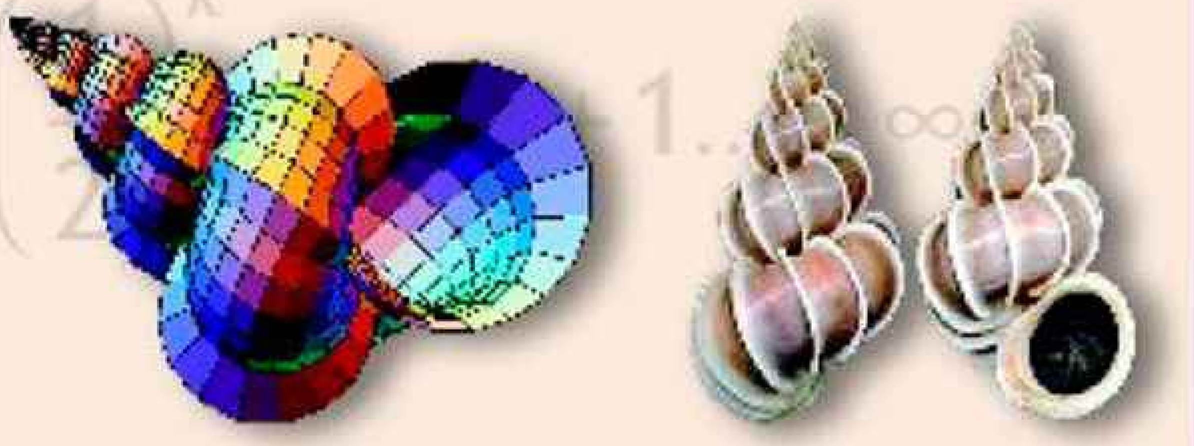
GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática Ano LXVIII | Janeiro 2007 nº152



4,20 Euros

A beleza matemática das conchas marinhas
por Jorge Picado

A aprendizagem da matemática
por José Carlos Santos

Euromilhões, probabilidades, valores médios e medianas
por Dinis Pestana

A aprendizagem da matemática

José Carlos Santos
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Introdução

Tendo-me sido proposto pelo grupo iNIGMA, formado por estudantes da licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, que escrevesse um texto de opinião, perguntei a mim próprio o que é que eu, quando era aluno a começar a licenciatura, teria perguntado a um professor que estivesse disponível a responder a perguntas genéricas. O que eu teria perguntado não sei, mas o que deveria ter perguntado era "Como é que se aprende Matemática?" Este texto contém a minha resposta.

Antes de passar à resposta, quero explicar melhor qual é o tema que pretendo abordar. A Matemática pode ser aprendida a muitos níveis. Por um lado, há a aprendizagem que se vai tendo desde a pré-primária até à Universidade e, eventualmente, depois; desta, só tenciono abordar a do Ensino Superior e a da pós-graduação, não porque a restante seja desprovida de interesse (antes pelo contrário!) mas porque, por um lado, este texto será sobretudo lido por estudantes universitários aos quais pretendo dar sugestões sobre a sua aprendizagem e, por outro lado, porque considero que tenho pouca experiência quanto aos problemas da aprendizagem da Matemática nos ensinos Básico e Secundário. Por outro lado, tanto se pode estar interessado na Matemática por si mesma (é o que se espera de um estudante da licenciatura em Matemática) como se pode encará-la unicamente como um instrumento útil para atingir outros fins.

Irei abordar ambos os aspectos.

Aqueles exercícios aborrecidos e repetitivos...

Aos estudantes de Matemática é proposto um grande número de exercícios de rotina, cuja resolução é muitas vezes longa, envolve um certo número de cálculos e, acima de tudo, exige que se memorize um algoritmo, ou seja, um método de resolução. Porquê? Há diversos bons motivos para isso (e também alguns maus...).

A mecanização é importante

Ao contrário do que muitas vezes se poderá pensar, a repetição de exercícios de rotina é importante para melhorar a capacidade de resolução de problemas. É que, quando a nossa mente deixa de estar ocupada a recordar (ou a tentar reinventar) a maneira de efectuar todos aqueles passos, pode dedicar-se a coisas mais importantes. Imagine-se uma pessoa a quem é dado o problema da calcular a área de um terreno rectangular com 32 metros de comprimento e 18 de largura.

Suponha-se também que essa pessoa sabe que basta fazer a operação 32×18 mas que não conhece a tabuada e que tem que se lembrar como é o algoritmo da multiplicação. Essa pessoa gastará muito mais tempo a efectuar a operação do que uma pessoa que tenha presentes esses conhecimentos, os quais só envolvem memória e repetição de gestos mentais. Por outro lado, quem já conhecer a tabuada e tiver o algoritmo da multiplicação na ponta da língua, não só faz o cálculo muito mais rapidamente como também não cansa a mente, a qual estará então mais apta para pensar noutras coisas.

Neste sentido, a mecanização deve ser encarada como um investimento: gasta-se tempo agora para se ter mais tempo livre para a mente mais tarde. E, na minha opinião, trata-se de um investimento particularmente lucrativo.

Prática *versus* teoria

Uma impressão errada que se pode ter relativamente aos algoritmos que se devem memorizar é que estes só servem para resolver problemas, o que os torna de algum modo inferiores ao estudo de uma teoria eventualmente mais interessante.

Exagerando um tanto, seria como se os espíritos superiores se ocupassem com a criação de teorias novas totalmente desligadas do mundo real, deixando a resolução de problemas concretos aos pobres infelizes incapazes de os acompanhar. Esta visão da Matemática está errada: as grandes teorias matemáticas surgem imensas vezes da tentativa de resolver problemas concretos. Assim, por exemplo:

- a teoria de Galois, que é um dos aspectos centrais da Álgebra actual, surgiu do problema de se tentar encontrar um algoritmo para resolver equações polinomiais de quinto grau;
- Gauss criou o método dos mínimos quadrados, central na Análise Numérica, para determinar onde se poderia localizar um asteróide (Ceres) que só tinha sido avistado um pequeno número de vezes;
- o conceito de esperança matemática, central no Cálculo de Probabilidades, foi criado por Pascal para resolver um problema de dívidas num jogo de azar por parte de uma pessoa das suas relações.

Além disso, estes métodos revelaram-se importantes porque os seus autores e outras pessoas se aperceberam que poderiam usá-los com sucesso para resolverem um elevado número de problemas. Só que só se pode aperceber disso quem não tenha reservas mentais quanto a usar algoritmos para resolver problemas concretos.

Outro motivo para não se menosprezarem os algoritmos consiste no seguinte princípio: o que é bom para a prática também o é para a teoria! De facto, muitos algoritmos são usados nas demonstrações de teoremas. Por exemplo, um algoritmo usado para determinar se um sistema homogéneo de n equações lineares e n incógnitas tem ou não alguma solução não nula consiste em calcular o determinante da matriz dos coeficientes do sistema; o sistema tem então alguma solução não trivial se e só se aquele determinante for nulo. Pois bem, este mesmo algoritmo é usado para demonstrar teoremas na teoria de Galois!

Persistência

Uma das ideias mais disparatadas que há sobre génios científicos é a de que eles resolvem problemas sem qualquer dificuldade e que, além disso, encontram a resposta correcta à primeira tentativa. Começo por contrariar isto com duas citações, das quais a primeira é famosa e a segunda, não o sendo, merecia sê-lo.

Thomas Edison:

Génio é 1% de inspiração e 99% de transpiração.

Gian-Carlo Rota:

Há uma proporção que permite medir até que ponto se é um bom matemático, que é o número de ideias disparatadas que é preciso ter-se até se chegar a uma boa.

Se for de dez para uma, é-se um génio. Para o matemático médio, é capaz de ser cem para uma.

Em resumo, em Ciência ter ideias não é, só por si, particularmente meritório.

Qualquer bom livro de Ficção Científica está cheio delas. O que é difícil e exige trabalho e disciplina é, para além de ter as ideias, explorá-las, ver até que ponto são férteis, determinar os seus limites, testá-la, compará-las com outras abordagens.

Outro mito falso (e prejudicial!) é o de que os génios científicos descobrem tudo por si próprios, sem precisarem do conhecimento acumulado dos cientistas que os precederam. É mesmo um lugar comum em filmes ou séries da televisão: o contraste entre o professor pedante, que sabe muito mas não cria nada, e o cientista brilhante que, sem precisar daqueles conhecimentos (e, muitas vezes, ridicularizando quem os possui), resolve problemas dificílimos sem esforço. Só que, como disse um colega meu "um matemático é tanto melhor quantos mais teoremas de cor sabe"! Não, saber muitos teoremas de cor não dá qualquer garantia de que se é um bom matemático. Mas que ajuda a sê-lo, ajuda.

Quando dou aulas a alunos de Matemática do 1º ano, uma atitude com a qual já me deparei por diversas vezes é a de reagirem às primeiras demonstrações a que são expostos com uma reacção do tipo "Isto jamais me ocorreria!" Eu costumo dizer que aos primeiros matemáticos a tentarem demonstrar o mesmo resultado provavelmente também não lhes ocorreu aquela demonstração. É que a Matemática que se aprende naquela fase da aprendizagem já tem, geralmente, muitas décadas, até mesmo séculos. As demonstrações que são apresentadas aos alunos não são as primeiras mas sim as melhores. Mas as primeiras abordagens são geralmente toscas, incompletas e com erros. O matemático russo A. S. Besicovitch disse mesmo uma vez que a fama de um matemático é baseada no número de demonstrações falsas que fez! Ele explicou que o que isto quer dizer é que trabalhos pioneiros são imperfeitos.

O matemático norte-americano Paul Halmos conta na sua autobiografia (ou "automatografia", como ele lhe chama) que, numa carta de recomendação que escreveu, começou por dizer que a pessoa em questão resolvia bastantes problemas mas que as soluções que obtinha eram geralmente longas e deselegantes, sendo muitas vezes possível pegar numa das suas soluções e, retirando o que era supérfluo, obter outra solução dez vezes mais curta. Sendo assim, porque é que o destinatário da carta de recomendação o deveria contratar? Porque, como Halmos escreveu, "ele encontra soluções feias onde outros estão elegantemente encravados"! É um bom princípio a ter em mente: quando se está perante um problema, mais vale ter-se uma solução feia do que estar-se elegantemente encravado.

"Mas o que é que isto tem a ver com aprendizagem?", pode-se perguntar. Afinal, é sabido que os professores não estão interessados em abordagens "toscas, incompletas e cheias de erros" nos exames! De facto, mas uma coisa é aprender Matemática, outra é fazer exames. E não se aprende o que é Matemática sem se tentar compreender as coisas por si próprio, o que por sua vez implica, naturalmente, ir além daquilo que o livro ou o professor disserem. A propósito disto, o matemático francês Laurent Schwartz contou uma vez, numa palestra a que assisti, que, quando foi aluno da Escola Normal Superior, em Paris, achava que era um aluno abaixo da média, porque um bom número dos seus colegas lhe dava a impressão de acompanhar as aulas com muita mais facilidade do que ele. Ao fim de algum tempo, apercebeu-se de um facto que ia contra esta ideia: é que ele era o melhor aluno! Só depois é que encontrou a explicação para o paradoxo: enquanto que os seus colegas que lhe transmitiam a impressão de serem melhores do que ele deviam essa impressão a memorizarem rapidamente os conteúdos das aulas, ele precisava de um esforço suplementar para, não só memorizar esses conteúdos, como, ainda por cima, compreender como cada facto novo se encaixava com aqueles que já tinha ao seu dispor. E, como se pode ver, esse esforço extra compensou!

Dúvidas

Uma ideia parcialmente errada que muitos alunos têm é a de que é melhor não fazer perguntas aos professores, pois podem ser disparatadas e criar má impressão. De facto, há perguntas que podem causar má impressão, como aquelas cuja resposta deveria ser imediata para quem esteja razoavelmente a par da matéria dada ou, pior ainda, aquelas para as quais a resposta já foi dada antecipadamente (não há pachorra para aguentar um aluno a perguntar se as matrizes não quadradas também têm determinante após se ter dito umas dezenas de vezes que o determinante só se define para matrizes quadradas). Mas as perguntas que revelam curiosidade e vontade de compreensão provocam quase sempre melhor impressão do que má. Além disso, a experiência revela que, num elevado número de casos, quando um aluno faz uma pergunta numa aula, nenhum dos seus colegas sabe a resposta, o que só mostra como a pergunta é interessante.

Um critério pessoal que uso para formar a minha opinião relativamente a alunos consiste em observar as suas reacções quando me colocam um problema de Matemática cuja solução desconheço mas que tento resolver na sua presença. A maior parte dos alunos pura e simplesmente desliga! A atitude é do tipo "Bolas, ele não sabe!" e encaram o tempo que ficam à espera que eu tente descobrir a solução como um desperdício. Mas os melhores alunos fazem precisamente o contrário: tentam aproveitar a oportunidade para verem como é que eu ajo na minha tentativa de chegar à solução. E há uma diferença abissal entre os alunos que se contentam com terem conhecimentos matemáticos e aqueles que tentam não somente possuir esses conhecimentos como também perceber como os alcançarem por si próprios.

O lado social da Matemática

Um colega meu comentou certa vez, a respeito de ser-se matemático, que "neste trabalho, 50% são relações públicas". E é verdade (bom, talvez com um pequeno exagero)! Um matemático tem todo o interesse em manter-se em contacto com outros matemáticos, quer para ter ideias que possam ajudar a resolver os problemas que lhe interessam, quer para tomar conhecimento de novos problemas. O mesmo se aplica à aprendizagem: é desejável que se contacte com outras pessoas, quer colegas quer professores, a fim de trocar ideias ou receber sugestões. O trabalho individual é fundamental, obviamente, mas o alargamento de horizontes que se obtém através do contacto com outras pessoas também o é. A imagem do matemático genial a trabalhar num isolamento magnífico numa torre de marfim tem pouquíssima correspondência com a realidade. Mesmo naqueles poucos matemáticos que mais deram a impressão de se adequarem a esse estereótipo, como Newton ou Gauss, sabe-se que isso se deveu em grande parte a terem dificuldade em encontrarem interlocutores adequados e não a falta de vontade de trocar ideias.

Estudar Matemática

Não vou descrever aqui como é que faço cada vez que estudo Matemática, pois a maneira mais eficiente de o fazer varia muito de pessoa para pessoa, pelo que cada um deve tentar descobrir quais são as condições em que estuda melhor. Por exemplo, já há muito tempo que constatei que ter música de fundo não me distrai quando estou a tentar resolver um problema mas é bastante incomodativa quando estou a tentar compreender algo novo. No entanto, há algumas ideias que convém ter em mente, quanto mais não seja para ver até que ponto resultam.

Não separar a teoria da prática

Não vou repetir o que escrevi acima quanto à relação entre a teoria e a resolução de problemas, embora esse assunto esteja relacionado com o tópico que vou abordar agora. A crença na superioridade da teoria relativamente à resolução de problemas concretos leva muitas vezes os alunos a estudarem a teoria sem se preocuparem em resolver exercícios, o que é um erro crasso. Ao lerem-se apontamentos das aulas teóricas fica-se muitas vezes com a ilusão de que se compreende mais do que realmente se compreende, sobretudo se os apontamentos forem bem feitos. O contrário também ocorre: textos mal redigidos podem muitas vezes fazer com que um assunto pareça mais difícil do que realmente é. Em ambos os casos, o melhor a fazer é resolver exercícios, quer para testar se se compreendeu bem o assunto, quer para ver se se trata de um tema tão difícil como parece à primeira vista. Caso não se disponha de exercícios, então o melhor é tentar-se aplicar o que se aprendeu a problemas concretos e ver-se se se consegue ou não resolvê-los.

Não gastar demasiado tempo com exercícios de rotina

Quando se está perante uma lista de exercícios "todos iguais" e se tem uma grande dificuldade em resolver um único que seja, então há certamente algo que está errado. Nesta situação, o melhor a fazer é reler a teoria que se está a estudar ou pedir ao professor para explicar novamente o método, consoante o caso que se aplique. Naturalmente, em certos casos não é claro se um determinado exercício é ou não de rotina. Nesses caso, o que há a fazer é perguntar ao professor.

Resolver problemas

Um conselho que sigo muitas vezes ao tentar resolver problemas foi dado já há décadas por George Pólya: se não se consegue fazê-lo, há um caso particular que também não se consegue resolver; deve-se então começar por aí. Não, isto não serve para todos os problemas, mas aplica-se a bastantes mais casos do que o que pode parecer à primeira vista. Não se consegue resolver um problema relativo a polinómios? Começa-se por tentar com polinómios de grau 1 ou 2. Está-se encravado num problema de matrizes? Vê-se o que se consegue fazer com matrizes com duas linhas e duas colunas. Não se avança num problema sobre funções deriváveis? Que tal começar por ver o que se consegue fazer se elas forem polinomiais?

Compreender os conceitos

Para cada conceito, deve-se conhecer pelo menos uma situação à qual este se aplica e pelo menos uma à qual este não se aplica. Assim, por exemplo, um primeiro (e importante) passo para se compreender o que é uma função derivável consiste em conhecer-se pelo menos um exemplo de uma função derivável e pelo menos um exemplo de uma função não derivável. Melhor ainda será conhecer-se um exemplo de uma função da qual se saiba que é derivável e porquê e um exemplo de uma função da qual se saiba que não é derivável e porquê. Naturalmente, é tarefa do professor fornecer tais exemplos, mas caso isso não aconteça convém sempre pedi-los. Mas é bom ter em mente que nem sempre é possível o professor satisfazer tais pedidos. Por exemplo, um número algébrico é um número que é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros. Posto isto e dado o que escrevi anteriormente, um professor que defina o conceito de número algébrico deveria dar um exemplo de um número algébrico, explicando porque é que o é, bem como o exemplo de um número não algébrico (aquilo que se designa por número transcendente), mais uma vez explicando porque é que o é. No entanto, embora seja fácil dar exemplos de números não algébricos (os mais conhecidos são π e e) não é trivial mostrar que um dado número não é algébrico.

A beleza matemática das conchas marinhas

Jorge Picado
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

Resumo: Muitos aspectos do crescimento de animais e plantas, apesar de, pelas suas formas elaboradas, parecerem governados por regras muito complexas, podem ser descritos por leis matemáticas muito simples. Um exemplo claro disso são as conchas e os búzios marinhos, como aqui ilustramos: consegue-se, com um modelo muito simples, descrever e gerar facilmente qualquer um dos muitos tipos de conchas das classes dos Gastrópodes, Bivalves, Cefalópodes e Escafópodes que se podem encontrar classificados nas enciclopédias de conchas.

«A beleza é o brilho do ideal no reino do visível.»

Platão

«Há uma grande beleza nas pistas que a natureza nos oferece e todos nós a podemos reconhecer sem nenhum treino matemático. Também existe beleza nos enredos matemáticos que emanam dessas pistas e de onde se deduzem as regras e regularidades subjacentes, mas é um tipo de beleza diferente, mais aplicado a ideias do que a coisas. A matemática está para a natureza como Sherlock Holmes está para os indícios.»

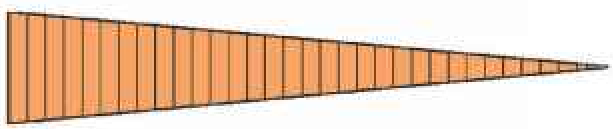
I. Stewart [6]

1. Como crescem as conchas

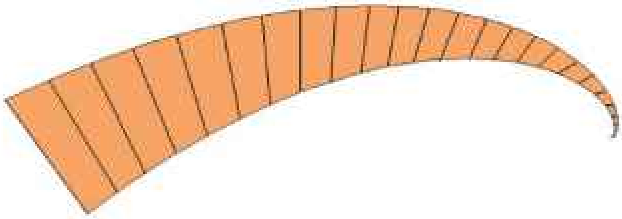
A ideia de que a matemática se encontra profundamente implicada nas formas naturais remonta aos gregos. Muitos aspectos do crescimento de animais e plantas, apesar de, pelas suas formas elaboradas, parecerem governados por regras muito complexas, podem ser descritos por leis matemáticas muito simples (cf., por exemplo, o livro clássico de D'Arcy Thompson [7] e o recente livro de Stephen Wolfram [8]).

Um exemplo claro disso são as conchas e os búzios marinhos [4]. Porque é que tantas conchas formam espirais? Quando o bicho que vive numa concha cresce, é necessário que a concha onde vive também cresça, para o acomodar. O facto do animal, que vive na extremidade aberta da concha, segregar e depositar o material novo sempre nessa extremidade, e mais rapidamente num lado que no outro, faz com que a concha cresça em espiral. O ritmo de segregação de material novo em diferentes pontos da concha presume-se que seja determinado pela anatomia do animal. Surpreendentemente, mesmo variações muito pequenas nesses ritmos pode ter efeitos tremendos na forma final da concha, o que está na origem da existência de muitos tipos diferentes de conchas.

