Portugal. Salienta-se que, como é tradição, o Encontro Nacional será precedido de cursos orientados para professores do Ensino Básico e Secundário. No decorrer do evento terá lugar a Assembleia Geral que elegerá a nova direcção.

Os Encontros Ibéricos são organizados conjuntamente pela SPM e pela RSME (Real Sociedad Matemática Española) desde 2007, e recuperam a tradição interrompida em 1990 das Jornadas Hispano-Lusas de Matemática. A consolidação destes encontros é essencial para ambas as sociedades, pois representa uma oportunidade excelente para aumentar a cooperação científica entre os dois países.

Cada Encontro Ibérico centra-se em três áreas científicas que, na edição de 2010, serão: Lógica e Computação, Análise Numérica e Optimização, Teoria das Cordas e Física Matemática. Além das conferências plenárias, terão lugar sessões específicas para cada área de concentração, favorecendo assim a partilha de conhecimentos e ideias entre matemáticos espanhóis e portugueses. Após a celebração do I Encontro Ibérico em Fevereiro de 2007, na Fundação Gulbenkian, e do segundo em Outubro de 2008, na Universidade da Extremadura, o III Encontro Ibérico terá lugar nos dias 1, 2 e 3 de Outubro de 2010 na Universidade do Minho. A SPM e a RSME esperam que a calendarização do encontro para o primeiro fim-de-semana de Outubro dos anos pares se mantenha no futuro e que esta se torne uma data de referência no calendário científico hispano-luso.

A Direcção encoraja todos os associados a divulgar, colaborar e participar nos eventos do próximo ano. Precisamos da colaboração de todos. 