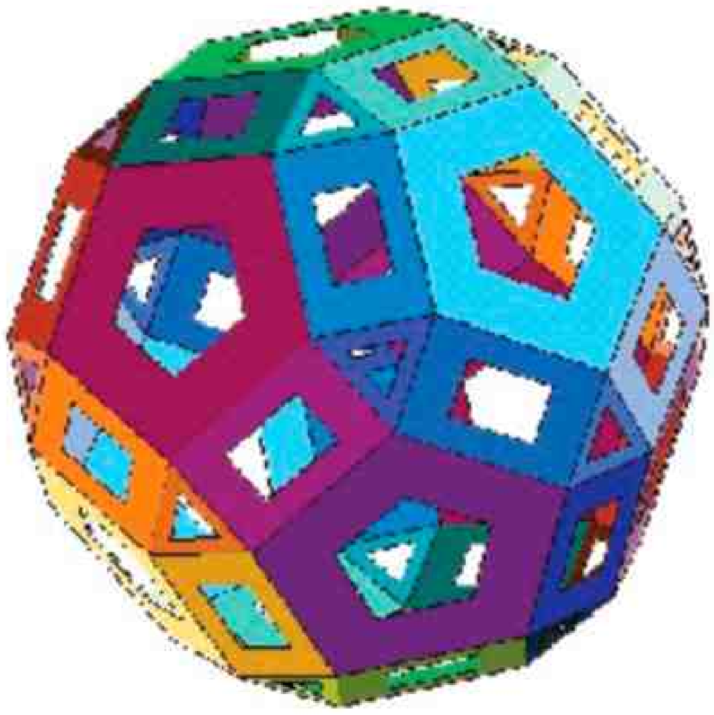
Gazeta de Matemática

Nº 0155

Publicação quadrimestral
da Sociedade Portuguesa de Matemática
Ano LXIX | Julho 2008
4,20€

*web*Mathematica no Atractor



Editorial

por **Jorge Buescu**
[Universidade de Lisboa]

"...queremos levar ao conhecimento do público interessado tudo o que de melhor se vai fazendo na divulgação da Matemática em Portugal..."

No último número afirmámos que as alterações que gostaríamos de trazer à *Gazeta de Matemática* se podiam traduzir em duas palavras: mais Matemática. O *feedback* que obtivemos quanto às alterações introduzidas foi, em média, muito positivo. Queremos levar ao conhecimento do público interessado tudo o que de melhor se vai fazendo na divulgação da Matemática em Portugal. Daí o início da colaboração regular do projecto Atractor (http://www.atractor.pt/) uma das *singularidades* do espectro da divulgação da Matemática em Portugal, com a *Gazeta*, bem como a coluna *Na Linha de Frente*, da responsabilidade de Fabio Chalub, com notícias quentinhas da linha da frente na investigação em Matemática.

Em termos de conteúdos, no entanto, nem todas as alterações (talvez felizmente!) se conseguiram realizar na primeira edição. Temos assim o maior prazer em anunciar o início de mais duas secções a partir deste número.

O *Canto Délfico* surge na sequência de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Projecto Delfos. Como afirmámos, a *Gazeta* pretende divulgar aquilo que de melhor se faz em Portugal no ensino da Matemática. E como quem já passou pela experiência de fazer Matemática de algum tipo, ela aprende-se fazendo. O Projecto Delfos, da Universidade de Coimbra (http://www.mat.uc.pt/~delfos/) tem qualidades extraordinárias de mobilização e motivação de jovens estudantes para, por meio da resolução de problemas, aprenderem Matemática. É com o maior prazer que a Gazeta de Matemática acolhe uma colaboração do Projecto Delfos que, nas suas palavras, "será regular e duradoura se a vida for como as intenções".

A secção *O que é...* é um novo desafio. Especialistas explicam, em duas páginas, conceitos matemáticos mais ou menos sofisticados. *O que é...* terá em cada número o complemento directo e o autor em aberto. Neste número de abertura Gustavo Granja, do Instituto Superior Técnico, explica o que é o grupo fundamental. De novo, a *Gazeta* orgulha-se de contar com esta colaboração, esperando apenas que futuros autores não se sintam intimidados pela elevadíssima qualidade do texto de Gustavo Granja.

Neste número, por razões editoriais, a publicação do artigo convidado teve que ser adiada; aquilo que podemos assegurar aos leitores é que vai valer a pena esperar. E queremos deixar uma palavra final de reconhecido agradecimento para o nosso colaborador Paulo Ventura Araújo, que depois de muitos anos de um trabalho árduo e meticuloso decidiu colocar um ponto final na secção *Livros Contados*.

Boa leitura. Boa Matemática.

No âmbito de uma colaboração acordada entre a Gazeta e o Atractor, este e um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site (www.atractor.pt). Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para atractor@atractor.pt.

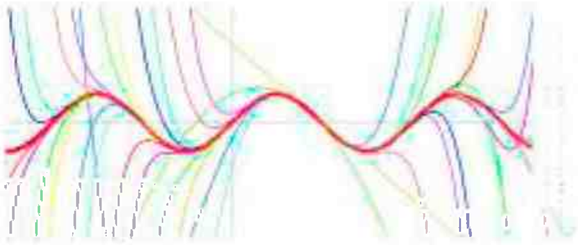
webMathematica no Atractor

"Embora valorizemos o método de exposição baseado em teorema-demonstração e não nos afastemos da opinião consagrada de que um resultado só pode tornar-se parte do conhecimento matemático se apoiado por uma demonstração lógica, consideramos anómalo que uma componente importante do processo de criação matemática seja escondida da discussão pública."

David Epstein, Silvio Levy e Rafael de la Llave, em *Experimental Mathematics*

O Atractor tem instalado no seu *site*, desde Julho de 2007, o *webMathematica*, que permite disponibilizar um conjunto de conteúdos interactivos poderosos e diversificados, com grande potencial de uso didáctico. Isto é conseguido porque as páginas do *site* podem comunicar com o *Mathematica*, instalado no servidor do Atractor, tendo assim acesso ao poder de cálculo simbólico e numérico desse *software*.

Por exemplo, o utilizador pode, sem precisar de instalar no seu computador qualquer programa específico, obter os gráficos dos polinómios de Taylor de uma função à escolha, num ponto qualquer do



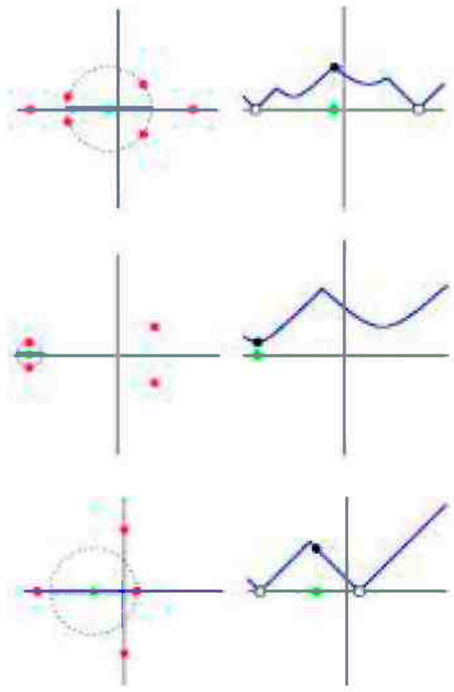
Gráficos de polinómios de Taylor da função seno.

domínio [1]. Ou pode produzir um *applet* [2], em vez de ter um gráfico fixo, e guardar esse *applet* para depois o utilizar, sem necessidade de ligação à *Internet*. Ao arrastar o ponto, observar-se-á em tempo real como variam os gráficos dos polinómios de Taylor no ponto. Outro exemplo: pode criar numerosos *applets* [3] - obtidos truncando poliedros platónicos, ou encolhendo, estrelando, reentrando, esburacando as suas faces, ou compondo estas

Pares estereoscópicos.

diversas operações - e utilizar depois esses *applets*, criando uma página no seu *site*. Esses *applets* podem representar pares estereoscópicos.

Vejamos com algum detalhe um exemplo que foca um aspecto porventura menos divulgado: o do raio de convergência da série de Taylor de uma função f real de variável real, definida pelo quociente de dois polinómios P e Q (que podemos supor sem zeros comuns), sendo Q não constante. Neste caso, o domínio de f só não contém os eventuais zeros reais de Q e é sabido que: i) para cada ponto a do domínio de f, o conjunto de todos os pontos onde a chamada *série de Taylor de f em a* é convergente é um intervalo limitado I_a centrado em a (intervalo aberto, fechado ou semi-aberto); e ii) nesse intervalo, a soma da série coincide com f. Uma pergunta natural é: como depende de a a

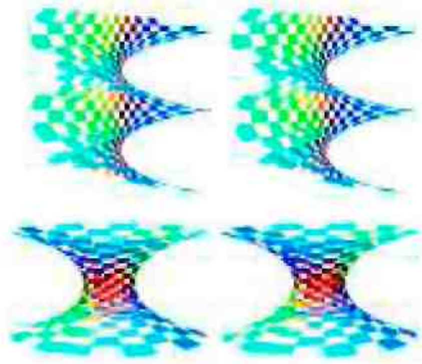


Raio de convergência: gráfico de F.

semi-amplitude desse intervalo? A resposta é simples de deduzir se forem conhecidos os resultados elementares sobre as séries de Taylor no plano complexo. E essa resposta simples é a seguinte: i) a semi-amplitude de I_a é uma função contínua de a e o gráfico dessa função F é uma reunião finita de arcos de hipérbole, segmentos de recta e semi-rectas (podendo estar representadas só uma ou duas destas três categorias); ii) os (eventuais) «bocados» rectilíneos fazem um ângulo de 45º com o eixo dos *xx* e estão agrupados dois a dois, da forma que as figuras ilustram (as hipérboles têm também assimptotas com igual inclinação). As figuras ao lado foram obtidas em [4], que é uma espécie de *laboratório experimental*, no qual poderá testar este comportamento com uma função f à escolha e descobrir o aspecto do gráfico da função F correspondente (ou, melhor ainda, começar por conjecturar esse aspecto e verificar *experimentalmente* a correcção da conjectura). O gráfico é, na verdade, um *applet* animado, que se pode parar com duplo clique, arrastando depois lentamente o ponto para uma melhor compreensão do que se passa: o valor de F em a é o raio do maior círculo centrado em a que não contém no seu interior nenhum zero de Q. Conforme os zeros que estão no bordo são reais ou complexos, assim temos no gráfico partes rectilíneas ou arcos de hipérbole.

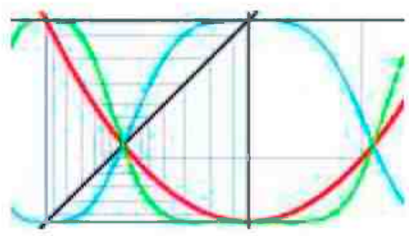
Seguem-se breves referências a mais alguns exemplos:

• em [5] pode-se observar deformações de famílias de superfícies (à escolha), um dos exemplos pré-definidos sendo uma deformação entre a helicóide e a catenóide;



Deformações de famílias de superfícies.

• em [6] vê-se o comportamento dinâmico dos iterados de um ponto variável por uma função à escolha, mostrando simultaneamente os gráficos de algumas iteradas dessa função;



Comportamento dinâmico.

• em [7] pode-se fazer *zooms* do gráfico de funções à escolha, permitindo comparar a derivabilidade num ponto com o carácter aproximadamente rectilíneo do gráfico de um *zoom* suficientemente forte no ponto correspondente do gráfico.

• em [8] há possibilidade de comparar gráficos de até seis funções, $F_1, \ldots, F_6$, com grande versatilidade na escolha dessas funções. Com escolhas adequadas de F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, pode-se comparar o gráfico de qualquer F_1 com os dos seus primeiros restos ou polinómios de Taylor num ponto variável, etc.

O endereço geral do webMathematica é http://www.atractor.pt/webM/wm/
Os endereços referenciados no texto obtêm-se acrescentando a este endereço geral os seguintes complementos:
[1] taylor/poltaylor.jsp [3] poliedros/poliedros.jsp [5] superficie/familiaSup1.jsp [7] funcoes/zoom.jsp
[2] taylor/poltaylor2.jsp [4] taylor/intconv.jsp [6] funcoes/iterarApplet jsp [8] funcoes/funcoes2.jsp

por Jorge Nuno Silva
[Universidade de Lisboa]

A Visita da Velha Senhora

Os problemas são as pérolas da matemática. É natural que os amantes da matemática, profissionais e não só, apreciem um bom problema. As publicações especialmente dedicadas a esta área têm tradições e sempre tiveram os seus públicos fiéis. Hoje damos conta de uma delas, *The Matematical Visitor*, cujos assinantes recebiam assim a visita regular de uma velha senhora: a matemática…

Para estimular a aprendizagem matemática, Artmas Martin fundou em 1877, nos Estados Unidos da América, uma publicação periódica dedicada exclusivamente a problemas, *The Matematical Visitor*. Neste jornal, que se publicou até 1896, colaboraram, para além de muitos amadores, matemáticos de renome como B. Pierce e J. J. Sylvester.

Esta tradição que os americanos assim importaram da Europa revelou-se um óptimo veículo para partilha de ideias, se bem que também tenham sido publicados muitos problemas rotineiros, cujas soluções eram solicitadas por pessoas que, muitas vezes, delas de facto necessitavam.

Apesar de não existirem então calculadoras nem computadores, foram propostos e resolvidos nas páginas desta revista problemas como o de determinar uma aproximação de $\sqrt{2}$ com 100 casas decimais, ou determinar uma solução, em inteiros, de x^2-$9781y^2$=1 (o menor valor positivo de x tem 156 dígitos)!

A editora Mathpro Press publicou em boa hora todos os problemas e todas as soluções, com as ilustrações originais (*Problems and Solutions from The Mathematical Visitor*, MathPro Press 1996). É deste belo livro que retiramos os exemplos que se seguem.

O primeiro problema do primeiro número do *Visitor* é aqui proposto aos leitores:

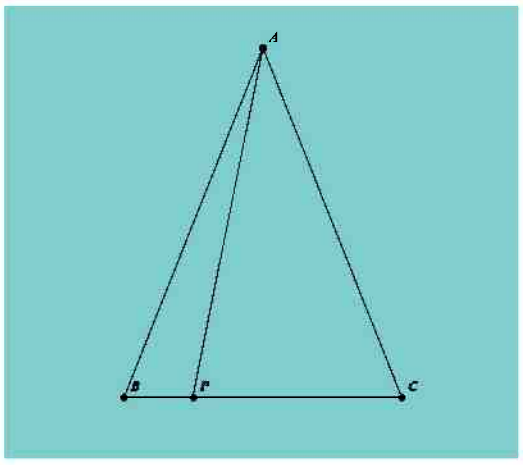
Dois comboios, um que mede a metros e o outro que mede b metros circulam em linhas paralelas. Quando viajam em sentidos contrários demoram m segundos a cruzar-se, mas quando o mais rápido ultrapassa o mais lento fá-lo em n segundos. Quais são as velocidades dos comboios?

Outro, mais arrebicado, é o problema 230, que pede as primeiras 100 casas decimais de $\sqrt[3]{2}$. O solucionista diz que usou uma regra conhecida para gerar uma aproximação iterativa. A partir de uma fracção próxima do valor procurado, *a*/*b*, obtém uma aproximação melhor dada por

$$\frac{a(a^3+4b^3)}{2b(a^3+b^3)}.$$

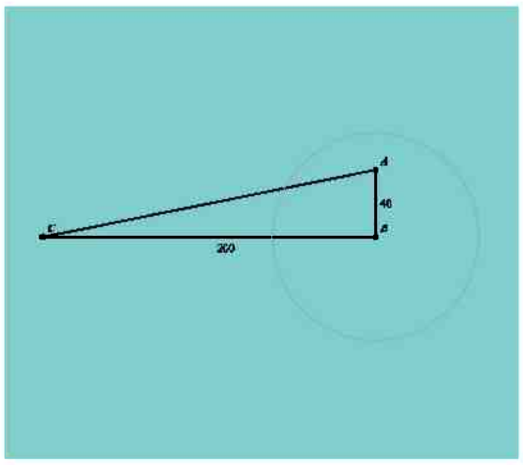
Partindo do valor inicial 5/4 a primeira iteração já dá 5 casas decimais correctas, a segunda mais de 50, à terceira tem o problema resolvido (à mão!).

Terminamos com dois problemas de geometria. O 91, que pede para mostrar que, na notação da figura, se P é um ponto qualquer na base de um triângulo isósceles, então $AP^2+BP\times PC$ é constante.

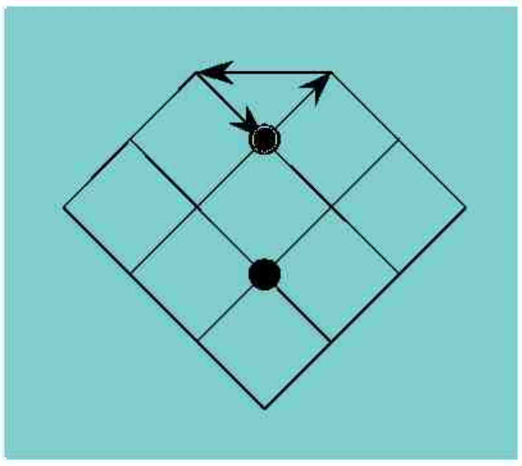


Finalmente, o problema 109:

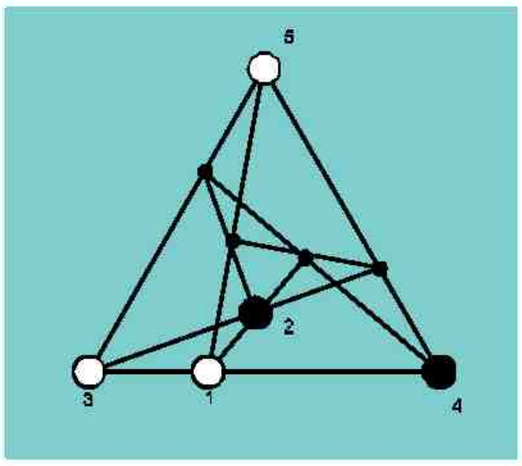
Temos um campo com a forma de um triângulo rectângulo cujos catetos medem 200 e 40 metros. Um cavalo está preso por uma corda ao vértice B. Qual o comprimento desta corda para que o cavalo possa pastar em metade do campo?



Sobre as questões do número anterior: na perseguição, se o polícia se aproximar ingenuamente do ladrão este poderá fugir repetidamente. Contudo, se o polícia fizer a triangulação indicada, e só depois se lançar atrás do ladrão, vai apanhá-lo pela certa!



Jogando primeiro a equipa pode ganhar como ilustrado na figura (lances ímpares). Os pontos negros não podem evitar três em linha brancos no próximo movimento.



por Fernanda A. Ferreira e Flávio Ferreira
[Escola Superior de Estudos Industriais e de Gestão, Instituto Politécnico do Porto]

Equilíbrio de Nash Versus Óptimo de Pareto
(Racionalidade Individualista Versus Racionalidade Altruísta)

O equilíbrio de Nash, utilizado muitas vezes para solução de um jogo, não é necessariamente a "melhor solução" ou a que fornece o "melhor resultado". Em muitas situações, todos os jogadores melhorariam os seus resultados caso pudessem, de alguma forma, acordar estratégias diferentes das do equilíbrio de Nash.

1. Introdução

Podemos definir a *Teoria dos Jogos* como a análise matemática formal de situações (*jogos*) que envolvem conflitos de interesses. Para o estudo desses jogos, recorre-se a modelos matemáticos que descrevem interacções competitivas sujeitas a um conjunto de regras, onde o objectivo principal é encontrar as *estratégias*[1] racionais óptimas em situações onde os resultados dependem também das estratégias escolhidas pelos outros jogadores.

Nos últimos vinte anos assistimos a um desenvolvimento significativo da Teoria dos Jogos em três importantes aspectos: (*i*) a investigação científica tem levado a um grande aumento de aplicações em imensas áreas do saber, com os resultados publicados tanto em revistas especializadas como em livros; (*ii*) o ensino da Teoria dos Jogos passou a integrar-se nos *curricula* de vários cursos de Licenciatura, de Mestrado e de Doutoramento; (*iii*) junto da opinião pública, a divulgação da Teoria dos Jogos surgiu com a atribuição do Prémio Nobel da Economia, em 1994, a três dos seus principais criadores (John Nash, Reinhard Selten e John Harsanyi) e, especialmente, através da publicação em filme, em 2001, da biografia de Nash, *Uma Mente Brilhante*.

Neste trabalho, pretendemos fazer uma reflexão sobre a diferença entre dois instrumentos de análise muito utilizados em Teoria dos Jogos: *Equilíbrio de Nash* e *Óptimo de Pareto*. São instrumentos que se têm revelado muito úteis na análise de comportamentos e resultados a esperar em situações de interacção entre dois ou mais agentes, situações particularmente muito frequentes em Economia e nas Ciências Sociais em geral. O entendimento destes conceitos leva-nos à compreensão das diferenças entre resultados obtidos quando impera o individualismo e os resultados obtidos quando impera o colectivismo. O jogo do Dilema do Prisioneiro será utilizado para melhor compreensão dos conceitos supra referidos.

2. Comentário histórico sobre Teoria dos Jogos

Podemos dizer que a Teoria dos Jogos enquanto ciência nasceu em 1944, com o livro *Game Theory and Economic Behaviour* de John Von Neumann (matemático) e Oskar Morgenstern (economista) [1]. Aí estabeleceram as bases do que hoje se designa por *Teoria dos Jogos Clássica*. Há, no entanto, alguns antecessores que nos finais do séc. XIX e princípios do séc. XX tinham já produzido algumas ideias chave na Teoria dos Jogos; por exemplo, os matemáticos Borel e Zermelo e os economistas Cournot e Edgeworth. Na criação da Teoria dos Jogos moderna, nos anos 50 e 60, destacam-se três nomes: John Nash, que introduziu os conceitos de equilíbrio (de Nash) para jogos não-cooperativos e solução de negociação em monopólio bilateral; John Harsanyi, que efectuou uma análise das situações com informação incompleta através da noção de jogos bayesianos; e Reinhard Selten, que

[1] Plano de acções que especifica, para um determinado jogador, que acção tomar em todos os momentos em que tenha de decidir o que fazer.

introduziu o conceito de equilíbrio de Nash perfeito em jogos sequenciais.

A Teoria dos Jogos tornou-se uma ferramenta poderosíssima para o estudo de vários problemas em Economia e, posteriormente, noutras ciências, levando a um crescimento exponencial de trabalhos de investigação na área desde essas décadas até ao presente. Como reconhecimento da importância dos resultados obtidos com as investigações realizadas, Nash, Selten e Harsanyi foram galardoados com o Prémio Nobel da Economia em 1994. Posteriormente, em 2001, receberam o Prémio Nobel da Economia os economistas J. Stiglitz, M. Spence e G. Akerlof pelos resultados obtidos com aplicações da Teoria dos Jogos à chamada Economia da Informação, isto é, à análise dos mercados com informação assimétrica.

3. O que é um jogo?

Um *jogo* é uma qualquer situação na qual se verifica o seguinte:

i) Existem pelo menos dois *jogadores*. Um jogador pode ser um indivíduo, uma empresa, um país, ou mesmo um ser biológico.

ii) Cada jogador possui um conjunto de estratégias.

iii) As estratégias escolhidas por cada jogador determinam o resultado do jogo.

iv) A cada resultado do jogo está associada uma colecção numérica de lucros, um para cada jogador. Estes lucros representam o valor do resultado para os diferentes jogadores.