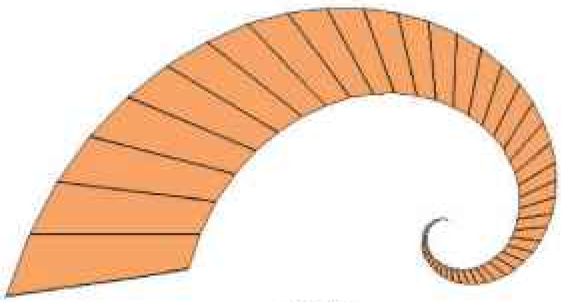
Uma versão bidimensional deste facto pode ser observado no crescimento dos cornos dos animais. Tal como as unhas e o cabelo, um corno cresce devido ao depósito de material novo na sua base. De modo a ser uma estrutura perfeitamente rectilínea, a quantidade de material depositada deve ser exactamente a mesma de cada lado da base:



No entanto, se existir alguma diferença (indicada na figura seguinte, em termos percentuais), um dos lados do corno ficará mais comprido que o outro e, inevitavelmente, o corno terá que torcer para o lado onde é depositado menos material, seguindo uma espiral:

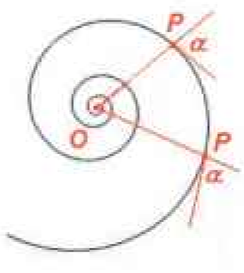


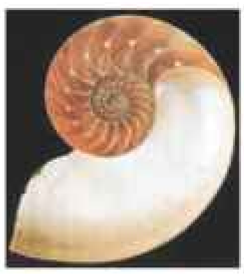
10%



100%

Essencialmente, é uma versão tridimensional deste fenómeno que conduz às estruturas em espiral das conchas dos moluscos. Além disso, as conchas crescem mantendo sempre a mesma forma. Estas condicionantes juntas têm uma consequência matemática: quase todas as conchas seguem um modelo de crescimento baseado numa *espiral equiangular* (também chamada *espiral logarítmica*):

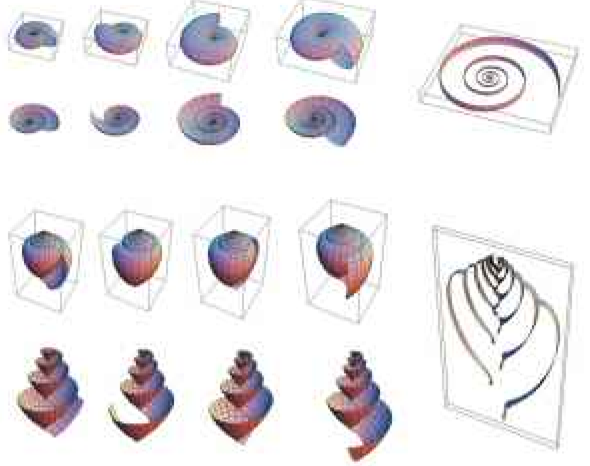




Como indicado na figura acima, dado um ponto O, a espiral equiangular é uma curva tal que a amplitude α do ângulo formado pela tangente, em qualquer dos seus pontos P, com a recta OP é constante. Jacob Bernoulli (1654-1705) chamou a esta curva a *Spira mirabilis* (*espiral maravilhosa*), cuja expressão analítica é dada, em termos das coordenadas polares r e θ, por $r(\theta)=R\,e^{\theta \cot \alpha}$ onde R é o raio associado a $\theta=0$.

Se a amplitude α for 90º, a espiral equiangular é uma circunferência. É claro que o bicho não ficaria muito satisfeito com uma concha circular, porque esta não o deixaria crescer mais. O ângulo não sendo recto permite que a espiral cresça, o que corresponderá a um alargamento da concha. Este crescimento mantém sempre a forma da concha e chama-se *gnomónico*. Em geometria, o *gnómon* (palavra de raiz grega que significa "o que indica" ou "que dá a saber") de uma figura dada é uma segunda figura que, acrescentada ou retirada à primeira, gera uma terceira figura semelhante à original. Este padrão de crescimento é tão comum que é por muitos chamado de "lei da natureza".

Em resumo, o molusco não alarga a sua concha de modo uniforme: adiciona somente material numa das extremidades da concha (a extremidade aberta ou "de crescimento"); e fá-lo de maneira a que a nova concha seja sempre um modelo exacto, à escala, da concha mais pequena. A figura seguinte mostra dois dos casos que podem acontecer. O primeiro exemplo é típico da concha dos náutilos e o segundo de um cone. Em cada caso, o material novo da concha é progressivamente acrescentado na abertura da concha.



À direita, as secções horizontal (no caso do náutilo) e vertical (no caso do cone) mostram a respectiva espiral de crescimento.

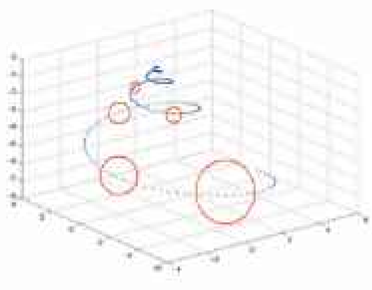
Como veremos, as conchas, com a sua forma auto-semelhante, podem ser representadas por superfícies tridimensionais, geradas por uma fórmula relativamente simples, com alguns parâmetros livres. Maravilhosamente, apesar da simplicidade dessas equações, é possível gerar uma grande variedade de tipos diferentes de conchas. Quais? Todos eles! (com muito poucas excepções: algumas espécies vivas e fósseis de *Vermicularia* e amonitas fósseis do género *Didymoceras*.) Isto mostra como muitas das formas que surgem na natureza são simples consequência da aplicação de geometria tridimensional a regras de crescimento básicas.

« (...) a matemática é muito parecida com a poesia... o que faz um bom poema – um excelente poema – é o ter muitos pensamentos expressos em poucas palavras. Neste sentido fórmulas como $e^{\pi i}+1=0$ ou $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ são poemas.»

Lipman Bers

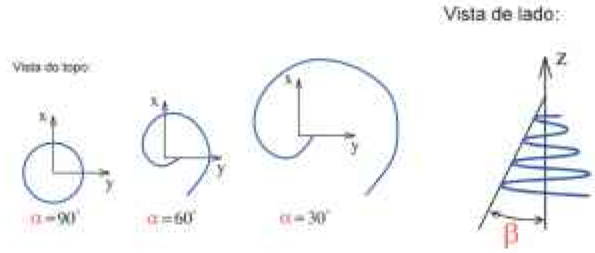
2. O modelo

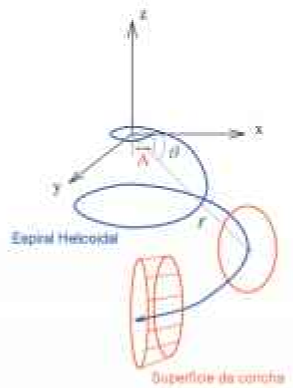
A superfície da concha é uma superfície tridimensional que pode ser vista como o resultado do deslocamento de uma curva X (a *curva geratriz*, que habitualmente é uma elipse) ao longo de uma espiral helicoidal H (a *curva estrutural*) ([1], [3]); o tamanho da curva X vai aumentando à medida que se desloca sobre H:



A forma de X descreve o perfil das secções da concha e da abertura da concha enquanto H determina a forma global da concha. A influência de X na forma da concha é ilustrada mais adiante nos exemplos (veja também, para mais pormenores, [5]).

Para elaborar o modelo, fixemos um sistema cartesiano de coordenadas XYZ no espaço, e consideremos a helicóide descrita na forma paramétrica, em termos das coordenadas polares (r, θ). Vista de cima, a espiral helicoidal parece uma espiral equiangular, que tem equação $r = A \sin\beta\, e^{\theta \cot\alpha}$, onde α denota o ângulo de abertura da espiral H, β denota o *ângulo de alargamento* da espiral H e A é o *comprimento da abertura* da espiral (isto é, a distância do seu ponto inicial ao seu centro):





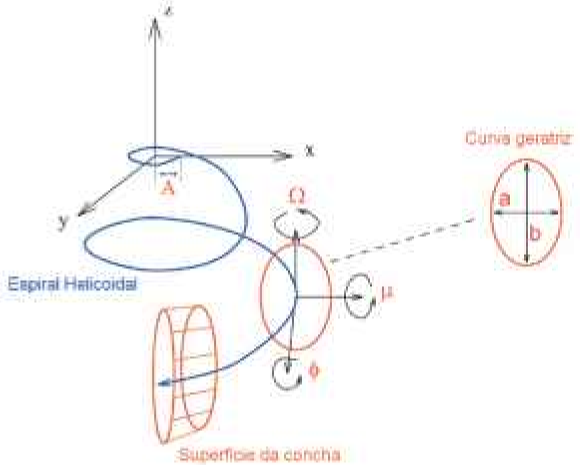
Portanto, os pontos (x, y, z) da espiral helicoidal satisfazem as equações

$$x = r\cos\theta = A \sin\beta \cos\theta\ e^{\theta\cot\alpha}$$
$$y = r\sin\theta = A\sin\beta\sin\theta\ e^{\theta\cot\alpha}$$
$$z = -A\cos\beta\ e^{\theta\cot\alpha}.$$

A curva geratriz, usada para gerar a forma exterior da concha, é, na maior parte dos casos, uma elipse de parâmetros a (semi-eixo maior) e b (semi-eixo menor), ou seja, uma curva de equação

$$R = \left[\left(\frac{\cos s}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin s}{b}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.1)$$

Admitimos ainda que esta curva possa rodar um ângulo μ, em torno do seu eixo maior, um ângulo Ω, em torno do eixo vertical, e um ângulo ϕ, em torno de um vector ortogonal ao plano da elipse, como a figura seguinte ilustra.



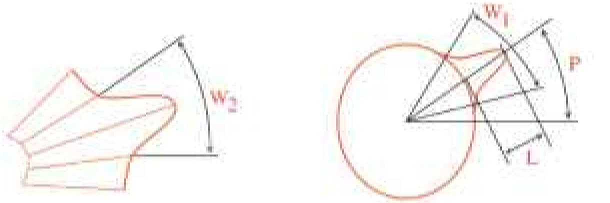
Juntando tudo, e entrando ainda com o sentido *D do enrolamento* (que pode ser positivo, 1, ou negativo, −1), obtêm-se então as equações paramétricas que permitem descrever a superfície da concha gerada por uma elipse *X* a deslocar-se ao longo de uma espiral helicoidal *H* (D. Fowler, H. Meinhardt e P. Prusinkiewicz [3], A. Cortie [1]):

$$x = D\,[A \sin\beta \cos\theta + R \cos(s+\phi)\cos(\theta+\Omega) - R \sin\mu \sin(s+\phi)\sin(\theta+\Omega)]\, e^{\theta \cot\alpha}$$

$$y = [-A \sin\beta \sin\theta - R\cos(s+\phi)\sin(\theta+\Omega) - R\sin\mu\sin(s+\phi)\cos(\theta+\Omega)]\, e^{\theta\cot\alpha}$$

$$z = [-A\cos\beta + R\sin(s+\phi)\cos\mu]\, e^{\theta\cot\alpha}.$$

Se quisermos acrescentar nódulos, espinhos e estrias à concha, bastará considerar parâmetros *N* (número de nódulos existentes ao longo de uma revolução completa de θ), W_1 (comprimento do nódulo ao longo da geratriz), W_2 (comprimento do nódulo ao longo da helicóide), *L* (altura do nódulo) e *P* (ângulo que indica a posição do nódulo na geratriz):



Vista do topo   Vista de lado

Bastará então substituir a equação (2.1) da elipse por

$$R = \left[\left(\frac{\cos s}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin s}{b}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} + L\, e^{\left[-\left(\frac{2(s-P)}{W_1}\right)^2 - \left(\frac{2l(\theta)}{W_2}\right)^2\right]},$$

onde

$$l(\theta) = \frac{2\pi}{N}\left[\frac{N\theta}{2\pi} - \operatorname{int}\left(\frac{N\theta}{2\pi}\right)\right].$$

No total, as equações da superfície da concha dependerão de 14 parâmetros:

$D, A, \alpha, \beta, \mu, \Omega, \phi, \alpha, \beta, L, P, W_1, W_2, N.$

«A Matemática possui não só verdade, mas também beleza suprema – uma beleza fria e austera, como a da escultura, sem apelar a qualquer parte mais fraca da nossa natureza... sublimamente pura, e capaz da perfeição sem compromissos que só a grande arte pode atingir.»

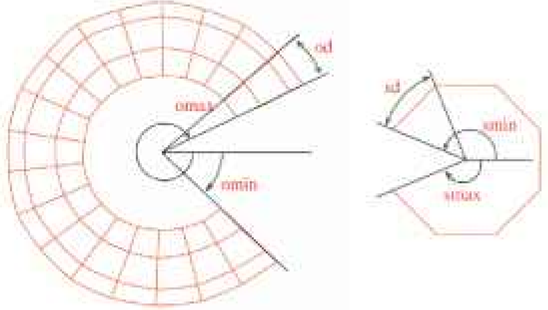
Bertrand Russell

3. Exemplos

A escrita das equações no programa **Mathematica** pode ser feita do seguinte modo:

```
l[n_][theta_]=(2Pi/n)((n theta/2Pi)-IntegerPart[n theta/2Pi]);
h[a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][s_,theta_]=(1/(Sqrt[(Cos[s]/a)^2+(Sin[s]/b)^2]))
      +ll Exp[-(2(s-p)/w1)^2-(2l[n][theta]/w2)^2];
x[d_,aa_,beta_,phi_,omega_,mu_,alpha_,a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][theta_,s_]=
      d(aa Sin[beta]Cos[theta]+h[a,b,ll,p,w1,w2,n][s,theta]
          (Cos[s+phi]Cos[theta+omega]-Sin[mu]Sin[s+phi]Sin[theta+omega]))
              Exp[theta Cot[alpha]];
y[aa_,beta_,phi_,omega_,mu_,alpha_,a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][theta_,s_]=
      (-aa Sin[beta] Sin[theta]-h[a,b,ll,p,w1,w2,n][s,theta]
          (Cos[s+phi]Sin[theta+omega]-Sin[mu]Sin[s+phi]Cos[theta+omega]))
              Exp[theta Cot[alpha]];
z[aa_,beta_,phi_,mu_,alpha_,a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][theta_,s_]=
      (-aa Cos[beta]+h[a,b,ll,p,w1,w2,n][s,theta]Sin[s+phi]Cos[mu])
              Exp[theta Cot[alpha]];
```

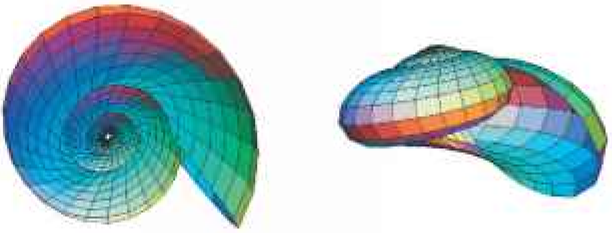
Escolhendo valores adequados para os diversos parâmetros e variando θ desde *omin* até *omax* e s de *smin* a *smax*



Vista do topo   Vista de lado

podemos traçar a superfície de qualquer tipo de concha conhecido.

Por exemplo, a Nática de orelha (cf. [2], p. 78), da classe dos Gastrópodes, pode ser gerada com os parâmetros D=1, A=25, α=83°, β=42°, μ=10°, Ω=30°, ϕ=70°, a=12, b=20, L=0, P=0, W_1=1, W_2=1, N=1:

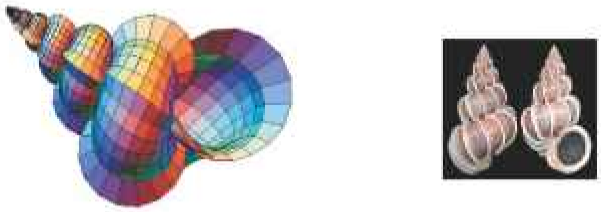


```
With[{d=1,aa=25,beta=42Degree,phi=70Degree,omega=30Degree,mu=10Degree,
      alpha=83Degree,a=12,b=20,ll=0,p=0,w1=1,w2=1,n=1},
ParametricPlot3D[{x[d,aa,beta,phi,omega,mu,alpha,a,b,ll,p,w1,w2,n][theta,s],
                  y[aa,beta,phi,omega,mu,alpha,a,b,ll,p,w1,w2,n][theta,s],
                  z[aa,beta,phi,mu,alpha,a,b,ll,p,w1,w2,n][theta,s]},
                  {theta, -4Pi, 4Pi}, {s, -270 Degree, 90 Degree},
                  Boxed -> False, Axes -> False, PlotPoints -> {100,20},
                  PlotRange -> All, ViewPoint -> {-1,-3,0.5}]]
```

Terminamos com mais alguns exemplos de conchas que se encontram classificados em [2] e que se podem modelar deste modo (estes, e outros exemplos, podem ser manipulados interactivamente, com mais pormenor, em [5]).

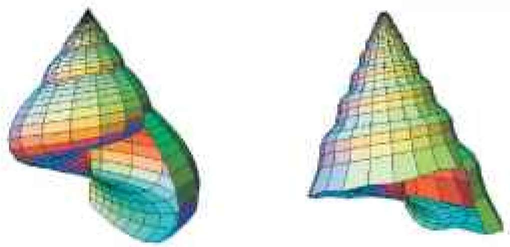
O exemplo mais surpreendente é o dos bivalves, com os seus *umbos* (protuberâncias do topo) maravilhosamente traçados com toda a perfeição!

Escalária Preciosa (D=1, A=90, α=86°, β=10°, μ=5°, Ω=1°, ϕ=–45°, a=20, b=20, L=14, P=40, W_1=180, W_2=0.4, N=180):

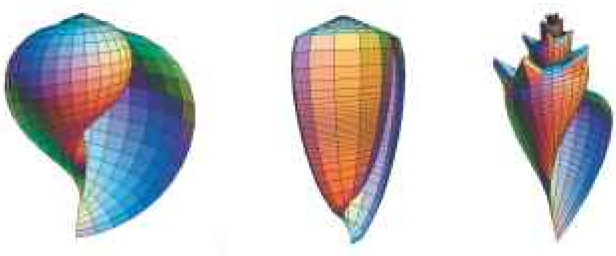


Turritela, ancilla e búzio:

Dois troques (o troque maura tigre e o troque comercial):

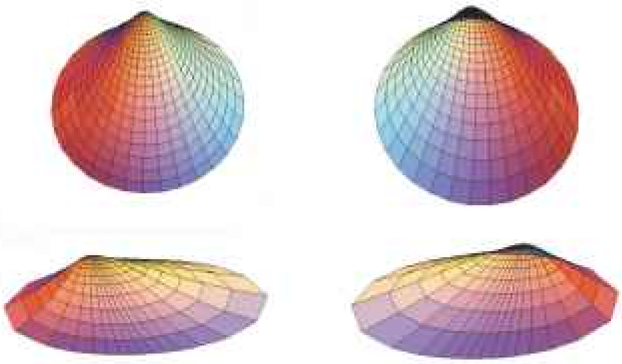


Tonel, oliva e concha cavalo:



Duas lapas (a lapa comum e a lapa raiada de azul):

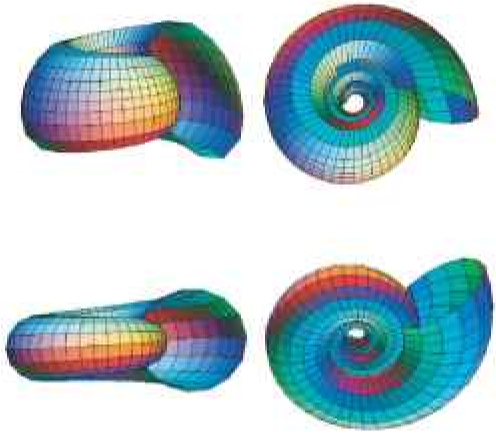
Dois bivalves (a glicimeris-europeia e a concha lyonsia):



Argonauta (Cefalópode):

Serpentina, dente de elefante (Escafópode) e espírula:

Planorbis e amonita (Fóssil):



«O cientista não estuda a Natureza porque isso é útil; estuda-a porque ele se delicia nela, e ele delicia-se nela porque é bela. Se a Natureza não fosse bela, não valeria a pena ser conhecida, e se a Natureza não valesse a pena ser conhecida, a vida não valeria a pena ser vivida.»

Henri Poincaré

Referências

[1] A. Cortie, Digital seashells, Comput. & Graphics 17 (1993) 79-84.
[2] S. P. Dance, Conchas, Bertrand Editora, 1996.
[3] D. Fowler, H. Meinhardt e P. Prusinkiewicz, Modeling seashells, Computer Graphics 26 (1992) 379-387.
[4] H. Meinhardt, The Algorithmic Beauty of Sea Shells, Springer Verlag, 1998.
[5] J. Picado, Conchas marinhas: a simplicidade e beleza da sua descrição matemática, www.mat.uc.pt/~picado/conchas.
[6] I. Stewart, Os Números da Natureza, Temas e Debates, 2003.
[7] D'A. Thompson, On Growth and Form, Cambridge University Press, 1961.
[8] S. Wolfram, A New Kind of Science, Wolfram Research, Inc., 2004.

CENTRO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
3001-454 COIMBRA
E-mail: picado@mat.uc.pt
URL: www.mat.uc.pt/~picado

Controlo biológico de pragas

Ana Cristina Silva
Associação Atractor*

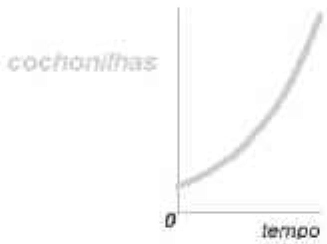
Nativa da Austrália, a cochonilha australiana (*Icerya purchasi* Maskell) chegou à Califórnia (E.U.A.) em 1868, hospedeira de exemplares de acácias. Em cerca de dez anos tornou-se numa das pragas mais devastadoras dos citrinos naquela região. O carácter menos infestante da cochonilha e a boa convivência com outras espécies em terras australianas apoiaram a impressão de que ali o flagelo seria controlado por predadores naturais deste insecto - os quais, se introduzidos na Califórnia, poderiam conduzir à eliminação do problema. A prospecção na Austrália e Nova Zelândia levou os cientistas até à joaninha (*Rodolia cardinalis* Mulsant): alimentando-se de cochonilhas, a joaninha reduziu a população desse insecto a níveis não preocupantes e em 1888/89 a praga nos laranjais da Califórnia estava debelada.

Presas e predadores

Recolhamos informações sobre estes dois insectos para entendermos este sucesso no controle da infestação. As joaninhas alimentam-se de cochonilhas que vivem de folhas e caules de certas plantas. Sem intervenção do exterior e na presença de alimento abundante, as cochonilhas reproduzem-se livremente e o seu número aumenta numa relação que é directamente proporcional ao número de exemplares existentes. Este dado sobre a evolução das cochonilhas com o tempo traduz-se pela equação

$$\textit{aumento do número de cochonilhas} = A \, . \, \textit{número de cochonilhas}$$

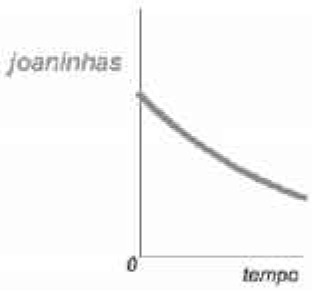
onde A é uma constante real positiva.



As joaninhas são insectos carnívoros, vorazes na fase larvar e, sem ajuda exterior, tendem a esgotar as suas reservas de alimento, reduzindo consequentemente a sua taxa de reprodução. Este comportamento traduz-se, com o passar do tempo, numa diminuição do número de joaninhas a uma taxa directamente proporcional ao número delas, segundo a igualdade

$$\textit{diminuição do número de joaninhas} = C \, . \, \textit{número de joaninhas}$$

onde C é uma constante real positiva.



Associação Atractor: atractor@atractor.pt
http://www.atractor.pt

* Este trabalho foi realizado sob a orientação de Maria Pires de Carvalho, do Departamento de Matemática Pura da Universidade do Porto, no âmbito de uma Bolsa atribuída pela Fundação Calouste Gulbenkian para desenvolver um projecto de divulgação da Matemática no Atractor.

Mas a cadeia alimentar das joaninhas inclui as cochonilhas, por isso, as equações acima não são independentes. Os encontros entre estas duas espécies, tão mais prováveis quanto mais elementos houver de cada uma, beneficiam as joaninhas e prejudicam as cochonilhas. Esperamos, portanto, que o número de cochonilhas cresça quando há poucas joaninhas a ameaçá-las e que o número de joaninhas seja favorecido quando há muitas cochonilhas disponíveis como alimento. Daqui deverão resultar ciclos de variação periódicos ao longo do tempo.

No modelo que estamos a apresentar, idealizado por Lotka e Volterra, que admite, como todos, algumas simplificações, a contagem do número de encontros traduz-se, por razões probabilísticas, pelo produto do número de exemplares presentes de cada tipo de insecto. Se juntarmos todas estas informações sobre a evolução ao longo do tempo de cada espécie, obtemos as seguintes expressões para as suas variações:

variação do nº de cochonilhas =
= A . nº de cochonilhas – B . nº de cochonilhas . nº de joaninhas

variação do nº de joaninhas =
= – C . nº de joaninhas + D . nº de cochonilhas . nº de joaninhas

onde B e D são constantes reais positivas. Analisemos em detalhe estas igualdades.

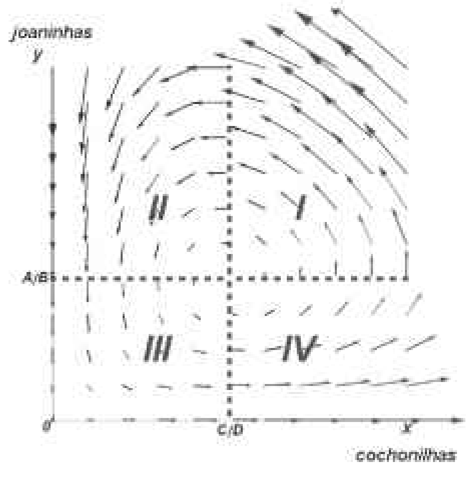
No que se segue, a letra ***t*** designa o tempo (variável real não negativa), $x(t)$ o número de presas (cochonilhas) e $y(t)$ o número de predadores (joaninhas) no instante ***t***. Embora realisticamente x e y só admitam valores naturais, a sua grandeza permite-nos supor neste estudo que x e y são funções deriváveis com valores reais não negativos. As variações ao longo do tempo das funções x e y têm a sua tradução analítica nas derivadas x' e y' e, portanto, as considerações que fizemos atrás formalizam-se no seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = Ax - Bxy \\ y' = -Cy + Dxy \end{cases}$$

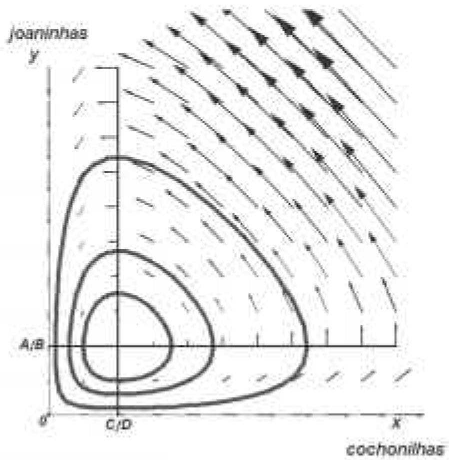
Pelo ***Teorema de Existência e Unicidade*** de soluções de equações diferenciais, para cada condição inicial $x(t_0)$, $y(t_0)$ existe uma curva $t \rightarrow (x(t), y(t))$ que verifica as duas equações do sistema. Contudo a demonstração deste teorema não é construtiva e, em particular, não sabemos determinar explicitamente esta curva-solução. Resta-nos, então, fazer uma análise qualitativa, com pistas que nos são sugeridas por integração numérica.

O sistema de equações diferenciais permite construir no plano um campo de vectores $V=(x',y')$ tal que, dado um ponto $Z=(x,y)$ do plano, o vector V é tangente neste ponto à curva-solução de condição inicial Z: V indica a direcção, o sentido e a intensidade de variação da curva-solução. Uma análise deste campo permite-nos identificar ***(0,0)*** e $(C/D, A/B)$ como únicos pontos de equilíbrio e, restringindo o estudo ao primeiro quadrante, dividi-lo em quatro regiões onde as derivadas têm sinais diferentes.

Na região ***IV*** tanto os valores de x como os de y crescem estritamente com o tempo; na região ***I***, os valores de x decrescem estritamente, enquanto que a função y cresce. Uma explicação biológica para esta variação é a



de que, com a abundância de cochonilhas e o reduzido número de joaninhas na região *IV*, estas têm condições óptimas para se reproduzir, atingindo valores tão elevados que, na região *I*, as cochonilhas exibem perdas consideráveis. Explicações análogas podem ser apresentadas para as restantes regiões.



Esta imagem do campo de vectores *V* sugere que as curvas-solução com condições iniciais próximas do ponto de equilíbrio *(C/D, A/B)* se mantêm numa vizinhança deste ponto e circulam à volta dele. E podemos confirmar, para além disso, que são curvas fechadas. Isto indica-nos que as funções x e y são periódicas com o tempo, o que significa que as populações de joaninhas e cochonilhas recuperam as perdas e gerem equilibradamente as variações que resultam da sua relação na cadeia alimentar.

Agora que sabemos que as curvas-solução são periódicas (digamos de período T) podemos determinar os valores médios, durante um período, de x e de y pelas expressões (que se assemelham à da média aritmética de uma amostra finita)

$$\overline{x} = \frac{\int_0^T x(t)dt}{T} \qquad \overline{y} = \frac{\int_0^T y(t)dt}{T}$$

Efectuando alguns cálculos - possíveis a partir do sistema de equações diferenciais apesar de não conhecermos explicitamente x e y como funções de t - obtemos $x=C/D$ e $y=A/B$.

O caso português

Portugal, com o crescente interesse pela horticultura e jardinagem no século XIX, foi também grande importador de flora australiana, incluindo as acácias cuja floração amarela abundante foi elogiada por poetas mas que hoje tanto afligem a floresta autóctone portuguesa. Não esteve por isso a salvo da vaga de espécies exóticas nocivas como a cochonilha. E o *Jornal Horticolo-Agricola* de Dezembro de 1897 lança o primeiro alarme: «*Os pequeninos seres, que os nossos olhos desarmados mal podem vêr, propagam-se tão numerosa e rapidamente que o vegetal não póde resistir aos seus continuos e formidaveis estragos. (...) A estes vem agora juntar-se mais um não menos de temer e que parece ter escolhido o nosso pobre Portugal como ponto de partida para a invasão na Europa, tendo já, no começo, feito prejuizos de valor no seu rapidissimo alastramento. Refiro-me à* Icerya purchasi *recentemente descoberta entre nós e que traz justamente alarmados os nossos agricultores (...). Entre nós foi assignalada a sua presença no sul, em começos de 1896, primeiramente nas* Acacia melanoxylon, *d'onde passou rápido para os pomares de laranjeiras e outras árvores de fructo, de uma larga área nos arredores de Lisboa.*»

Sucedem-se comunicações sobre fórmulas mais ou menos saponáceas para a limpeza das árvores, mas o fracasso destas medidas paliativas exige preparativos mais enérgicos. «*O tratamento que até agora parece ter dado melhor resultado é a emulsão de petroleo (...). Hoje, porém, a theoria moderna é destruir o parasita pelo parasita. Cada insecto tem, quer no reino animal, quer no reino vegetal, inimigos que encarniçadamente o destroem. Portanto, todo o estudo, todas as atenções em casos d'estes, devem tender à descoberta do inimigo a collocar frente a frente do sêr que nos está causando largos estragos. (...) E é assim que nos Estados Unidos se verificou que as* Iceryas *são devoradas pela* Vedalia cardinalis, *insecto carnivoro que, no estado de larva, é um constante e infatigável devora-*

dor das damninhas cochonilhas; (...) e, portanto, o que conviria, antes de mais nada, seria tratar de propagá-la, visto que já a temos entre nós, mandada vir da América do Norte.»

A boa notícia chega-nos pelo mesmo jornal em Agosto de 1899: «*Os leitores recordam-se de havermos fallado, ha tempos, do ameaçador ataque da* Icerya purchasi *nos jardins e pomares dos suburbios de Lisboa, e lembram-se tambem de havermos dito que haviam vindo da America algumas colonias de* Vedalia cardinalis, *espécie de* Joaninha, *para combater aquelle parasita que levava diante de si não só as arvores fructiferas, mas tambem algumas das plantas de ornamento? Pois bem! Parece que as* Vedalias *desempenharam optimamente o seu papel e que as* Iceryas *estão a desapparecer.»*

O efeito dos insecticidas

Uma vez que, como vimos, a interacção presa-predador não elimina nenhuma destas espécies, mantendo-as pelo contrário em regimes periódicos de sobrevivência, os horticultores receberam com júbilo, em meados do século passado, a notícia do fabrico de um insecticida potente, o DDT (dichloro-diphenyl-trichloroetano) que, aplicado nas suas hortas, faria o milagre de exterminar todos os insectos. O DDT foi sintetizado em 1873 por Othmar Ziedler, mas as suas propriedades insecticidas só foram descobertas em 1939 pelo químico suíço Paul Hermann Müller, que foi por isso galardoado em 1948 com o Prémio Nobel da Medicina. Usado em contexto militar entre 1940 e 50, para combater mosquitos transmissores de doenças tropicais como a malária, febre amarela, tifo ou paludismo, o DDT permitiu erradicar, nos anos 50 do século passado, a malária da Europa e Estados Unidos. Nos países tropicais, a doença não só não desapareceu como ressurgiu com maior virulência pela resistência entretanto conferida ao mosquito pelo programa de desinfestação. O uso extensivo do DDT, pesticida que destrói tanto presas como predadores, na horticultura data dos anos imediatamente posteriores à Segunda Guerra Mundial e teria sido evitado se o modelo de Lotka-Volterra fosse devidamente conhecido: o recurso intensivo a insecticidas para tratamento de árvores frutíferas favorece as presas que constituem neste caso a população que causa a praga. Vejamos porquê.

O ataque aos insectos faz naturalmente diminuir cada uma das espécies, tanto mais quanto maior for a sua intensidade P e o número de indivíduos de cada espécie. Assim, as variações x' e y' são, também, afectadas por uma parcela negativa, proporcional a Px e a Py, respectivamente:

$$\text{influência do insecticida nas cochonilhas} = -E\,P\,x$$
$$\text{influência do insecticida nas joaninhas} = -F\,P\,y$$

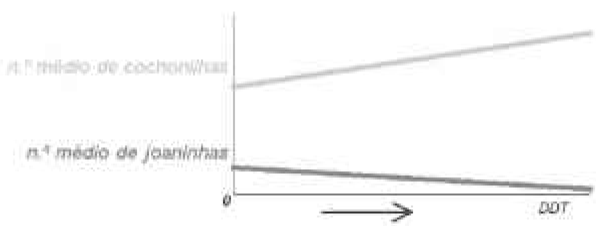
onde E e F são constantes reais positivas. O novo sistema de equações que regula a evolução do número de cochonilhas e de joaninhas é semelhante ao que estudámos anteriormente desde que EP < A, isto é, desde que a acção do insecticida seja moderada:

$$\begin{cases} x' = (A-EP)x - Bxy \\ y' = -(C+FP)y + Dxy \end{cases}$$

E portanto podemos afirmar que os valores médios para este novo sistema são

$$\overline{x} = \frac{C+FP}{D} \qquad \overline{y} = \frac{A-EP}{B}$$

Eles traduzem o seguinte facto: aumentando P, que descreve o efeito do insecticida, o número médio de joaninhas diminui e o número médio de cochonilhas aumenta.



Com a resistência ao remédio entretanto adquirida por novas estirpes dos insectos, as doses de insecticida aplicadas nos anos 50 tiveram de aumentar consideravelmente, começando a avolumar-se evidências de que o químico se teria alastrado em níveis preocupantes à cadeia alimentar das populações. Nos anos 60, a ambientalista Rachel Carson publica o livro *Silent Spring*, alegando que a toxicidade do DDT era demasiado elevada para a saúde pública e que causaria sérios revés na nidificação de muitos pássaros. O livro teve uma divulgação sem precedentes, havendo notícia do seu impacto em Portugal através da crónica de 1963, *Veneno*, do escritor João de Araújo Correia, onde se lê: «*A escritora americana Raquel Carson publicou ultimamente um livro que é um grito de alarme contra um veneno que ameaça corromper a natureza inteira. Esse veneno, que se difunde no ambiente e se fixa nos tecidos vitais, é representado pelos insecticidas químicos modernos. Diz a senhora que os insectos, a poder de tempo, se adaptam a esses insecticidas e que o homem, entretanto, vai pateando. (...) A autora, que tem alma poética, imagina uma primavera em que não cantem aves, todas envenenadas pela ingestão de vermes envenenados. Primavera Silenciosa será a mais triste coisa que poderá sonhar poeta melancólico. Será, na marcha do tempo, um compasso de cemitério. (...) Ousamos pedir à benemérita* Liga de Profilaxia *que estude o problema, apure o que há de verdade e exagero no livro americano, para evitar que Portugal, ninho de rouxinóis, venha a conhecer* Primavera Silenciosa.»

Como resultado desta campanha de aviso para os danos causados pelo DDT, este produto foi banido nos anos 70 como pesticida agrícola, sendo ainda hoje controverso o seu aspergimento regular em cidades densamente habitadas de países tropicais com índices elevados de doenças transmitidas por mosquitos.

Notícias recentes

A introdução de espécies exóticas, ainda que com o útil propósito de controlar de modo natural uma infestação, tirando partido da relação que aqui se explicitou entre presas e predadores, evita o uso, que pode ser muito nefasto para o ambiente, de produtos químicos, mas pode ter também impacto relevante no ecossistema que se quer protegido. Disso dão conta alguns artigos da *Charles Darwin Foundation* nas Ilhas Galápagos, em http://www.darwinfoundation.org, que a cochonilha invadiu em 1982 e onde tem destruído ou colocado em vias de extinção muitas espécies nativas. Receios de que a introdução da joaninha nas Ilhas Galápagos poderia ameaçar a biodiversidade endémica destas ilhas, exigindo vigilância adicional na dispersão deste insecto, levou a uma análise detalhada dos riscos para a fauna e flora das ilhas; esta atestou em 2001 que a joaninha não se interessa por espécies das ilhas, não é tóxica para os pássaros que ali vivem nem compete pelos nichos de outros insectos; o relatório ao Parque Nacional das Galápagos recomendou por isso a sua utilização como o melhor meio para conter os efeitos da presença da cochonilha.

Bibliografia

O tema deste artigo inspira-se num comentário curto da referência [B], ali inserido a propósito do problema da diminuição de certo pescado durante a 1ª Grande Guerra e do estudo e conclusões, nesse contexto, do biólogo Umberto D'Ancona e do matemático Vito Volterra.

Os detalhes matemáticos aqui omitidos podem ser consultados na página http://www.atractor.pt/mat/peixes que expõe este assunto de modo interactivo.

[B] Braun, *Differential Equations and their Applications* (1983)
[C] João de Araújo Correia, *Pátria Pequena* (1977)
[J] *Jornal Horticolo-Agricola* (1897-1899)

Euromilhões, probabilidades, valores médios e medianas

Dinis Pestana
DEIO, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

As regras do EUROMILHÕES são simples: cada aposta consiste na marcação de 5 números (de 1 a 50) e duas estrelas (de 1 a 9), e custa 2 Euros. São premiadas as apostas que prognostiquem correctamente pelo menos três dos valores sorteados, sendo pelo menos um deles um "número". Mais precisamente, os prémios são definidos como se indica no quadro que se segue, no qual se indicam também probabilidades e números médios de apostas por prémio.

	números	estrelas	probabilidade	nº médio de apostas por prémio	nº de prémios na 1a semana (Portugal)
1º prémio	5	2	0.000000013110394	76 275 360	0
2º prémio	5	1	0.000000183545512	5 448 240	0
3º prémio	5	0	0.000000275318268	3 632 160	2
4º prémio	4	2	0.000002949838585	339 002	54
5º prémio	4	1	0.000041297740188	24 214	782
6º prémio	4	0	0.000061946610281	16 143	1 196
7º prémio	3	2	0.000129792897733	7 705	2 736
8º prémio	3	1	0.001817100568257	550	34 915
9º prémio	2	2	0.001860364867501	538	38 727
10º prémio	3	0	0.002725650852385	367	56 457
11º prémio	1	2	0.009766915554381	102	198 885
12º prémio	2	1	0.026045108145016	38	490 426
			0.042451599048500	24	

Na última linha indica-se que a probabilidade de uma aposta ser ganhadora não atinge os 5%, ou seja, em termos de valores esperados, em média uma em cada 24 apostas é premiada.

As receitas da Santa Casa de Misericórdia de Lisboa (SCML) são 2 Euros por aposta, destinando-se ao pagamento dos prémios 50% daquela verba. A SCML tem um lucro ligeiramente inferior a 50% (porque tem que constituir um fundo, até ao limite de 1.5%, que faça face a possíveis reclamações procedentes e renovação de material).