A Teoria dos Jogos analisa a forma como os jogadores devem, agindo racionalmente, tomar as suas decisões. Cada jogador encara o jogo de forma a que este termine num resultado que lhe proporcione o melhor lucro possível. O controlo que cada jogador tem sobre o resultado final está no facto de este ser influenciado pela estratégia que escolher. No entanto, o resultado final não depende apenas da sua escolha, mas também das escolhas dos restantes jogadores.

4. Classificação dos jogos

Uma primeira classificação de jogos consiste na distinção entre *jogos cooperativos* e *jogos não-cooperativos*. A característica cooperativa de um jogo prende-se com a análise das possibilidades de que alguns ou todos os jogadores acordem entre si as decisões que cada um deve tomar; o objectivo é caracterizar estruturas de coligações com boas propriedades de eficiência e de estabilidade. A característica não-cooperativa de um jogo consiste na análise das decisões possíveis para cada jogador, sem qualquer acordo prévio; procura-se uma combinação de estratégias, uma para cada jogador, que possua algum tipo de estabilidade - *equilíbrio*.

Os jogos não-cooperativos classificam-se em *jogos estáticos*, onde cada jogador escolhe a sua estratégia desconhecendo as estratégias adoptadas pelos restantes jogadores; e *jogos dinâmicos* ou *sequenciais*, onde, em cada momento de decisão, cada jogador conhece as estratégias adoptadas pelos restantes jogadores nos momentos anteriores.

Os jogos cuja teoria tem tido mais aplicações e impacto na Economia, e nas Ciências Sociais em geral, são os não-cooperativos.

Uma outra classificação consiste na distinção entre *jogos com informação completa*, onde todos os jogadores conhecem as consequências, para si e para os outros, de cada combinação possível de estratégias; e *jogos com informação incompleta*, onde pelo menos um jogador desconhece alguma dessas consequências.

5. Um exemplo: O Dilema do Prisioneiro

As investigações realizadas por Melvin Dresher e Merril Flood na companhia RAND levaram à descoberta, em 1950, do jogo conhecido hoje por *Dilema do Prisioneiro*. A famosa história associada a este jogo deve-se a A. W. Tucker e foi publicada, posteriormente, em 1980, por Philip Straffin [2]. É o exemplo mais exaustivamente estudado e utilizado em Ciências Sociais, por ilustrar de forma muito clara o seguinte paradoxo: a procura do melhor por parte de cada jogador conduz a um resultado não-óptimo sob o ponto de vista do colectivo de jogadores.

O problema consiste no seguinte:

Dois suspeitos (Prisioneiro *A* e Prisioneiro *B*) de um crime foram presos pela polícia. Para efeitos de investigação, cada um deles vai ser interrogado. Os suspeitos aguardam esse interrogatório em celas separadas, não sendo permitida qualquer comunicação entre si. Cada um deles tem duas estratégias possíveis: *denunciar* ou *não denunciar* o colega; e são-lhes explicadas as consequências derivadas das decisões que tomarem: se ambos denunciarem, são condenados a seis meses de prisão; se nenhum denunciar, ambos serão condenados a três meses de prisão, por um delito menor; se apenas um deles denunciar, cumprirá apenas um mês, e o outro será condenado a nove meses de prisão.

As diversas hipóteses e os resultados do jogo estão ilustrados na tabela seguinte:

		Prisioneiro *B*	
		Denunciar	Não Denunciar
Prisioneiro *A*	Denunciar	(6,6)	(1,9)
	Não Denunciar	(9,1)	(3,3)

Que estratégia tomar?

Observemos primeiro o ponto de vista do Prisioneiro *A*: "Suponhamos que *B* não me denuncia. Se eu o não denunciar, a minha pena será de três meses; e se eu o denunciar, a minha pena será de um mês. Logo, o melhor é denunciá-lo. Suponhamos agora que *B* me denuncia. Se eu o não denunciar, a minha pena será de nove meses; e se eu o denunciar, a minha pena será de seis meses. Logo, o melhor é denunciá-lo". Em ambos os casos, a melhor decisão a ser tomada pelo Prisioneiro *A* é denunciar (Dado os resultados proporcionados por esta *estratégia* serem melhores para o jogador, independentemente das acções tomadas pelo(s) outro(s) jogador(es), ela é designada *dominante*).

Analogamente, o Prisioneiro *B* também deverá denunciar.

Assim, ambos serão condenados a uma pena de seis meses de prisão. Este resultado é surpreendente, dado que se ambos não denunciassem, a pena seria apenas de três meses para cada um.

6. Equilíbrio de Nash

John Nash, matemático norte-americano, baseou-se no teorema do ponto fixo de Kakutani para formular, em 1950, o que ficou conhecido como *equilíbrio de Nash*; este corresponde ao conceito de equilíbrio standard em Economia, e é por isso considerado, em geral, como a solução de um jogo. O equilíbrio de Nash consiste numa combinação de estratégias, uma para cada jogador, tal que nenhum jogador melhora o seu lucro se alterar a sua estratégia e os restantes jogadores mantiverem as suas inalteradas. Desta definição, deduzimos que um equilíbrio de Nash é uma combinação de estratégias da qual nenhum jogador tem incentivo para se desviar unilateralmente, ou seja, nenhum jogador se arrepende da decisão tomada, dadas as estratégias escolhidas pelos restantes jogadores. Um equilíbrio de Nash é, assim, constituído por estratégias que são óptimas para cada jogador, dadas as estratégias dos restantes. Notemos, contudo, que tal não significa que num equilíbrio de Nash cada jogador obtenha o melhor lucro possível, mas sim o melhor lucro condicionado ao facto dos restantes jogadores escolherem as estratégias indicadas para eles nessa combinação.

Um jogo, tal como aqui é apresentado (em estratégias puras[2]), pode possuir zero, um ou múltiplos equilíbrios de Nash.

Para encontrar o(s) equilíbrio(s) de Nash, procedemos da seguinte forma: para cada combinação de estratégias, testamos se a estratégia de cada jogador é a melhor escolha para as estratégias adoptadas pelos outros jogadores. Há uma outra maneira eficaz e mais simples de visualizar, na própria representação tabular do jogo, a procura e obtenção dos equilíbrios de Nash. Consiste em comparar, para cada combinação de estratégias dos seus adversários, os lucros que um jogador obteria em cada uma das suas possíveis estratégias, e sublinhar o(s) melhor(es) desses lucros. Uma combinação de estratégias será um equilíbrio de Nash, se todos os lucros correspondentes estiverem sublinhados.

Para uma melhor compreensão deste último procedimento, vamos exemplificar com o Dilema do Prisioneiro. Se o Prisioneiro *B* escolher "denunciar", comparamos os lucros 6 e 9 do Prisioneiro *A*, e sublinhamos o melhor, que é 6 (6 meses de prisão é melhor do que 9); se o Prisioneiro *B* escolher "não denunciar", comparamos os lucros 1 e 3 do Prisioneiro *A*, e sublinhamos o melhor, que é 1. Procedendo de maneira análoga com os lucros do

[2] As estratégias puras de um jogador são as diferentes decisões que pode tomar.

Prisioneiro *B*, obtemos a tabela com o aspecto abaixo.

		Prisioneiro *B*	
		Denunciar	Não Denunciar
Prisioneiro *A*	Denunciar	(6,6)	(1,9)
	Não Denunciar	(9,1)	(3,3)

O Dilema do Prisioneiro tem, assim, um único equilíbrio de Nash: (Denunciar, Denunciar).

7. Óptimo de Pareto

Observemos que, no Dilema do Prisioneiro, a combinação de estratégias (Denunciar, Denunciar), que constitui o equilíbrio de Nash, não parece proporcionar um resultado muito satisfatório. De facto, tanto o Prisioneiro *A* como o Prisioneiro *B* lucrariam mais se escolhessem (Não denunciar, Não denunciar), o que lhes proporcionaria apenas 3 meses de prisão em vez de 6. Dizemos, então, que (Denunciar, Denunciar) não é *óptimo de Pareto*. Uma combinação de estratégias é óptimo de Pareto, se não se puder passar para uma outra de modo que nenhum jogador fique prejudicado e pelo menos um fique beneficiado. Trata-se de um conceito que analisa a eficiência social, relevante para o grupo de jogadores como um colectivo, enquanto que o equilíbrio de Nash é um conceito que analisa a eficiência individual, relevante para cada um dos jogadores como agente individual.

No Dilema do Prisioneiro analisado, vimos que a solução (equilíbrio) não é eficiente sob o ponto de vista de Pareto. Porque optam os jogadores por (Denunciar, Denunciar), como indica o equilíbrio de Nash, se optando por (Não denunciar, Não denunciar) conseguiriam um resultado melhor? Este aparente paradoxo é explicado pela compreensão de que a opção (Não denunciar, Não denunciar) é a indicada sob o ponto de vista social (colectivo de jogadores), enquanto que a opção (Denunciar, Denunciar) é a indicada sob o ponto de vista individual. Este jogo ilustra que, de facto, existe uma contradição entre a procura do bem individual e a procura do bem colectivo.

8. Conclusão

Vimos, através do Dilema do Prisioneiro, que um equilíbrio de Nash não garante necessariamente o máximo de bem-estar. De facto, a escolha "não denunciar" por ambos os jogadores é aquela que traria o máximo de bem-estar; porém ambos escolhem "denunciar".

O Dilema do Prisioneiro leva-nos a algumas reflexões úteis para o trabalho em equipa: As equipas não devem actuar isoladamente; é errado pensar que cada um se deve preocupar com o seu próprio território - estes podem ser, e muitas vezes são, sobrepostos; o futuro de uma equipa pode estar associado ao de outra! A cooperação levará a um ganho final positivo em relação a outras possíveis alternativas de acção.

Referências

[1] **Von Neumann, J., & Morgenstern, O.** (1944). *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton: Princeton University Press.

[2] **Straffin, P.** (1980). "The Prisoner's Dilemma". *UMAP Journal*, 1, 101-103.

Bibliografia

Friedman, J. W. (1990). *Game Theory with Applications to Economics*. New York: Oxford University Press.

Gibbons, R. (1992). *A Primer in Game Theory*. New York: Harvester and Wheatsheaf.

Straffin, P. (1993). *Game Theory and Strategy*. Washington: The Mathematical Association of America.

por Amílcar Branquinho, Alexander Kovacec, Jorge Neves, Eduardo Marques de Sá e António Salgueiro
[Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra]

Balanças e Alavancas

O Projecto Delfos nasceu em 2001, da ideia de uma escola dedicada aos estudantes do ensino não superior mais interessados pela Matemática, com gosto por esta disciplina.

Caro Leitor,

Com este número abre-se uma nova coluna que será regular e duradoura se a vida for como são as intenções. No tempo e no espaço que tivermos, o tema vai ser o que a Matemática sempre foi: a resolução de problemas.

Sendo hoje a estreia, será melhor que nos apresentemos. O *Projecto Delfos* nasceu em 2001, da ideia de uma escola dedicada aos estudantes do ensino não superior mais interessados pela Matemática, com gosto por esta disciplina. Contamos com alunos e professores, com todos os que queiram abrir um espaço informal na periferia das matérias escolares tradicionais, movidos pelo gozo do labirinto matemático, pela procura e descoberta de respostas às questões que a imaginação nos coloque.

Em muitos países desenvolvidos, em que a Matemática é encarada como disciplina central e praticada com insistência desde os primeiros anos de escolaridade, existem escolas desse tipo, dedicadas aos alunos com maior aptidão para a Matemática, onde trabalham docentes de todos os níveis de ensino. Nelas, os alunos são, pelo seu esforço individual e a orientação dos professores, levados a desenvolver as suas competências até ao limite das suas capacidades naturais, objectivo este que deveria ser comum a todas as escolas de um sistema de ensino que aspire à excelência.

Com este horizonte, o *Projecto Delfos* funcionou, de início, em moldes rudimentares, pela exiguidade de meios, pela falta de experiência, por dificuldades conhecidas no nosso país que tarda em afirmar-se, também pelo valor dado à aprendizagem. Em anos mais recentes a nossa actividade tornou-se mais consistente no contacto com os estudantes interessados: um ou dois fins-de-semana por mês e alguns estágios espalhados pelo ano, com despesas de deslocação parcialmente financiadas pelo Programa Ciência Viva. Houve um olhar atento, mas de modo nenhum exclusivo, às Olimpíadas Internacionais e Ibero-Americanas, nas quais vivemos o sucesso dos nossos estudantes. Procedemos a trocas de correspondência para avaliação personalizada de respostas a problemas de testes e textos Delfos, com sugestões e propostas de novos problemas.

Mantemos uma página *web*, http://www.mat.uc.pt/~delfos, onde o leitor poderá visitar-nos, com notícias, ligações, contactos, e parte do material usado na preparação dos alunos. Aí terá notícias da *Liga D'Elfos*, prova matemática por equipas que decorre aos fins-de-semana, disputando audiências às ligas várias do futebol nacional.

O público-alvo que visamos é aquele que nos dá razão de existir: os alunos do ensino não superior e os seus professores. Esta coluna é-vos dedicada e, através dela, esperamos o vosso contacto. Envie as suas soluções para:

Projecto Delfos, Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
3001-454 Coimbra.

No próximo número discutiremos os problemas hoje propostos, publicaremos os nomes dos que enviem soluções correctas e discutiremos algumas delas.

Balanças e alavancas

Em que condições é que uma balança simétrica, como a da figura 1(a), fica em equilíbrio? Todo o mundo sabe que isso acontece quando o peso no prato esquerdo é igual ao peso no prato direito. Essa situação de equilíbrio é ilustrada no diagrama 1(b), onde a balança se reduz a uma alavanca rectilínea que pode girar em torno do ponto *O*, chamado *fulcro*.

Numa balança não simétrica, de braços desiguais, de comprimentos a e b (cf. figura 2), há equilíbrio quando e só quando os números positivos aF e bG são iguais. Aqui indicámos por F a norma do vector $\vec{F}$ e por G a norma do vector $\vec{G}$.[1] Foi Arquimedes (287 - 212 a.C.), apontado como o maior matemático, físico e inventor grego da Antiguidade, quem descobriu esta lei matemática do equilíbrio. As aplicações são inúmeras no nosso dia-a-dia, dos pés-de-cabra aos alicates, macacos, bielas e manivelas, quebra-nozes, corta-unhas, passando por inúmeros tipos de balanças, como as *decimais*, aquelas em que $b/a=10$, nas quais, para se equilibrar (pesar!) um saco de batatas com peso F, se usa um contrapeso G que é a décima parte de F.

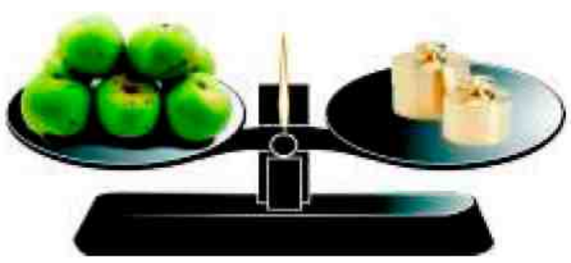


Figura 1(a)

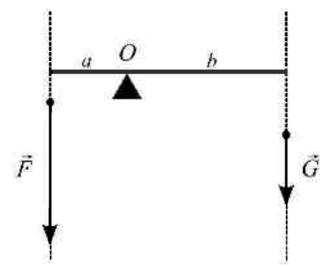


Figura2

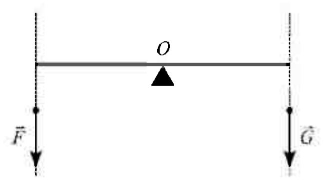


Figura 1(b)

Uma alavanca é um objecto rígido que pode ter qualquer forma e feitio, não apenas a de réguas rectilíneas como nas figuras anteriores, e as forças aplicadas podem ser muitas e com direcções variadas. Para simplificar, apenas consideramos o caso em que tudo está no mesmo plano: a alavanca, as forças e os seus pontos de aplicação.

A teoria olha para uma força de cada vez e para a sua posição *relativamente ao fulcro O* da alavanca. O *braço* de $\vec{F}$, denotado por b, é a distância de O à recta que contém $\vec{F}$. O momento de $\vec{F}$ é o número real que tem módulo bF e que pode ser positivo ou negativo: é positivo se $\vec{F}$ tende a fazer rodar a alavanca no sentido directo, negativo se $\vec{F}$ tende a fazer rodar a alavanca no

[1] Estamos a desprezar o peso dos braços e acessórios da balança. Um fabricante de balanças de precisão nao pode dar-se a este luxo, mas nós, aqui, podemos, pois o nosso mundo é o da imaginação sem limites que concebe matérias imponderáveis.

sentido retrógrado. No exemplo da figura 3 o momento é negativo.

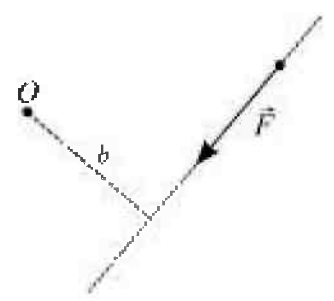


Figura 3

A lei de Arquimedes para o caso duma alavanca e de forças aplicadas que vivam no mesmo plano diz o seguinte:

a condição de equilíbrio da alavanca é que seja nula a soma dos momentos das forças aplicadas, com os momentos calculados relativamente ao fulcro.

O sinal atribuído a cada momento é uma convenção nossa; se tivéssemos adoptado a convenção oposta, a lei de equilíbrio da alavanca não sofreria alteração, como é fácil verificar. Uma boa lei matemática dum fenómeno natural deve ter um alcance que transcende as convenções feitas.

Problema 1

(I) Pretendemos projectar uma alavanca com as seguintes características. Será uma régua (imponderável!) com um fulcro e quatro furos para enganchar pesos: um furo do lado esquerdo do fulcro e três furos do lado direito. Há três pesos fixos, ditos *pesos-padrão*, que deverão, em cada pesagem, enganchar-se nos três furos do lado direito, um em cada furo, de todos os modos possíveis. A carga a pesar colocar-se-á no furo à esquerda, e queremos que seja possível pesar cargas com pesos de 1, 2, 3, 4, 5 e 6 quilogramas. Será possível cumprir este projecto? Se sim, diz como.

(II) Esta alavanca é parecida com a anterior: tem um furo do lado esquerdo do fulcro, à distância 1 do fulcro, e n furos do lado direito, estes a distâncias d_1, d_2,... d_n do fulcro. Há n pesos-padrão de p_1, p_2,... p_n quilogramas a colocar nos furos do lado direito, um e só um em cada furo, de todas as maneiras possíveis. Quais as cargas mínima e máxima que podem colocar-se, em equilíbrio, no furo esquerdo?

(III) Considera o caso particular da alínea (ii) em que $n > 4$ e, para cada i=1,...n, a distância d_1 e o peso p_1 valem i unidades. Mostra que é possível pesar todas as cargas inteiras compreendidas entre as cargas mínima e máxima.

Problema 2

Neste problema, a balança é simétrica, de dois pratos, como a da figura 1(a). Temos um *stock* ilimitado de pesos-padrão, uns com p quilogramas e os restantes com q quilogramas, onde p e q são inteiros positivos fixados. Os pesos-padrão podem colocar-se apenas no prato direito, nas quantidades desejadas, e a carga a equilibrar coloca-se no esquerdo.

(I) Caracteriza as escolhas (p,q) possíveis tais que todas as cargas que sejam números inteiros de 32 ou mais quilogramas possam equilibrar-se na balança, mas não seja possível equilibrar uma carga de 31 quilogramas.

(II) Admitindo conheceres o peso de determinada carga, descreve um algoritmo eficiente para calcular um modo de a equilibrar com um número mínimo de pesos-padrão.

(III) Para cada par (p,q) da resposta à alínea (I), designemos por $m(p,q)$ o menor número possível de pesos-padrão a utilizar para equilibrar uma carga com 2007 quilogramas. Determina o par (p,q) para o qual $m(p,q)$ é o menor possível.

por António Machiavelo
[Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]

Números Primos, Numeração Binária e a Procura de Inteligência Extraterrestre

Haverá civilizações extraterrestres algures no Cosmos? Se sim, como comunicar com seres que certamente serão, em muitos aspectos, completamente diferentes de nós? Curiosamente, os números e, em particular, os números primos poderão dar uma ajuda!

Da mais remota antiguidade até ao «Século das Luzes», como é conhecido o século XVIII, a grande maioria das pessoas estava convencida de que o espaço exterior à Terra, o «firmamento», era de uma natureza muito diferente deste nosso mundo «terreno» em que vivemos: os céus eram perfeitos, incorruptíveis e eternos, enquanto que «cá em baixo» as coisas eram imperfeitas, corruptas e perecíveis. Apesar de algumas notáveis vozes dissidentes, como a de Giordano Bruno (1548-1600), um dos mais conhecidos defensores de um Universo povoado de inúmeros mundos semelhantes ao nosso, que foi queimado vivo por estas e outras «heresias», só após os trabalhos fundamentais de Isaac Newton (1643-1727) é que finalmente se tornou claro que o Cosmos é regido por leis universais.

A famosa experiência de Miller-Urey[1], em 1953, mostrou ser possível gerar naturalmente compostos orgânicos a partir de compostos inorgânicos, apesar de persistirem ainda algumas dúvidas de como é que exactamente isso ocorreu no nosso planeta. Experiências posteriores confirmam que há várias «receitas» para produzir compostos orgânicos, havendo mesmo alguma evidência de produção extraterrena de diversos aminoácidos[2]. Dos compostos orgânicos à vida vai porém um enorme salto que tem, no entanto, uma explicação genialmente simples e simultaneamente mais profunda do que parece à primeira vista: a selecção natural. Se ainda não foi possível criar vida em laboratório tal se deve, entre outras coisas, a ninguém ter conseguido, até ao momento, condensar milhões de anos de selecção natural num período humanamente mais aceitável.

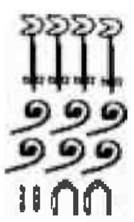
Por outro lado, a vida no nosso planeta surgiu muito rapidamente, em termos geológicos, claro[3]. Fica-se com a impressão de que a vida não tarda a emergir mal estejam criadas as condições necessárias. O que ainda não é absolutamente claro é quais são essas condições ou conjuntos de condições. Quanto à vida inteligente[4], há que reconhecer que sabemos muito pouco sobre a sua evolução e as condições em que se desenvolve para sequer fazermos conjecturas sobre a probabilidade do seu aparecimento. Mas é perfeitamente plausível que haja civilizações extraterrestres, uma vez que a selecção natural e a competição por recursos parece conduzir a uma «corrida aos armamentos» evolutivos e a cooperações

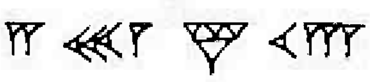
[1]http://en.wikipedia.org/wiki/Miller-Urey_experiment. Uma descrição historicamente detalhada desta experiência é dada em: C. Wills, J. Bada, *The Spark of Life*, Perseus Publishing, 2000, pp. 40-52.
[2]http://en.wikipedia.org/wiki/Murchison_meteorite
http://www.astrobio.net
http://astrobiology.nasa.gov
[3]http://exploringorigins.org/timeline.html
http://www.pbs.org/wgbh/nova/origins
[4]Não é nada fácil definir «inteligente», mas o termo será aqui usado como um adjectivo aplicável a civilizações e significando «capacidade de comunicação interestelar», o que por si só implica já inúmeras outras capacidades.

de grupos de indivíduos, o que conduz a formas de comunicação cada vez mais sofisticadas e, eventualmente, à inteligência. O facto de ainda não terem sido detectados sinais de inteligência extraterrestre (os vários relatos de OVNIs e fenómenos congéneres não são credíveis e não têm resistido a análises cuidadas[5]), pode ser explicado pelas enormes distâncias interestelares e intergalácticas, e por se ter começado a trabalhar seriamente no assunto há muito pouco tempo. Pode também significar que a densidade de civilizações avançadas é relativamente baixa no Cosmos.