Fica-se assim com a ideia de que o valor de retorno é 50%, por outras palavras que o prémio esperado por aposta é 1 Euro.

Mas, de facto, 16% da verba destina-se a um "fundo de reserva para incrementar o valor do 1º prémio", e consequentemente apenas 34% do valor das receitas é redistribuído como prémios. Assim, o valor esperado por aposta desce nessas semanas para 68 cêntimos (para um investimento de 2 Euros).

Apesar disso, é obviamente um jogo tentador. As apostas premiadas recebem um prémio superior ao valor investido (no primeiro sorteio em Portugal, o 12º prémio foi 8,90 Euros, cerca de 4,5 vezes o preço da aposta), o primeiro prémio é fantástico, dá para tirar uma tribo inteira da miséria, e ninguém desdenharia de receber mesmo o 4º prémio. Para todos aqueles para quem 2 Euros podem ser prescindíveis, é uma forma barata de adquirir sonhos loucos e fantasias das mil e uma noites - e ainda sobra para os dias. Desse ponto de vista, espero não me esquecer de entregar a minha aposta em cada semana, de agora até morrer, e mesmo depois, se possível.

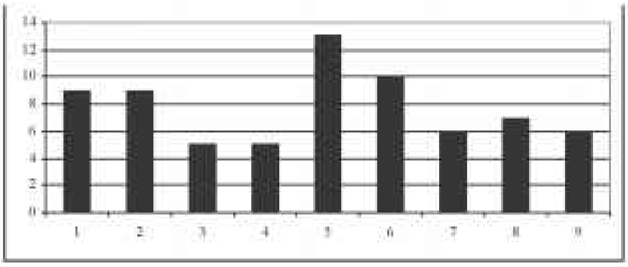
Mas o apostador tem que estar preparado para não ganhar. De facto, a probabilidade de ganhar, mesmo o mais baixo dos prémios, é pequena, e a probabilidade de ganhar um dos prémios que enche os olhos (1º a 3º) é baixíssima: menos do que uma em cada 2 milhões de apostas será contemplada com um desses prémios bem altos. Sendo a probabilidade de ganhar o primeiro prémio ínfima, vai haver decerto um grande número de semanas em que ficará por atribuir.

Um consolo a tirar daí é que raramente o prémio será repartido, se o leitor tiver a sorte de prognosticar correctamente os cinco números e as duas estrelas vai ficar rico como o lendário Creso. Um elemento a ter em conta enquanto estiver a sonhar, até ao sorteio, mas lembre-se que o mais certo é acordar sem nada na mão: Mais de 95% dos apostadores apenas vão ganhar dinheiro fora do bolso, pois em termos médios apenas uma em cada 24 apostas vai ter algum retorno (e, das apostas premiadas, cerca de 61% — quase dois terços — fica-se pelo 12º prémio).

A nossa atitude perante o jogo não é muito racional. Há pessoas adversas ao risco, e pessoas que têm uma verdadeira vertigem de jogar. De um modo geral, um jogo honesto (valor esperado = valor investido) não interessa senão como passatempo, porque não pode enriquecer ninguém. Os jogos mais tentadores são aqueles em que o retorno esperado é bastante inferior ao investido, mas em compensação se pode ficar podre de rico. Não importa que a probabilidade de isso acontecer seja tão baixa como um abismo, porque enquanto o pau vai e volta podemos viver de ilusões. E, sobretudo, a assimetria pérfida nas probabilidades dos prémios leva a que o preço das ilusões esteja ao alcance de (quase) todas as bolsas. Ainda por cima recebe-se o prémio sem ter que se esportular logo uma grossa maquia em impostos!

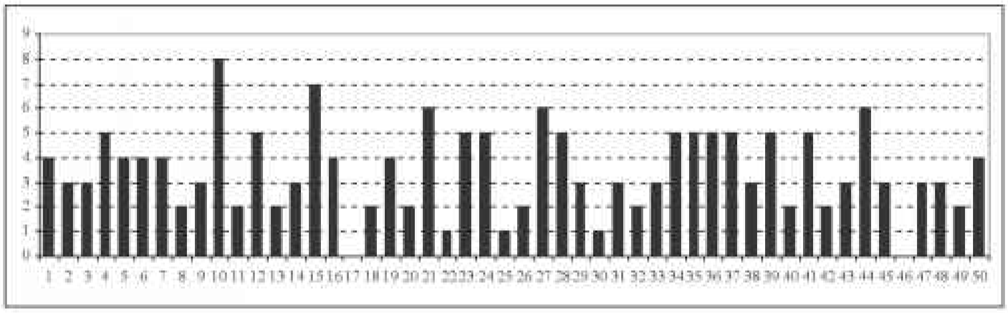
Parte da irracionalidade da nossa atitude perante o jogo revela-se na nossa curiosidade sobre os "números que saíram mais vezes". Nas 35 semanas anteriores à sua introdução em Portugal, as frequências das estrelas e dos números sorteados são as que constam dos gráficos que se seguem:

Estrelas



O cinco está farto de sair, e o 3 e o 4 têm andado subrepresentados; como referência de comparação, note que a frequência esperada de cada estrela naquelas 35 semanas é 2x35/9=7.78.

Números



Apenas o 17 e o 46 nunca saíram nas referidas semanas. A frequência esperada de cada número nessas 35 semanas é 5x35/50=3.5; o 10 e o 15 têm primado pela vontade em aparecer, e o 21, o 27 e o 44 também não se têm feito rogados.

Mas, afinal, as extracções de semana para semana são independentes, o facto de um número ter surgido mais ou menos vezes nas semanas anteriores não o torna nem mais nem menos provável do que qualquer outro. Temos, por outro lado, uma percepção das estruturas do acaso que nos leva a pensar que é anormal quer uma ausência persistente quer uma aparente tendência para ser frequentemente sorteado, e acreditamos que nos sucessivos concursos se vai reequilibrando a frequência com que cada número ou estrela é sorteado.

Mas, repetimos, a convicção de que a informação de semanas anteriores é relevante é completamente ilusória. Como é ilusória a ideia de que há "chaves" mais prováveis do que outras. Claro que é muito mais provável uma chave em que a soma dos números ronde 127 (a "soma esperada" é, naturalmente, $\frac{1+50}{2}\times 5=127.5$) do que a chave (única) em que a soma é 15 ou 240. Mas a probabilidade de saírem os números 8, 16, 24, 32, 47, que somam 127 — e que ainda por cima estão tão bem arrumadinhos, um em cada uma das dezenas possíveis!) é exactamente a mesma que a de sair 1, 2, 3, 4, 5, ou 46, 47, 48, 49, 50.

A ilusão de que há "chaves" mais favoráveis é não só antiga como persistente. De facto, não é difícil argumentar que no totoloto é muito menos provável que saiam 6 números consecutivos (há apenas 44 sequências favoráveis nas $\binom{49}{6}$ possíveis) do que 6 números salteados. Mas, em compensação, a probabilidade de ganhar o 1º prémio com uma aposta com aquelas características, condicionalmente a ter saído uma chave de 6 números consecutivos, é $\frac{1}{44}$. Por outras palavras, a probabilidade de ganhar com uma aposta em 6 números consecutivos é, pela regra da cadeia P(A|B)×P(B), $\frac{1}{44}\times\frac{44}{\binom{49}{6}}=\frac{1}{\binom{49}{6}}$, como a de qualquer outra aposta.

Algumas das dificuldades em lidar com probabilidades — como no exemplo acima — advêm da confusão entre três noções intimamente aparentadas, mas de facto distintas: probabilidade, probabilidade condicional, e probabilidade conjunta. Na linguagem formal da Matemática as confusões são facilmente evitáveis, mas na linguagem corrente é muitas vezes obscuro o que está em causa, com resultados desastrados na avaliação das incertezas e dos riscos que lhes estão associados.

Outra fonte de falsas intuições é a dualidade entre as noções de probabilidade e de valor esperado (que são iguais nas variáveis de Bernoulli, o que nos leva a usar o caminho fácil de usar "variáveis indicatrizes" para calcular valores médios que são probabilidades ... — uma facilidade que pode ser a matriz de desastres se se confundirem os dois conceitos noutras circunstâncias). Logo nos inícios da Probabilidade, em 1654, Pascal raciocinou em termos de valores médios para solucionar o problema da partilha das apostas colocado pelo cavaleiro de Meré. E em 1657 o

De Ratiociniis in Ludo Aleae[1] de Christian Huyghens usa de forma muito sofisticada o conceito de valor médio.

Enquanto a probabilidade está sempre entre 0 e 1, há variáveis aleatórias que têm valor médio infinito, o que tem consequências contraintuitivas interessantes. Nos inícios dos século XVIII, Daniel Bernoulli publicou nos *Anais da Academia de S. Petersburgo* um resultado que, por ser contra-intuitivo, é conhecido por "paradoxo de S. Petersburgo".

A questão é: quanto deve um indivíduo pagar à banca para jogar um jogo em que se procede a sucessivos lançamentos de uma moeda equilibrada, até sair pela primeira vez F (face). Se isto acontecer no k-ésimo lançamento, a banca paga ao apostador 2^k unidades monetárias.

A variável aleatória X= *ganho do apostador* é então

$$X = \begin{cases} 2^k & k = 1, 2, \dots \\ P_k = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{cases}$$

e consequentemente

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1+1+1\dots = \infty,$$

pelo que não há valor finito de entrada que equilibre este jogo.

O resultado é contraintuitivo, pois se a moeda é equilibrada, por muito persistente que seja o azar (da banca, neste caso, se o apostador for suficientemente rico para continuar a dobrar a parada), é inverosímil que ao fim de uma dezena de jogos não tenha saído F!

Buffon, Cramér e outros tentaram contornar o paradoxo considerando que não há recursos infinitos. Atente-se, no entanto, que o paradoxo não é tão paradoxal quanto parece à primeira vista:

Nenhum casino aceita um jogo com a regra "o dobro ou nada", há sempre fiscais a vigiar se algum jogador está a seguir a estratégia de em cada jogada duplicar o montante que aposta, pois é proibido dobrar a parada mais do que um número limitado de vezes (em termos práticos, a banca não aceita apostas superiores a um determinado montante).

1 Acessível em edição recente (*Traité de la Manière de Raisonner dans les Jeux du Hasard*) como apêndice à edição de *L'Art des Conjectures* de Jacques Bernoulli, Editions Jacques Gabay, Paris.

De facto, se não houvesse essa regra, um jogador suficientemente rico ganhava sempre, o que levava o casino à ruína. Bastava começar por apostar uma unidade, se perdesse apostar duas, se voltasse a perder apostar quatro, etc. Então, se ganhasse, finalmente, na k-ésima jogada, a sucessão de jogos teria como resultado para o jogador

$-1, -2, -4, -8, \dots, -2^{k-2}, +2^{k-1}$

(no k-ésimo jogo recebe 2^k, mas tinha apostado 2^{k-1}, e portanto o lucro que obtém nesse jogo é $2^k-2^{k-1}=2^{k-1}$). O ganho total é portanto $2^{k-1} - \sum_{j=0}^{k-2} 2^j = 2^{k-1} - \frac{1-2^{k-1}}{1-2} = +1$.

Se o jogador recomeçasse imparavelmente esta estratégia (ou se infinitos jogadores sem limitação de recursos a seguissem), o casino perdia, devagar mas consistentemente

$1+1+\dots+\dots = \infty$

inexoravelmente ficaria arruinado.

Outras ilusões persistentes têm a sua origem numa confusão entre média e mediana, originada porventura do facto de nos modelos simétricos — como o "normal" — mediana e valor médio coincidirem (no caso de existir valor médio, claro). Esta ilusão é tão antiga que vem já discutida num dos primeiros grandes livros de Probabilidade, *The Doctrine of Chances* (título que se poderia traduzir por *Teorização do Acaso*), publicado por Abraham de Moivre em 1716.

Na época havia um jogo sob licença régia, conhecido por *Royal Oak Lottery*, muito menos sofisticado do que o Euromilhões. Havia esferas numeradas de 1 a 32, e depois de os apostadores arriscarem o seu dinheiro no número que os tentava o "Master of the Game" extraía uma esfera, e pagava 28 vezes o valor da aposta aos apostadores que tivessem acertado. Como a probabilidade de ganhar é, neste jogo, $\frac{1}{32}$, o retorno esperado por cada unidade monetária é $28 \times \frac{1}{32} = 0.875$. Repare-se que com um investimento mínimo o estado arrecadava, numa noite em que fossem apostadas 10 000 libras, cerca de 1 250 libras, nada mau (mas, evidentemente, muito longe do que actualmente os jogos oficiais arrecadam).

Os jogadores achavam este lucro excessivo, e que um retorno de 28 vezes o valor apostado com tão baixa probabilidade de ganhar era demasiado escasso. O Mestre do Jogo, quando as críticas subiam de tom, recordava que estava autorizado a apostar, como representante do rei, que qualquer número que um dos seus críticos escolhesse saía com certeza pelo menos uma vez em cada 22 jogos consecutivos.

Isto é completamente contraintuitivo! O número esperado de jogos até sair um número fixo é naturalmente 32, visto que há igual probabilidade de sair qualquer das esferas numeradas de 1 a 32. Este resultado contraintuitivo deve-se, de facto, à independência entre jogos consecutivos:

A probabilidade de um número escolhido — para fixar ideias, e sem qualquer perda de generalidade, suponha-se que o crítico protestante escolhia o 17 — **não** sair em cada um dos jogos é $\frac{31}{32}$ — por outras palavras, a probabilidade de o 17 surgir logo no primeiro jogo é apenas cerca de 3%. Devido à independência, a probabilidade de o 17 **não** sair nos dois primeiros jogos é $\left(\frac{31}{32}\right)^2 = 93,85\%$, a probabilidade de **não** surgir nos três primeiros jogos é $\left(\frac{31}{32}\right)^3 = 90,91\%$. Na tabela que se segue indicam-se as probabilidades para 32 jogos consecutivos.

nº jogo	probabilidade de não sair	probabilidade de sair
1	0.968750	0.031250
2	0.938477	0.061523
3	0.909149	0.090851
4	0.880738	0.119262
5	0.853215	0.146785
6	0.826552	0.173448
7	0.800722	0.199278
8	0.775700	0.224300
9	0.751459	0.248541
10	0.727976	0.272024
11	0.705227	0.294773
12	0.683189	0.316811
13	0.661839	0.338161
14	0.641156	0.358844
15	0.621120	0.378880
16	0.601710	0.398290
17	0.582907	0.417093
18	0.564691	0.435309
19	0.547044	0.452956
20	0.529949	0.470051
21	0.513388	0.486612
22	0.497345	0.502655
23	0.481803	0.518197
24	0.466747	0.533253
25	0.452161	0.547839
26	0.438031	0.561969
27	0.424342	0.575658
28	0.411082	0.588918
29	0.398235	0.601765
30	0.385790	0.614210
31	0.373734	0.626266
32	0.362055	0.637945

Mas, como se vê na tabela acima, a probabilidade de o 17 não surgir em nenhum dos 22 jogos consecutivos, $\left(\frac{31}{32}\right)^{22} \approx 49,7\%$, já é inferior a 1/2, e o Mestre do Jogo em geral ganhava a aposta. Segundo Abraham de Moivre reporta, isso deixava os jogadores abalados e confusos (não percebiam que enquanto eles reclamavam em termos de valor médio, o Mestre do Jogo os rebatia em termos da mediana), e continuavam a jogar ... e a perder.

Note-se que a probabilidade de o 17 ter saído nas primeiras 32 jogadas (32 é o número médio de jogadas para ocorrer qualquer dos 32 números possíveis) é ainda inferior a 2/3.

Os jogos dão lucros enormes a quem os controla. Por isso mesmo, a maior parte dos apostadores está a perder dinheiro, e no entanto continuam a jogar porque

a) a quantidade de dinheiro que perdem é, aposta a aposta, suportável;

b) o jogo autopublicita-se através de grandes prémios que contemplam um número (muito escasso) de sortudos, incentivando os outros a continuar a arriscar.

Ser contemplado com um prémio grande é um acontecimento raro, muito raro, mas pode acontecer a qualquer, e é o sonho que mantém o jogo a funcionar.

E, convenhamos, também alguma racionalidade: é muito mais provável enriquecer a jogar ou a roubar do que a trabalhar. Qual é a opção que fica para todos nós, que somos honestos?

Agradecimentos: Agradeço ao *referee* a indicação de lapsos, omissões e gralhas que eu dificilmente detectaria sem a sua ajuda.

Afinal o que importa não é ser novo e galante - ele há tanta maneira de compor uma estante

Mário Cesariny de Vasconcelos

Nos seus tempos de estudante houve algum livro de que gostasse especialmente e ao qual ainda recorra se precisar de verificar qualquer coisa na área que ele abrange?

Curso de Análise, vol. I . Elon Lages Lima

Quando entrei na Universidade, há quase vinte anos, não fazia ideia alguma do que me esperava. Até então a minha perspectiva da Matemática era, digamos, olímpica: tratava-se de resolver exercícios, muitos exercícios, exercícios cada vez mais difíceis. Foi, aliás, após ter participado na final nacional das Olímpiadas que decidi, alheio à generalizada comoção familiar, inscrever-me no curso de Matemática.

O que me esperava, felizmente, era o Curso de Análise de Elon Lages Lima. Percorrer hoje aquele que foi, na verdade, o meu primeiro livro de Matemática, evoca-me muito desse ano de 1988/89. Recordo, por exemplo, com contornos quase fotográficos, a primeira vez que cruzei a inscrição

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

cravada na pedra à entrada do Departamento de Matemática, sabendo já porque era verdadeira. Ou o dia (um Sábado frio de Janeiro) em que percebi a demonstração do critério de Dirichlet para séries e, após várias tentativas, a consegui reproduzir de modo a que coubesse no verso de um bilhete de autocarro (evitando o canto superior esquerdo que viria a ser devorado pelo obliterador horas mais tarde). O bilhete guardei-o o resto da noite. A demonstração *"estava certa, e ninguém podia alterar isso, jamais ma podiam tirar"*[1].

[1] da entrevista a A. Sossinski, Boletim do CIM no 19.

Estante

Os comentários a lápis que abundam nas margens do livro são o traço da ingenuidade matemática daqueles tempos; o registo dos exercícios resolvidos, e dos que ficaram por resolver (alguns até hoje), uma radiografia do esforço, do sucesso e da frustração que caracterizam o estudo.

A clareza das definições, a abundância de exemplos e contra-exemplos, o rigor das demonstrações e a dificuldade dos exercícios fizeram-me desenvolver com o livro uma relação quase afectiva. Tenho um capítulo preferido (o quinto), uma secção preferida (a sétima do capítulo quatro), um teorema preferido (o quinto do capítulo oito), um exemplo preferido (o décimo quinto do capítulo cinco), até um exercício preferido (o décimo quinto do capítulo dois). A primeira grande revelação foi a descoberta do infinito e o método da diagonalização de Cantor. Depois, veio a estrutura dos reais e a densidade de Q em R. De novo o infinito, com o conceito de série e o teorema de Riemann sobre séries condicionalmente convergentes. Seguiram-se as primeiras noções topológicas e a beleza do conjunto de Cantor; a noção de valor de aderência de uma função, o lim sup e o lim inf, a continuidade uniforme, o teorema de Darboux (f', mesmo descontínua, verifica a propriedade do valor intermédio). Mais adiante, a construção do integral de Riemann, a noção de conjunto de medida nula e a caracterização das funções integráveis. Finalmente, a noção de equicontinuidade e, de novo, a diagonalização de Cantor para demonstrar o teorema de Ascoli-Arzelà (que reencontraria mais tarde, tantas e tantas vezes).

Das actuais doze edições, calhou-me a quinta, de capas azuis, naquele ano de 1988. Tenho outras três (a sexta, a oitava e a décima primeira, esta última comprada na biblioteca do IMPA), mas para mim são livros diferentes. Não estão (mal) plastificados, não têm os comentários a lápis, as cruzes sobre o número dos exercícios que não consegui resolver, a mancha de café nas páginas 20 e 21. Nem, perdido no interior da contracapa, um número de telefone (fixo, naturalmente, e sem indicativo), que julgo saber de quem era mas que nunca cheguei a marcar. Quando conheci Elon Lima, em Janeiro de 2001, foi essa edição, praticamente a desfazer-se, que lhe pedi que autografasse. Desde esse dia, nunca mais abri o livro.