Mas como descobrir se existem ou não civilizações extraterrestres? Dada a imensidão do Universo, se existirem, o mais provável é que essa descoberta seja feita via rádio. Mas põe-se aqui imediatamente o problema de saber como perceber uma mensagem enviada por seres que certamente terão linguagens e formas de comunicação distintas das nossas. As vezes ajuda pensar ao contrário: como enviar uma mensagem a seres dos quais nada sabemos?

No início da década de 70 do século passado, dois astrónomos da Universidade de Cornell, Carl Sagan e Frank Drake, conceberam uma forma brilhante de chamar a atenção de seres inteligentes: usar os números primos e a numeração binária! A ideia subjacente é que qualquer civilização suficientemente avançada não poderá deixar de ter tecnologia que analise o espectro electromagnético, conhecer os números primos e facilmente identificar representações binárias de números naturais. De facto é inverosímil que seres inteligentes, seja qual for a história da evolução da vida no seu planeta, não saibam contar, pois contar é essencial para avaliar recursos disponíveis, por exemplo, e não sejam, como nós, mestres no reconhecimento de padrões e peritos em abstracção[6]. O conhecimento dos números primos e da numeração binária é um corolário imediato!





É importante salientar aqui a diferença entre numerais e números: os numerais são símbolos usados para representar números, enquanto estes últimos são abstracções representando quantidades específicas. Ao longo da história humana, diferentes civilizações criaram diferentes numerais para representar os mesmos números. Temos assim, por exemplo, numerais egípcios[7], numerais babilónios[8], numerais maias[9], numerais chineses[10] e os numerais indo-árabes[11] que o leitor usa diariamente. Os numerais de eventuais extraterrestres serão certamente muito diferentes de todos os numerais terrestres, mas os números são universais!

Subjacente a alguns desses diferentes modos de representar os números há também um sistema de numeração, dito *posicional*, com base no qual se representa todos os números usando combinações de apenas um número finito de símbolos, mas onde o valor de um símbolo depende da sua posição. O sistema de numeração que é hoje mais utilizado é o decimal, com os dez símbolos que todos bem conhecemos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. A posição de um símbolo na representação de um dado

一 二 三 四 五 六 七 八 九 十 百 千 万
壹 贰 叁 肆 伍 陸 柒 捌 玖 拾 佰 仟 萬

[5]http://www.csicop.org/si/9703/ufo.html
http://www.pbs.org/wgbh/nova/aliens
http://www.michaelshermer.com/tag/ufos
[6]Se o leitor acha que não tem capacidade de abstracção é apenas porque está tão habituado a abstrair que nem nota! Basta fazer um esboço simples de uma cara humana e comparar o resultado com uma cara real para perceber que tem enormes capacidades de abstracção!
[7]http://www.psinvention.com/zoetic/tr_egypt.htm
[8]http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_numerals.html
[9]http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Mayan_mathematics.html
[10]http://www.mandarintools.com/numbers.html
[11]http://en.wikipedia.org/wiki/Hindu-Arabic_numeral_system

número tem um valor associado a uma determinada potência de 10. Assim, 2703 realmente significa $2x10^3+7x10^2+0x10+3$. Em geral, dado um certo número natural $b>1$, não é difícil ver que qualquer outro número natural m tem uma *única* representação na forma: $m=d_{k-1}b^{k-1}+d_{k-2}b^{k-2}+...+d_2b^2+d_1b+d_0$, se exigirmos que os números d_0, $d_1,...,$ d_{k-1} pertençam ao conjunto $\{0,1,...,b-1\}$. Diz-se então que esta é a representação de m na base b, sendo os d_i os seus respectivos «dígitos» ou «algarismos». Para $b=2$ obtém-se o *sistema de numeração binária*, com apenas dois «algarismos», 0 e 1, que é usual apelidar de *bits*; $b=16$ dá origem ao *sistema de numeração hexadecimal*, no qual é usual introduzir os «algarismos» A, B, C, D, E, F para designar, respectivamente, os números de 10 a 15. Estes são dois sistemas amplamente usados em Informática. Por exemplo, 2008 escrito em binário fica 11111011000, enquanto que em hexadecimal é: 7D8.

A predominância do sistema decimal deve-se apenas a um acaso evolutivo: os seres humanos têm dez dedos, tendo as mãos sido, naturalmente, a primeira calculadora. É muito provável que se um dia encontrarmos extraterrestres e estes tiverem algo análogo a «mãos», se consiga deduzir que sistema de numeração usam pelo número total de «dedos» que têm.

Os números primos, números naturais maiores que um e que não podem ser decompostos como produto de números menores, são como que os átomos do mundo numérico. Repare-se que um número ser ou não primo não tem nada a ver com a sua representação: é uma propriedade intrínseca ao próprio número. Por exemplo, já não o é o facto de um dado número ser ou não palíndromo, ou capicua, isto é ser igual ao número que se obtém quando é lido de trás para a frente: o número 121 é um palíndromo no sistema decimal, mas já não o é em binário; enquanto que o número cuja representação em binário é 100101001 não é uma capicua em decimal (*verifique!*).

Seres que façam parte de civilizações avançadas não poderão deixar de ser fruto de uma longa evolução, tendo a sua inteligência sido desenvolvida de modo a melhor conhecerem o meio ambiente que habitam, e como tal serão (se existirem) seres exímios no reconhecimento de padrões, que gostam de desafios e de explorar o desconhecido, com pendor para classificar e organizar as mais diversas coisas. Assim sendo, não poderão deixar de conhecer a tabela periódica dos elementos e os números primos, por exemplo.

A ideia de Sagan e Drake foi, então, a de codificar informação em binário num sinal formado por um número de bits que é o produto de dois números primos. A 16 de Novembro de 1974 enviaram mesmo, do radiotelescópio de Arecibo, em Porto Rico, uma mensagem com 1679 bits em direcção a um aglomerado de estrelas conhecido como M13, a 25 000 anos-luz do nosso sistema solar[12].

O facto de 1679 ser o produto de 23 por 73 sugere que se organize a informação num rectângulo, dispondo os respectivos bits em 73 colunas de 23 bits cada ou em 23 colunas de 73 bits cada. Num dos casos não se obtém nada de interesse, mas no outro vêem-se

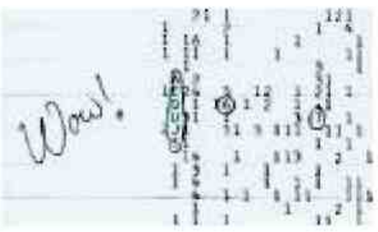
claramente padrões, incluindo algumas simetrias, que se espera serem reconhecíveis por seres inteligentes. De uma forma muito engenhosa, detalhadamente descrita na página da Wikipédia dedicada à mensagem de Arecibo, em[13]: http://en.wikipedia.org/wiki/Arecibo_message, Sagan e Drake conseguiram codificar, nos 1679 bits, os números de 1 a 10 em binário (que são facilmente reconhecíveis e fornecem pistas para a descodificação

[12] Um ano-luz é uma medida de distância: é a distância que a luz percorre, no vácuo, em um ano, sendo igual a 9 460 730 472 580,8 km.

[13] A figura representando a mensagem de Arecibo da página da Wikipédia está reflectida relativamente a um eixo vertical. Ver também: Carl Sagan and Frank Drake, *The Search for Extraterrestrial Intelligence*, Scientific American **232** (May 1975), pp. 80-89; Carl Pomerance, *Prime Numbers and the Search for Extraterrestrial Intelligence*, in Mathematical Adventures for Students and Amateurs, D. Hayes and T. Shubin (eds.), MAA 2004, pp. 1-4.

do resto da mensagem); os números atómicos dos elementos que constituem o ADN; as fórmulas químicas dos açúcares e das bases dos nucleótidos do ADN; o número de nucleótidos do ADN e uma representação gráfica sugerindo a sua estrutura de hélice dupla; uma representação esquemática de um ser humano, a sua altura média e a população da Terra na altura; uma representação gráfica do sistema solar, indicando qual o planeta por nós habitado; e finalmente uma representação esquemática do radiotelescópio de Arecibo e as dimensões do prato da sua antena! Mas a mensagem de Arecibo foi acima de tudo um gesto simbólico, uma demonstração prática de uma ideia. O seu principal objectivo foi o de mostrar uma possibilidade e motivar alguma reflexão sobre o assunto.

Desde os anos 60 do século passado, têm havido vários projectos de procura de inteligência extraterrestre, ou programas «SETI» (de *Search for Extra-Terrestrial Intelligence*)[14]. Ao longo destes anos foram já detectadas algumas mensagens curiosas e intrigantes, cuja origem ainda ninguém conseguiu explicar satisfatoriamente. Um desses sinais, talvez o mais famoso, ficou conhecido pelo nome de «sinal Wow!»[15] e foi apanhado pelo radiotelescópio «Big Ear» da Universidade Estatal de Ohio, em 1977. Foi um sinal que durou 72 segundos, nunca voltou a ser observado e cuja proveniência constitui ainda um mistério por explicar. Mas não conseguir explicar não constitui evidência de coisa nenhuma! O que se procura são indícios claros e inegáveis de inteligência extraterrestre, e esses ainda não existem. Mas, na imensidão do tempo que governa a história do Cosmos, a nossa espécie é muito jovem e ainda está a dar os primeiros passos nas suas explorações espaciais. Há que avançar pacientemente e continuar a busca de uma resposta a estas questões prementes: há vida noutros planetas? existem civilizações extraterrestres? É difícil imaginar as profundas implicações sociais que teria a descoberta da existência de outros seres inteligentes algures no Cosmos.



Para saber mais sobre a actual procura de inteligência extraterrestre, ver o «site» do Instituto SETI, em http://www.seti.org . Um programa no qual o leitor poderá participar, contribuindo com o seu computador pessoal para ajudar a analisar o enorme volume de dados recolhidos pelo radiotelescópio de Arecibo é o programa «SETI em casa» da Universidade de Berkeley: http://setiathome.berkeley.edu.

Vive-se, hoje, uma época de intensa exploração espacial: descobrem-se planetas extra-solares a um ritmo crescente[16]; acaba de ser detectada[17] a presença de um composto orgânico, o metano, num planeta (catalogado com o nome HD 189733b) a 63 anos-luz da Terra, uma pequena mas muito importante confirmação de que planetas de outros sistemas solares não são assim tão diferentes dos planetas do nosso próprio sistema solar; a sonda Cassini-Huygens continua uma intensa exploração de Titã, a maior das luas de Saturno[18]; as sondas robóticas *Spirit* e *Opportunity* continuam a sua exploração de Marte, iniciada há já 4 anos[19]; aguardam-se ansiosamente os resultados das análises da sonda Phoenix que acaba de aterrar no árctico marciano, procurando, entre outras coisas, possíveis sinais de vida (microscópica)[20]. Será que se vai detectar vida em Titã ou em Marte? Será este o século em que se detectarão os primeiros sinais claros de vida inteligente extraterrestre? É obviamente impossível saber: há que continuar a tentar, pois sem tentar é um pouco mais difícil descobrir a resposta, e há que aguardar pacientemente. Pelo menos temos um excelente modo de iniciar uma conversa: os números. E num primeiro encontro, os primos poderão ajudar a «quebrar o gelo»... M

[14] http://en.wikipedia.org/wiki/SETI
[15] http://en.wikipedia.org/wiki/Wow!_signal
http://www.bigear.org/wowmenu.htm
[16] http://exoplanet.eu
[17] http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2008/11
[18] http://www.esa.int/esaMI/Cassini-Huygens
http://saturn.jpl.nasa.gov
[19] http://marsrovers.jpl.nasa.gov/home/index.html
[20] http://www.nasa.gov/phoenix
http://www.phoenix.lpl.arizona.edu. Espero que na altura em que o leitor leia estas palavras haja já alguns resultados...

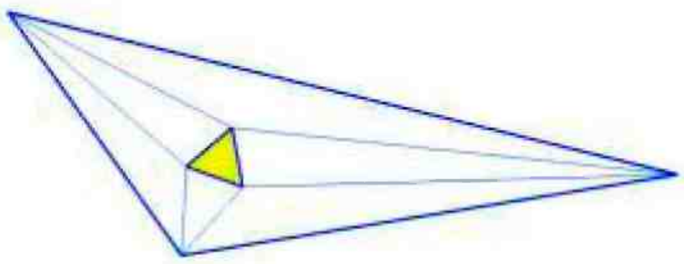
por **Mário Magalhães**
[Associação Atractor]

Versão do Teorema de Morley para Paralelogramos

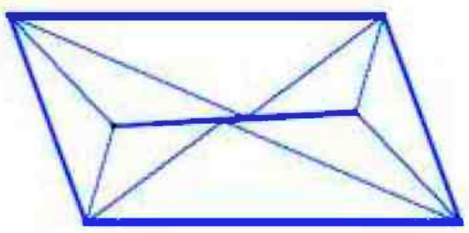
"One of the most surprising theorems in elementary geometry was discovered about 1899 by F. Morley. He mentioned it to his friends, who spread it over the world in the form of mathematical gossip."

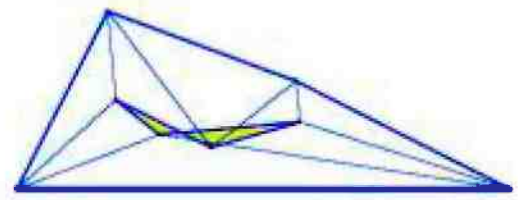
H.S.M. Coxeter

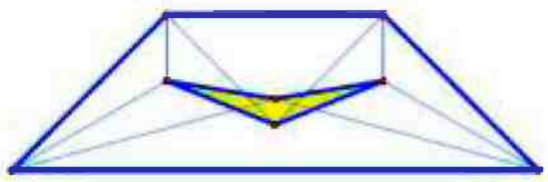
Consideremos um triângulo qualquer e as trissectrizes dos seus ângulos internos. Se construirmos os pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes, então obteremos sempre os vértices de um triângulo equilátero, independentemente do triângulo inicial que considerarmos. Este é o Teorema de Morley. Para mais informações sobre este teorema, pode consultar a página **http://www.atractor.pt/mat/morley/**.



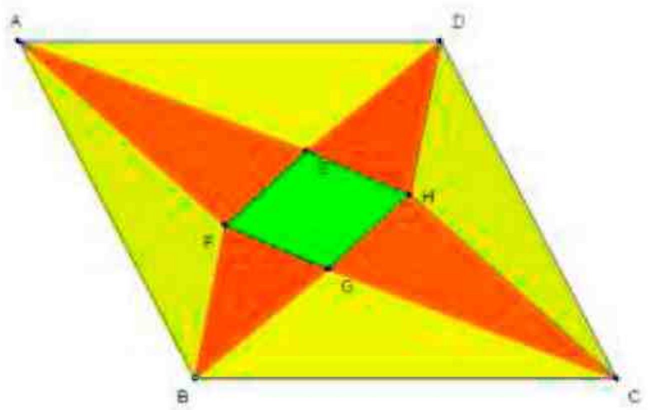
Neste artigo, veremos o que acontece se considerarmos paralelogramos em vez de triângulos. Construindo da mesma forma as intersecções das trissectrizes adjacentes dos ângulos internos de um quadrilátero, então obteremos quatro pontos. Unindo estes pontos consecutivamente, podem acontecer várias situações. Os pontos podem ser colineares ou podem formar um polígono não convexo, mesmo quando o quadrilátero inicial é convexo, como se pode ver nas seguintes figuras:





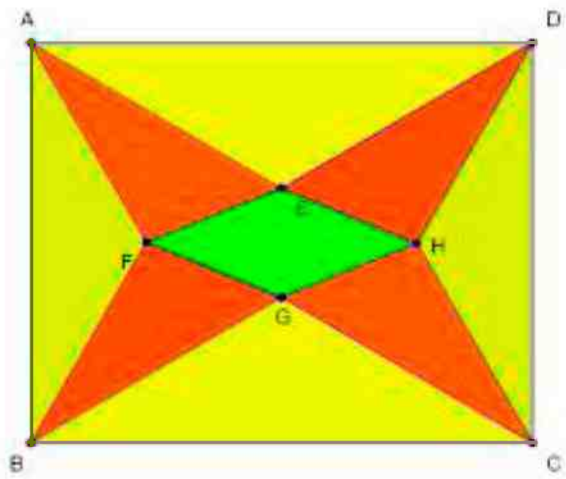


No entanto, se consideramos apenas paralelogramos, então só podem ocorrer duas situações: ou os quatro pontos são colineares[1] ou são vértices de um outro paralelogramo. Além disso, se partirmos de um rectângulo, obteremos sempre um losango, e, se partirmos de um losango, obteremos sempre um rectângulo. Segue-se uma prova destes factos, supondo à partida que os quatro pontos de intersecção das trissectrizes não são colineares.

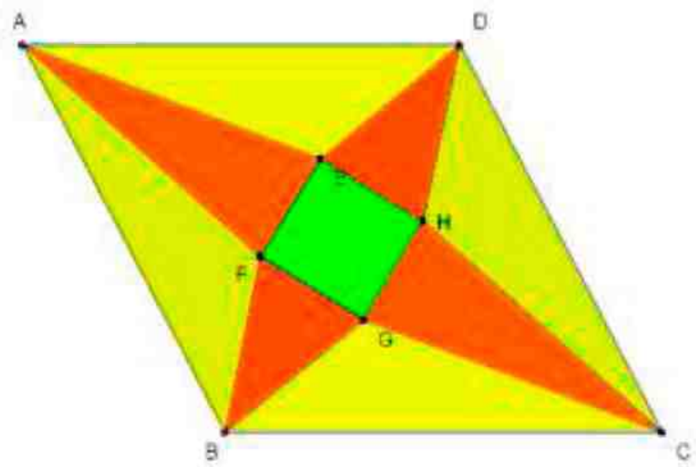


Construa o paralelogramo $[ABCD]$, as suas trissectrizes e os pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes, E, F, G e H. Una estes pontos consecutivamente, de modo a formar um quadrilátero. Como $A\hat{D}E = C\hat{B}G$, $D\hat{A}E = B\hat{C}G$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$, temos que os triângulos $[ADE]$ e $[CBG]$ são congruentes, logo $AE = CG$ e $DE = BG$. Analogamente, como $A\hat{B}F = C\hat{D}H$, $B\hat{A}F = D\hat{C}H$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$, temos que os triângulos $[ABF]$ e $[CDH]$ também são congruentes, logo $AF = CH$ e $\overline{BF} = \overline{DH}$. Como $E\hat{A}F = G\hat{C}H$, $AE = CG$ e $AF = CH$, temos que os triângulos $[EAF]$ e $[GCH]$ são congruentes, logo $EF = GH$. Analogamente, como $F\hat{B}G = H\hat{D}E$, $\overline{BF} = \overline{DH}$ e $BG = DE$, temos que os triângulos $[FBG]$ e $[HDE]$ também são congruentes, logo $\overline{FG} = \overline{HE}$. Portanto, o quadrilátero $[EFGH]$ é um paralelogramo.

[1] Demonstra-se que tal acontece quando $a^2 + b^2 = \frac{4ab}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi + \alpha}{\sqrt{3}}$ onde a e b são as medidas dos lados do paralelogramo e α é a medida de um dos seus ângulos internos. Em particular, quando temos um losango (ou seja, quando $a = b$) os pontos nunca são colineares e quando temos um rectângulo (ou seja, quando $\alpha = \pi / 2$) os pontos são colineares quando $a = \sqrt{3}b$ ou $b = \sqrt{3}a$.



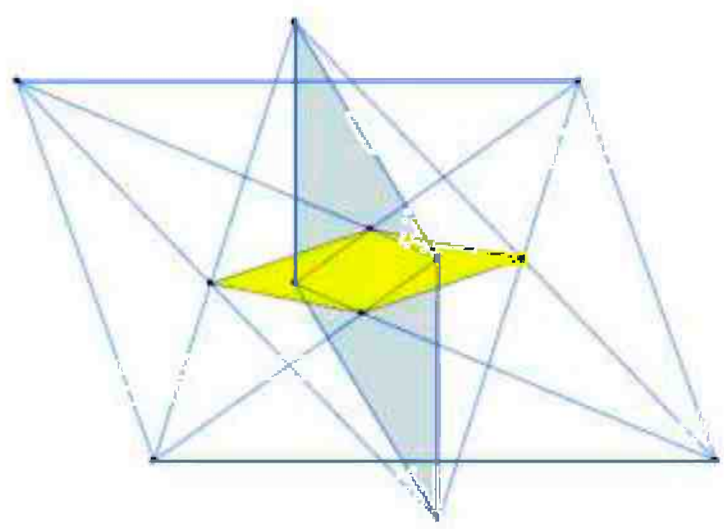
Se $[ABCD]$ é um rectângulo, então todos os seus ângulos internos são rectos, pelo que são trissectados em ângulos de 30°. Temos então que $[AED]$, $[AFB]$, $[BGC]$ e $[CHD]$ são triângulos isósceles, pelo que $DE = AE = BG = CG$ (são lados de 2 triângulos isósceles congruentes) e $\overline{AF} = \overline{BF} - \overline{CH} = \overline{DH}$ (são também lados de 2 triângulos isósceles congruentes). Logo, como $E\hat{A}F = F\hat{B}G$, $\overline{AF} = \overline{BF}$ e $\overline{AE} = \overline{BG}$, temos que $[EAF]$ e $[FBG]$ são congruentes, pelo que $\overline{FE} = \overline{FG}$. Como $[EAF]$ é congruente com $[GCH]$, vem $\overline{FE} = \overline{HG}$ e, como $[FBG]$ é congruente com $[HDE]$, vem $\overline{FG} = \overline{HE}$. Portanto, os lados do paralelogramo $[EFGH]$ são todos iguais, ou seja, $[EFGH]$ é um losango.



Se $[ABCD]$ é um losango, então $\overline{AD} = \overline{AB}$ e, como $D\hat{A}E = F\hat{A}B$ e $A\hat{D}E = A\hat{B}F$, temos que $[ADE]$ e $[ABF]$ são congruentes, logo $\overline{AE} = \overline{AF}$. Como $[ADE]$ é congruente com $[CBG]$, temos que $[ABF]$ e $[CBG]$ também são congruentes, logo $\overline{BF} = \overline{BG}$. Portanto, os triângulos $[EAF]$ e $[FBG]$ são isósceles e, consequentemente, também os triângulos $[GCH]$ e $[HDE]$ são isósceles, dado que estes são congruentes com os anteriores. Temos então que $A\hat{E}D = A\hat{F}B = B\hat{G}C = C\hat{H}D$ (são ângulos de 4 triângulos congruentes), $A\hat{E}F = A\hat{F}E = C\hat{G}H = C\hat{H}G$ (são ângulos de 2 triângulos isósceles congruentes) e $B\hat{F}G = B\hat{G}F = D\hat{H}E = D\hat{E}H$ (são também ângulos de 2 triângulos isósceles congruentes). Logo, os ângulos internos do paralelogramo $[EFGH]$ são iguais, dado que as suas amplitudes podem ser obtidas subtraindo a 360° amplitudes de ângulos iguais (por exemplo, $E\hat{F}G = 360° - A\hat{F}E - A\hat{F}B - B\hat{F}G = 360° - C\hat{G}H - C\hat{G}B - B\hat{G}F = F\hat{G}H$). Além disso, a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é de 360°, logo todos os ângulos internos do paralelogramo $[EFGH]$ são rectos, ou seja, $[EFGH]$ é um rectângulo.

Obviamente, se juntarmos as duas hipóteses (todos os ângulos de $[ABCD]$ são rectos e todos os seus lados são iguais), isso significa que $[ABCD]$ é um quadrado, pelo que, neste caso, conclui-se que $[EFGH]$ também o é. Mais geralmente, partindo de um polígono regular de n lados, se construirmos os pontos de intersecção das suas trissectrizes adjacentes, então obteremos sempre os vértices de outro polígono regular de n lados.

Finalmente, ainda em relação ao caso geral dos paralelogramos, note-se que, em vez de escolher os pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes, poderíamos ter escolhido os pontos de intersecção das trissectrizes não adjacentes de vértices consecutivos. Também aqui podemos concluir que estes pontos ou são colineares ou são os vértices de um outro paralelogramo, que é um losango no caso do paralelogramo inicial ser um rectângulo e vice-versa, sendo que a demonstração seria análoga à anterior. Na figura abaixo, temos representados estes dois paralelogramos, sendo que o primeiro, obtido pela intersecção das trissectrizes adjacentes, encontra-se a amarelo e o segundo encontra-se a cinzento. M



O segundo trimestre de 2008 foi extremamente produtivo para a Sociedade Portuguesa de Matemática, que lançou quatro novos livros em suas diversas colecções. Para os dar a conhecer melhor, ficam aqui trechos seleccionados de todos eles.

A Matemática das Coisas - Nuno Crato

Prefácio

"Quando digo que sou matemático, as pessoas brincam comigo e perguntam-me se as posso ajudar a manter a conta bancária equilibrada; quando digo que me engano muito nas contas, pensam que devo ser um matemático medíocre." Quem assim se queixava era Paul Halmos, mas a frase pode ser atribuída a muitos outros matemáticos, pois quase todos os que se dedicam a esta actividade se lamentam das incompreensões do público. Na realidade, há muita gente que não sabe o que fazem os matemáticos.

A matemática, no entanto, atravessa o nosso dia-a-dia. O século XX não teria sido, como foi, o século mais revolucionário da história da ciência sem os extraordinários desenvolvimentos obtidos na matemática. Os computadores não teriam sido possíveis sem a lógica binária, a teoria dos grupos e o conceito matemático de informação. Os nossos telefones não funcionariam se não tivessem existido o estudo estatístico de sinais e os algoritmos de digitalização e compressão de dados. Os semáforos automáticos não seriam eficazes sem os desenvolvimentos de uma área da matemática aplicada designada por Investigação Operacional.

A Matemática das Coisas - Nuno Crato
Colecção Temas de Matemática SPM/Gradiva
245 páginas | 10,40 euros / 13 euros

No entanto, ao mesmo tempo que se torna cada vez mais decisiva para as nossas vidas, a matemática é considerada, por vezes, uma ciência hermética e tecnicista, em que poucos se aventuram. E a ignorância de alguma gente culta na história da matemática e nos conceitos da matemática moderna é surpreendente. Se pedirmos a um intelectual que nos diga dois ou três nomes decisivos da filosofia do século XX, poucos haverá que não dêem uma resposta imediata. Se pedirmos a pessoas minimamente cultas para designarem dois ou três grandes compositores do nosso século, poucas hesitarão, tal como poucas terão dificuldade em nomear meia dúzia de correntes artísticas modernas, do cubismo ao minimalismo. Façamos a mesma pergunta, mas referindo-nos a temas matemáticos. Pouca gente saberá quem foi Hilbert e o que foi a escola formalista, ou a importância que Kolmogorov e von Neumann tiveram no estudo das probabilidades.

Neste livro contam-se histórias matemáticas. Há poucas fórmulas, muitos exemplos e muitas aplicações. A matemática é uma ciência fascinante, fundamental para a nossa história e omnipresente no nosso dia-a-dia. As obras de Picasso e as transacções bancárias via Internet, o número das portas das casas e o papel A4, os mapas modernos e a derrota de Hitler só foram possíveis graças a ela. As aplicações aparecem onde menos se suspeita. As histórias matemáticas são histórias de sucesso.

Nuno Crato

Nuno Crato é presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, professor de Matemática e de Estatística no ISEG, pró-reitor da UTL e coordenador científico do centro de investigação Cemapre. É um dos mais conhecidos e premiados divulgadores portugueses. Três artigos seus sobre criptografia publicados neste livro conquistaram-lhe o primeiro prémio no concurso Public Awareness of Mathematics, promovido pela Sociedade Europeia de Matemática em 2003. A Comissão Europeia galardoou-o em 2008 com o segundo lugar na categoria de Divulgador Científico do Ano.

A Magia das Sucessões - Joaquim Eurico Nogueira

Se pretendessemos coligir, numa lista restrita, os nomes daqueles que, ao longo dos séculos, mais assinaláveis contribuições deram para o avanço da Matemática, por certo se nos depararíam alguns embaraços ao termos de optar por este ou por aquele, em detrimento de outros, mas provavelmente todos estaríamos de acordo em que o nome de Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) não deveria ser preterido. Os seus trabalhos, ao longo de cerca de sessenta anos de pesquisas frutuosas, versaram áreas tão distintas como a Álgebra, a Análise, a Geometria, a Teoria das Probabilidades, a Teoria dos Erros, a Astronomia, a Mecânica Celeste, a Geodesia, o Electromagnetismo, a Óptica e as Ciências Actuariais, tornando-o, na realidade, um dos maiores cientistas de todos os tempos.

Joaquim Eurico Nogueira é professor auxiliar de Matemática na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Publicou vários trabalhos em Teoria dos Números, História da Matemática e Matemática Recreativa.

Ora, foi precisamente Gauss quem afirmou que a Matemática é a rainha das Ciências e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática, emprestando a esta frase famosa todo o peso do seu saber e da sua experiência de décadas.

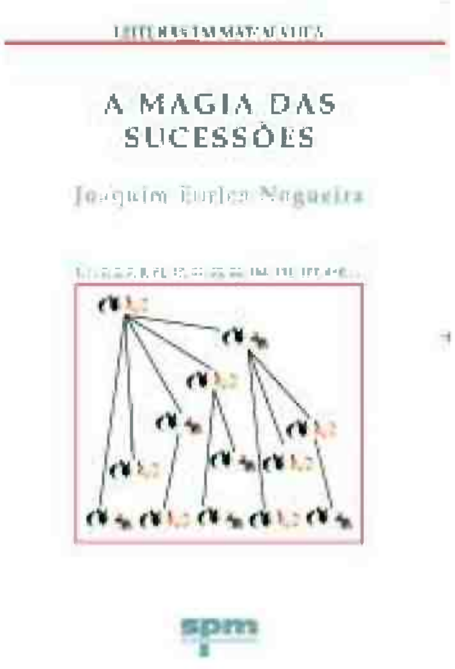
A *Teoria dos Números* (ou seja, a velhinha Aritmética) é um dos ramos mais antigos da Matemática e dos mais desenvolvidos. Prende-se, basicamente, com o estudo das propriedades dos números inteiros e fraccionários, e sem dúvida que uma das principais raízes do seu fascínio reside na circunstância de os números inteiros — e, de entre estes, mais particularmente, os naturais, i.e., os inteiros positivos — serem bem conhecidos de todos, mesmo daqueles que não cultivam a Matemática, parecendo mesmo aos leigos de uma tal simplicidade que os não imaginam envoltos em mistério. Na verdade muitos problemas de formação elementar, acessíveis aos não matemáticos, acabam por se revelar tremendamente difíceis de resolver, continuando, muitos deles, em aberto, após vários séculos de investigação.

Teria talvez razão Leopold Kronecker (1823–1891) quando responsabilizava o espírito humano por toda a criação matemática, com excepção dos números inteiros que se lhe afiguravam de inspiração divina («Die ganze Zahl schuf der liebe Gott, alles Übrige ist Menschenwerk»).

Mais ainda, tem sucedido com frequência que a respostas às questões mais enigmáticas suscitadas pelos números inteiros requeiram a utilização de ferramentas obtidas nos mais diversos e profundos ramos da Matemática, afastando assim tais questões da chamada *Teoria Elementar dos Números*, a qual, por sua vez, de «elementar» só tem o facto de não ir buscar essas tais ferramentas exteriores e sofisticadas.

Uma das características mais patentes dos números naturais — de resto bem evidenciada por Giuseppe Peano (1858–1932) na elaboração do conjunto de axiomas bem conhecidos, de que nos podemos servir para os construir e fundamentar — é a circunstância de se disporem, de modo bem conhecido, por uma determinada ordem, começando no número 1, o primeiro de todos, e seguindo depois, sem parar.

Nos primórdios do estudo dos números naturais encontra-se, evidentemente, a observação de que, sob variados pontos de vista, nem todos têm o mesmo comportamento. Assim, por exemplo, enquanto uns se podem obter como produtos de factores menores que eles próprios, outros não admitem uma tal factorização e são por isso chamados *primos* (isto é, primeiros), excelente



A Magia das Sucessões
Joaquim Eurico Nogueira
Colecção Leituras em Matemática
197 página | 4 euros / 5 euros

designação que põe em relevo o papel preponderante que acabam por ter como blocos à custa dos quais se vai construindo o vastíssimo edifício da Aritmética. Outros surgem do produto de factores todos iguais (são as *potências)* ou de factores consecutivos (como os *factoriais),* enquanto outros ainda se vão distinguindo por uma ou outra propriedade notável. Logo ali surge a curiosidade do investigador: dado um número com determinadas características, seremos capazes de encontrar outros que as compartilhem? E quantos haverá? E com que frequência ocorrem na infinita sucessão dos naturais?

Até certos valores relativamente baixos, a experimentação directa fornece muitas vezes respostas interessantes, mas quando se quer avançar lidando com números da ordem dos muitos biliões, por vezes excedendo até a capacidade dos mais modernos computadores, no sentido de se verificar uma ou outra arrojada conjectura, ou de lhe encontrar contra-exemplos, só a argúcia dos pensadores mais subtis parece capaz de chegar a conclusões satisfatórias, mediante argumentações engenhosas e, como se disse acima, muitas vezes recorrendo a técnicas só conhecidas dos grandes especialistas.

É, pois, assombroso este balanço entre o que é claro — como a formulação de muitas das conjecturas mais conhecidas (de entre as quais se destaca a famosa afirmação de Fermat, no sentido de nenhuma potência de um natural de expoente superior a 2 se poder apresentar como soma de duas potências de naturais com esse mesmo expoente, recentemente demonstrada, ao cabo de três séculos de labor continuado) — e o que é tremendamente difícil e totalmente obscuro para os não iniciados — não esqueçamos, por exemplo, que se provou já que a teoria das equações diofantinas é um problema indecidível. Aí, então, reside a atracção destas matérias, para as quais muitas das mais brilhantes mentes da História da Matemática têm sido levadas.

Com efeito, depois da escola Pitagórica, na antiga Grécia, uns três séculos antes da Era Cristã, não se podem esquecer os nomes de François Viète (1540–1603), Pierre de Fermat (1601–1665), Leonhard Euler (1707–1783), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Adrien-Marie Legendre (1752–1833), o já citado Gauss e muitos outros.

Em resumo, caro Leitor, os tópicos que verá abordados nas próximas páginas porão nas suas mãos a chave mágica que lhe poderá abrir as portas de um mundo fantástico e, quantas vezes, insuspeitado. O estudo das peculiaridades de determinados números e das sucessões que partilham as mesmas poderá conduzir ao desejo de saber mais, de cada um tentar por si descobrir novos aspectos relativos aos mesmos problemas, ou de inventar outros, de sua lavra, num esforço de dedução e análise capaz de proporcionar inigualável prazer intelectual.

Avance, pois, caro Leitor, e desfrute dos segredos dos números.

António Monteiro (Universidade Lusíada)

Logaritmos - Elon Lages Lima

Este pequeno livro contém uma exposição elementar sobre logaritmos, apresentando o assunto de forma a transmitir as seguintes mensagens:

1. Os logaritmos, que durante três séculos e meio tão bem desempenharam o papel de maravilhoso instrumento para simplificar o cálculo aritmético, permitindo que se efectuassem, com rapidez e precisão, operações complicadas como a multiplicação de dois números com muitos algarismos, ou uma potenciação com expoente fraccionário, perderam há algum tempo esse lugar de eficiente calculador, hoje ocupado com grande êxito pelas maquininhas electrónicas. Apesar disso, os logaritmos continuam, por motivos bem diversos, a merecer uma posição de destaque no ensino da Matemática, devido à posição central que ocupam nesta ciência e em suas aplicações. Essa posição é permanente porque a função logarítmica e a sua inversa, a função exponencial, constituem a única maneira de se descrever matematicamente a evolução de uma grandeza cuja taxa de crescimento (ou decrescimento) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente num dado momento.

2. Conforme imaginado por seu descobridor, Lord Napier, no início do século XVII, um *sistema de logaritmos* é simplesmente uma tabela com duas

Caderno_?_AF
ter a-feira, 5 de Agosto de 2008 12:20:14

colunas. A cada número real positivo x na coluna à esquerda corresponde, no mesmo nível à direita, um número real $L(x)$ chamado o *logaritmo de x* (naquele sistema). Essa tabela deve satisfazer duas condições:

A. Se os números x da coluna à esquerda estiverem dispostos em ordem crescente, o mesmo deve ocorrer com seus logaritmos $L(x)$ à direita.

B. Se multiplicarmos dois números positivos x e y, o logaritmo $L(x.y)$ do produto deve ser a soma dos logaritmos $L(x)$ e $L(y)$.

Elon Lages Lima é um matemático brasileiro que trabalha Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Rio de Janeiro), do qual foi director por diversas vezes. É autor de mais de vinte livros de Matemática e ganhou duas vezes o Prémio Jabuti da Câmara Brasileira do Livro por livros que escreveu. Recebeu também o Prémio Anísio Teixeira do Ministério da Educação e do Desporto.

Em linguagem de hoje, isto pode ser reformulado assim: um sistema de logaritmos é uma função $L: \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto dos números reais positivos, a qual possui as seguintes propriedades:

A. L é crescente, isto é $x < y \Leftrightarrow L(x) < L(y)$;
B. $L(x.y) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}^{+}$.

Dito isto, a segunda mensagem deste livro é esta: suponhamos que, de maneiras arbitrárias e independentes uma da outra, tenhamos obtido duas funções logarítmicas, ou dois sistemas de logaritmos L e M. Pois bem, não importa de que formas L e M tenham sido definidas, existe uma constante positiva c tal que $M(x) = c.L(x)$ para todo $x > 0$. Noutras palavras, pensando num sistema de logaritmos como uma tabela, o único modo de conseguir outro sistema é multiplicar todos os números da coluna à direita por uma mesma constante.

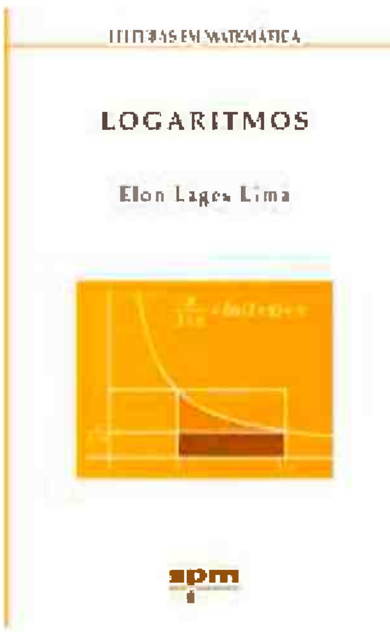
O significado desta mensagem é o de tornar, de certo modo, irrelevante a maneira particular como um dado sistema de logaritmos L foi definido, contanto que sejam válidas as propriedades A. e B. acima. Se chamarmos de base de um sistema de logaritmos L ao número a tal que $L(a) = 1$, um modo popular de definir a função $L: \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$, consiste em pôr $L(x) = y$ se, e somente se, $a^y = x$, ou seja, chamar de logaritmo de x na base a ao expoente y ao qual se deve elevar a base a para obter x. Esta definição, embora bastante difundida, apresenta três inconvenientes, que mostraremos agora.

O primeiro inconveniente é que ela requer que se estudem preliminarmente as propriedades da função exponencial, em particular que se saiba o significado de a^y quando y é irracional, e que se provem regras como $a^y.a^z = a^{y+z}$ para $y,z \in \mathbb{R}^{+}$ quaisquer. Tais preliminares envolvem dificuldades técnicas que conduzem ao seguinte dilema: ou passar por cima dessas dificuldades, fazendo de conta que elas não existem — o que deixa a desejar do ponto de vista de honestidade científica — ou esgotar a paciência do aluno (ou leitor) com longos detalhes rebarbativos.

O segundo inconveniente da definição de logaritmos como expoente é que, tratando todas as bases da mesma maneira, ela não permite apresentar espontaneamente o número e como uma base especial, que se distinga naturalmente das demais. Como se sabe, e será amplamente mostrado neste texto, os logaritmos de base e surgem naturalmente em problemas de origens as mais diversas, daí serem chamados de logaritmos naturais. Na definição de logaritmo como expoente, o número e aparece artificialmente.

O terceiro inconveniente da definição de logaritmo como expoente é a dificuldade de se estabelecerem certas desigualdades fundamentais, como por exemplo $L(1+x) < x$ (válida para logaritmos de base e), que é óbvia na definição geométrica.

3. A terceira mensagem deste livro é que a definição geométrica dos logaritmos apresenta uma vantagem incontestável de simplicidade conceptual e técnica. Na realidade, cada um dos 3 inconvenientes apontados acima para a definição de logaritmo como expoente constitui, em contraponto, uma vantagem nítida da definição geométrica. A definição geométrica depende apenas do conceito de área de uma figura plana e a propriedade fundamental $L(x.y) = L(x) + L(y)$ resulta meramente do facto de que a área de um rectângulo não se



Logaritmos - Elon Lages Lima
Colecção Leituras em Matemática
116 páginas | 4 euros / 5 euross

altera quando se multiplica sua base por um número e se divide a altura pelo mesmo número. Em segundo lugar, na definição geométrica o número e surge de modo natural e os logaritmos que se definem dessa maneira são os de base e. E, finalmente, as desigualdades fundamentais como $L(1 + x) < x$ são evidentes quando $L(1 + x)$ é definido como uma área. Desta desigualdade resulta, por exemplo, que para valores muito grandes de x, $L(x)$ é insignificante diante de x.

4. A última mensagem deste livro, talvez a mais importante, está no capítulo final: o estudo dos logaritmos naturais e da função exponencial e^x é recompensador pela variedade de aplicações simples, surpreendentes, interessantes e variadas que daí resultam sem maiores esforços adicionais.

Espero ter conseguido marcar esses pontos de modo claro e compreensível no texto que se segue e que sua leitura seja amena e proveitosa.

Elon Lages Lima

Como Resolver Problemas Matemáticos - Terence Tao

Prefácio

Em 22 de Agosto de 2006, em Madrid, o Rei de Espanha entregou a medalha Fields ao matemático australiano Terence Tao, no primeiro dia do 25º Congresso Internacional de Matemática. Para a maioria dos leitores este será um prémio obscuro. Outros terão ouvido dizer que é algo como o prémio Nobel da Matemática. Na verdade, a medalha Fields é muito mais difícil de obter do que o prémio Nobel. Em primeiro lugar, é atribuída nos Congressos Internacionais de Matemática, e estes realizam-se apenas de quatro em quatro anos. Em segundo lugar, só pode ser candidato à medalha Fields num Congresso quem não tiver completado 40 anos até ao fim do ano anterior ao da realização do Congresso. Ou seja: a medalha Fields, destinada a reconhecer trabalhos matemáticos excepcionais, é um prémio para pessoas relativamente jovens. Por exemplo, Andrew Wiles, que nos anos 90 demonstrou o "Ultimo Teorema de Fermat", recebeu muitos prémios, mas não a medalha Fields, por causa da idade.

Os premiados com a medalha Fields são escolhidos por comissões nomeadas pela União Matemática Internacional. Os nomes dos membros dessas comissões, desde que a medalha foi atribuída pela primeira vez, formam uma lista que é um verdadeiro *who's who* da Matemática mundial no século XX.

As primeiras duas medalhas Fields foram entregues em 1936, no Congresso de Oslo. As duas seguintes em 1950, em Paris. A partir de 1966, o número máximo de medalhas a atribuir em cada Congresso subiu para quatro e, desde então, o número de premiados tem variado entre dois e quatro (o total é de 48 em 70 anos). Em Madrid foram quatro: além de Terence Tao, Andrei Okounkov, Wendelin Werner e Grigori Perelman. Na altura, os *media* de todo o mundo encheram-se de notícias sobre um dos medalhados, Grigori Perelman, não tanto pelas contribuições científicas como pelas suas características pessoais, algo excêntricas, que culminaram na recusa da medalha.

Nas semanas anteriores ao Congresso de Madrid, Perelman era uma aposta óbvia para a medalha, por ter provado a famosa conjectura de Poincaré. Mas também a medalha de Tao era mais do que esperada, pelos resultados espectaculares em várias áreas que tinha obtido nos anos anteriores. A um colega que – apostando ele próprio em Perelman e Tao – me desafiou para uma opinião respondi que seriam dadas quatro medalhas: uma a Perelman e três a Tao. A razão era simples: Tao era autor não de um mas de vários trabalhos matemáticos excepcionais, alguns dos quais resolvendo problemas antigos e difíceis.

A citação oficial que acompanhou a atribuição da sua medalha explicita algumas dessas contribuições. A primeira, e a mais famosa, é um trabalho sobre números primos. Há muito tempo que se observou que a sucessão dos números primos contém progressões aritméticas – isto é, sequências em que a diferença entre cada número e o seguinte é constante – de vários comprimentos. Por exemplo, 3, 5, 7 é uma progressão aritmética de comprimento três. Outra é 3, 7, 11. É muito difícil encontrar progressões aritméticas nos primos, e a maior que actualmente se conhece tem comprimento 24. O que Tao provou, em colaboração com Ben Green, foi que, na sucessão dos números primos, existem progressões aritméticas de qualquer comprimento (a demonstração não é construtiva, isto é, não exibe explicitamente tais progressões).

A segunda contribuição referida refere-se a trabalhos de Tao sobre o problema de Kakeya, outra questão famosa que começa com uma pergunta muito simples: se num plano fizermos uma agulha rodar 180º (continuamente e admitindo translações), qual é a menor área possível percorrida pela agulha? Este problema está resolvido há 80 anos (faça o leitor algumas experiências, e depois informe-se sobre a solução, que é muito surpreendente). Tao investigou profundamente a generalização do problema para *n* dimensões, que tem ligações com importantes áreas da Matemática.

Terence Tao nasceu em Adelaide, na Austrália, em 1975. Nos anos de 1987, 1988 e 1989 participou nas Olimpíadas Internacionais de Matemática, tendo ganho, respectivamente, uma medalha de bronze, uma de prata e outra de ouro. Foi o mais jovem participante de sempre a conseguir uma medalha de ouro nessa competição. É, desde 2000, professor catedrático de matemática na Universidade da Califórnia, em Los Angeles. Em 2006, foi um dos quatro vencedores da medalha Fields, prémio atribuído de quatro em quatro anos pela União Matemática Internacional para distinguir trabalhos de investigação de qualidade excepcional.

A terceira e a quarta contribuições de Tao mencionadas na citação oficial são trabalhos mais próximos da Física, respectivamente sobre relatividade geral e versões não lineares da equação de Schrödinger.

No fim da citação é referido outro trabalho notável de Tao: em colaboração com Allen Knutson, ele resolveu completamente, usando técnicas combinatórias, o problema da descrição dos valores próprios possíveis da soma de duas matrizes simétricas quando se conhecem os respectivos valores próprios. Este trabalho, conjugando resultados anteriores de Andrei Zelevinsky e Alexander Klyachko, permitiu responder afirmativamente a uma conjectura que Alfred Horn fizera em 1962.