José Miguel Urbano

recolha de
F. J. Craveiro de Carvalho

Livros contados

Matemática Discreta: Tópicos de Combinatória,

de J. M. S. Simões Pereira (Editora Luz da Vida [www.luz-da-vida.com.pt], 2006)
recensão crítica por Paulo Ventura Araújo, Universidade do Porto

O que é a matemática discreta? Como reconhecê-la? Em que áreas se divide? Por que é que está na moda? Perguntas ingénuas estas, pressupondo que a matemática é uma sala com armários estanques, cada um deles com gavetas cuidadosamente etiquetadas. No armário da álgebra, cautelosamente arredado do da análise, temos a gaveta da teoria dos grupos, a da teoria dos anéis, outra da teoria dos corpos, etc.; não há contágio possível entre armários, e muito pouco entre gavetas do mesmo armário. As coisas não são bem assim, mas a divisão do ensino em disciplinas, e a necessidade humana de tudo classificar, dão alguma verdade a esta caricatura. A matemática discreta, alimentando-se do finito, preferindo a contagem exaustiva à passagem ao limite, dá-se mal com a análise, que vive do *contínuo* onde todos os objectos se fundem; mas tolera e até namora a álgebra, embora, terra-a-terra como é, lhe critique alguns exageros abstraccionistas. A teoria dos números, a combinatória e a teoria dos grafos são as grandes componentes da matemática discreta: a primeira, nascida com o acto de contar, é tão remota como a civilização, e já na antiga Grécia, com Euclides e Diofanto, atingiu alto grau de apuramento; a segunda, de génese menos ilustre, está ligada ao estudo das probabilidades em jogos de sorte, iniciado no século XVII por Pascal e Jakob Bernoulli; e a terceira surgiu em 1736 com a publicação do artigo de Euler sobre as pontes de Königsberg. A reconhecível afinidade entre as três áreas, que nos leva a reuni-las sob o chapéu da matemática discreta, não ilude o contraste entre os pergaminhos ancestrais da *rainha da matemática* e o carácter arrivista das outras duas.

Gozando a teoria dos números de tradicional autonomia, são a combinatória e a teoria dos grafos que compõem a ementa dos cursos universitários de matemática discreta. Só ao longo do século XX estas duas disciplinas se desenvolveram significativamente; e só em anos recentes se assistiu à generalização do seu ensino nas universidades. Até há poucos anos, o único contacto dum estudante de licenciatura com a combinatória acontecia nos cursos de probabilidades e estatística, que costumam incluir umas pitadas de cálculo combinatório - mas sem demonstrações, talvez para sublinhar a vocação aplicada desses cursos. Quanto à teoria dos grafos, a regra era a omissão pura e simples. Obras de referência como [2] e [3] não mencionam estes dois assuntos, ou fazem-no só tangencialmente.

Hoje a onda discreta é imparável: em Portugal, com a reformatação bolonhesa das licenciaturas em Matemática, praticamente todas passarão a ter uma disciplina dessa área, obrigatória na maioria dos casos. O impulso vem da nossa sociedade informatizada: a matemática que se exprime em números de contar é a mesma que faz funcionar os computadores. Nem todos os assuntos da matemática discreta são hoje aplicáveis, poucas serão as aplicações aprofundadas em aula, e só uma percentagem mínima dos alunos alguma vez trabalhará seriamente com elas; mas a aplicabilidade e a actualidade do assunto constituem chamariz irresistível.

O livro de que aqui falamos, da autoria de Simões Pereira, professor catedrático na Universidade de Coimbra, insere-se pois numa tendência bem actual. Cingindo-se à combinatória, trata de uma grande variedade de assuntos, com aplicações genuínas que evitam o estilo noticioso de textos mais ligeiros. É instrutivo confrontar este livro com [4]: as tábuas das matérias são quase sobreponíveis, o que sugere a emergência de um cânone no assunto; mas, no que os dois livros têm de comum, o português vai incomparavelmente mais longe. A abundância de indicações bibliográficas no livro de Simões Pereira faz dele precioso guia para estudos mais avançados, ao passo que o de Martin, não tendo sequer bibliografia, se fecha sobre si próprio. O livro de Simões Pereira contém um índice remissivo completo, 186 exercícios (todos resolvidos ou com indicações de resolução) e muitos exemplos. Recheada de digressões, a escrita é coloquial mas precisa, revelando um autor culto, informado sobre matemática e atento ao mundo.

A introdução ao livro explica a dicotomia matemática do contínuo / matemática discreta, e dá razões para a notoriedade recente desta última. Mas o primeiro tema matemático abordado é um clássico recreativo: quadrados mágicos e suas variações (como o Sudoku). Ainda no capítulo I, considera-se depois a pergunta: se tivermos um algoritmo ou uma fórmula explícita para obter os valores de uma função, podemos de facto calculá-los? A resposta depende da capacidade do computador e do tempo disponível para o cálculo, mas é um *não* inapelável quando a função não é primitiva recursiva; exemplo de tal enormidade é a função de Ackerman, definida por múltiplas iterações da exponenciação entre inteiros. Imitando a escalada vertiginosa desta função, no final do capítulo há uma subida abrupta do grau de dificuldade do texto; mas a questão da recorrência, aqui tratada a nível tão sofisticado, regressa nos capítulos posteriores em roupagens elementares.

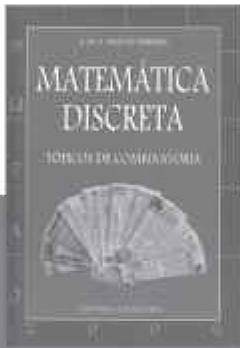
De conteúdo mais ortodoxo, o capítulo II trata das bases do cálculo combinatório: permutações, arranjos e combinações. A função geradora de uma sucessão - definida como a série de potências cujos coeficientes são os termos da sucessão - é a grande ferramenta introduzida neste capítulo, e será amiúde retomada no livro: por exemplo no capítulo VII, para descrever a solução geral de uma recorrência linear com coeficientes constantes, classe que inclui a sucessão de Fibonacci. A ideia é que, para certas sucessões obedecendo a relações de recorrência ou dadas por contagens de famílias de objectos, é possível somar os termos da função geradora e daí obter uma fórmula explícita para o termo geral da sucessão. A propósito surge a pergunta: que funções podem ser expressas por fórmulas? Mas o primeiro requisito para a resposta - o de sabermos o que é exactamente uma fórmula - é meta que o autor considera inatingível.

O capítulo III ocupa-se de um tema com aplicações de respeito: a medição do poder. O modelo de Shapley-Shubik distingue os membros de um orgão deliberativo contando as situações possíveis em que cada um deles tem o voto decisivo: assim, no Conselho de Segurança da ONU, o poder de cada membro permanente é 105 vezes o de um membro não permanente. Ainda no capítulo III fala-se de partilhas: tanto no caso de bens divisíveis como indivisíveis, há métodos que permitem que cada herdeiro guarde para si, no mínimo, uma fracção do total que considere justa. Não fosse a humana cobiça, e esta matemática tão conciliadora há muito teria acabado com os litígios entre herdeiros.

Os capítulos IV e V expõem dois dos princípios mais profícuos da combinatória: o das gaiolas e dos pombos, e o da inclusão e exclusão. Entre as aplicações no livro do primeiro, destacamos a prova da periodicidade da expansão decimal dos racionais; do segundo, a dedução da fórmula da função φ de Euler e a contagem dos desencontros (permutações de n objectos que não fixam nenhum deles).

O capítulo VI abre com um quadro listando o número de distribuições de n objectos por k caixas, conforme os objectos ou as caixas se considerem ou não distinguíveis, e sejam ou não permitidas caixas vazias: no total há 8 interpretações do enunciado. Algumas delas conduzem a entidades já conhecidas, como sejam os coeficientes binomiais; outras são pretexto para revisitar as funções geradoras; e outras relacionam-se com os números de Stirling, que por sua vez levam aos números de Bell e à contagem das partições de um conjunto.

Como já dissemos, o capítulo VII trata de recorrências lineares, também chamadas equações às diferenças. A modo de complemento, dão-se exemplos de recorrências não lineares, mas parece-nos forçado incluir o *problema* $3x$+1 nessa categoria. Na formulação corrente do problema



(ver [1]), averigua-se da convergência para 1 dos iterados de uma certa função de N em N; na versão do livro, o que se quer é determinar se uma outra função está definida em todo o N. Apesar de as duas versões serem equivalentes, o carácter dinâmico do problema desaparece na reformulação; e ao acolher-se, no âmbito da recorrência em inteiros, uma relação de que nem o domínio é conhecido, estica-se essa noção a ponto de a tornar irreconhecível.

A álgebra entra em cena no capítulo VIII com os grupos de permutações. Entre as permutações de um conjunto, há umas especiais, as *transposições*: são as que trocam dois elementos e fixam todos os restantes. Sabe-se que cada permutação é a composta de transposições, mas qual o número mínimo de transposições com que se exprime? A resposta é a soma dos comprimentos dos seus ciclos menos o número de ciclos (corolário do teorema 8.1). Infelizmente a demonstração do teorema não é convincente, pois no passo de indução parece admitir-se que, sob certas condições, se a composta de dois ciclos disjuntos se escrever como produto de transposições, então cada uma dessas transposições troca dois elementos do mesmo ciclo. Melhor seria ter-se demonstrado indutivamente a afirmação do corolário e não a do teorema (que diz apenas respeito às permutações com um único ciclo não trivial).

Uma dificuldade do livro é o modo como fala de permutações: motivado pela escrita usual como matriz de duas linhas, em que na primeira se põem os números de 1 a n e na segunda $\sigma(i)$ fica debaixo de i, o autor diz que o efeito da permutação σ é que *$\sigma(i)$ substitui i* ou *ocupa o lugar de i*. Ora a imagem mental que quase todos nós temos de uma função - e as permutações também são funções - é justamente a oposta; por isso dizemos que *i é enviado em $\sigma(i)$*. Esta fuga à norma pode confundir o leitor desprevenido; e obriga, nas páginas 218-9, a que, dada uma permutação σ de um conjunto finito V, se use σ^{-1} (e não σ, como seria natural) para definir a permutação induzida no conjunto das colorações de V.

A fórmula de Burnside-Frobenius para o número de órbitas da acção dum grupo finito aparece no último capítulo, com aplicações à contagem das colorações não isomorfas de grafos ou outras estruturas finitas. O capítulo culmina com a teoria de Pólya-Redfield, que condensa, num polinómio formal, informação sobre todas as colorações possíveis de n objectos com k cores, arrumando-as em classes segundo a acção de um dado grupo. A aplicação que no livro ocupa maior extensão é justamente dessa teoria: trata-se de saber quantas operações distintas pode realizar o mesmo circuito lógico se permutarmos os seus dados de entrada.

Este livro é uma óptima escolha para um curso universitário de combinatória, mas o professor que o adopte terá que ponderar a selecção de assuntos. A nível do 1º ano é aconselhável omitirem-se os tópicos mais difíceis (como alguns nos capítulos I e IX); mas, para alunos com maior maturidade, poderão ser esses tópicos a dar outro sal ao curso. Finalmente, pelo estilo desempoeirado e pelas numerosas sugestões de leitura, o livro presta-se muito bem ao auto-estudo e é uma utilíssima obra de referência. Oxalá não tarde o prometido volume do mesmo autor sobre teoria dos grafos.

Referências

[1] Vitor Araújo, *O problema $3x+1$*. Gazeta de Matemática 146 (2004), pp. 38-44

[2] Jean Dieudonné (coord.), *Abregé d'histoire des mathématiques* (vols. I e II), Hermann, 1978

[3] Morris Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972

[4] George E. Martin, *Counting: the art of enumerative combinatorics*, Springer, 2001

Esta secção propõe-se publicar recensões aprofundadas de livros de Matemática editados recentemente em português, dando preferência a livros que interessem a um público alargado.
Agradecemos aos leitores da Gazeta de Matemática o envio de sugestões de livros que julguem merecedores da nossa atenção.
Contacto do editor da secção: Paulo Ventura Araújo (FCUP);
e-mail: paraujo@fc.up.pt

Os novos sócios honorários da SPM

Renata Ramalho
SPM

A SPM tem três novos sócios honorários. São eles Maria do Pilar Ribeiro, Jaime Campos Ferreira e Fernando Roldão Dias Agudo, que se vêm juntar a Alfredo Pereira Gomes.

Maria do Pilar Ribeiro é a sócia número um da SPM. Foi um dos seus fundadores, bem como da Gazeta de Matemática. Pilar Ribeiro nasceu em Lisboa, a 5 de Outubro de 1911. Licenciou-se em Matemática pela Faculdade de Ciências de Lisboa no ano de 1933, numa época em que não era vulgar as mulheres tirarem um curso superior. Na mesma época, casou-se com o matemático Hugo Ribeiro, que conhecera durante o curso. Entre 1942 e 1946, acompanhou o marido a Zurique, onde este fez o seu doutoramento. Pilar Ribeiro frequentou então vários cursos de especialização em Matemática, na Escola Politécnica Federal de Zurique. Em 1947, após os expurgos dos matemáticos em Portugal, foi instrutora de Matemática na Pennsylvania State University. De 1976 a 1980, Pilar Ribeiro foi professora na Universidade do Porto e na Escola Biomédica Abel Salazar.

Jaime Campos Ferreira nasceu a 23 de Dezembro de 1927, em Lisboa. Licenciado em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, em 1950, foi discípulo de Sebastião e Silva, e assistente de Vicente Gonçalves. Nos primeiros anos de sua carreira profissional, foi técnico do Instituyo Nacional de Estatística. Durante 30 anos, foi professor do Instituto Superior Técnico, onde ajudou a formar diversas gerações de matemáticos. Campos Ferreira fez investigação na área da Teoria das Distribuições e Análise. Alguns dos trabalhos por si realizados foram premiados pelo Instituto de Alta Cultura. É também autor dos livros *Introdução à Teoria das Distribuições* e *Introdução à Análise Matemática*. Depois da sua jubilação em 1997, o IST criou um prémio com o seu nome, destinado a distinguir alunos da licenciatura em Matemática.

Fernando Roldão Dias Agudo nasceu em Mouriscas a 25 de Novembro de 1925. Licenciou-se em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL) em 1947, e em 1951 licenciou-se em Engenharia pelo Instituto Superior Técnico. Ainda estudante, recebeu o Prémio Nacional Francisco Gomes Teixeira pelo trabalho "Sobre um Teorema de Kakeya". Em 1955, obteve doutoramento pela FCUL, umas das universidades onde leccionou. Foi também investigador visitante na Universidade da Califórnia. Sua carreira científica desenvolveu-se com especial ênfase em Análise Funcional. Dias Agudo exerceu também diversos cargos administrativos de grande relevo. Os mandatos de director da FCUL e de presidente do Instituto Nacional de Investigação Científica são apenas alguns exemplos. Eleito tesoureiro da Academia das Ciências de Lisboa em 1979, tem sido sucessivamente reeleito para o cargo. É ainda membro da *The New York Academy of Sciences* e da *Academia Scientiarum et Artium Europaea*, entre outras sociedades científicas.

O que têm em comum a eleição de um delegado de turma e as eleições legislativas?

Rui Feiteira
Escola Secundária Manuel Teixeira Gomes, Portimão

À primeira vista, esta comparação poderá parecer perfeitamente disparatada e sem sentido. Mais, se aceitarmos a comparação, a resposta a esta questão parece fácil. Uma coisa não tem nada a ver com a outra, e pronto nada mais há a dizer. Poderemos pensar assim já que, numa eleição, se decide o futuro de um país e na outra o que estamos a eleger é de menos importância, quando comparado com a primeira.

Será esta a última resposta? Não. A análise que vos proponho é ligeiramente diferente, porque na base destas duas eleições estão dois métodos de eleição com naturezas distintas (um maioritário, outro representativo) que podem produzir resultados de justiça duvidosa.

Comecemos por analisar a eleição de um delegado de turma. Neste tipo de eleição qualquer aluno da turma em questão pode apresentar-se como candidato. Cada eleitor (aluno) apenas pode votar num elemento do universo eleitoral, isto é a turma. O voto é pessoal, directo e secreto. Como é que se encontra o vencedor? De uma forma fácil (basta contar os votos) e justa, o vencedor é aquele que reúne uma maior quantidade de preferências e, portanto, é o candidato que a maioria prefere. Pronto, parece que a questão está arrumada. Mas não. O sistema de "um homem, um voto", conhecido por «votação plural», não é o processo mais justo de proceder a uma eleição.

Em 1780, o marquês Jean Borda, matemático e filósofo francês do séc. XVIII, apercebeu-se que este método podia não ser o mais justo e apresentou uma questão análoga à seguinte: imaginemos que numa eleição, com vinte eleitores, apresentavam-se às eleições três candidatos, A, B e C, e cada eleitor hierarquizava os candidatos. Borda reparou que era possível eleger um candidato que a maioria dos eleitores colocava em último lugar. Bastava para isso que os votos dos outros dois estivessem suficientemente divididos. Suponha que 9 das 20 pessoas preferiam A a B, e ao mesmo tempo, preferiam B a C; 6 pessoas preferiam B a C e C a A; 5 pessoas preferiam C a B, e preferiam B a A. A tabela 1 ilustra o que ficou conhecido como paradoxo de Borda.

1.a preferência	A	B	C
2.a preferência	B	C	B
3.a preferência	C	A	A
	9	6	5

Tabela 1 - Preferências hierarquizadas, por coluna, de três grupos

Observando as primeiras preferências (primeira linha), facilmente se chega à conclusão que o candidato A vence as eleições, porque é o candidato mais votado. Este obtém 45% (9 em 20 possíveis) das preferências, contra 30% (6 em 20 possíveis) do candidato B, o segundo mais votado. Mas, numa análise mais atenta da tabela, observamos que 55% dos eleitores, caso pudessem hierarquizar os candidatos, colocariam A na última preferência, logo este não é o candidato da maioria. Podemos concluir, então, que este método não é o mais justo. Borda propôs então o seguinte: cada eleitor hierarquiza os candidatos de acordo com as suas preferências e atribui uma pontuação para cada candidato. No caso de três candidatos, cada eleitor daria dois pontos ao candidato que preferisse, um ponto ao da sua segunda preferência e zero ao restante. Os pontos seriam posteriormente somados e a escolha recairia sobre o candidato mais pontuado.

No caso da nossa eleição teríamos:

$A=2\times9+0\times6+0\times5=18$

$B=1\times9+2\times6+1\times5=26$

$C=0\times9+1\times6+2\times5=16$

E o vencedor seria o candidato B e não A, como antes. Parece, desta forma, que encontrámos um método justo. Será que sim?

Embora este método seja bom, porque os votos retêm a informação da hierarquização dos candidatos, apresenta alguns problemas. Talvez o mais importante seja o problema[1] das alternativas irrelevantes, que se pode ilustrar com a seguinte situação. Imagine que uma comissão de uma empresa composta por sete elementos tem de tomar uma decisão sobre a aquisição de um imóvel. Como seria de esperar, ou talvez não, os comissários não se entendem. As decisões possíveis são as seguintes: A) adquirir o imóvel; B) ainda é cedo para se tomar uma decisão e C) não adquirir o imóvel. As opiniões distribuem-se da seguinte forma:

A	B	C
B	C	A
C	A	B
3	2	2

Tabela 2

Aplicando o método de Borda obtemos os seguintes resultados: A=8; B=7 e C=6. Portanto, a decisão que vai ser tomada é: adquirir o imóvel.

Pareceria lógico que se colocássemos uma alternativa que não é relevante para a questão em discussão então deveríamos obter o mesmo resultado. Imaginemos agora que as hipóteses são as seguintes: A) adquirir o imóvel; B) ainda é cedo para se tomar uma decisão, C) não adquirir o imóvel e x) vamos mudar de empresa de limpeza. As opiniões distribuem-se da seguinte forma:

A	B	C
B	C	x
C	x	A
x	A	B
3	2	2

Tabela 3

Refazendo os cálculos obtemos: A=11; B=12, C=13 e x=6. Logo a decisão a tomar será: não adquirir o imóvel. Deste modo vemos que apenas com uma pequena alteração (a alternativa x só obteve 6 pontos e portanto foi a menos votada) a decisão que deve ser tomada já é diferente. Posto isto, é legítimo perguntar, e se numa mesma eleição o sistema de pontos mudar, isto é, em vez de utilizarmos o sistema (2, 1, 0), porque não outro? Por certo, o vencedor não se altera.

Ora mais uma vez a resposta não é tão óbvia. O que se passa é que o vencedor poderá depender dos pesos que se fixem. Se não está convencido, experimente o leitor encontrar o vencedor da tabela 4 utilizando primeiro o sistema de pontos (6,5,0) e depois (5,1,0). Surpreendido?

5	4	3
A	B	C
C	C	B
B	A	A

Tabela 4

Já nos finais do século passado, Donald Saari, um matemático americano que se tem dedicado a estudar estes problemas, mostrou que pequenas mudanças em qualquer sistema eleitoral podem trazer grandes alterações nos resultados das eleições.

1 Dois outros problemas, a que se costuma fazer referência, são o voto táctico e o voto não sincero. Se os eleitores dispersarem suficientemente os votos, o candidato mais forte poderá não ganhar - voto táctico. Pode acontecer ainda que os eleitores ordenem os candidatos de forma a penalizarem o candidato mais forte - voto não sincero.

Passemos agora à segunda questão que é um pouco mais complexa. Nas últimas legislativas obtiveram-se os seguintes resultados a nível nacional[2]:

Listas	Votos	%	Mandatos	% de mandatos
PS	2573302	45.05%	120	53.1%
PPD/PSD	1638940	28.69%	72	31.86%
PCP-PEV	432130	7.57%	14	6.19%
CDS-PP	414856	7.26%	12	5.31%
B.E.	364296	6.38%	8	3.54%

Quadro 1 - Nestas legislativas participaram 5 711 981 eleitores[3]

O que é curioso observar é que o partido vencedor (PS) venceu com a maioria relativa dos votos (45,05%), mas ainda assim conseguiu a maioria absoluta do número de mandatos (120 em 230). Não seria de esperar que os 45,05% de votos se reflectissem directamente no número de deputados?

Isso não acontece por duas razões. Numa primeira fase, porque o país está organizado em 22 círculos eleitorais, como mostra o seguinte quadro:

Eleição da Assembleia da República - 20 Fevereiro 2005[4]

Aveiro	15	Portalegre	2
Beja	2	Porto	38
Braga	18	Santarém	10
Bragança	4	Setúbal	17
Castelo Branco	5	Viana Castelo	6
Coimbra	10	Vila Real	5
Évora	3	Viseu	9
Faro	8	Açores	5
Guarda	4	Madeira	6
Leiria	10	Europa	2
Lisboa	48	Fora Europa	2
		Total	230

Quadro 2 - Número de deputados por círculo eleitoral

Portanto, os resultados nacionais, a nível de atribuição de mandatos, são em função desta distribuição[5]. Numa segunda fase, esta distribuição não obedece a uma proporcionalidade directa[6]. Obedece sim, a um sistema de representação proporcional, o método de Hondt[7]. Este método foi adoptado após 1974 (embora já tivesse sido utilizado no início do século passado[8]), pela comissão de redacção da primeira lei eleitoral que "...optou - por unanimidade - pelo método de Hondt[9] por ser aquele que melhor poderá traduzir a vontade do corpo eleitoral, ..."[10]. Neste método, o número de votos de cada candidato é dividido por 1, 2, 3, ..., até se atingir o número limite de deputados por círculo eleitoral, e de seguida ordenam-se os quocientes por ordem decrescente até obtermos o número de deputados a eleger, em caso de empate de quocientes atribui-se o mandato à lista menos votada.

Para melhor perceber este método, apliquemo-lo ao círculo eleitoral de Faro[11], onde iremos proceder à distribuição de 8 mandatos.

Lista	Votos	%	Mandatos
PS	98575	49.33%	6
PPD/PSD	49098	24.57%	2
B.E.	15316	7.66%	0
PCP-PEV	13835	6.92%	0
CDS-PP	11537	5.77%	0

Quadro 3 - Resultados de Faro nas Legislativas de 2005 (199 823 votos válidos)

2 Apresentam-se apenas os resultados dos partidos que conseguiram eleger 1 ou mais deputados. Também não estão contabilizados os círculos eleitorais da Europa e do Resto do Mundo, cada um com 2 deputados.
3 Fonte Secretariado Técnico dos Assuntos para o Processo Eleitoral.
4 Fonte Secretariado Técnico dos Assuntos para o Processo Eleitoral.
5 O número de deputados por círculo eleitoral não é fixo ao longo dos tempos, varia conforme a população recenseada aumenta ou diminui. A título de exemplo, o círculo de Portalegre perdeu um deputado nestas eleições, já que nas Legislativas de 2002 elegia 3 deputados.
6 Se assim fosse o número de deputados por círculo seria igualmente distribuído por todos os círculos. Isto quereria dizer que todos os círculos eleitorais teriam o mesmo peso.
7 Victor D'Hondt (Gand, 1841-1901), jurista belga e professor de direito civil na Universidade de Gand.
8 Após pressão do Partido Republicano, o método de Hondt foi contemplado na Lei Eleitoral de 14 de Março de 1910, para os círculos de Lisboa e Porto. Face aos resultados díspares acabou por não ter aplicação prática.
9 Este método converte votos em mandatos.
10 Relatório da Eleição para a Assembleia Constituinte 1975, volume I - Projecto de Lei Eleitoral, Ministério da Administração Interna, Secretariado Técnico dos Assuntos Políticos
11 Fonte Secretariado Técnico dos Assuntos para o Processo Eleitoral.

Com ajuda do *Excel* rapidamente calculamos todos os quocientes.

	PS	PPD/PSD	B.E.	PCP-PEV	CDS-PP
	98575	**49098**	**15316**	**13835**	**11537**
1	98575	49098	15316	13835	11537
2	49288	24549	7658	6917,5	5768,5
3	32858	16366	5105	4611,67	3845,7
4	24644	12274,5	3829	3458,75	2884,3
5	19715	9819,6	3063	2767	2307,4
6	16429	8183	2553	2305,83	1922,8
7	14082	7014	2188	1976,43	1648,1
8	12322	6137,25	1915	1729,38	1442,1

Tabela 5 - Cálculo dos quocientes

Passada esta fase, temos que ordenar todos os quocientes sabendo que aos primeiros oito serão atribuídos mandatos. Na tabela seguinte, apresentamos apenas os primeiros 10 quocientes.

Quocientes	Mandatos
98575	PS
49287,5	PS
49098	PSD
32858,3	PS
24643,8	PS
24549	PSD
19715	PS
16429,2	PS
16366	_____
15316	_____

Tabela 6

O PS conquistou 6 mandatos e o PSD ficou com os restantes dois. Note que existe apenas uma diferença de aproximadamente 63 votos entre o oitavo e o nono quocientes. Claramente este método beneficia o partido mais votado, pois o PS com 49287.5 votos conquistou o segundo mandato, enquanto que o PSD só elege o primeiro deputado com 49098 votos. Se ainda não está convencido deste facto, basta reparar que o partido que conquistou maioria dos mandatos não conquistou a maioria absoluta dos votos. Poderíamos então procurar outro método que não beneficiasse os partidos mais votados e existem, de facto, outros métodos de representação proporcional, como por exemplo o método de Hamilton, o método de Jefferson, o método de Adams, o método de Webster e o método de Huntington-Hill[12]. Mas todos eles apresentam alguma particularidade interessante.

O método de Hamilton está sujeito a paradoxos[13] e beneficia estados grandes ou os partidos mais votados. O método de Jefferson também beneficia os estados grandes. Os métodos de Adams e Webster beneficiam os pequenos estados. De todos os métodos considerados, incluindo o método de Hondt, apenas o de Hamilton respeita a regra da quota, isto é, o resultado da divisão de lugares para um estado é sempre igual à quota máxima ou quota mínima.

Poderá colocar-se então a seguinte questão: se a divisão proporcional de mandatos é uma questão matemática, porque que razão não surge o método perfeito? A resposta a esta questão conhece-se desde 1980. Nesta altura, dois matemáticos, Michael Belinski e Peyton Young, formularam um teorema que ficou conhecido como o *Teorema da Impossibilidade de Balinski e Young*. Este afirma que não existem métodos de divisão proporcional perfeitos. Qualquer método de divisão proporcional que não viole a regra da quota produz paradoxos e qualquer método que não produza paradoxos, tem de violar a regra da quota. Este resultado é surpreendente, no mínimo, pois diz-nos que não existe a possibilidade de encontrarmos o método perfeito! Portanto, e de acordo com este teorema, não será possível conciliar justiça e representação proporcional.

Outro resultado tão curioso ou mais curioso que este, foi o que Kenneth Arrow demonstrou nos anos 50. Arrow começou por considerar quais seriam as condições a que

12 Este método é utilizado nos Estados Unidos da América para determinar a composição da Câmara dos Representantes.

13 Conhecem-se três paradoxos: o paradoxo de Alabama, o paradoxo da População e o paradoxo dos Novos Estados.

um sistema teria de obedecer para que este não produzisse paradoxos e que fosse, ao mesmo tempo, justo. Com vista a esse objectivo considerou um conjunto de condições que caracterizassem um sistema eleitoral justo e demonstrou o resultado utilizando o método de redução ao absurdo. A sua primeira preocupação era que o sistema não podia produzir ciclos[14], portanto, para evitar este problema, Arrow exigiu que as escolhas dos eleitores fossem transitivas (se o eleitor prefere A a B e B a C então terá que preferir A a C). A segunda condição ficou conhecida como a hipótese da unanimidade (se todos os eleitores preferem A a B, então A vence B). Para finalizar, e para evitar o problema das alternativas irrelevantes, Arrow considerou que o sistema deveria ser independente em relação às alternativas irrelevantes.

Baseado nestas três condições, que são muito fáceis de aceitar, Arrow provou que um sistema com três ou mais candidatos que obedeça às condições anteriores é uma ditadura! Este resultado valeu-lhe, anos mais tarde, o prémio Nobel da Economia.

O choque deste resultado originou uma grande produção científica sobre o assunto, o que nos mostrou que muito do que nós assumíamos como verdadeiro, na realidade, não o era. Neste ponto parece que chegamos a um impasse: não existe um método de representação proporcional; um sistema justo e livre de paradoxos é um sistema ditatorial... Mas, mais uma vez, o que parece não se concretiza.

Nos finais do século passado, Saari demonstrou que a última condição que Arrow considerou, funcionaria apenas numa sociedade irracional. Esta condição destrói a hipótese de escolhas transitivas. Saari considerou então métodos suficientemente sofisticados de forma a que se pudesse ter a certeza que os eleitores seriam racionais. Alterando a última condição de Arrow, de forma a permitir unicamente preferências transitivas, o sistema ditatorial vem substituído pelo já nosso conhecido método de Borda.

Segundo Buescu, "Está salva a democracia."[15], mas depois de todo o que foi exposto, o método de Borda, talvez no mínimo, seja o melhor dos sistemas imperfeitos. Posto isto, poderíamos propor uma mudança no sistema eleitoral para as eleições Legislativas. Para isso bastava que em cada círculo eleitoral, em vez de votarmos neste ou naquele partido, votássemos em pessoas que se candidatassem ao processo eleitoral. Mas esta simples mudança, na minha opinião, traria três problemas imediatos e uma grande vantagem.

Comecemos pelos problemas. Primeiro, o método violaria a Constituição Portuguesa, já que apenas os partidos políticos se podem apresentar às eleições, e como cada pessoa ao votar saberia exactamente para que candidato ia o seu voto, corria-se o risco de o candidato mandatado representar o seu círculo eleitoral e não o país. Segundo: com a implementação deste método, correr-se-ia sempre o risco de poder ocorrer uma manipulação das eleições, o que lançaria a suspeição num processo que necessita de ser claro e transparente. Por último, ao se adoptar este sistema teria que se escolher um sistema de ponderação, que como já vimos anteriormente, pode produzir diferentes resultados com diferentes ponderações. A grande vantagem seria a de uma maior responsabilização dos deputados, já que cada eleitor conheceria o destino do seu voto, coisa que o método actual não permite. Este facto poderia por si só aproximar a classe política do universo eleitoral e, desta forma, acabar com o distanciamento que se verifica entre eles.

A resposta à questão inicial parecerá agora, mais ou menos, óbvia. Os dois sistemas analisados, o sistema maioria simples e o método de Hondt acabam por nos apresentar, inesperadamente, problemas de justiça e igualdade de tratamento para com os candidatos. Os resultados obtidos podem não expressar o desejo de uma

14 Numa eleição, quando comparamos os candidatos dois a dois -método de Condorcet- cada candidato vence e perde quando comparado com os outros. Note que, para existir um vencedor neste método, terá que existir um candidato que derrota todos os outros em despique directo. Logo, neste caso, não existe vencedor e estamos na presença do paradoxo de Condorcet.

15 BUESCU, Jorge, *O Mistério do Bilhete de Identidade e outros Mistérios*, p. 88.

parte significativa do universo eleitoral, pois se no primeiro caso pode vencer um candidato que a maioria não prefere, no segundo caso, um partido consegue atingir a maioria absoluta do número de deputados sem atingir mais de metade dos votos validamente expressos.

Para finalizar, e citando uma conhecida frase do ex-primeiro ministro inglês Winston Churchill "A democracia não é o sistema ideal mas é o melhor que temos", os métodos e sistemas de eleição que usamos podem apresentar alguns problemas, como vimos anteriormente, mas mais do que procurarmos um método ou sistema perfeito e imune a paradoxos, precisamos de sistemas universalmente aceites e matematicamente válidos para que a tão desejada democracia possa prevalecer. Não devemos esquecer que, em última análise, será a classe política a decidir qual o método a utilizar e a escolha de qualquer método não passa só por uma questão matemática, pois terá sempre implicações sociais.

Referências Bibliográficas

1 BUESCU, Jorge, *O Mistério do Bilhete de identidade e Outras Histórias*, Gradiva, Lisboa, 2001

2 CRATO, Nuno, *Paradoxos eleitorais*, Revista do Semanário Expresso, 13 de Fevereiro de 2002

3 NEVES, Maria, ROCHA, Ana, *Matemática Aplicada às Ciências Sociais*, Porto Editora, Porto, 2004

4 Relatório da Eleição para a Assembleia Constituinte 1975, volume I - Projecto de Lei Eleitoral, Ministério da Administração Interna, Secretariado Técnico dos Assuntos Politicos

5 SAARI, Donald, *The Symmetry and complexity of elections*, http://www.colorado.edu/education/DMP/voting_b.html

6 TANNENBAUM, P., et al, *Excursions in Modern Mathematics*, Prentice Hall, 1998

7 www.stape.pt

Bartoon

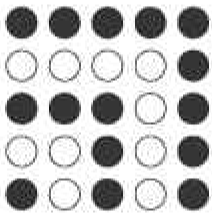
Luís Afonso, Público, 27-08-2006
(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)

O que vem à rede...

A Forma dos Números

António Machiavelo
Departamento de Matemática Pura da
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

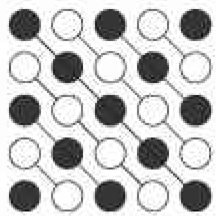
Como era já do conhecimento dos pitagóricos (século V e IV a.C.), certas relações entre os números inteiros podem ser descobertas representando números por conjuntos de pontos, arranjados de forma conveniente. Por exemplo, a figura seguinte:



sugere imediatamente que a soma dos primeiros n números ímpares é precisamente n^2, ou seja:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

Um outro exemplo é dado pela figura:



que sugere a relação:

$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n^2$

de onde resulta:

$2 \times (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) = n^2-n,$

ou

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=n\times\frac{n-1}{2}$$

Várias outras relações deste tipo estão propostas como exercícios (com dicas e soluções) na página do Atractor, em:
http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/index.htm
sob o título "Somas com um nº finito de parcelas", num conjunto de "applets" de alguma beleza.

Estas representações dos números por pontos dão lugar a toda uma variedade de conjuntos interessantes de números, nomeadamente os números poligonais: números triangulares, quadrados, pentagonais, etc... Em geral, o primeiro número m-gonal é 1, sendo o n-ésimo formado a partir do anterior acrescentando um ponto em dois lados adjacentes e completando a figura por forma a formar um polígono com m lados, em que cada lado tem n pontos contando com os vértices.

Uma ilustração interactiva está disponível em:
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Algebra/PolygonalNumbers.shtml

Um dos resultados mais notáveis relativos a números figurados é sem dúvida o resultado conhecido pelo nome de *Teorema dos Números Poligonais*, descoberto por Pierre de Fermat (1601 - 1665):

Todo o número (inteiro positivo) pode ser escrito como soma de n, ou menos, números n-gonais.

Em particular, todo o número se pode escrever como soma de, no máximo, 3 triangulares, 4 quadrados, 5 pentagonais, etc... Como acontece com muitos dos seus resultados, em especial em Teoria dos Números, não se conhece a demonstração do próprio Fermat. Em 1772 Carl Gustav Jacobi (1804 - 1851) e Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) demonstram, de forma independente, o resultado de Fermat para os números quadrados. Em 1796, e como resultado das suas investigações sobre a representação de números inteiros por formas quadráticas, Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) obtém uma demonstração para os números triangulares, tendo anotado o acontecimento no seu pequeno diário matemático, a 10 de Julho desse ano, de um modo conciso mas expressivo:

$$\text{ΕΥΡΗΚΑ} \quad num = \Delta + \Delta + \Delta$$

Em 1813 o resultado foi finalmente demonstrado em toda a sua generalidade por Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857).

De modo análogo se definem números poliedrais e outras classes de números usando generalizações da noção de poliedro para dimensões superiores a 3. Há dois artigos curiosos sobre números poligonais e poliedrais do matemático francês Édouard Lucas (1842 - 1891), publicados na revista La Nature, em 1886, que estão disponíveis "online" em:

http://cnum.cnam.fr/CGI/fpage.cgi?4KY28.26/58/100/432/0/0

http://cnum.cnam.fr/CGI/fpage.cgi?4KY28.27/286/100/432/0/0

(e páginas seguintes...).

No segundo destes artigos é esboçada uma demonstração interessante de um resultado muito bonito, que era já do conhecimento do matemático hindu Ariabata[1] (476 - 550), que o menciona sem demonstração numa sua obra, e que é o seguinte:

A soma dos cubos dos primeiros n inteiros positivos é igual ao quadrado da soma desses mesmos inteiros.

Ou seja:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

Este resultado é mencionado no tratado de álgebra *Al-Fakhri fi'l-jabr wa'l-muqabala* (algo como o *Livro Glorioso de Álgebra*), do matemático muçulmano Abu Beqr ibn Muhammad ibn al-Hasan Al-Karaji[2] (c. 953 - c. 1029), com a demonstração que Lucas esboça, e que advém da seguinte observação. Considere-se a tabela de multiplicação dos números de 1 a *n*.

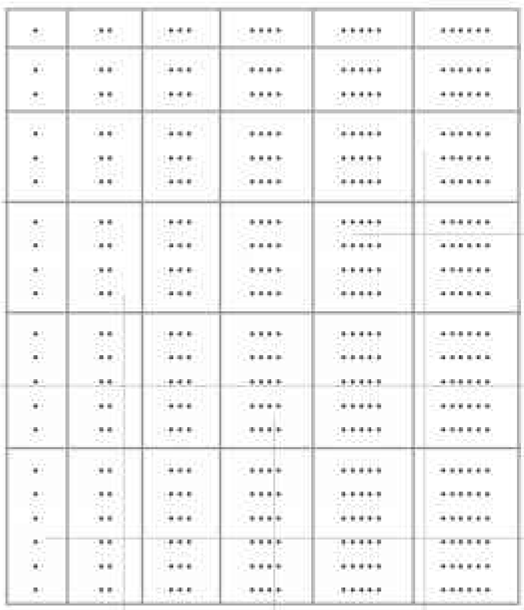
1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24
5	10	15	20	25	30
6	12	18	24	30	36

Tabela de multiplicação 6x6.

Cada um dos seus gnomons (um gnomon é uma figura com a forma ┘), marcados na figura por tonalidades distintas, é igual a:

$$n \times (1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+3+2+1) = n \times n^2 = n^3,$$

por um resultado acima mencionado. A soma de todos os números da tabela de multiplicação $n \times n$ é assim igual à soma dos primeiros n cubos. Mas é também igual a $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$, o que se torna claro visualizando a tabela de multiplicação com pontos, da seguinte forma:



1 Não temos a certeza se esta é a forma como deve o seu nome ser transliterado para português. Em inglês, é Aryabhata.

2 Usamos aqui a transliteração para inglês, por desconhecimento de como deverá ser feita para português.

Olinde Rodrigues, mathematician and social reformer*

Simon Altmann
Brasenose College, University of Oxford

Olinde Rodrigues lived in one of the most interesting periods for the development of mathematics in France. The foundation of the *École Polytechnique* in 1794, one year before Rodrigues's birth, had changed at a stroke the study of the subject. It was the great geometer Gaspard Monge, a friend of Napoleon, who founded the school and created its ethos as a centre of engineering studies based on a thorough mathematical foundation. Its pupils were selected entirely on the basis of their mathematical ability: later luminaries like Cauchy and Arago were in the first cohort. Equally important was the opening of free secondary education to all. Still on mathematics, an old pupil of the *Polytechnique*, Joseph-Diaz Gergonne, founded in 1810 the first journal purely devoted to mathematics, the *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* which, although soon discontinued, was revived in 1836 by Joseph Liouville as the *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, popularly called *Journal de Liouville*, just as the mathematical journal that August Leopold Crelle had founded in Germany in 1826 was referred to as the *Crelle Journal*.