Com dois colegas de Coimbra, passei bastante tempo, nos anos 90, a pensar na conjectura de Horn. Tendo feito alguns progressos, e tendo sabido da importante contribuição de Klyachko, decidimos organizar um encontro em Coimbra sobre o assunto, no Verão de 1999. Já a organização estava em andamento quando soubemos, em finais de 1998, dos resultados espectaculares de Knutson e Tao. Logo os convidámos a vir participar no encontro. Ainda me lembro da mensagem que enviei a Tao, que começava com "Dear Professor Tao". Não sabia então que, do outro lado do correio electrónico, em Los Angeles, estava um jovem de 23 anos, doutorado aos 20. Ele acabou por me dizer que não podia vir, mas estiveram no encontro Zelevinsky, Klyachko e Knutson, os outros protagonistas do assalto final à conjectura de Horn.

Tao tem mais trabalhos de grande impacto. Uma investigação cujas consequências poderão um dia chegar às mãos do leitor é a que realizou, em colaboração com Emmanuel Candès, sobre técnicas de compressão de imagens ou, mais geralmente, sobre a substituição inteligente – com uma nova técnica a que chamaram *compressed sensing* – de enormes colecções de dados por conjuntos mais pequenos contendo o essencial da informação. Uma aplicação possível – em relação à qual o próprio Tao é um pouco céptico – será à concepção de máquinas fotográficas digitais com um processamento das imagens mais eficiente.

Sobre Terence Tao já muito foi escrito, em particular sobre a sua extraordinária capacidade para resolver problemas difíceis em áreas muito diversas, normalmente em colaboração com especialistas nessas áreas. A citação da medalha Fields fala mesmo de "um engenho do outro mundo" e de "um ponto de vista surpreendentemente natural que deixa outros matemáticos a perguntar: porque é que ninguém se lembrou daquilo antes?". A página de Tao na Internet é um prodígio de criatividade e transmissão de ideias novas, que vale a pena consultar (incluindo um blog matemático mantido com regularidade, tanto em *posts* como em respostas a comentários e perguntas): por alguma razão já lhe chamaram o "Mozart da Matemática".

Há muitos *clichés* sobre os grandes matemáticos e a sua vida. Mas mesmo quem, como eu, não conhece Tao pessoalmente, facilmente se apercebe, por entrevistas e testemunhos, de que se trata de uma pessoa com uma vida normal, consciente dos seus talentos invulgares mas usando-os naturalmente – ele próprio gosta de insistir que o essencial em Matemática é o trabalho – e relacionando-se com maturidade e sem excentricidades com o mundo à sua volta.

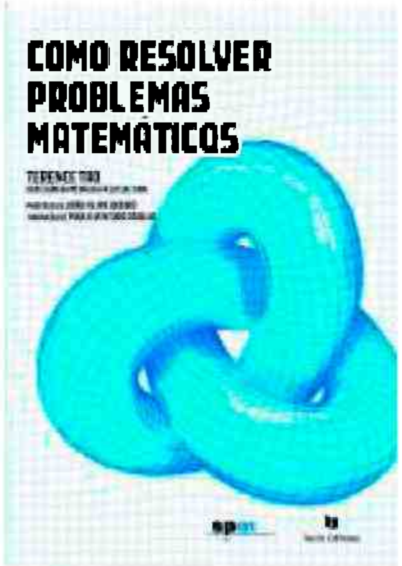
Só depois do convite frustrado a Tao me apercebi de que se tratava da mesma pessoa que ficara famosa muito antes, em 1988, ao ganhar uma medalha de ouro nas Olimpíadas Internacionais de Matemática – uma competição extremamente exigente pensada para jovens no fim do Ensino Secundário – com 13 anos de idade e na sua terceira participação (em 1986, ainda antes de completar 11 anos, ganhara uma medalha de bronze, e em 1987 uma de prata).

Tanto Tao como os seus dois irmãos foram crianças e jovens excepcionalmente brilhantes e precoces, tendo sido acompanhados pelos melhores especialistas mundiais nesses casos. Terence, em particular, teve um percurso escolar delineado com cuidado pelos seus pais (uma professora de Matemática e um pediatra emigrados de Hong Kong para a Austrália) que lhe permitiu um progresso acelerado na disciplina de Matemática.

Aos 15 anos, já depois das suas três participações nas Olimpíadas Internacionais de Matemática, escreveu o livro que o leitor tem nas mãos. Nele coligiu vários problemas de Matemática, que organizou tematicamente em quatro capítulos, mais um com exemplos diversos (nomeadamente de combinatória). Antes dos quatro capítulos principais – sobre teoria dos números, álgebra e análise, geometria euclidiana, e geometria analítica – há um interessante capítulo sobre "Estratégias de resolução de problemas", onde o autor analisa, com exemplos, vários princípios e regras gerais para abordar e resolver problemas de Matemática: compreender o problema, compreender os dados e o objectivo, escolher símbolos adequados, escrever o que se sabe, modificar o problema, ir provando alguma coisa, etc.

Numa entrevista que deu em 2006, Tao afirmou: "Quando eu era criança, tinha uma ideia romântica da Matemática, a ideia de que os problemas difíceis eram resolvidos em momentos 'Eureka' de inspiração." Depois, acrescentou: "Hoje, comigo, é sempre assim: 'Vamos tentar esta ideia. Isso leva-me a algum progresso, ou então não funciona. Agora tentemos aquilo. Oh, há aqui um pequeno atalho.' Trabalhamos durante tempo suficiente e, a certa altura, conseguimos progredir num problema difícil entrando pela porta das traseiras. No final, o que normalmente acontece é: 'Olha, resolvi o problema.'" É este tipo de atitude e de estratégia que está presente logo no primeiro capítulo do livro.

Os problemas que Tao analisa ao longo desta obra são do tipo dos que se encontram nas Olimpíadas de Matemática: são elementares no que se refere ao nível dos conhecimentos matemáticos necessários, mas exigem reflexão e engenho para a sua resolução. Com grande clareza, Tao explica como resolver os problemas seleccionados, discute estratégias, exemplifica truques comuns. Depois inclui, como exercícios, problemas que o leitor pode e deve experimentar por si mesmo.



Como Resolver Problemas Matemáticos - Terence Tao
Colecção Olimpíadas Portuguesas de Matemática (SPM/Texto editores)
112 páginas | 10,99 euros

O público para um livro destes é formado por quaisquer pessoas, em particular jovens, que gostem de Matemática e estejam dispostas a fazer algum esforço mental. Essas pessoas achá-lo-ão interessante, útil e formativo.

Esqueça o leitor que o autor deste livro tinha 15 anos quando o escreveu. A idade não é importante para a Matemática. Esqueça também tudo o que sabe sobre o passado de "criança-prodígio" do autor. Os raciocínios podem ser os os mesmos para todos. Concentre-se apenas na Matemática.

A excelente tradução de "Como resolver problemas matemáticos" deve-se a Paulo Ventura Araújo, matemático da Universidade do Porto, que é autor de um bom "Curso de Geometria".

Fala-se muito na crise do ensino da Matemática em Portugal, mas de vez em quando convém prestarmos atenção às coisas positivas. Entre elas está decerto o facto de muitos jovens portugueses gostarem de Matemática. Para esses jovens, poucos livros serão melhor escolha do que este. Leiam-no, acompanhem o jovem autor nos seus desafiantes problemas, nos seus engenhosos raciocínios, nas suas inesperadas soluções. Dificilmente poderiam estar em melhor companhia.

João Filipe Queiró (Universidade de Coimbra)

por Graciano de Oliveira
[Universidade de Coimbra]

Os Professores Devem Ser Avaliados. E os Alunos Também.

Os acontecimentos abundam e a controvérsia cresce a respeito do sistema de ensino. Depois do RJIES, incidentalmente pouco discutido, veio o Estatuto do Aluno, para não falar das recentíssimas polémicas que têm a ver com a situação dos docentes — e a consideração que deveriam merecer.

A comunicação social deu bastante ênfase ao Estatuto do Aluno, sobretudo no que toca à importância, ou falta dela, da assiduidade e disciplina que incute. Reprovar por faltas? Não bastará que a Escola descubra o paradeiro do aluno faltoso e o persuada a submeter-se a sucessivas provas, dispondo-se a repeti-las até ele acertar? É que água mole em pedra dura... e sem professor também se aprende...

Recentemente, o Estatuto do Aluno foi suspenso até ao próximo ano lectivo. Provavelmente chegou-se à conclusão de que deveria pensar-se com mais sossego, evitando atabalhoamentos. A questão do plágio em trabalhos escolares e académicos foi também objecto de preocupação. Sempre foi possível copiar, recorrendo a bibliotecas ou a dicas dos paizinhos e amigos. Hoje tudo parece muito facilitado pela *Internet*, não sendo sequer preciso ler com atenção o que se plagia. Um simples *copy and paste* resolve tudo. Pode acontecer a todos os níveis, tanto no trabalho de casa de uma criancinha como numa tese de Mestrado ou de Doutoramento.

Bem mais complicada e tormentosa é a criação da categoria de professor titular. Note-se que, na Universidade, já existem diversas categorias desde há muitos anos e a situação parece pacífica. O começo é necessariamente complicado. Imagine-se como seria se todos fossem simplesmente professores e, de repente, se quisesse dividi-los em auxiliares, associados e catedráticos: Com que critérios? Quem tomaria as decisões? Quantas vagas atribuir a cada Universidade? Não seria fácil.

As nossas perguntas:

1. Que lhe parece o Estatuto do Aluno, sobretudo no que dispõe acerca da assiduidade e no modo de compensar as faltas?

2. Ainda sobre a assiduidade dos alunos. Por que não deixar às escolas a resolução do problema aceitando, portanto, que nem todas adoptem a mesma solução? Confiar nos professores não seria melhor do que ser o Ministério a impor regras?

3. Acha que o plágio é muito frequente? Não se pode compensar com discussões orais com o autor do trabalho? Pelo menos pode verificar-se se entendeu o que escreveu.

4. O que pensa dos critérios para promoção a professor titular? Não serão demasiado burocráticos? Deveriam, ou não, dar mais peso aos conhecimentos científicos?

5. Finalmente: duas palavras sobre o que pensa da avaliação dos professores.

Gabriel Mithá Ribeiro, Escola Secundária Fernão Mendes Pinto (Pragal/Almada).

1. Há nesse estatuto um erro de raiz que torna ingovernável qualquer instituição. Não é possível o mesmo governo impor um Estatuto da Carreira Docente assente num pretenso radicalismo do rigor e um Estatuto do Aluno que protege legalmente o laxismo. Eles, no modo como foram concebidos, anulam-se um ao outro. Para mim é o clímax do "eduquês" que nos governa há mais de duas décadas.

2. Confiar nos professores do terreno é, sem dúvida, o melhor caminho. Resta saber em que matérias. Esta, como a dos exames, não é seguramente uma delas. A verdadeira autonomia só será eficaz quando ficar claro na cabeça de todos quais são as exigências universalmente aplicáveis e em que domínios as escolas devem ter autonomia efectiva. Nada disso é claro nas cabeças de quem nos governa. E falta esse debate prévio para depois se passar ao concreto.

3. Sem dúvida. O problema é o número de alunos por professor e por turma e as condições de trabalho concretas das escolas. Uma coisa é o 12º ano, onde esse tipo de opções é geralmente viável. Mas essa é a elite do ensino não superior. Para o resto, creio que o maior problema é cultural. Não temos, por exemplo, valores suficientemente fortes que transmitam aos alunos a consciência de que copiar ou plagiar é imoral. Disciplinas como, por exemplo, «Formação Cívica» (aliás, inútil) investem sistematicamente em banalidades e há uma espécie de papão que impede que se caminhe no sentido de moralizar práticas como a honestidade, o silêncio, o cumprimento das obrigações dentro da escola. É o mundo que temos…

4. O primeiro critério para posicionar quem gere o domínio específico do saber, independentemente dos níveis em que leccionam, são os graus académicos obtidos. Não há razão para que no ensino não superior isso não seja assim, até para incentivar os professores a investirem no conhecimento, isto é, procurarem obter graus de Mestre e de Doutor. Isso mostra o modo indigente como os responsáveis pela educação olham para o conhecimento académico com sólidas raízes civilizacionais (isto já para colocar de parte as «ciências da educação»…).

5. O sistema que se tenta (ou tentou) impor em si não tem ponta por onde se pegue. E continha autênticos atentados à nossa liberdade enquanto professores pelo modo como tratava levianamente a questão das aulas assistidas. Imaginem os professores universitários com uns «controleiros» ao lado. Não imaginam, pois não? Era bom que, independentemente do nível que se lecciona, se pensasse no modo leviano como tudo é feito. Nunca haverá um sistema eficaz se os próprios professores não confiarem nele.

Luís Bernardino, Escola Básica Integrada de Aljezur.

1. Relativamente ao novo Estatuto do Aluno, compreendo que tenha de haver uma maior responsabilização do aluno e do seu Encarregado de Educação relativamente às faltas que o primeiro dá. De facto, algumas justificações de faltas são feitas de forma um pouco leviana, parecendo-me também que algumas ausências às aulas por parte dos alunos se devem a uma relativização da importância da sua assiduidade, marcando-se consultas médicas ou visitas em período escolar, mesmo quando tal não é de todo imprescindível.

Relativamente às provas a realizar sempre que seja atingido, independentemente da natureza das faltas, o triplo de tempos lectivos semanais por disciplina ou, tratando-se exclusivamente de faltas injustificadas, o dobro dos tempos lectivos semanais por disciplina, estas só deverão ser implementadas caso, durante a ausência do aluno, tenha havido um momento de avaliação formal a que este tenha faltado ou, se houver uma prova à qual o docente considere ser melhor não submeter o aluno por achar que este pode não estar preparado para a realizar – ou seja, em caso de faltas que não lhe possam ser imputáveis.

Havendo a necessidade de se realizar uma prova de recuperação, tal só deverá ser feito após o regresso do aluno e o cumprimento de um plano de recuperação das matérias leccionadas na sua ausência. Para isso penso que o aluno deverá ter a possibilidade de frequentar aulas de recuperação.

2. Tendo em conta a resposta à questão anterior, penso que ficou clara a minha opinião de que não é possível tipificar todas as situações de ausência e, como tal, elaborar um receituário que permita definir a metodologia a aplicar em cada caso. Há que deixar os docentes agirem de acordo com o conhecimento privilegiado que têm de cada situação.

3. Devo confessar que os trabalhos de investigação não são frequentes na minha prática lectiva, exactamente porque às tantas não sei quem estaria a avaliar, se o aluno, os seus familiares ou, eventualmente, um outro professor que lhe estivesse a dar apoio.

Nos trabalhos que proponho, costumo pedir uma exposição oral, e aí costuma ser notório quem, de entre os diferentes elementos do grupo, se tal for aplicável, participou na elaboração do trabalho, ou, eventualmente, se o trabalho foi feito por terceiros.

4. Professores são professores e não entendo a necessidade de haver distinção entre os diferentes elementos da classe, parece-me que tal só serve para dividir. Compreendo que, para o desempenho de alguns cargos dentro das escolas, haja a exigência de que os docentes que os desempenham tenham determinada experiência lectiva, bem como uma formação científica que vá além da licenciatura em ensino.

5. A avaliação é necessária e poderá ser útil. Parece-me que as aulas assistidas podem ser positivas para que haja troca de experiência e, com isso, uma evolução da prática lectiva de cada um de nós. No entanto, não me parece que assistir a uma aula de noventa minutos em cada período lectivo contribua para uma correcta aferição das competências de um docente, bem como dos aspectos menos positivos da prática lectiva de cada um. Atrevo-me a sugerir que seria mais positivo se todos fizéssemos uma pequena reciclagem de tempos a tempos. Assim, deveríamos ter não uma aula, mas sim uma unidade inteira de aulas assistidas, com avaliação positiva, para se mudar de escalão. Durante essa unidade, o docente avaliado e o avaliador deveriam encontrar-se com alguma frequência a fim de trocarem impressões acerca da planificação da unidade alvo de avaliação. Tais encontros deveriam acontecer, também, após cada aula dessa unidade a fim de discutir o que de melhor e menos positivo se passou na aula e, caso o desempenho no final da unidade não fosse positivo, deveria ser possível uma nova avaliação em outra unidade programática. Se a avaliação fosse Muito Bom ou Excelente, o professor deveria ser premiado com a redução do tempo de permanência no escalão em que se encontra ou, na sua impossibilidade, no escalão para que transita.

Acresce-se que a avaliação deveria ser feita por equipas de docentes, destacados exclusivamente para esse fim, as quais deveriam avaliar docentes de escolas que não pertencessem à direcção regional a que estão afectos. Deste modo, seria menor o número de docentes avaliadores e portanto mais coerentes os resultados das avaliações. Por outro lado, a imposição regional protegeria, em primeiro lugar, os professores avaliadores, pois atenuaria a possibilidade de lhes serem apontados favorecimentos, mesmo que inexistentes.

Elza Amaral, **Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (Vila Real).**

1. Discordo do Estatuto do Aluno no modo de compensar as faltas. Porquê prova de recuperação? Não se trata de incumprimento em termos de assiduidade? Não é a assiduidade uma condição necessária, mas não suficiente, para haver aproveitamento? Não seria mais correcto implementar o sistema de aluno extraordinário ou voluntário no Estatuto do Aluno? Neste caso, o aluno só precisava de se submeter a uma prova de recuperação por cada ano de escolaridade obrigatória. Em caso de aprovação nas referidas provas ser-lhe-ia passado o Diploma de Aproveitamento (sem frequência) Escolar!

2. Não considero que o problema da assiduidade dos alunos deva ser da inteira responsabilidade das escolas. Haver legislação ministerial que defina critérios/regras para a resolução de problemas ligados com a assiduidade dos alunos parece-me mais justo e mais responsável; não vejo nas regras impostas pelo Ministério uma falta de confiança nos professores, muito pelo contrário. Deste modo, o professor estará mais defendido. No entanto, estas regras não devem ser demasiado rígidas; devem ser suficientemente flexíveis para que possam ser ajustadas à realidade sócio-económica da comunidade em que cada Agrupamento de Escolas está inserido. Em suma, considero que o problema da assiduidade deve ser legislado a nível nacional, mas deve permitir que cada Agrupamento/Escola defina as suas próprias regras.

3. Considero a questão do plágio em trabalhos escolares e académicos tanto mais grave quanto mais avançado for o nível científico em que é praticado. Quando se pede a uma criança ou jovem para realizar um trabalho escrito sob determinado assunto é muito frequente haver plágio sem estarem verdadeiramente conscientes de que o estão a fazer; neste caso, uma discussão oral pode ajudar não só a verificar se entenderam ou não o que escreveram, como também, e não menos importante, alertá-lo e ajudá-lo a perceber o que é de facto plagiar.

4. O descontentamento nas escolas é geral e são os próprios professores titulares a insurgirem-se contra os critérios adoptados. Será justo e compreensível que todos os docentes de um departamento passem a professores titulares só porque as quotas são superiores ao número de docentes? Será justo que numa escola com o número de quotas inferior, um professor do 9º escalão seja preterido por um do 8º escalão apenas porque este desempenhou determinado cargo administrativo nos 7 anos anteriores à data do concurso?

Por último, como se pode compreender que um concurso tenha critérios distintos para o mesmo fim – Professor Titular? Na verdade este concurso teve duas fases: a 1ª para professores do 10º escalão em que todos entravam desde que cumprissem com 95 pontos à data do concurso; depois, numa segunda fase e com as vagas sobrantes, é reaberto o concurso para professores do 8º e 9º escalões com novos critérios!

5. A avaliação dos professores é fundamental para melhorar o seu desempenho e, consequentemente, melhorar os resultados escolares e a qualidade do ensino/aprendizagem. Julgo que esta questão é indiscutível e ninguém, nem mesmo os próprios professores, põe em causa o facto de deverem ser avaliados. Não existia já um sistema de avaliação? Não era o professor obrigado a fazer formação contínua creditada e a entregar um relatório de auto-avaliação e reflexão crítica aos órgãos de gestão da escola quando estavam em condições de progredir na carreira? O que falhou então no anterior sistema de avaliação? Não seria mais justo nomear uma Comissão de Avaliação, a nível nacional, distrital ou regional, que fizesse cumprir efectivamente o grande objectivo – distinguir o mérito e reconhecer o bom desempenho – do anterior sistema de avaliação? M

por Maria Eugénia Ferrão
[Departamento de Matemática Universidade da Beira Interior]

Ainda os *Rankings* e a Estatística

O modelo de componentes de variância aplicado aos dados da amostra portuguesa do PISA 2000 ilustra a importância da precaução na interpretação dos resultados face a eventuais limitações metodológicas. A utilização de modelos estatísticos para a criação de listas ordenadas de escolas sem ter em consideração variáveis de controlo socioeconómico constitui um "pecado" para com os alunos, professores e escolas de contextos desfavorecidos.

Introdução

Em Portugal, à semelhança de outros cinco países europeus[1], procede-se à divulgação periódica dos resultados nos exames nacionais através da publicação das listas ordenadas de escolas, usualmente conhecidas por *rankings*. A divulgação dos resultados da avaliação das escolas está prevista no artº16º do capítulo IV da Lei do Sistema de Avaliação da Educação não Superior[2]. Os nove objectivos do sistema de avaliação enunciados na Lei podem classificar-se em dois grupos, de acordo com a sua finalidade: (a) melhoria da qualidade do sistema educativo; (b) produção de informação.

Este último propósito não se refere exclusivamente às escolas. A expectativa dos governantes e dos cidadãos é que o desempenho e a qualidade dos serviços de qualquer instituição pública sejam passíveis de ser resumidos através de alguma estatística ou indicador de desempenho.

A controvérsia em torno do assunto tem sido tratada exaustivamente em periódicos científicos internacionais, com algumas consequências na prática avaliativa dos sistemas educativos. Segundo Bird, Cox, Farewell, Goldstein e Smith [1] na República da Irlanda e na Austrália (New South Wales) há legislação contra o uso das listas ordenadas das escolas baseadas nos resultados dos exames. Aqueles autores sintetizaram a utilidade e importância dos indicadores de desempenho do seguinte modo "... quando bem feito, pode ser bastante produtivo para os envolvidos. Quando mal feito, pode ser muito custoso, e não apenas inútil mas prejudicial e até mesmo destrutivo.". Abrantes [2] referiu a forte pressão que os professores portugueses sentem como consequência dos resultados dos exames do ensino secundário ou pela má posição que Portugal ocupa nas comparações internacionais.

A temática também tem sido debatida em Portugal [4], [5]. No entanto, a ligação entre o conhecimento científico e metodológico e a concepção, planeamento e concretização da avaliação do sistema educativo ainda é ténue. Não se sabe, por exemplo, se as diferenças verificadas na série cronológica dos resultados dos exames nacionais são devidas à melhoria/pioria do processo ensino-aprendizagem, tal como sugere Justino [6], ou tão só devidas às características das provas. Há mais de 130 anos que os cientistas [7], [8] se preocupam com as propriedades métricas de escalas (e instrumentos de medida) referentes a grandezas não directamente observáveis. Na actualidade, é fundamental que as propriedades métricas dos instrumentos usados nas avaliações nacionais sejam garantidas e, assim, os resultados obtidos sejam realmente úteis e usados adequadamente.

[1] Eurydice [3].

[2] "Os resultados da avaliação das escolas e do sistema educativo, constantes de relatórios de análise integrada, contextualizada e comparada, devem ser divulgados com o objectivo de disponibilizar aos cidadãos em geral e às comunidades educativas em particular, uma visão extensiva, actualizada, criticamente reflectiva e comparada internacionalmente do sistema educativo português".

Têm sido usados modelos estatísticos para produzir as listas ordenadas de escolas. Pestana [5] centrou as críticas às listas ordenadas decorrentes da aplicação dos modelos de regressão múltipla propostos por Grácio [9] nos valores do *coeficiente de determinação* (variam entre 0,018 e 0,213), no efeito de *confundimento* e no uso abusivo de *causalidade*. O autor exemplifica o modo de usar esta classe de modelos com dados de bioestatística (relação entre o perímetro cefálico à nascença e o comprimento do biparietal medido na 34ª semana de gravidez) onde a unidade estatística de observação é a criança.