Not only mathematics was on the move in this period. The French Revolution had of course released an interest in rational philosophies, of which the *Encyclopédie* of Diderot and D'Alembert was a powerful example, and utopic socialist ideas soon took hold of people's imaginations. A leading charismatic figure here was Claude-Henri de Rouvroy, comte de Saint-Simon, who had fought in America side by side with Washington and on his return to France not only survived the Terror but made himself rich on land speculation, a fortune that he soon lost in his quixotic social enterprises. The other side of the medal must always be kept in mind: the Bourbon restoration in 1815 changed the political and social atmosphere in France quite radically.

Whereas the rationalism of the early revolutionary days never died in France, there was another somewhat opposite philosophical current that had a strong hold in other European countries, especially in Germany, *Natur Philosophie*. This had been started by the Dalmatian Jesuit Rutger Josip Boscovich (1711-1787) and although it had somewhat mystical undertones it had lasting (and not always negative) effects in the development of physics and mathematics in this period. Hans Christian Oersted, the discoverer of electromagnetic interactions, was a strong supporter, and even hard-headed scientists like Davy and Faraday followed Boscovich's ideas, albeit secretly. In Britain the poet Samuel Coleridge was very influential in propagating Pythagoric ideas on the mystical value of the real numbers, ideas that were enthusiastically supported by his friend, perhaps the most important mathematical physicist of the century, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865).

In all these activities (except of course *Natur Philosophie*) Olinde Rodrigues took a part but because in almost

*This paper is based on material contained in the forthcoming book *Mathematics and Social Utopias in France: Olinde Rodrigues and his Times*, Simon Altmann and Eduardo L. Ortiz (eds). American Mathematical Society, History of Mathematics Series, Providence, RI, USA, 2005.

every case he was prevented by circumstances from taking a leading role, he became an elusive figure in the intellectual history of his period. He was a Jew and as such he benefited from Napoleon's concession of citizenship rights to the Jews but, although he was probably one of the most brilliant young mathematicians of his generation, the Bourbon restoration closed for him the possibility of an academic career. He became involved in finance, following on family tradition, but he soon was under the influence of Saint-Simon and enthusiastically embraced a career as social reformer, supporting the rights of women and of workers. Again here, however, he was displaced in the leadership of the Saint-Simonians by a far more charismatic character, Prosper Enfantin, to whom he had at one time coached in mathematics. He nevertheless kept doing some mathematics from time to time, and his papers would have been enormously influential had people paid attention to them. There is no doubt, for instance, that if his work had been properly understood the disastrous hundred years war between the quaternionists (followers of Hamilton) and the vectorialists (Gibbs *et al.*) would never had taken place. But in many biographical accounts of him he is merely presented as a social reformer, and his mathematical works were not properly recognized until decades after his death. Even in 1938 his compatriot, the brilliant mathematician Élie Cartan, did not have a clear idea of who he was: he referred to him as Olinde *and* Rodrigues, these two ghostly authors thus gatecrashing the mathematical literature for some considerable time.

Even the most elementary facts about Rodrigues had been covered in a cloud of misinformation, about his family, his education, even the date of his death. To correct this situation my collaborators and myself have investigated in the last few years primary sources that give a better and clearer picture about our man. We may now start at the beginning.

Family and education

The spelling of Olinde's surname led many to believe that his family origins were Portuguese rather than Spanish. To make matters worse, the substantial Sephardic Jewish community in Bordeaux, where Rodrigues was born on 6 October 1795, was universally referred to in France as the *Nation Portugaise*. We know for a fact, however, that Olinde's great-grandfather, Isaac Rodrigues-Henriques, was born in Spain between 1689 and 1691, and that he moved to Bordeaux, probably in the first quarter of the eighteenth century. Obviously, as all Jews that remained in Spain after their expulsion in 1492, Olinde's great-grandfather must have been a *marrano*, that is a converted Christian. Bordeaux was the most important French port and after its transfer from British to French suzerainty in 1453, many Spanish Jews emigrated to it and then reverted to Judaism. Olinde's father, Jean Isaac Rodrigues-Henriques, was an accountant who worked for fifteen years as a book-keeper (a responsible job, book-keepers often acting as cashiers) and then took the family to Paris in the late 1790's, where he worked as an exchange agent for a banker and published a manual on accountancy and banking. He also took a distinguished part in the *Grand Sanhedrin*, a council summoned by Napoleon in order to ascertain whether Jews where fit to become French citizens, which was finally agreed to be the case.

Before we get into the question of Rodrigues's education I must say a few words about his name. He had been registered at birth just as Benjamin Rodrigues, the 'Henriques' of the family name being dropped. In 1807, after Jews were allowed to become French citizens, regulations were established requiring them to modify their family names in order to avoid confusion through excessive repetition. Soon later, it was also required that Jews added a non-Jewish name to their given names, and in 1808 the Decree of Bayonne made them register with fixed given and family names. It is then that Rodrigues appears as Benjamin Olinde, the first of which names he soon dropped. His father was obviously a well-read man, since 'Olinde' is a character in Torquato Tasso's *Gerusalemme Liberata*, which had recently been translated into French. Despite the central role that Olinde's father had in the Jewish community, the family were not observant. (Olinde's wife, Euphrasie, was a Catholic.) On the other hand, they kept close ties with the members of the Parisian Jewish community originating from Bordeaux, many of whom were distinguished in the arts and finance. One of Olinde's sisters married a first cousin on the maternal side, Jacob Émile Pereire, who later became an important and wealthy financier and kept a very close relationship with Olinde throughout his life.

Thanks to Napoleon, Jews were now entitled to attend the state Lycées recently opened in Paris, and Olinde enrolled in 1808 at the *Lycée Impérial*. (Later his only, younger, brother also entered a Lycée, but none of his six sisters received similar instruction, although they were well educated by the standards of the time.) In 1811, Rodrigues got the first prize at the mathematical end-of-the-year competition, the second accessit going to his friend Michel Chasles, later a famous geometer. This was the second time that Rodrigues had won the competition, which was most important as we shall see. Rodrigues's mathematical teacher was C. Dinet, who was also a teacher at the *École Polytechnique* (where he had taught mathematics to the great Augustin-Louis Cauchy) and he was an examiner for the entrance to that school, for which purpose the competition mentioned was held. It is thus clear that Rodrigues was abundantly qualified to enter that prestigious establishment which, however, he never did. It cannot be thought that this was the case because of his Judaism, since we know at least two Jews that were admitted, Abraham Gabriel Mossé in 1798 and Myrtil Maas, a contemporary of Olinde, who was accepted in 1813. The *Polytechnique* was a military establishment, geared for the instruction of high powered military engineers but there was also the *École Normale Supérieure* oriented towards the training of teachers. Despite statements to the contrary in the literature (included mine) Olinde never even applied to become a *normalien*.

How, then, did Olinde become a fully blown mathematician? There is here a gap in our knowledge, but the circumstantial evidence is sufficient to sustain a very reasonable conjecture. We know that Rodrigues was so precocious that in 1812, when he was only 17, he was already a class assistant (*maître d'études*) in the mathematics course run at the *Lycée Napoléon* by his teacher, Dinet. In 1808 the University of Paris had been founded and it is entirely plausible that Dinet felt that Olinde was ready to dedicate himself to research rather than frequent the courses of the *Polytechnique*. In fact, not only was Rodrigues granted a *licence ès sciences* by the new Faculty of Sciences of Paris already in 1813, but also this work and five others were published in the *Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique*, a publication devoted to the work of the School members. There is no other mathematician that has published as many papers in this journal, and it must be assumed that it was Dinet's patronage that permitted this to happen. These papers were published from 1815 to 1816, and we know that he gained the degree of *docteur ès sciences* from the University of Paris in 1815 (when he was not yet 20), so that it is clear that Rodrigues must had done mathematical research there for two or three years immediately after he left the *Lycée*. 1815, alas, was the year of the Bourbon restoration and with it the chances of an academic career for Olinde totally evaporated: there is evidence in fact that the educational bureaucrats alleged that parents would not permit their sons to be taught by Jews.

In the circumstances Rodrigues had to follow his father's line and dedicate himself to working in finance. For a period he collaborated with his friend Myrtil Maas who, finding himself in the same predicament, took employment in an insurance company, in which he created an actuarial committee. Both friends then produced the actuarial tables that would be used by all French insurance companies throughout the century, which were eventually published in 1860 and had seven editions until 1933. The core of Rodrigues's gainful work, however, was in financial matters, but he kept throughout his life his interest in mathematics. Not only we know that he read the mathematical literature but, from time to time, he produced some work of the highest quality, as I shall now discuss.

Olinde Rodrigues, the mathematician

Because of his non-mathematical activities Rodrigues's output is far from continuous, and can be roughly grouped in three clusters. The first one from 1813 to 1816 is largely related to his research for his licence and his doctorate. For his licence (1813) he had studied lines of curvature, obtaining a formula to relate the radius of curvature to the coordinates of the centre of curvature, which the great French differential geometer Gaston Darboux was to consider sixty years later as fundamental in the subject. In 1816 he published a paper in which he studied the motion of free objects by using the principle of least action in the calculus of variations, at that time a highly original piece of work which, precisely because even good mathematicians did not understand the importance of the least action method was ignored for decades. This work was not recognized until the Cambridge mathematician Edward Routh rediscovered it in the 1870's. The fate of this work is typical of that of Rodrigues: because he was not in academic circles and thus never had students that could drum up the merits of the master, he became the invisible man of nineteenth century mathematics.

Following on the work of his licence dissertation, he published some work on surfaces. Anticipating Gauss, he used a spherical mapping of a surface, studied the ratio of the areas of the corresponding surfaces, and arrived at a quantity later called the total Gaussian curvature, which he showed equals the product of the principal curvatures. This measure of curvature was credited to Gauss, although it appears not to have been known by the latter: an example of how Rodrigues was often robbed of recognition. He was luckier with another paper of 1816 on the attraction of spherical bodies, his doctoral research, that led to the only piece of work for which he ever got full credit. He had to use the so-called spherical harmonics, relatively new then (they had been invented by Adrien Legendre in 1784). The core, so to speak, of these functions are the *Legendre polynomials*. They were fairly well known in Rodrigues's time, but there were no closed formulae to derive them, and he invented an ingenious way to obtain one such, called the *Rodrigues formula* for the Legendre polynomials, used and named in this fashion to this day, although until Hermite discovered this work it was called the formula of Ivory and Jacobi, despite the fact that the priority for it is undoubtedly Rodrigues's. The procedure that Olinde devised to solve the problem, based on what he called *generating functions*, (which had already been used in statistical problems) was later found most useful in deriving similar formulae for many polynomials of interest in mathematical physics.

We must now jump a quarter of a century to reach Rodrigues's next cluster of five mathematical contributions (1838-1840), a quarter of a century that was nevertheless immensely productive in other ways: amongst other things, he became a man of business, with various degrees of success. Given this large gap, it is virtually impossible to guess Rodrigues's motivation for involving himself in this research, although it is quite clear that around 1838 and 1839 he became interested in combinatorial problems, on which he published four papers. By far, the most important of these is the last one. Clearly, Rodrigues was keeping abreast of mathematical research by reading both the *Liouville* and the *Crelle* journals, in which two papers appeared in 1838 on a combinatorial problem involving the inversion of permutations. Rodrigues solved the problems treated in these papers by defining again some generating functions, which had been so important in his work on the Legendre polynomials, and it is possible that he was inspired to do this work when he recognized the possibility of their use also in this case. Again, this paper was so assiduously ignored for more than a hundred years that repeated attempts appeared in the literature to solve the problem on which Rodrigues had said the final word. It was not until well into the second half of the twentieth century that this paper was rediscovered by L. Carlitz in 1970.

The next paper that we must now consider is one of the most remarkable pieces of work done by Rodrigues, in which he goes back to the subject of his very first paper in the *Correspondance*, rotations, but now of a sphere with fixed centre. The year is 1840 and all we know about him from the historians of the period, who ignored Rodrigues as a mathematician, is that in that year he was 'speculating at the Bourse,' although he was also much concerned about the legislation for the *Banque de France.* The story starts with one of the most prolific mathematicians that ever lived, the Swiss Leonhard Euler (1707-1783). In 1775, when he was already blind, he published in St. Petersburg, where he lived most of his life, two papers about rotations. The rotation of a sphere around its centre, for instance, is fully denoted by a line, the axis of rotation, and by an angle about that line, the angle of rotation. Euler proved that two such rotations when performed one after the other produce a third rotation, called their 'product', and as a result he described rotations in terms of three angles, called the *Euler angles.* Rodrigues went much further, because, given the axis and angle of each rotation he produced a geometrical construction that determines the angle and axis of the product rotation. I illustrate this in Fig. 1, where the first rotation effected is one with axis **a** and angle α, the second with axis **b** and angle β. The product rotation is around **c** by γ. Of course, it required considerable ingenuity for Rodrigues to have discovered that construction, but I shall leave aside his proof since I show this picture to call attention to the fact that the rotations appear there in terms of their half angles. This apparently minor result is however of momentous importance, and it was the cause of one of the greatest controversies in the history of mathematics.

By using spherical trigonometry in a straightforward manner Rodrigues was able to replace each rotation by a set of four algebraic parameters, in such a way that, given the two sets for the two successive rotations, he was able to obtain the same set of four parameters for the product rotation, a truly remarkable result. These are now the essential tool in the modern work on rotations, and the four parameters that Rodrigues introduced are universally used in studying spin, in describing molecular structures, in spacecraft kinematics, in robotics, even in ophthalmology, having correctly replaced the use of the awkward Euler angles. The importance of Rodrigues's contribution,

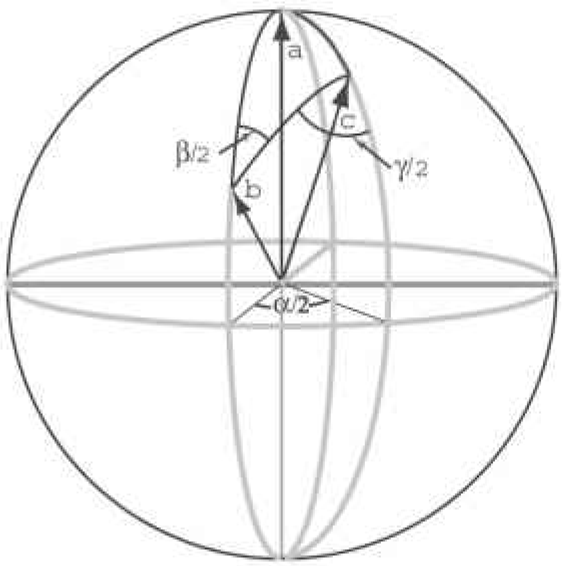


Fig. 1

however, took some time to be properly recognized. The very successful treatise on the dynamics of rigid bodies by Routh, which reached eight editions, the first one published in 1860, contained no reference to Rodrigues until the third edition in 1877, when he proposed that the theorem on the composition of rotations be named after Olinde Rodrigues. Indeed, all the successive editions, up to the last one in 1930, contain a section labelled 'Rodrigues's Theorem'. Such recognition, however, was not readily granted. When the famous German mathematician Felix Klein published his *Vorlesungen über das Ikosaeder* in 1884 he gave Rodrigues some, soon forgotten, partial credit: he grants Rodrigues the discovery of his four parameters and acknowledges that they were unknown to Euler, but he asserts that the latter had used three analogous parameters by replacing the four of Rodrigues by the quotient of his last three by the first. This is a total misrepresentation of the facts, since, as I have said, Euler never used half angles. Every opportunity was taken to bring in Euler and push the inconvenient Rodrigues away: Schoenflies and Grübler, Klein's collaborators, writing in the most prestigious mathematical encyclopaedia of its time, say in relation to these formulae: 'These formulae are quite often treated in connection to Euler. We owe a first essential advance to O. Rodrigues.' The bible of rotation theory, the monumental work by Klein and Sommerfeld, gives those four parameters without any attribution. Euler's great name pushes Rodrigues off: Fig. 1, which is the corner stone of mathematical crystallography, is universally called the *Euler construction*, although Euler was never even near producing it.

The work of Rodrigues in 1840 is historically even more important, because it should have been used by any unprejudiced mathematician to unravel one of the most extraordinary blunders in the history of mathematics. However, because this blunder was embedded in one of the most important and ingenious creations of the century, people firmly shut their eyes to it. Sir William Rowan Hamilton, the man who in 1865 was to be ranked as the greatest living scientist by the American National Academy of Sciences, had also constructed, three years after Rodrigues, some objects composed of four elements that he named *quaternions*. He obtained them, not from a geometrical point of view, but in an a priori way through algebra. (Remember that he was under the somewhat mystical approach of *Natur Philosophie*.) This work, from the algebraic point of view, was outstanding, but from the point of view of rotations it was an unmitigated disaster that caused a century of confusion and strife. The reason for this is that, having discovered the quaternions algebraically, Hamilton had to interpret them geometrically. He realized of course that his quaternions were related to rotations, but he used two principles that had unfortunate consequences. The first was to give priority to the algebra over the geometry, whereas it was geometry, which had a strong tradition in his mathematical circle, that had allowed Rodrigues to keep his feet firmly on the ground. The second was to use only full and not half angles, for which he had very sensible reasons, which nevertheless were to be contradicted by the facts a century later. He never read Rodrigues's paper and he never derived a product rule for the rotations as Olinde had done, but only in a different very indirect way. Cayley, who published this latter work before Hamilton did, not only acknowledged Rodrigues (the only one to do so at the time) but confessed that he did not understand why their convoluted algebraic method gave the same results that Olinde had obtained directly, a question that was not cleared up for more than a hundred years.

In order to understand the nature of Hamilton's blunder a great deal of detailed work is required, but I shall attempt here to present a rough argument to give an idea of the problem. On using the modern vector notation, a quaternion is defined as a pair of a scalar a and a vector, say: $[a, A\mathrm{i} + B\mathrm{j} + C\mathrm{k}]$. A *unit quaternion* may be defined as $[a, A\mathrm{i}]$, with $a^2 + A^2$ unity. Hamilton here fell into two traps. One is that he did not realize that the vector in the quaternion is an axial and not a polar vector, an understandable failure, since he was inventing vectors at the same time as doing his quaternion work, and the distinction in question was not known until late in the century. It was this failure, however, that created untold problems when pursuing Hamilton's programme of defining vectors via quaternions. The highly respected mathematician Marcel Riesz, who first pointed out this error in 1958, qualified Hamilton's interpretation as 'grossly incorrect'. The second trap is that Hamilton noticed that a quaternion $[\cos\alpha, \sin\alpha\ \mathbf{i}]$, acting on a vector normal to $\mathbf{i}$ 'rotates' it by the angle α. and interpreted this as a rotation by α around the axis i of any vector normal to $\mathbf{i}$. This, however, is not at all a rotation of the vector, but an artefact resulting from the product of two rotations, as I demonstrated in 1986. It was clear in any case that there was something wrong in Hamilton's interpretation, since the same so-called 'rotation', acting now on a general vector, does not transform it into its rotated vector, a result that of course Hamilton knew, but preferred to ignore. In fact, he often took the primary definition of a quaternion as an operator that acting on a vector rotates it into another vector or, what is the same, as the quotient of two vectors, an erroneous statement that still appears in the mathematical literature, although it is now accepted to be wrong. It must be understood, however, that Hamilton had excellent reasons to fall into a trap. His 'rotation by α', $[\cos\alpha, \sin\alpha\ \mathbf{i}]$, does not change sign when 2π is added to the alleged angle of rotation, whereas if we had, after Rodrigues, $\alpha/2$ in it, it would. Such behaviour would have been unacceptable to Hamilton and, in fact, it took the best part of a century to understand that this curious change of sign was required by the topology of rotations, a result that became crucial in quantum mechanics.

Rodrigues's paper goes much further than I have described. When symmetry operations are combined, their set forms what mathematically is called a *group*. Rodrigues considered not only the rotation but also the translation group, the aggregate of which forms the so-called *Euclidean group*. Translations appear to be totally distinct from rotations, but Rodrigues realized them by producing infinitesimal rotations around infinitely distant rotation axes. It was to take more than half a century before this remarkably clever idea was again used.

As we have seen, even at this time Rodrigues had not totally abandoned mathematics, and he still read the mathematical literature. He had done nothing on the lines of this paper, however, since 1814, and it is a wonder why he returned to the subject. Geometry, however, had been a strong influence in his mathematical upbringing: Monge had created a powerful school, of which Michel Chasles was an important member. A school friend of Rodrigues, Chasles had continued their acquaintance: we know that they met socially in the 1830's and it is possible that his influence revived Rodrigues's thoughts on rotations. It is important to remember that precisely at that time, in 1830, Chasles produced one of the fundamental results in mechanics, called to this day the Chasles theorem, namely that the most general motion of a rigid body is a translation combined with a rotation around a fixed point. It is highly probable, therefore, that this problem was discussed by the two friends, and that it remained in Rodrigues's mind.