Os dados referentes à avaliação educacional têm a estrutura hierárquica da população onde foram recolhidos, isto é, contêm variáveis que representam atributos de diferentes unidades estatísticas de observação. Nomeadamente, segundo Pestana [5], os modelos enunciados em Grácio [9] consideram:

- Variável dependente: resultados escolares definidos como a média das classificações dos alunos de cada escola nas disciplinas avaliadas no 12º ano; a unidade estatística de observação é o aluno; as respectivas classificações são agregadas para a unidade escola;

- Variáveis explicativas e de controlo: contexto social e económico aferido através do índice de poder de compra, taxa de não escolarização e número médio de anos de escolaridade da população de cada concelho; tipo de estabelecimento de ensino (público ou privado).

Os modelos de regressão múltipla não são adequados para a modelação dos dados com a estrutura hierárquica da população subjacente. Dois dos problemas decorrentes da mistura de atributos referentes a diferentes unidades estatísticas de observação são: (1) os erros padrão das estimativas dos parâmetros fixos são subestimados; (2) o modelo não leva em conta a variabilidade dos contextos socio-económicos dentro de cada concelho e associados à população discente das escolas[3]. Deverá, assim, usar-se o modelo de regressão multinível [10]

Concordando-se ou não com a produção das listas ordenadas de escolas, com a sua divulgação pública e/ou com a utilização das listas para a formulação de política educativa, é essencial que elas sejam válidas face aos objectivos da sua constituição.

O principal propósito deste artigo é mostrar o impacto que a especificação do modelo estatístico, no que se refere à escolha das variáveis que o modelo inclui e à respectiva medição, tem nas listas ordenadas resultantes. Para tal, aplica-se o modelo de regressão multinível aos dados do PISA 2000 e, para ilustração, usam-se critérios alternativos de ordenação baseados na definição de efeito-escola tipo A e tipo B propostos por Raudenbush e Willms [10]. São comparadas as estatísticas de posição das escolas e mostra-se que a posição ocupada depende do critério adoptado, tal como esperado. No entanto, perante o mesmo critério, a simples selecção das variáveis, ou até a forma da sua medição, tem relevância nos resultados obtidos.

Ficará fora do domínio deste trabalho, a ilustração das consequências da agregação dos dados e posterior inferência. Este assunto é conhecido na literatura por falácia ecológica [11] e está na base de análises e contribuições científicas polémicas na história da Ciência (por exemplo, Lohmoller, Falter, Link e Rijke [12]).

Metodologia

Critério de ordenação

Como é que se deve estimar a contribuição da escola (e professores) na aprendizagem e desenvolvimento dos alunos? Há uma concordância generalizada na literatura especializada de eficácia escolar de que a comparação de escolas deve ser feita através do *valor acrescentado* pela escola na aprendizagem e desenvolvimento de todos e de cada um dos seus alunos [10], [13], [14], [15]. Conceitos importados da Economia para a Educação [15] definem valor acrescentado como sendo a indicação de quão uma dada escola tem promovido o progresso de todos os alunos num conjunto de áreas (curriculares ou não curriculares) durante determinado período de tempo – por exemplo, desde a entrada na escola até ao momento da aferição dos

[3] Postular um contexto social e económico constante para todas as escolas de cada concelho é demasiado irrealista. Ao lidar com medidas agrupadas por escola/concelho, o modelo despreza a variabilidade dos dados, tanto dos resultados escolares como das variáveis de controlo, considerando todos os alunos como iguais. Sabe-se que esta abordagem foi adoptada, em parte, porque os dados referentes ao nível socio-económico do aluno não estavam disponíveis para análise.

resultados escolares – comparativamente com os *efeitos* de outras escolas. A operacionalização desta definição requer que a métrica usada para quantificar os resultados escolares seja a mesma nos dois momentos de aferição, o que geralmente não é possível. Assim, Goldstein e Spiegelhalter [13] propõem a designação de *comparação ajustada* por traduzir melhor a transposição daquele conceito da Economia para esta área do conhecimento.

À definição de valor acrescentado está associada a noção de *efeito-escola*. Raudenbush e Willms [10] referem que o termo tem sido usado em duas situações ligeiramente distintas: (1) a que se destina a quantificar o impacto de uma dada política/prática nos resultados escolares dos alunos, tal como o efeito de diminuir a razão nºalunos/nºprofessores ou o efeito de adoptar critérios de selecção de alunos, entre outros; (2) a que se destina a quantificar a capacidade que a escola tem em modificar os resultados escolares dos alunos, ou seja, a contribuição da escola na aprendizagem. Aqueles autores defendem que o *efeito-escola* deve ter diferentes concepções, dependendo dos sujeitos que dele farão uso. São identificados dois grupos de potenciais interessados e a cada um está associado um determinado tipo de *efeito-escola: tipo A e tipo B*.

O efeito do *tipo A* é aquele que os pais consideram quando escolhem uma escola para os seus filhos. Os pais desejam que a escola produza o maior efeito possível, independentemente de como a escola o consegue produzir – quer seja através de professores altamente qualificados, do método de ensino praticado, da influência do contexto socio-económico da comunidade na qual a escola está inserida,, dos recursos materiais disponíveis etc. Deste modo, interessa-lhes saber qual é o desempenho escolar esperado condicionado às características das crianças ou jovens, tais como conhecimento prévio, idade, situação social e económica.

O tipo de efeito *B* é definido de modo a "isolar" o efeito da prática da escola, distinguindo-o do contexto da escola. O contexto da escola inclui os factores associados à escola mas que são exógenos ao trabalho lá desenvolvido – a prática educativa – por professores, directores e outros profissionais. Os factores de contexto incluem, por exemplo, as características socio-económicas da comunidade servida, assim como a composição demográfica da população discente. Estes factores podem ser catalizadores ou inibidores de ambientes de aprendizagem, independentemente do esforço educativo levado a cabo pelos profissionais na escola. O efeito-escola do *tipo B* é, geralmente, do interesse daqueles que têm a responsabilidade de promover a aprendizagem de todos os alunos, independentemente das suas características e antecedentes.

Modelo estatístico

Em estudos desta natureza, a população é constituída por alunos agrupados em turmas e estas, por sua vez, agrupadas em escolas, etc. O modelo de avaliação tem de conseguir não só dar medidas nacionais e regionais dos resultados atingidos, mas também identificar os processos intra-escolares que explicam a variabilidade dos resultados, dadas as condições de escolarização. Este assunto está amplamente registado na literatura [13], [14], [16]. O modelo estatístico adequado para, simultaneamente, acomodar atributos referentes a unidades de observação de diferentes níveis hierárquicos (aluno, turma-professor, escola, concelho) é o modelo multinível [10], [17], [18], [19].

Para estimar os efeitos do tipo A e B será usado o modelo mais simples, designado por modelo de componentes de variância[4].

Considere-se "aluno" a unidade de nível 1, identificada pelo subscrito i, e "escola" a unidade do nível 2, identificada pelo subscrito j. Considere-se a existência de J escolas, j=1,..,J, cada uma delas com n_j alunos, i=1,..,n_j, $I = \sum_{j=1}^{J} n_j$. Seja y_{ij} o desempenho escolar do i-ésimo aluno na j-ésima escola, e x_{ij} o respectivo nível socio-económico. O modelo de componentes de variância com uma variável explicativa, especifica-se como segue:

[4]Variance components model [10].

$$
\begin{aligned}
& y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 x_{ij} + \varepsilon_{ij} \\
& \beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \\
& \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2) \\
& u_{0j} \sim N(0, \sigma_{u0}^2) \\
& \text{cov}[\varepsilon_{ij}, u_{0j}] = 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Com base num modelo semelhante a (1), mas em que a variável explicativa representa o desempenho prévio do aluno *ij*, Goldstein [145](1997, p.383) diz que os resíduos ajustados ($\hat{u}_{oj}$) são geralmente usados como estimativas do valor acrescentado da escola porque, ajustando (ou controlando) pelo desempenho inicial do aluno, eles quantificam o progresso relativo em diferentes escolas. Cada estimativa u_{oj} representa o afastamento do desempenho médio da escola *j* à média global, $\hat{\gamma}_{00}$. Também Raudenbush e Willms e Raudenbush [101](1995, p.309) estabelecem que o efeito-escola ou valor acrescentado são estimados através do resíduo associado às escolas, mas com modelos em que o conjunto de variáveis explicativas seleccionadas se encontra em concordância com a definição dos efeitos *tipo A* e *tipo B* anteriormente expostos. Neste trabalho, para ilustrar a aplicação dos dois critérios aos dados do PISA, usou-se o desempenho em Matemática como variável dependente. A descrição da base de dados utilizada constitui o anexo A.

Estimação do efeito-escola tipo A

O modelo estatístico para estimar os efeitos do tipo A é o modelo (2) que seguidamente se apresenta[5].

$$
\begin{aligned}
& y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 ano\_5_{ij} + \beta_2 ano\_6_{ij} + \beta_3 ano\_7_{ij} + \beta_4 ano\_8_{ij} + \beta_5 ano\_9_{ij} + \beta_6 ano\_11_{ij} + \\
& \quad + \beta_7 Menina_{ij} + \beta_8 ISEI_{ij} + \beta_9 \, \text{int}\_mat_{ij} + \beta_{10} idade_{ij} + \varepsilon_{ij} \\
& \beta_{0j} - \gamma_{00} + u_{0j} \\
& \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2) \\
& u_{0j} \sim N(0, \sigma_{u0}^2) \\
& \text{cov}[\varepsilon_{ij}, u_{0j}] = 0
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Todas as variáveis explicativas são referentes ao aluno: sexo, nível de ensino que frequenta, idade, nível socio-económico (ISEI), interesse em Matemática.

Estimação do efeito-escola tipo B

O modelo estatístico para estimar os efeitos do tipo B é o modelo (3) que seguidamente se apresenta. As variáveis explicativas são as mesmas do modelo (2) além das que são relativas à escola: nível socio-económico contextual, existência de critério de selecção de alunos, localização da escola.

$$
\begin{aligned}
& y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 ano\_5_{ij} + \beta_2 ano\_6_{ij} + \beta_3 ano\_7_{ij} + \beta_4 ano\_8_{ij} + \beta_5 ano\_9_{ij} + \beta_6 ano\_11_{ij} + \\
& \quad + \beta_7 Menina_{ij} + \beta_8 ISEI_{ij} + \beta_9 \, \text{int}\_mat_{ij} + \beta_{10} idade_{ij} + \varepsilon_{ij} \\
& \beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \overline{ISEI}_j + \gamma_{02} HabB_j + \ldots + \gamma_{07} Selecção_j + u_{0j} \\
& \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2) \\
& u_{0j} \sim N(0, \sigma_{u0}^2)
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

[5] Recorde-se a inexistência duma variável que represente o conhecimento/competências prévias do aluno. As variáveis indicadoras do nível de ensino que o aluno frequenta funcionam como *proxy*.

Foi usado o procedimento de estimação Iterative *Generalised Least Squares* [20] e o plano amostral considerado através de *weighted scaling method 2* [21]. Todas as análises foram realizadas no programa estatístico *MLwiN* [22].

Resultados

Com base no ajuste do modelo nulo e considerando a totalidade dos casos válidos, 2461 alunos em 142 escolas, o coeficiente de partição da variância [23], [24] tem o valor de 0,33. A tabela 1 contém as estimativas dos parâmetros fixos e respectivos erros padrão para os modelos (2) e (3).

As estimativas dos coeficientes associados às variáveis dos alunos apresentam valores muito próximos em ambos os modelos. As estimativas dos parâmetros associadas ao nível de ensino (do 5º até ao 9ºano) reflectem o défice de literacia Matemática face ao que seria esperado encontrar num jovem de 15 anos de idade. Note-se que os alunos retidos não passaram pelo processo ensino-aprendizagem dos conteúdos programáticos previstos até ao 10º ano de escolaridade, tornando-se assim impossível dar provas dessa aprendizagem. Por exemplo, o modelo 2 sugere que os jovens de 15 anos a frequentar o 5º ano têm, em média, o desempenho em Matemática reduzido em 241 unidades comparativamente aos jovens de 15 anos que frequentam o 10º ou 11ºanos de escolaridade.

Tabela 1. Estimativas dos parâmetros fixos

Variável		**Modelo 2** Estimativa (erro padrão)	**Modelo 3** Estimativa (erro padrão)
Constante		538,51 (4,06)	536,73 (6,21)
Aluno: Nível de ensino	5º	-240,74 (19,46)	-239,74 (19,70)
	6º	-190,54 (8,88)	-186,48 (9,15)
	7º	-173,46 (4,99)	-170,59 (5,22)
	8º	-128,83 (3,96)	-126,28 (4,19)
	9º	-76,37 (3,26)	-73,66 (3,50)
	11º	19,32 (37,22)	19,18 (37,47)
Aluno: Sexo	Menina	-32,57 (2,29)	-33,04 (2,35)
Aluno: Nível socioeconómico	ISEI	0,54 (0,09)	0,47 (0,09)
Aluno: Interesse em Matemática	Int_mat	13,51 (1,18)	13,64 (1,20)
Aluno: Idade	Idade	-2,58 (0,34)	-2,60 (0,35)
Escola: Localização (milhares de habitantes)	Hab<3	---	11,66 (6,79)
	3<Hab<15	---	9,93 (4,31)
	100<Hab<1000	---	11,29 (5,36)
	Hab>1000 Centro	---	23,26 (8,43)
	Hab>1000 Periferia	---	15,72 (19,78)
Escola: Nível sócioeconómico	Média ISEI	---	0,63 (0,30)
Escola: Critério de selecção	Nunca aplica	---	-7,25 (5,09)
Nº de casos usados		2304	2202

As meninas apresentam resultados, em média, 33 unidades abaixo face aos meninos. Tanto o nível socio-económico do aluno como o interesse do jovem pela Matemática têm impacto positivo nos resultados atingidos.

O modelo 3 sugere que os resultados atingidos pelo aluno são melhores quando a escola que ele frequenta está localizada no centro de uma grande cidade (com mais de um milhão de habitantes). Não se verificou diferença estatisticamente significativa nos resultados escolares quando a escola está localizada em cidades de outra dimensão comparativamente com as de 15.000 a 100.000 habitantes. As estimativas referentes ao nível socio-económico da escola, variável de contexto, indicam que os jovens que estudam em escolas cuja população discente é mais afluente, têm melhores resultados. Perante este modelo, não há diferença estatisticamente significativa nos resultados escolares dos alunos que frequentam escolas que adoptem critérios de selecção de alunos face às que não têm qualquer política de selecção. No entanto, modelação exploratória em torno da questão mostrou que tal fenómeno está correlacionado com o nível socio-económico da escola. Retirando do modelo esta variável contextual, aquela relação torna-se estatisticamente significativa, indicando que os jovens que estudam em escolas que nunca adoptam critérios de selecção de alunos obtêm, em média, piores resultados comparativamente com os colegas que estudam em escolas que adoptam algum critério de selecção de alunos (ver anexo B).

A tabela 2 contém as estimativas dos parâmetros aleatórios dos modelos acima mencionados, determinadas com base nos dados amostrais. O coeficiente de determinação dos modelos 2 e 3 é 0,58. A elevada capacidade explicativa dos modelos é devida à inclusão da variável "nível de ensino"[6]. A capacidade explicativa do modelo 2, mas com a exclusão dessa variável, baixa para 0,13. Adiante são comparadas as listas ordenadas com critérios de ordenação efeito do tipo B estimado com e sem a variável "nível de ensino".

Tabela 2. Variância e coeficiente de determinação

Variância	Modelo nulo	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 2 S/nível de ensino
Nível1 – aluno	4881,4	2842,1	2871,76	4506,87
Nível2 – escola	2425,7	250,4	191,14	1867,25
Total	7307,1	3092,5	3062,9	6374,12
R^2	---	0,58	0,58	0,13

O objectivo principal desta modelação é a obtenção dos resíduos do nível 2 para produzir listas ordenadas, considerando como critério o efeito de tipo A e de tipo B. Determinou-se o desvio absoluto da posição que cada escola ocupa em cada uma delas. Os percentis 75º, 90º e 95º desse desvio absoluto são, respectivamente, 16, 25 e 28. O mesmo é dizer que 25% das escolas distam pelo menos 16 posições nas duas listas, 10% distam pelo menos 25 posições e 5% distam pelo menos 28 posições. A associação entre as duas listas quantificada pelo coeficiente de correlação de Kendall é 0,79. O gráfico de dispersão apresentado na figura 1 ilustra tal associação.

A comparação entre a lista ordenada originada pelas estimativas do efeito tipo B (modelo 3) e a lista cujas estimativas resultam do mesmo modelo excluída a variável explicativa "nível de ensino" é mostrada no gráfico de dispersão da figura 2. A correlação de Kendall entre as duas listas é -0,22.

De modo semelhante, as figuras 3 e 4 mostram graficamente duas listas ordenadas (resíduos e respectivo intervalo de confiança de 95%) resultantes do modelo 2, com e sem a variável "nível de ensino", respectivamente. A título de exemplo, as figuras mostram a posição que a mesma instituição ocupa em cada uma das listas. A estimativa intervalar torna evidente que a diferença entre a maioria das instituições não é estatisticamente significativa, pelo que a ordenação das escolas é desprovida de sentido.

[6] A retenção do aluno pode ter sido originada noutra escola que não naquela onde ele se encontra no momento da aferição do PISA. Atendendo à escassez de dados relativos à trajectória escolar do aluno, torna-se impossível melhorar o modelo.

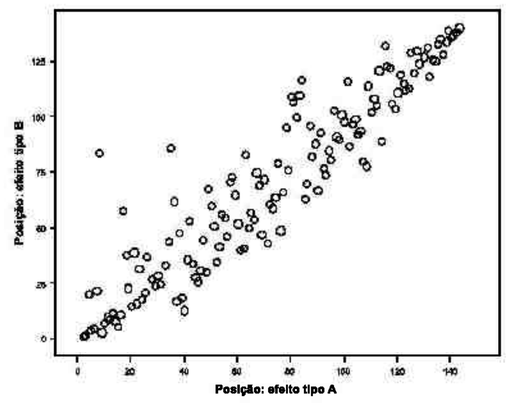


Figura 1. Gráfico de dispersão das posições das escolas em duas listas ordenadas por diferentes critérios

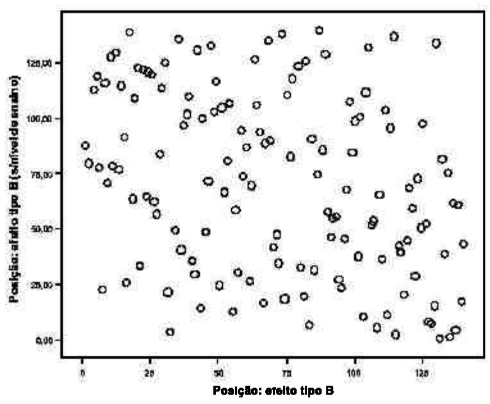


Figura 2. Gráfico de dispersão das posições das escolas em duas listas ordenadas pelo mesmo critério com diferentes variáveis

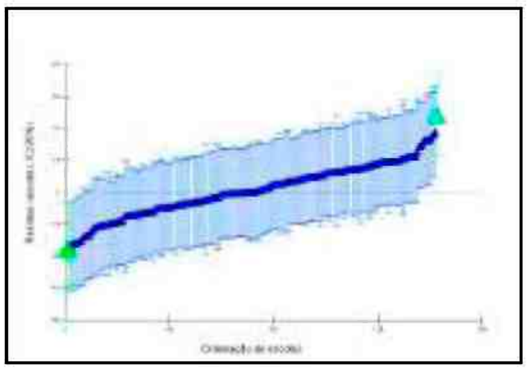


Figura 3. Estimativa pontual e intervalar do efeito tipo A (modelo 2)

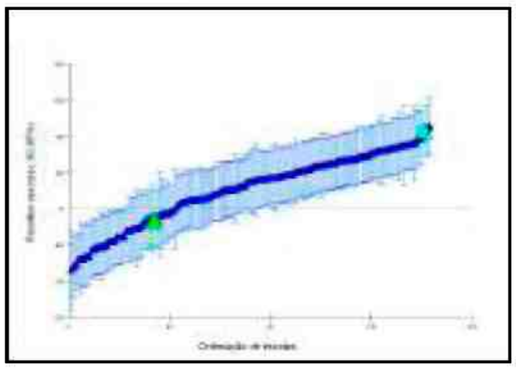


Figura 4. Estimativa pontual e intervalar do efeito tipo A (modelo 2 s/ variável "nível de ensino")

Discussão e Conclusão

A relevância da Estatística aplicada à avaliação institucional, nomeadamente em Educação, é amplamente consensual. Os cuidados metodológicos a adoptar no que se refere, entre outros, aos procedimentos de recolha dos dados, à garantia da qualidade dos dados, à escolha da classe do modelo estatístico, à selecção das variáveis, à inferência, são aspectos que têm sido tratados na literatura nacional e internacional.

Este artigo traz à discussão aspectos metodológicos relacionados com a produção de listas ordenadas das escolas, nomeadamente, mostra a discrepância dos resultados que se deve a: 1) objectivos diferentes e, por conseguinte, critérios de ordenação diferentes; 2) omissão de variáveis de controlo.

São aplicados modelos de regressão multinível, que representam a estrutura hierárquica dos alunos agrupados em escolas, aos dados portugueses do PISA 2000. A título de ilustração é usada a definição de efeito-escola proposto por Raudenbush e Willms [10].

Os resultados obtidos são elucidativos do quão arbitrário poderá ser um sistema de avaliação quando não se explicita o seu modelo conceptual, quando o modelo estatístico não especifica correctamente o modelo conceptual e não se tomam as devidas precauções face às limitações dos modelos.

Concorde-se ou não com as listas ordenadas de escolas, quaisquer que sejam os critérios estabelecidos pela tutela, decorre naturalmente dos resultados apresentados que é premente melhorar a qualidade dos dados em

Educação, garantir a disponibilidade das variáveis de controle pertinentes, adoptar procedimentos que aumentem a precisão dos resultados obtidos, interpretar resultados considerando as limitações ou eventual violação dos pressupostos dos modelos utilizados.

Referências

[1] **Bird, S. M., Cox, D., Farewell, V. T., Goldstein, H., Holt, T., & Smith, P.C.** (2005). "Performance indicators: good, bad, and ugly". *Journal of the Royal Statistical Society*, A, 168, p. 1-27.

[2] **Abrantes, P.** (2001). "Mathematical competence for all: options, implications and obstacles." *Educational Studies in Mathematics*, vol 47(2), 125-143.

[3] **Eurydice** (2004). *A avaliação dos estabelecimentos de ensino obrigatório na europa*. Disponível em http://www.eurydice.org/documents/evals/fr/frameset.htm

[4] **Queiró, J. F.** (2002). "A publicação das notas dos exames do 12º ano". *Gazeta de Matemática*, 142, 28-31.

[5] **Pestana, D. D.** (2003). "Apologia da Estatística (A Pretexto da Seriação das Escolas Secundárias)". *Gazeta de Matemática*, 144, 20-33.

[6] **Justino** (2005). *No silêncio todos somos iguais*. Lisboa, Gradiva.

[7] **Galton, F.** (1874). "On a proposed statistical scale". *Nature*, March, 5, 342-343.

[8] **Edgeworth, F.** (1888). "On a new method of reducing observations relating to several quantities". *Philosophical Magazine*, 25, p. 184-191.

[9] **Grácio, S. Franco, L. Velho, S., Sanches, E. e Rijo, S.** (2002). *Proposta de seriação das escolas secundárias segundo os resultados obtidos nos exames nacionais de 12º ano em 2001/2002*. Lisboa: FCSH, Universidade Nova de Lisboa.

[10] **Raudenbush, S. W., & Willms, J. D.** (1995). "The estimation of school effects". *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 20(4), 307-335.

[11] **Robinson, W. S.** (1950). "Ecological correlations and the behaviour of individuals". *American Sociology Review*, 15, 351-357.

[12] **Lohmoller, J. B., Falter, J., Link, A., & de Rijke, J.** (1985). "Unemployment and the rise of national socialism: contradicting results from different regional aggregations". In P. Nijkamp (ed.) *Measuring the unmeasurable*. Martinus Nijhoof: Den Haag.

[13] **Goldstein, H., & Spiegelhalter, D. J.** (1996). "League tables and their limitations: statistical issues in comparison of institutional performance". *Journal of the Royal Statistical Society*, A, 159(3), 385-443.

[14] **Goldstein, H.** (1997). "Methods in school effectiveness research". *School Effectiveness and School Improvement*, 8(4), 369-395.

[15] **Sammons, P., Thomas, S., & Mortimore, P.** (1997). *Forging links: effective schools and effective departments*. London: Chatman Publishing, Lda.

[16] **Aitkin, M., Longford, N.** (1986). "Statistical modelling issues in school effectiveness studies". *Journal of the Royal Statistical Society*, A, 149, part 1, p. 1-43.

[17] **Bryk, A. S., & Raudenbush, S. W.** (1992). *Hierarchical linear models*. Newbury Park, California: Sage.

[18] **Longford, N. T.** (1993). *Random coefficient models*. Oxford: Clarendon Press.

[19] **Ferrão, M. E.** (2003). *Introdução aos modelos de regressão multinível em educação*. Campinas: Komedi.

[20] **Goldstein, H.** (1986). "Multilevel mixed linear models analysis using iterative generalised least squares". *Biometrika*, 73, 43-56.

[21] **Pfeffermann, D., Skinner, C. J., Holmes, D. J., Goldstein, H., & Rasbash, J.** (1998). "Weighting for unequal selection probabilities in multilevel models". *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 60, 23-40.

[22] **Rasbash, J., Browne, W., Healy, M., Cameron, B., & Charlton, C.** (2001). *MLwiN. Multilevel models project*. London: University of London.

[23] **Goldstein, H.** (2003). *Multilevel Statistical Models* (3rd ed). London: Edward Arnold.

[24] **Goldstein, H., Browne, W., & Rasbash, J.** (2002). "Partitioning variation in multilevel models". *Understanding Statistics*, 1(4), 223-231 .

Bibliografia

Ferrão, M. E., Loureiro, M. J., Simões, M. F., & Guedes, P. (2005). *À procura da escola eficaz – referencial teórico do projecto de investigação 3EM*. Covilhã: UBI.

Goldstein, H., Rasbash, J., Yang, M., Woodhouse, G., Pan, H., Nuttal, D., & Thomas, S. (1993). "A multilevel analysis of school examination results". *Oxford Review of Education*, 19(4), 425-433.

Montgomery, D. G., & Peck, E. A. (1982). *Introduction to linear regression analysis.* New York: John Wiley & Sons.

Raudenbush, S. W. (2004). "What are value-added models estimating and what does this imply for statistical practice?" *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 29(1), 1-129.

Anexo A

Dados do PISA 2000

PISA[7] é um estudo da responsabilidade da OCDE sobre os conhecimentos e as competências de alunos de 15 anos dos principais países industrializados. A recolha de dados ocorre de três em três anos. No ano 2000 envolveu cerca de 265 000 alunos de 32 países, 28 dos quais membros da OCDE. A recolha de dados foi efectuada através de testes de desempenho em leitura, matemática e literacia científica e através de questionários aplicados a alunos e directores das escolas incluídas no plano amostral. Os testes de desempenho foram criados de modo a assegurar a cobertura de todos os conteúdos e a não sobrecarregar os cadernos de teste a serem aplicados aos alunos [25], [26], [27].

Neste trabalho usa-se, como medida de resultado escolar, o desempenho em Matemática. As estimativas obtidas foram transformadas numa escala com média 500 e desvio padrão 100, usando os dados dos países membros da OCDE com excepção da Holanda [26], [28].

Em Portugal foram seleccionadas aleatoriamente 156 escolas, das quais 3 se recusaram a participar no estudo e outras 4 não tinham já alunos com 15 anos. Os alunos, em cada escola, foram também aleatoriamente seleccionados. Em consequência da aplicação destes critérios, o PISA envolveu 149 escolas, 138 públicas e 11 privadas, abrangendo um total de 4604 alunos[8]. Foram incluídos na população alvo todos os alunos de 15 anos a frequentar a escola desde o 5ºano ao 11ºano de escolaridade [29].

A base de dados, bem como todos os relatórios técnicos estão disponíveis em www.pisa.oecd.org/pisa/. O ficheiro de dados intstud_math.sav contém 2545 casos relativos aos alunos portugueses que foram submetidos aos testes de Matemática.

Para este trabalho, excluíram-se da análise os alunos que estudam em escolas privadas sem financiamento público[9] e seleccionaram-se as seguintes variáveis:

Variáveis do aluno

- Sexo: variável nominal binária, "1" representa as meninas e "0" representa os meninos; os meninos constituem o grupo de referência. Segundo expansão da amostra, 52,4% da população de referência, são meninas.
- Nível de ensino que frequenta: variável ordinal que representa o nível de ensino, do 5º ano ao 11º ano, que os alunos da amostra frequentam. Visando a modelação, a variável foi recodificada, através de variáveis mudas, e considerou-se como grupo de referência o 10º ano (nível adequado à idade de 15 anos). Considerando os casos válidos e segundo a expansão da amostra, 52,2% da população de referência frequentam o 10º ou 11º ano de escolaridade, 28,2% frequentam o 9ºano de escolaridade e os restantes alunos distribuem-se entre o 5º e o 8º anos.
- Idade: medida em meses, a média é 187,6 com desvio padrão 3,4. Para a modelação a variável foi centrada em 180;
- Nível socio-económico: aferido pelo índice internacional socio-económico (ISEI) da situação ocupacional do pai ou mãe do aluno [30]. Usou-se o valor máximo dos dois, com média 44,0 e desvio padrão 15,9. Nos modelos 2 e 3 a variável foi centrada na média.
- Interesse em Matemática: índice construído segundo Baumert, Gruehn, Koller e Schnabel [31], reflectindo o grau de concordância do aluno com afirmações, tais como: "Fico totalmente absorvido quando estudo Matemática"; "A Matemática é importante para mim"; "Eu não gostaria de desistir porque a Matemática é divertida".

Variáveis da escola

- Nível socio-económico médio da escola: média do nível socio-económico dos alunos da escola.
- Localização da escola: variável nominal que representa, em termos do número de habitantes, a dimensão

[7] Programme for International Student Assessment.

[8] O ficheiro de dados contém 4585 casos não tendo encontrado explicação para a diferença.

[9] Na amostra encontram-se 2334 alunos que frequentam escolas públicas, 127 alunos que frequentam escolas particulares com financiamento público, 49 alunos que estudam em escolas particulares sem financiamento público e 35 alunos para os quais o tipo da escola que frequentam é omisso.

da vila/cidade onde a escola se localiza. As categorias (e respectiva distribuição dos alunos) são as seguintes: 1 – até 3.000 habitantes (4,8%); 2 – de 3.000 a 15.000 habitantes (36,9%); 3 – de 15.000 a 100.000 habitantes (36,9%); 4 – de 100.000 a 1.000.000 de habitantes (13,3%); 5 – centro de cidade com mais de 1.000.000 de habitantes (6,8%); 6 – periferia de cidade com mais de 1.000.000 de habitantes (1,3%). A variável foi recodificada, através de variáveis mudas, e considerou-se como grupo de referência a localização em cidade com 15.000 a 100.000 habitantes.

• Critério de selecção de alunos de acordo com o desempenho escolar: as escolas foram classificadas em dois grupos – (1) as que nunca aplicam tal critério e (0) as que o aplicam às vezes ou sempre. As últimas constituem o grupo de referência e representam 25,5% dos alunos abrangidos.

Apesar das críticas [32], a utilização secundária dos microdados do PISA constitui um avanço relativamente à utilização de qualquer outro conjunto de dados disponível referente à avaliação do sistema educativo português. No entanto, as análises aqui apresentadas ainda ficam aquém do que seria desejável no âmbito do estudo dos efeitos escolares, pois, entre outras, não se dispõe de uma variável fundamental associada ao aluno – a que mede o seu conhecimento à entrada na escola.

Referências

[25] **OECD** (1999). *Measuring student knowledge and skills: a new framework for assessment*. Paris: OECD.

[26] **OECD** (2000). *Measuring student knowledge and skills: the PISA 2000 assessment of reading, mathematical and scientific literacy*. Paris, OECD.

[27] **OECD** (2002a). *PISA 2000 technical report*. Paris: OECD.

[28] **OECD** (2002b). *Manual for the PISA 2000 database*. Paris: OECD.

[29] **GAVE** (2001). *Resultados do estudo internacional PISA 2000 – Primeiro relatório nacional*. Lisboa: Ministério da Educação.

[30] **Gazeboom, H. B. G., De Graaf, P., & Treiman, D. J.** (1992). "A standard international socio-economic index of occupational status". *Social Science Research*, 21(1), 1-56.

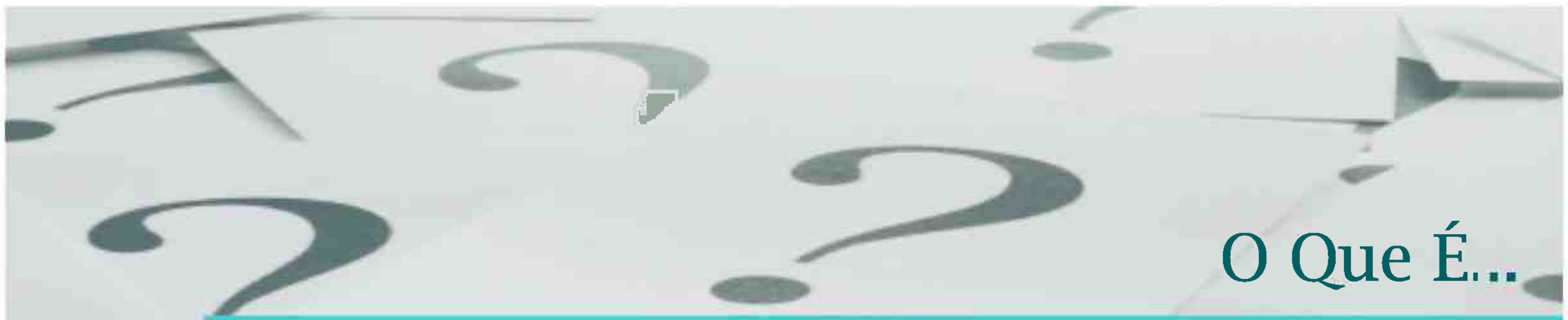
[31] **Baumert, J., Gruehn, S., Koller, O. E Schnabel, K.U.** (1997). *Bildungsverlaufe und psychosoziale entwicklung im jugendalter (BIJU): dokumentation – Band 1*. Berlin: Max-Planck-Institut fur Bildungsforschung.

[32] **Collani, Elart von** (2001). "OECD PISA - An example of stochastic illiteracy?" *Economic Quality Control*, 16, p. 227-253.

Anexo B

Tabela de estimativas do modelo 3

Variáveis		**Modelo 3 -Final** Estimativa (erro padrão)	**Modelo 3 c/critério de selecção** Estimativa (erro padrão)
Constante		538,05 (4,08)	546,08 (5,63)
Aluno: Nível de ensino	5º	-238,65 (19,54)	-242,76 (19,61)
	6º	-186,28 (9,03)	-188,95 (8,98)
	7º	-170,85 (5,10)	-172,50 (5,12)
	8º	-126,38 (4,10)	-127,84 (4,07)
	9º	-73,80 (3,39)	-75,12 (3,37)
	11º	---	---
Aluno: Menina		-32,62 (2,32)	-33,03 (2,35)
Aluno: Nível socio-económico		0,46 (0,09)	0,52 (0,09)
Aluno: Interesse em Matemática		13,44 (1,19)	13,59 (1,20)
Aluno: Idade		-2,59 (0,34)	-2,60 (0,35)
Escola: Localização (milhares de habitantes)	Hab<3	---	---
	3<Hab<15	---	---
	100<Hab<1000	---	---
	Hab>1000 Centro	16,14 (7,95)	18,18 (8,36)
	Hab>1000 Periferia	---	---
Escola: Nível sócio-económico	Média ISEI	0,66 (0,26)	---
Escola: Critério de selecção nunca aplica		---	-10,57 (4,93)
Nº de casos usados		2202	2202



por Gustavo Granja
[Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico]

O Grupo Fundamental

O grupo fundamental de um espaço é um dos conceitos mais importantes da Topologia — o ramo da Matemática que estuda a "forma". Permite, por exemplo, distinguir matematicamente entre a forma de uma superfície esférica e a forma da superfície de um toro.

O grupo fundamental de um espaço topológico é um invariante topológico introduzido por Henri Poincaré em 1895 num artigo que fundou a área da Matemática hoje chamada Topologia Algébrica [1].

Um espaço topológico é um conjunto munido de uma estrutura, chamada uma *topologia*, que formaliza a ideia intuitiva de vizinhança. Usando esta estrutura pode definir-se a noção de função contínua entre dois espaços topológicos, generalizando o conceito de função contínua real de variável real.

O grupo fundamental de um espaço X num ponto $p \in X$ é um conjunto $\pi_1(X,p)$ munido de uma operação. Os elementos são caminhos em X com início e fim em p, a que chamamos *laços* em p. Intuitivamente, um caminho é a trajectória descrita por uma partícula sobre X durante um certo intervalo de tempo. Formalmente, um laço em p é uma aplicação contínua $\alpha : [0,1] \to X$ com $\alpha(0) = \alpha(1) = p$.

Um aspecto fulcral é que não *distinguimos* entre caminhos que possam ser deformados continuamente um no outro em X mantendo as extremidades fixas em p. A Figura 1 descreve alguns elementos de $\pi_1(X;p)$ com X um plano perfurado por um pequeno círculo azul. O laço α pode ser deformado em X no laço constante em p que chamamos o *laço trivial*. O mesmo não sucede com β e γ (o buraco obstrui uma tal deformação). β também não pode ser deformado em γ pois os laços são percorridos em sentidos opostos.

Definimos uma operação $*$ em $\pi_1(X,p)$ justapondo os laços na ordem indicada. Formalmente,

$$(\beta * \gamma)(t) = \begin{cases} \beta(2t) & \text{se } 0 < t < \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

Na Figura 1, $\beta * \gamma$ pode ser deformado no laço trivial (o ponto correspondente ao fim de β e ao início de γ pode ser movido durante uma deformação). É fácil demonstrar que $*$ é uma operação associativa, com elemento neutro (o laço trivial) e que todos os laços têm um inverso (o laço em questão percorrido no sentido contrário). Estas propriedades da operação são abreviadas dizendo que $(\pi_1(X,p),*)$ é um grupo.

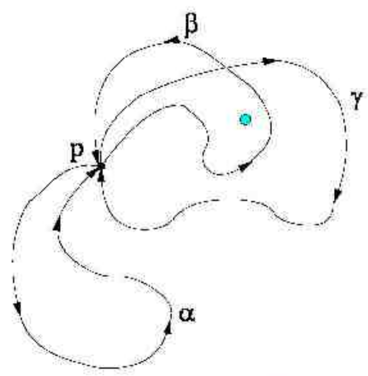


Figura 1: Um plano perfurado.

O grupo fundamental do espaço indicado na Figura 1 pode ser identificado com o grupo dos números inteiros $\mathbb{Z}$ com a operação de soma. A identificação atribui a um caminho o número de voltas que este dá ao buraco (contando a orientação).

A operação $*$ não é necessariamente comutativa. Considerando a Figura 2 vemos que $\alpha*\beta$ e $\beta*\alpha$ são elementos distintos do grupo fundamental de um plano duplamente perfurado.

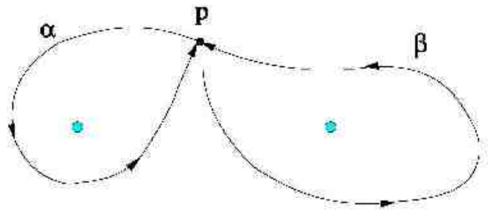


Figura 2: Um plano duplamente perfurado.

A Topologia é um ramo da Matemática que estuda a *forma* geral de um espaço sem atender a detalhes como por exemplo o "tamanho" (esse é o âmbito da Geometria). Dois espaços são considerados equivalentes se podem ser deformados continuamente um no outro "sem rasgar". Por exemplo, as superfícies de um *donut* e de uma chávena de café são equivalentes como espaços. Formalmente dizemos que dois espaços X e Y são *homeomorfos* se existe uma bijecção contínua $f: X \to Y$ com inversa contínua. Uma tal aplicação determina uma identificação dos grupos fundamentais de X e Y, o que se traduz dizendo que π_1 é um *invariante topológico*. Dois espaços que tenham grupos fundamentais diferentes não podem ser equivalentes. É isto que acontece com os espaços representados nas Figuras 1 e 2 (a operação é comutativa num grupo e não no outro).

Sob certas condições o grupo fundamental contém informação suficiente para determinar o espaço X. É isso que acontece no caso das superfícies (fechadas), uma das quais - o toro - é representada na Figura 3. Deixamos como exercício ao leitor escrever o laço β monstra-se que o grupo fundamental do toro se

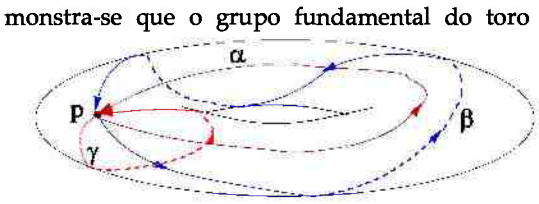


Figura 3: O toro.

em termos de α e γ usando **a** operação ∗. Demonstra-se que o grupo fundamental do toro se identifica com $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, o grupo formado pelos pares de inteiros com soma coordenada a coordenada. Uma identificação leva α em (1,0) e γ em (0,1) e nesse caso os inteiros correspondem ao número de voltas dado em torno de cada um dos "dois buracos" do toro.

Finalmente referimos que o grupo fundamental desempenha um papel crucial na classificação (ainda não terminada) das variedades de dimensão 3 (o análogo tridimensional das superfícies). Provavelmente o maior avanço recente em Matemática foi a demonstração por Perelman da conjectura de Poincaré - trabalho pelo qual lhe foi atribuída uma medalha Fields em 2006. Esta conjectura, feita por Poincaré em 1905, afirma que há uma única variedade de dimensão 3 (fechada) com grupo fundamental trivial, nomeadamente o conjunto dos vectores de comprimento 1 em $\mathbb{R}^4$.

Um exemplo de uma variedade de dimensão 3 é o espaço $SO(3)$ dos referenciais ortonormados em $\mathbb{R}^3$. Prova-se que o grupo fundamental deste espaço tem apenas dois elementos distintos. A Figura 4 contém uma representação do elemento não trivial de $\pi_1(SO(3))$ e do seu dobro (o leitor deve imaginar um referencial dentro de um carro em miniatura que percorre um dos lados do cinto). É divertido encontrar uma deformação do laço representado à direita no laço trivial. Recorde que é necessário manter a orientação das extremidades do cinto durante a deformação (isto corresponde a fixar o referencial no início e fim do caminho).

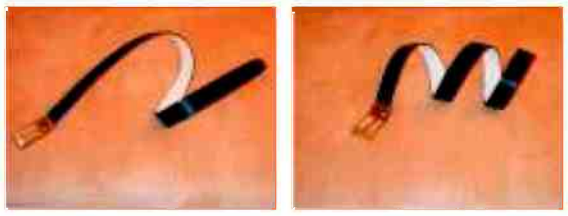


Figura 4: O elemento não trivial do grupo fundamental do espaço dos referenciais em $\mathbb{R}^3$ e o seu dobro.

Referências

[1] **Poincaré, H.** (1985). "Analysis situs". *Journal de l'École Polytechnique*, 1, 1-123.

Bibliografia

Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press. Disponível em http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html.

por Paulo Jacinto Almeida [Escola Secundária D. Inês de Castro, Alcobaça]
Adelaide Valente Freitas [Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro]

Exemplo da Utilização do Excel na Abordagem do Conceito Frequencista de Probabilidade

A facilidade com que os jovens rapidamente dominam as novas tecnologias pode ser um instrumento de mais valia no esclarecimento de dúvidas e assimilação de novos conhecimentos. Uma proposta no âmbito do ensino das Probabilidades no 12º ano é aqui apresentada.

1. Introdução

O ensino das Probabilidades nos Ensinos Básico e Secundário recorre muito à intuição e à visualização dos conceitos. Actualmente, a interpretação frequencista de Probabilidade e a Lei dos Grandes Números (LGN) são afloradas no 9º ano e novamente abordadas no 12º ano de escolaridade. Estes assuntos são propícios à realização de actividades experimentais, que convidam ao espírito intuitivo e dedutivo.

Genericamente, no contexto da definição frequencista de Probabilidade, qualquer actividade a desenvolver impõe a realização de experiência repetidas num número elevado de vezes e sempre nas mesmas condições. Por isto, o computador, ou qualquer outro meio tecnológico, pode desempenhar um papel de suma importância nesse tipo de actividade, não descurando o propósito de esclarecer a interpretação frequencista da probabilidade distinguindo-a do chamado conceito clássico de Laplace.

É esperado[1] que um aluno do 12º ano identifique o valor a atribuir à probabilidade de um acontecimento

- recorrendo à regra de cálculo dada pela definição clássica de Laplace, se as condições do problema o permitirem; e/ou
- utilizando a definição frequencista de probabilidade, se condições houver que lhe permitam encontrar valores experimentais para a probabilidade.

O novo programa de Matemática do 12º ano propõe a realização de "experiências que permitam tirar partido de materiais lúdicos e de simulações". No primeiro período do ano lectivo de 2003/2004 foi dinamizada uma actividade sobre a definição frequencista de probabilidade e executada com o auxílio de aplicações concebidas em Excel. A actividade foi realizada por 112 alunos do 12º ano da Escola Secundária D. Inês de Castro (Alcobaça). Verificámos que a motivação, factor importantíssimo no ensino, é efectivamente maior quando se realizam tarefas envolvendo ferramentas informáticas. Avaliados os trabalhos constatámos que os resultados foram, na sua globalidade, bastante positivos. Houve motivação e aprendizagem. O facto de se ter recorrido aos computadores em plena aula permitiu a simulação de um grande número de experiências e o despertar nos jovens do gosto por aprender, ávidos que estão pelo uso das tecnologias informáticas.

[1]No 12º ano de escolaridade, os alunos ainda não têm conhecimentos suficientes para que se possa enunciar, formalmente, a LGN. Chama-se aqui a atenção que existem manuais de Matemática do 12º ano que "intitulam" a definição frequencista de probabilidade como sendo a LGN (de Bernoulli). Nos manuais do 9º ano a LGN é referida, genericamente, na forma: "para um grande número de experiências, a frequência relativa de um acontecimento é um valor aproximado da probabilidade desse acontecimento, pela LGN".

Com base na nossa experiência, na Secção 3 propomos uma actividade destinada a alunos do 12º ano de Matemática a ser executada com o auxílio de aplicações em Excel, as quais simulam o lançamento de dados equilibrados. Os comandos dessas aplicações em Excel são descritos na Secção 4. Antes, porém, começaremos na Secção 2 por relembrar a LGN, atribuída a Bernoulli, e a interpretação frequencista dada ao termo probabilidade de um acontecimento.

2. A Lei dos Grandes Números e o conceito frequencista de Probabilidade

Relativamente a uma experiência aleatória, seja p a probabilidade de um acontecimento A ocorrer numa realização da experiência. Por definição, o valor p é a imagem do acontecimento (conjunto) A por uma função (medida de probabilidade) P, ou seja, $p=P(A)$.

Para cada n provas independentes da experiência aleatória, consideremos a variável $f_n(A)$ que representa a frequência relativa do acontecimento A, ou seja, o quociente entre o número de vezes que ocorre o acontecimento A e n.

A medida de probabilidade P satisfaz o seguinte resultado:

Teorema [Lei dos Grandes Números (de Bernoulli)]: Para qualquer $\varepsilon > 0$ tem-se

$$\lim_{n \to +\infty} P(\ |f_n(A) - p| < \varepsilon) = 1$$

Para cada n realizações de provas independentes da experiência, a concretização da variável aleatória $f_n(A)$ representa a frequência relativa observada do acontecimento A. A LGN garante que, para um número n suficientemente elevado de realizações da experiência nas mesmas condições, a frequência relativa do acontecimento A diferirá muito pouco do valor p com uma probabilidade muito próxima de 1.

Mas como determinar o valor p? Com base na LGN, a corrente frequencista sustenta a seguinte definição:

Definição 1 [Definição frequencista de probabilidade]: Dada uma experiência aleatória e A um acontecimento que lhe está associado tem-se

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} f_n(A)$$

onde $f_n(A)$ representa a frequência relativa do acontecimento A em n realizações independentes e sempre nas mesmas condições da experiência.

Um aluno do 12º ano não tem a noção de variável aleatória e de limite de uma função[2]. Assim, esta aproximação frequencista da probabilidade é introduzida dando referência que a definição tem como base de sustentação um resultado teórico conhecido por LGN, mas sem o enunciar formalmente.

Apesar do conceito frequencista de probabilidade aparentar ser simples, observa-se, em campo, que a maioria dos alunos tem dificuldades em entendê-lo a partir de uma aula expositiva, e confunde-o com o conceito clássico de probabilidade (ou, simplesmente, não entendem a diferença). Como exemplo veja-se que apenas 7 alunos, num universo de 55 alunos, responderam correctamente à seguinte questão, retirada de um exame nacional (Época Normal, 1995), e apresentada num teste após o tema aproximação frequencista de probabilidade ter sido abordado em aulas expositivas com resolução de exercícios tipo.

[2]Para alunos do 12º ano de escolaridade a Definição 1 deverá ser apresentada recorrendo à interpretação empírica do limite da seguinte forma: a probabilidade de um acontecimento A é o valor para o qual a sequência (empírica) de frequências relativas observadas de A tende a estabilizar à medida que aumenta indefinidamente o número de realizações, independentes e sempre nas mesmas condições, da experiência.

Questão:

A tabela seguinte refere-se aos dados obtidos nos estudos clínicos realizados para avaliar a actividade terapêutica de um medicamento.

Fases da experiência	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Nº de doentes medicados	120	235	528	822	1099	2244
Nº de doentes que registaram melhoras	52	126	310	490	659	1346

Com base nos resultados obtidos, os investigadores concluíram que a probabilidade de obter êxito com o referido medicamento é de *0,60*. Comente a conclusão a que chegaram os investigadores, referindo a lei em que se basearam.

Seria esperado que os alunos aludissem à LGN, calculassem as frequências relativas das melhoras obtidas com o medicamento em cada fase da experiência e indicassem o valor *0,60* como o valor em torno do qual essa sequência de frequências relativas calculadas tenderia a estabilizar à medida que se considera um número cada vez maior de doentes medicados. No entanto, observámos que a maioria das respostas dadas referiam que o valor *0,60* resultava de:

$$\frac{52+126+310+490+659+1346}{120+235+528+822+1099+2244}$$

Tal representará uma "aplicação" da fórmula $\frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{número de casos possíveis}}$ do conceito clássico de Probabilidade?

Entre os outros alunos houve vários que indicaram o valor $^{1346}/_{2244}$. Será uma "aplicação" do conceito frequencista, observando <u>apenas</u> o par com maior número de "experiências"?

3. Uma proposta utilizando o Excel

As folhas de cálculo são um tipo de software adaptável à resolução de problemas numéricos e ao uso de processos iterativos, sendo um possível instrumento de trabalho no ensino da Matemática, em particular, das Probabilidades e da Estatística. Veja-se, por exemplo, o site do projecto ALEA onde se apresentam algumas propostas de trabalho sobre Probabilidades executadas em Excel.

Relativamente ao ensino do conceito frequencista de probabilidade, o Excel torna-se um instrumento útil na simulação de experiências e no apoio ao cálculo de valores experimentais para a probabilidade.

Tendo em conta a nossa experiência, a seguir propomos uma actividade para trabalhar o conceito frequencista de probabilidade a realizar com recurso a ficheiros em Excel. Esses ficheiros são aqui designados por *Simulação 1* e *Simulação 2* e simulam a repetição de experiências envolvendo dados. Os passos para a construção do ficheiro *Simulação 2* encontram-se descritos na secção seguinte. O processo de construção do ficheiro *Simulação 1* é análogo.

Actividade:

1. Considera o seguinte problema:

Num certo jogo, lançam-se, simultaneamente, cinco dados equilibrados, cada dado com as faces numeradas de 1 a 6. Para se ganhar é preciso que saia o número 5 em pelo menos um dos dados e nunca o número 6. Qual é a probabilidade de se ganhar o jogo?

Recorrendo à aplicação Excel, simula o jogo descrito usando o ficheiro *Simulação 1*.

1.1 Completa a seguinte tabela:

Número de experiências	Frequência relativa de ganhos
50	
500	
2000	
5000	
10000	

1.2 Indica uma aproximação para a probabilidade pedida.

1.3 Observa se as frequências relativas calculadas tendem a estabilizar em torno de algum valor. Indica pois o valor da probabilidade pedida de acordo com a definição frequencista de probabilidade.

1.4 Baseando-te na definição clássica de probabilidade, indica o valor da probabilidade pedida[3].

1.5 Compara os valores que indicaste nas alíneas anteriores e comenta.

2. Considera o seguinte problema:

Num certo jogo, um jogador lança três dados equilibrados, cada um com as faces numeradas de 1 a 6. Se a soma dos números saídos for superior ou igual a 14 o jogador ganha, se a soma for inferior a 14 o jogador perde. Qual é a probabilidade de se ganhar o jogo?

Recorrendo ao programa Excel, simula a experiência descrita usando o ficheiro *Simulação 2*.

2.1 Completa a seguinte tabela:

Número de experiências	Frequência relativa de ganhos
50	
500	
2000	
5000	
10000	

2.2 Que conclusões podes tirar da análise da tabela?

2.3 Indica o valor da probabilidade pedida, de acordo com a definição frequencista de probabilidade.

2.4 Indica o valor da probabilidade pedida, de acordo com a definição clássica de probabilidade[4].

2.5 Compara os valores que indicaste nas alíneas anteriores e comenta.

3. Relativamente à pergunta: como averiguar se uma moeda é equilibrada?, qual(is) das seguintes afirmações te parece(m) efectivamente correcta(s)?

3.1 A moeda é equilibrada porque existe um resultado favorável em dois possíveis.

3.2 Determina-se um valor aproximado da probabilidade de obter cara lançando-se a moeda 100 vezes; a probabilidade de obter cara será aproximadamente igual ao quociente entre o número de caras obtido e 100.

3.3 Determina-se o valor da probabilidade de obter cara lançando-se a moeda 1000 vezes; probabilidade de obter cara será exactamente igual ao quociente entre o número de caras obtido e 1000.

4. Em relação à questão anterior seria possível recorrer à definição frequencista de probabilidade? Em caso afirmativo, como determinarias a probabilidade pedida?

As questões 1.3, 2.3, 3 e 4 permitirão avaliar a assimilação do conceito por parte do aluno no início, durante e no final da actividade. A questão 3 tem dois objectivos: *i)* verificar se o aluno identifica uma situação onde o

[3] A resposta é $\frac{5\times4^4+10\times4^3+10\times4^2+5\times4+1}{6^5}\simeq 0\,27019$

[4] A resposta é $\frac{35}{6^3}\simeq 0{,}162037$

conceito clássico não é aplicável; *ii)* observar se o aluno entende a frequência relativa como uma aproximação da probabilidade. Com a questão 4 pretende-se verificar se o aluno é capaz de traduzir, por suas próprias palavras e para a situação específica colocada, a interpretação frequencista de probabilidade.

Uma actividade análoga foi realizada numa das salas de informática da Escola Secundária D. Inês de Castro (Alcobaça) no primeiro período do ano lectivo de 2003/2004. As turmas do 12º ano foram divididas em grupos de dois ou três alunos, repartidos pelos doze computadores disponíveis na sala. Durante a realização da actividade os alunos foram acompanhados por dois professores que os iam orientando nas tarefas informáticas e nas questões que requeriam a aplicação do conceito de Laplace, para que a comparação entre os valores obtidos nos dois conceitos tivesse sentido. A duração da actividade foi de cerca de cem minutos por turma estando envolvidos um total de 112 alunos.

Avaliados os trabalhos realizados constatámos que, no início da actividade, 73,2% dos alunos demonstravam não dominar o conceito. No final da actividade, 88,6% daqueles respondiam correctamente a questões de desenvolvimento e 86 dos 112 alunos demonstravam compreender a definição trabalhada. Curiosamente, observámos que alguns alunos são capazes de reproduzir a definição mas não de traduzi-la perante um problema concreto.

4. Construção de um simulador em Excel

As aplicações em Excel atrás referidas como *Simulação 1* e *Simulação 2* e anexas às questões 1 e 2, respectivamente, são similares pelo que apenas passaremos a descrever os comandos em Excel (versão portuguesa) do ficheiro *Simulação 2*. Este ficheiro simula a realização sucessiva do jogo associado à questão 2 da actividade aqui proposta. Concretamente, simula o lançamento de três dados, calcula a soma do número de pintas obtidas em cada um dos dados e auxilia o utilizador a encontrar valores experimentais para a probabilidade do jogador ganhar ou perder. Para a repetição do jogo recorremos à construção de macros apropriadas as quais também descrevemos. A interface da aplicação *Simulação 2* encontra-se na Figura 1.

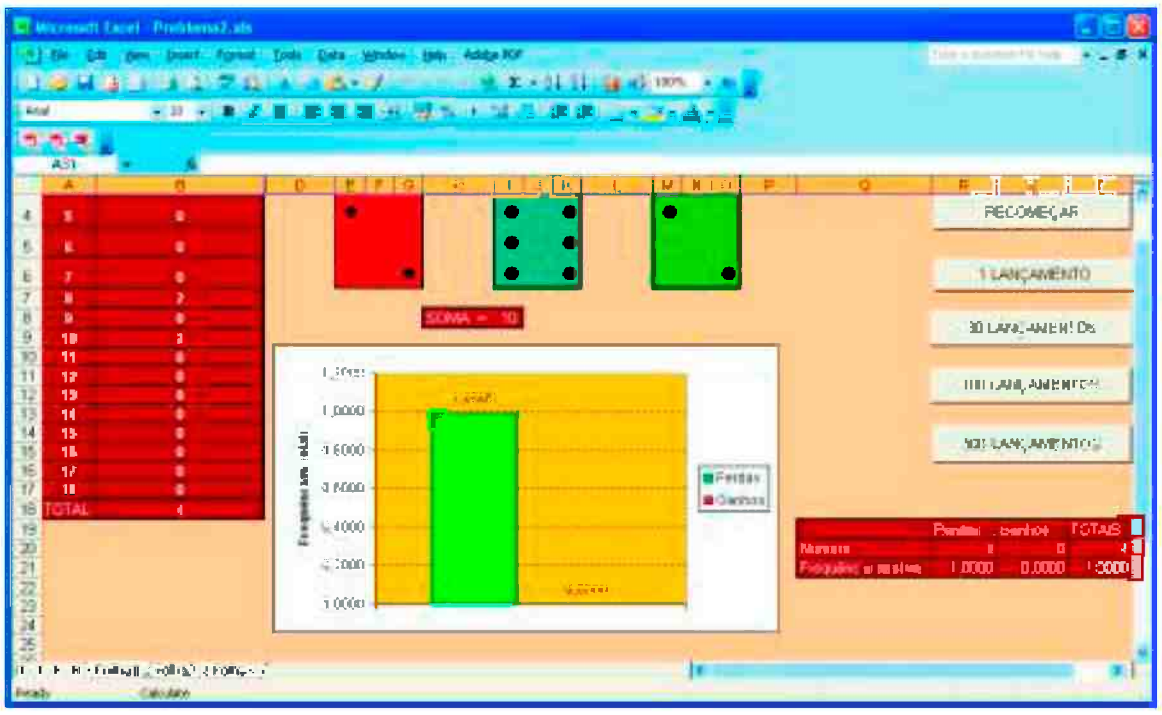


Figura 1: Interface da aplicação *Simulação 2*

4.1 Simulação do lançamento de três dados

Comecemos por descrever os procedimentos utilizados para construir, numa folha de cálculo, uma face de um dado e simular o lançamento do dado.

Passo 1. Gerar um número aleatório entre 1 e 6.

Numa das células (à escolha, de acordo com o sítio onde se pretende colocar a face visível do dado), por exemplo E3, insira-se a instrução:

=1+INT(6 x ALEATÓRIO())

Passo 2. Construir a face visível do dado de acordo com o número obtido no Passo 1. (Suponha-se que a referida face do dado ficará no quadrado formado pelas células E4 a G4 por E4 a E6.)

Insiram-se as seguintes fórmulas nas células indicadas de acordo com a seguinte tabela.

Célula	Fórmula a inserir
E4	=SE(E3>1; CARÁCT(108))
E6	=SE(E3>3;CARÁCT(108))
G4	=E6
G6	=E4
E5	=SE(E3=6; CARACT(108))
F5	=SE(OU(E3=1;E3=3;E3=5);CAR ACT(108))
G5	=E5

Passo 3. Formatar a face visível do dado.

Formate-se o quadrado formado pelas células E4 a G4 por E4 a E6 todas com o mesmo tamanho (por exemplo: linha e coluna: largura 3 e altura 21) e tipo de letra Wingdings, tamanho 16, centrado. (A cor e o bordo do dado aqui ficam como opção).

No fim do passo 3 será visível uma face de um dado semelhante às faces ilustradas na Figura 1.

Para construir as outras duas faces dos outros dados repetem-se os passos 1, 2 e 3 atrás descritos adaptando as células.

4.2 Registo da variável em estudo

Para a experiência a simular interessam considerar as variáveis: *soma* do número de pintas obtidas em cada uma das três faces visíveis dos três dados e o *número de ganhos*.

Passo 4. Calcular a variável *soma*.

Numa célula à escolha, por exemplo I8, coloque-se a instrução

=SOMA(E3:I3:M3)

onde I3 e M3 desempenham, para os dois últimos dados, o mesmo papel que E3 desempenha para o primeiro dado (Passo 1).

Passo 5. Registar a ocorrência das variáveis *soma* e *número de ganhos*.

Coloque-se nas células A2,…,A17 os valores possíveis da variável *soma*. Construa-se uma coluna "fantasma" a esconder, por exemplo, coluna C2, …, C19, que registará, em cada experiência, a ocorrência ou não de cada um dos valores das variáveis: *soma* (C2, …, C17), *número de perdas* (C18) e *número de ganhos* (C19). Assim, coloquem-se as seguintes instruções conforme se indica na tabela:

Célula	Fórmula a inserir
.C*i*, *i*=2,…,17	=SE(I8=Ai;1;0) , *i*=2,…,17
C18	=SE(E(I8>2;I8<14);1;0)
C19	=SE(E(I8>13;I8<19);1;0)

Por fim, são construídas tabelas de frequências das variáveis de interesse, de modo que os resultados de cada experiência sejam sucessivamente acrescentados nas tabelas.

Passo 6. Construir tabelas (conforme consta na Figura 1).

Construa-se uma tabela de frequências absolutas para a variável *soma* (veja-se, na Figura 1, a tabela do lado esquerdo). Para tal, na célula B*i* coloque-se a instrução =B*i*+C*i*, para *i*=2,…, 17; esta servirá de contador (incremento em cada experiência) para cada um dos valores possíveis da variável *soma*.

Construa-se (por exemplo, no rectângulo formado pelas células Q19 a T19 por Q19 a Q21) uma tabela da frequência relativa de perdas e ganhos (veja-se, na Figura 1, a tabela do lado direito). Na célula R20 insira-se a instrução =R20+C19 (que contabilizará o número de perdas acumuladas). Na célula S20 insira-se a instrução =S20+C20 (que contabilizará o número de ganhos acumulados). As frequências relativas de perdas e ganhos são obtidas nas células R21 e S21, respectivamente, com as instruções =R20/T20 e S20/T20, onde T20 contém a instrução =R20+S20 (número total de lançamentos).

4.3 Criação de rotinas de repetição

Para permitir a repetição do jogo um determinado número *n* (pré-definido) de vezes são criadas macros, isto é, rotinas que possibilitem a repetição de comandos. Para criar uma macro é necessário aceder ao menu *Ferramentas*, opção *Macro* e escolher *Gravar nova macro*. Escolhida a opção *Gravar nova macro* executa-se o procedimento que se pretende repetir. A tecla F9 realiza o jogo uma e uma só vez. Para permitir a sua repetição *n* vezes clica-se *n* vezes em F9 e, por fim, em *Terminar gravação* (no menu *Ferramentas*, opção *Macro*).

Para criar uma macro que permita recomeçar a simulação do início grava-se uma nova macro inserindo novamente todas as instruções indicadas anteriormente no Passo 6.

Para accionar, de uma forma visível, uma macro inserem-se botões de acção semelhantes aos botões que aparecem no lado direito da Figura 1. Para associar um botão a uma macro, primeiro seleccione-se, no menu *Ver*, a opção *Barra de ferramentas* seguida de *Caixa de ferramentas dos controlos*. Escolhida esta opção aparecerá no ecrã uma caixa contendo vários tipos de botões; seleccione-se *Botão de comando* e insira-se o botão no local pretendido. Clicando no botão direito do rato pode-se editar o texto presente no botão assim como atribuir-lhe uma das macros gravadas.

4.4 Funcionamento da aplicação

O processo prático de simulação e repetição do jogo consiste em clicar num dos botões de acção. A experiência é simulada e os resultados são apresentados sob forma de tabelas e/ou gráficos conforme o pretendido. Deste modo, pode-se observar o valor para o qual tendem a estabilizar as frequências relativas de ganhos e de perdas quando o número de realizações da experiência aumenta.

5. Conclusão

Toda a actividade pedagógica que recorra a ferramentas informáticas tem, por parte dos jovens, uma maior aceitação. Os alunos sentem-se fascinados por métodos de ensino que recorram ao uso de computador, tendo por consequência efectiva, o aumento dos níveis de motivação e predisposição para a aprendizagem. A actividade aqui referida e realizada no ano lectivo 2003/04 com recurso a ficheiros Excel foi gratificante para docentes e alunos. Com base no ficheiro *Simulação 2* aqui descrito outros podem ser construídos. A realização desse tipo de actividade contribui "para esclarecer conceitos através da experimentação e para dinamizar discussões de tipo científico, bem como para incentivar o trabalho cooperativo", como promove o programa de Matemática do 12º ano.

Agradecimentos

Agradecemos à Professora Maria Eugénia Graça Martins e ao (à) referee os comentários e sugestões que permitiram melhorar a redacção do texto.

Bibliografia

Fisz, M. (1980). *Probability Theory and Mathematical Statistics.* New York: Wiley.

Guzmán. M. (1991). "Os perigos do computador no ensino da Matemática." *Actas de las jornadas sobre Enseñanza experimental de la Matemática en la Universidad,* 9-27.

Ponte, J. P. (1991). "O computador na Educação Matemática." *Cadernos de Educação e Matemática, 2.* Lisboa: APM.

http://www.teacherlink.org/content/math/activities/ex-randomevents/home.html

http://www.stanford.edu/~savage/software.htm

http://gator.dt.uh.edu/hodgess/Stat1/probl1.html

http://www.forsyth.k12.ga.us/kadkins/probab.htm

http://www.mat-no-sec.org. Novo programa de Matemática A do 12ºano.

http://alea.ine.pt/ Projecto ALEA.

por: Filipe Oliveira
[Director da SPM]

Um Breve Olhar Sobre Dois Anos de Mandato

O Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática, que se realizou em Coimbra de 25 a 28 de Junho, coincidiu com o término do mandato da actual Direcção. Durante este mandato assistiu-se a um acréscimo significativo da actividade da Sociedade, bem como a algumas transformações na sua logística interna.

Começando por este último ponto, gostaria de deixar, em nome da Direcção, os mais sinceros agradecimentos a Antonieta Horta, que se reformou em Janeiro deste ano, após vinte anos de serviço dedicado como secretária da S.P.M. Antonieta Horta foi sem dúvida uma preciosa ajuda para a boa dezena de direcções com quem colaborou.

Ao mesmo tempo que assistimos a uma mudança de secretariado, os nossos escritórios centrais da Avenida da República, em Lisboa, serão em breve desocupados. Este lugar, que serviu de sede à Sociedade durante cerca de trinta anos, deixará com certeza saudade em todos quantos por lá passaram.

Por último, a contabilidade foi profissionalizada, estando actualmente entregue ao contabilista António Canha, que em muito tem colaborado para melhorar e modernizar a gestão financeira da Sociedade.

No que diz respeito à actividade editorial, numerosas foram as obras publicadas pela S.P.M. nestes últimos dois anos. Na colecção "Temas de Matemática" foram publicados três livros: *Apologia de um Matemático*, de G. H. Hardy; *Eduquês: Um Flagelo sem Fronteiras*, que agrupa textos de vários cientistas franceses sobre o estado da educação; e *A Matemática das Coisas*, de Nuno Crato. Foram ainda publicados, em parceria com a Texto Editores, os quatro primeiros volumes de *Olimpíadas de Matemática*, uma compilação de problemas das Olimpíadas Portuguesas de Matemática. Por altura do centenário do nascimento de António Aniceto Monteiro foi lançada a *Fotobiografia a várias vozes*, um documento ímpar que retrata o que foi a improvável vida deste grande matemático português. Finalmente, foi publicado no mês passado o livro *Logaritmos*, de Elon Lages Lima. Trata-se de uma obra de leitura obrigatória — em especial para os alunos que queiram enveredar por estudos superiores científicos — numa altura em que as funções logarítmicas e exponenciais já não são praticamente tratadas no nosso ensino secundário, resumindo-se o seu estudo a algumas "regras", tantas vezes mal dominadas.

A *Portugaliae Mathematica* festejou setenta anos de existência. Passa a partir deste ano a ser publicada pela European Mathematical Society, dando-se assim um passo decisivo na afirmação desta publicação científica no plano internacional.

De entre as várias iniciativas promovidas pela S.P.M. gostaria de salientar o sucesso que as "Tardes de Matemática" têm recolhido um pouco por todo o país, com salas cheias em Lisboa, Porto, Aveiro, Évora, Açores e Madeira. Trata-se de uma aposta ganha no que diz respeito à divulgação da matemática junto do público. Outro acontecimento importante foi a realização em 2007 das Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, organizadas conjuntamente pela S.P.M. e pelo Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Tratou-se de um evento de dimensões consideráveis e que reuniu em Coimbra uma centena de jovens oriundos de 23 países, colocando à prova a capacidade organizativa da Sociedade.

A lista completa das conferências, exposições, debates e actividades promovidas pela S.P.M. durante este mandato é demasiado extensa para ser aqui reproduzida. Trata-se, é claro, de um sucesso que se deve aos numerosos sócios que com extrema determinação se empenham na organização e dinamização dos mais variados projectos, dignificando assim a nossa Sociedade e promovendo a divulgação, o ensino e a investigação Matemática em Portugal. M