Three years after the seminal 1840 paper Rodrigues produced his final cluster of three mathematical papers (1843-1845). The first two, are concerned with trigonometrical problems, and are followed in 1845 by a short note on continued fractions, his last mathematical paper.

Before we leave this brief discussion of Rodrigues's mathematical works, it is important to mention his writing style. No one who has read the original works of the mathematicians of his period, however great, can help experiencing a sense of relief in reading Rodrigues. His language is concise and entirely free from jargon, and his form of exposition is amazingly clear. Amongst those who have had that experience, the word 'gem' often recurs. The contrast with Hamilton, in particular, is staggering, and one can see why. Hamilton wrote some times starting from pre-conceptions, and when these proved a trap he refused to abandon them. Pre-conceptions were never part of Rodrigues's mathematical writing, which could thus flow from fact to fact without impediment. The opposition of French rationalism with the *Natur Philosophie* quasi-mysticism of Hamilton and his followers could not have a better example than the comparison of these two authors.

Olinde Rodrigues banker, social reformer, Saint-Simonian

Two interests were central to Olinde for most of his life: financing, and how to use it for social purposes. Following on his father, he became a free-lance broker at the Bourse and in 1823, was the director of the *Caisse Hypothécaire* (a bank concerned with mortgages) at the rue Neuve-St-Augustin. In that year his life changed: Saint-Simon, by now destitute, attempted to commit suicide but only succeeded in becoming an invalid. A common friend brought Rodrigues as a man of means that might help him. Helped he did and more, because he became mesmerized by the charismatic Saint-Simon and collaborated with him until his death in 1825 in writing up his last work, *New Christianity*. After Saint-Simon's death Olinde, with the help of his younger brother Eugène, created a quasi-religious sect with strong socialist undertones. He soon, however, was displaced as its leader by Prosper Enfantin, who had been his private mathematics pupil. Enfantin was a hugely charismatic man whose ideas were very different from Rodrigues's: he preached free love and held sway on the females of the congregation, including Euphrasie, Olinde's attractive wife. Rodrigues opposed the loose morality supported by Enfantin, that caused the sect to begin to disintegrate already in 1831. Although Olinde tried to be faithful to his new master, he himself seceded in 1832. In that year there was a notorious trial of Saint-Simonians, accused of the corruption of public morals and illegal association. Enfantin was found guilty on both charges and sent to prison for a year, but Rodrigues was only charged on the second offence and merely fined.

Despite the debacle of the sect, Rodrigues remained a social reformer at heart. Given his knowledge of finance he devoted a great deal of work to promoting the use of finance for social purposes, such as the construction of railways, since he understood the importance of transport to improve the standard of living of the working classes. (His cousin, Émile Pereire and many other Saint-Simonians became very active in the development of the French railways.) In 1840 Olinde founded a journal, *Le Patriote*, to promote the rights of workers, proposing their right to holidays, then such a novel idea that was not adopted until 1912. With his friend Gustav d'Eichthal he fought for the abolition of slavery, that came about in 1848. A very important passion of Rodrigues was that of improving the condition of women, fighting for their legal rights, including the right to vote. Rodrigues received in fact recognition by women often writing to the press to acknowledge this work.

His idealism was never extinct: in February 1848, when at 53 by the standards of the time he was a fairly old man, he mounted the barricades in Paris and in April of that year he was found in London, haranguing the multitudes in support of the Chartists who were demonstrating in sympathy with the French revolutionaries. He died on Wednesday 17 of December 1851, although many biographical notes about him give erroneously the date as 26 December 1851. Many of the short biographical notes about him merely describe Rodrigues as a social reformer, totally ignoring his mathematical work. Even with the Saint-Simonians he did not fare better. Enfantin and his followers were very conscious about their historical position and they prepared several archives at present in various Parisian libraries with carefully copied documents that contain no reference whatever to Olinde Rodrigues. Hardly ever such a worthy man has been so badly treated by history.

PARÁBOLAS E PARABÓLICAS . Nuno Crato

NUMB3RS

O título «Numb3rs» lembra uma daquelas brincadeiras agora na moda, em que se substituem arbitrariamente letras no interior de palavras e se consegue continuar a lê-las. O truque é mais que uma brincadeira, pois mostra que o nosso cérebro muitas vezes apreende a palavra no seu todo e substitui o que os olhos lêem mal, ou simplesmente não lêem, por símbolos correctos. Poderíamos cont1nuar a escrev3r esta crónica com erro2 cada v3z mais fr3qu3nt3s, que só a p4rt1r de c3rta alt1ra se t0rn5ri5 1mp0ss1v3l lê-la.

Mas estamos a desviar-nos... e «Numb3rs» — em português «Núm3ros» — é o título de uma série televisiva a passar na TVI que vale a pena ver. Tem como produtor Ridley Scott, o famoso director do famoso «Blade Runner» e um elenco de actores de escol. Uma das personagens centrais da série, talvez mesmo a personagem central, é o matemático Charlie Eppes, representado por David Krumholtz. Nos diversos episódios, o nosso amigo desenvolve modelos e aplica equações que levam à caça de criminosos.

A trama da série é muitas vezes inverosímil, e a matemática pode parecer caricaturada. Mas a realidade é que a série tem sido pensada com algum rigor e tem consultores científicos que se certificam da correcção das formulações e das equações. É uma ficção, evidentemente, mas é baseada em casos reais em que modelos matemáticos do comportamento físico e modelos probabilísticos do comportamento social ajudaram a polícia norte-americana a capturar delinquentes.

Algumas pessoas dizem que a série é boa porque «desmistifica a matemática», expressão que não se percebe bem o que significa e que habitualmente é usada como sinónimo de «mostrar que a matemática não é um papão», o que ainda menos se percebe. Para os matemáticos e para a matemática, a série é interessante porque leva ao écran problemas e temas que nos são caros. Ao fazê-lo, ajuda a colocar a ciência e a matemática como uma coisa visível e importante no dia a dia. Nos Estados Unidos, onde a série tem sido um sucesso, prevê-se mesmo que haja um número significativo de jovens entusiasmados com a figura heróica do matemático que sejam atraídos para estudos e carreiras matemáticas.

Algumas outras pessoas tomam outra posição extrema, dizem que a série é prejudicial pois dá uma imagem demasiado simplificada e romanceada da matemática e do seu poder. É verdade, mas trata-se de uma ficção e não de uma lição de matemática.

Na raiz destas duas críticas, aparentemente opostas, parece estar uma confusão entre a aprendizagem e o entretenimento. Não podemos querer que uma série de polícias e ladrões ensine matemática, tal como não podemos querer reduzir a aprendizagem da matemática àquilo que é divertido.

Dito isto, contudo, há muito que podemos aproveitar nesta série. Há, entre muitas outras, referências precisas a equações diferenciais, à actualização de probabilidades condicionadas e a números de Fibonacci. Essas referências podem ajudar a despertar o interesse por temas matemáticos. O blog `www.atsweb.neu.edu/math/cp/blog` ajuda a separar a verdade da ficção ao longo dos diversos episódios e esclarece muitos pontos dúbios. Em `www.weallusematheveryday.com` encontram-se muitas ideias para actividades baseadas em conceitos matemáticos referidos na série. Talvez haja, numa ou outra aula, num ou noutro clube de matemática, numa ou noutra palestra, uma oportunidade de usar a série «Núm3ros» p4r4 aj1d4r a apr3nd3r 4lg0 ma1s s0br3 números.

Viver e morrer em Penantopólis

Na ilha Penantopólis todos os habitantes nascem e vivem todas as suas vidas com um chapéu na cabeça. Os chapéus podem ser vermelhos ou azuis. Os nativos não dispõem de espelhos e não querem indagar sobre a cor do próprio penante, se bem que todos sejam muito racionais e tenham óptimas capacidades dedutivas.

A razão para este comportamento está numa lei terrível, de todos conhecida, mas a que todos parecem indiferentes: ***quem souber que a cor do seu chapéu é azul deve suicidar-se logo após a reunião diária*** (uma boa tradição) que sempre ocorre ao fim do dia.

A vida decorria serenamente em Penantopólis até que um náufrago deu à ilha e, numa das reuniões, tomou conhecimento dessa horrível lei. Admirado, o estrangeiro, que se chamava Fagundes, disse: "É curioso, porque vejo pelo menos uma pessoa com chapéu azul".

Como continuará agora a vida em Penantopólis?

Vejamos, se houver somente uma pessoa com chapéu azul, esta, ao ouvir o estrangeiro, e vendo somente chapéus vermelhos, deduz imediatamente que se deve suicidar.

Se forem duas as pessoas com chapéu azul, chamemos-lhes *Ara* e *Breu*, então cada uma delas vê um chapéu azul, pelo que nada sucede na primeira noite. Mas na segunda, a nativa *Ara*, ao constatar que o *Breu* não se suicidou, compreende que é azul o seu próprio chapéu. O raciocínio do *Breu* é análogo. Temos dois suicídios na segunda noite.

O que se passa é que, se houver n pessoas com chapéus azuis, então elas matam-se na n-ésima noite.

A prova faz-se por indução.

Os casos n=1 e n=2 já foram analisados.

Suponhamos que, se houver k ilhéus com chapéus azuis, eles se suicidam à k-ésima noite.

Seja agora a *Zorra* um dos k+1 portadores de penante azul. Ela vê k chapéus azuis e não sabe se o total é k ou k+1. Mas, no fim da k-ésima noite, nada sucede, o que impossibilita o valor k e a leva a concluir que há k+1 chapéus azuis, suicidando-se, com os outros k, na noite seguinte. QED

O que causa esta vaga de suicídios? Sem a intervenção do Fagundes nada disto sucederia. Mas a sua intervenção é trivial, ele diz algo que todos sabem (se k for maior que 1). Se ele não introduz nada de novo, o que leva as pessoas a matarem-se?

Ilustremos com o caso em que há dois chapéus azuis, dos nativos *Ara* e *Breu*. Antes do estrangeiro chegar, a *Ara* sabia que o *Breu* tinha um chapéu azul e o *Breu* sabia que a *Ara* tinha um chapéu azul. Cada um deles parece saber mais do que a afirmação do Fagundes. Mas o que a *Ara* não sabia, e passou a saber, é que o *Breu* sabe que há pelo menos um chapéu azul; de forma semelhante, o *Breu* aprende do estrangeiro que a *Ara* sabe que há pelo menos um chapéu azul. Claro que podemos trocar os papéis da *Ara* e do *Breu* entre si, o que sucede a um sucede ao outro. Cada um deles passa a poder dizer a qualquer outro: "Agora sei que sabes que há pelo menos um chapéu azul". É esta a novidade do Fagundes!

Uma variante que propomos aos leitores: Na ilha Pérola do Penante tudo funciona como em Penantopólis, com a diferença da lei mencionada. *Aqui, quem souber de que cor é o seu chapéu deve suicidar-se de imediato* (quer seja azul ou vermelho). Fagundes, de visita, disse: "Vejo todos os habitantes, que são 1 000 000, e constato que o número de chapéus azuis não é 17". O que vai suceder agora na Pérola do Penante?

Sobre os problemas de pesagens, que aqui apareceram no número anterior, os leitores são convidados a visitar a página `http://ludicum.org/MR/probl/` onde encontrarão outras actividades similares.

Jorge Nuno Silva
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

Inquérito:

A Declaração de Bolonha

A Declaração de Bolonha, e sobretudo o modo como se propagou, constitui um fenómeno muito estranho e raro. É difícil encontrar outra ideia que se tenha propagado tão rapidamente. Quase sem discussão, praticamente escapando ao crivo da análise crítica, tem-se imposto. As ideias novas costumam encontrar inúmeros opositores, defrontar-se com exames críticos e ser objecto de debates orais ou escritos. Não foi bem este o caso e Bolonha parece avançar de vento em popa. Mas há qualquer coisa de esquisito: quando perguntamos o que pensa de Bolonha, deparamos, com desusada frequência, com respostas do género "não estou bem a par" ou "não concordo lá muito" e variantes destas.

Neste Inquérito fizemos várias perguntas com a consciência de que as respostas necessitariam de muito espaço, de muito mais do que dispomos nesta secção. Pode ser delicado concentrar o que se pensa em poucas palavras e agradecemos o esforço de quem respondeu. A brevidade não é obrigatoriamente um defeito: respostas, mesmo sucintas, podem ser o rastilho para inflamar discussões mais completas. A propósito, recordamos que a Gazeta tem uma secção de Cartas dos Leitores.

Questão 1: *Concorda com a primeira parte da introdução a este Inquérito?*

Questão 2: *Considera-se bem informado sobre a Declaração de Bolonha?*

Questão 3: *Que pensa dela (em duas frases)?*

Questão 4: *Parece que tudo (ou quase tudo) se resume a reduzir as licenciaturas a três anos. Cada um dos três ciclos encerra-se com um grau, sendo eles a licenciatura (com direito a dr.), mestrado e doutoramento. Já tivemos um sistema que poderia ter sido considerado de três ciclos com os graus de bacharel (sem direito a dr.), licenciatura (com direito a dr.) e doutoramento. Se, com Bolonha, se adoptassem as designações de bacharel, licenciado, doutor, a receptividade seria a mesma? Ou acha que a questão de se conquistar o título de dr. é de grande importância na sociedade portuguesa? Tão importante que disso pode depender a aceitação de Bolonha? Ou há mais coisas em jogo?*

Questão 5: *Diz-se que com Bolonha o trabalho dos estudantes conta e que, portanto, eles vão passar a trabalhar muito mais. Acredita que com a adopção de Bolonha, os hábitos dos estudantes mudem repentinamente?*

Questão 6: *Também há quem diga que com Bolonha se vai dar continuidade à facilitação de que o ensino tem sido objecto. Por isso os defensores do chamado "eduquês" são, em geral, grandes defensores de Bolonha. Que lhe parece?*

Questão 7: *A aceitação, mais ou menos acrítica, de Bolonha não se deu só em Portugal. Como explicar isso?*

Agnelo Figueiredo,
Escola Secundária Felismina Alcântara de Mangualde

Questão 1: Genericamente, não posso concordar. De facto, ainda hoje se verificam focos de contestação à adopção de "Bolonha", nomeadamente por parte de estudantes e docentes do superior.

Questão 2: Não sou um conhecedor profundo da matéria. Todavia penso que conheço as grandes linhas de orientação.

Questão 3: Há aspectos que me parecem muito positivos: a compatibilidade e a comparabilidade entre os sistemas de ensino superior, bem como a facilitação da mobilidade. De igual modo, o sistema de atribuição de créditos segundo critérios idênticos parece-me muito pertinente. Tudo isto, naturalmente, no quadro de uma "grande" e transnacional Europa.

Há, contudo, um aspecto em que tenho fortes dúvidas, e que considero central, que é a divisão em dois ciclos. Quer parecer-me que três anos não serão suficientes para desenvolver competências ao nível de uma licenciatura. De resto, ainda não compreendo porque é que todo o articulado da Declaração não poderia ser compatível com licenciaturas de 5 anos.

Questão 4: Eu diria que com a atribuição do grau de Bacharel, o sistema não seria minimamente atractivo. Ninguém quer ser Bacharel. Bacharel não dá direito a "Dr". Acho que "Bolonha" não teria tido condições de singrar se ao fim de 3 anos "apenas" se fosse Bacharel.

Mas há ainda uma outra questão: há alguma instituição de ensino superior que não queira atribuir licenciaturas?

Questão 5: Os hábitos nunca mudam repentinamente. A "cultura", a "mentalidade" é algo que apenas muda quando já mudou tudo o resto. De qualquer forma, numa primeira fase, caberá aos docentes um papel preponderante na dinamização da mudança.

Questão 6: Não sei se isso se liga ao facilitismo, ou ao "politicamente correcto" que norteia a acção dos nossos cientistas da educação, criadores do eduquês. É possível que a atracção pela novidade, pela mudança, pelo internacionalismo, bem como a utopia e o voluntarismo que caracterizam estes românticos, tenha tido uma importância maior.

Questão 7: Na Educação é muito difícil alguém ir contra o "main stream". Se alguém não citar, e concordar, com fulano, sicrano e beltrano, dificilmente fará carreira no Ensino Superior. É uma das áreas onde o controlo ideológico se faz sentir de maneira mais intensa. E para o verificar, nem é preciso sair de Portugal. Que diferenças fundamentais encontramos entre o discurso da Educação do PCP, do PS, do PSD ou do CDS? Se excluirmos aspectos de mera cosmética, praticamente nenhuma. Nos aspectos estruturais há uma quase absoluta unanimidade. Por isso...

Diogo Neves, aluno da Licenciatura em Matemática, Universidade do Algarve

Questão 1: Sim.

Questão 2: Não, no entanto também não procurei a informação.

Questão 3: Parece-me que na teoria funciona bem, mas não será assim na prática: teremos mais licenciados para irem para o desemprego, mas que foram pior formados que os actuais.

Questão 4: Creio que o que é importante hoje em dia para as pessoas é andar na universidade, não é sair de lá nem o nome que se lhes dá.

Questão 5: Não.

Questão 6: Concordo. Creio que o processo de Bolonha é uma maneira de facilitar o ensino ainda mais.

Questão 7: Tudo o que é novo tem aceitação difícil, mas não me parece que Bolonha seja uma boa ideia...

**Juan-Miguel Gracia,
Universidad del País Vasco, Vitoria-Gasteiz, Espanha**

Questão 1: Hablaré de lo que pasa en España. Fuimos educados idealizando a Europa. Desde que ingresó España en la UE empezó a recibir ayudas económicas muy importantes, se construyeron muchas autopistas y dos vías para trenes de alta velocidad.

A pesar de que una décima parte de los profesores universitarios nos hemos opuesto con manifiestos firmados a la implantación acrítica de la reforma de Bolonia, las autoridades políticas y académicas siguen adelante, incluso despierta entusiasmos en algunos decanos y rectores que están a la carrera para ver quien la pone en marcha antes.

Questão 2: No me considero bien informado. Tengo la sensación de que hay gato encerrado. Habrá que hacer un "syllabus" de cada asignatura, y, por ejemplo, cada 20 de octubre habrá que hacer problemas sobre integrales trigonométricas.

Questão 3: Dicen los periódicos que en Europa los sistemas universitarios siguen siendo muy diversos. El Reino Unido tendría un sistema tutorial y con menos clases magistrales. Holanda habria hecho algunos cambios en esa dirección. Esta claro que la Unión Europea no es un estado y que cada país va por su cuenta. Con todo, el sistema de Bolonia es un calco del norteamericano. Entiendo que hace falta una estructura piramidal del profesores y monitores. En España los profesores somos sospechosos y creo que la reforma se contempla a coste cero.

Algo malo debe contener Bolonia, pues mi universidad incentiva a los profesores con aumentos de sueldo y ordenadores portátiles para captar voluntarios para la implantación de la reforma.

Questão 4: En España las licenciaturas serán de cuatro años, excepto la de Medicina que será de seis años. Luego habrá el título de master (¿60 ECTS?) y después el de doctor.

Parece que lo importante es la preparación de personal con habilidades de comunicación, dotes para el trabajo en equipo e idiomas modernos. Prima la parte práctica sobre la teórica en los estudios. Creo que la UE es un mercado común, y que la reforma de Bolonia intenta adecuar la fuerza de trabajo a ese espacio económico.

Questão 5: Los estudiantes se resisten, pues han sido educados (sic) en la creencia de que si algo no saben o no endienden es por culpa del profesor.

Questão 6: Está claro que Bolonia ha puesto a los pedagogos, didactas, etc. en el centro de la reforma. Nunca se las prometieron tan felices. Una vez que han destrozado las enseñanzas primaria y secundaria, decidieron rematar la faena en la universidad (nivel de estudios que algún castizo llamó enseñanza terciaria obligatoria).

Así, en mi universidad hace años que nos dan cursos a los profesores sobre: foniatría y cómo impostar la voz; cómo dar clases con las sillas formando círculo, y otras prácticas de campamento juvenil, etc.

¡Qué lejos quedan los tiempos en que la gente sabía que las Facultades estaban orientadas al Análisis y las Escuelas a la Síntesis! Ahora se habla de Centros Universitarios.

¡Innovación! ¡Innovación! ¡Cuántos dislates se cometen en tu nombre!

Pero puestos a ayudar, ¿por qué los pedagogos no nos calculan la curva de aprendizaje de cada asignatura? Estas curvas, que relacionan la cantidad de conocimiento adquirido en función de las horas empleadas, fueron inventadas por un ingeniero en un contexto industrial. Estas curvas dependen de la materia a estudiar y del profesor; pero también de parámetros tales como la ciudad, el número de estudiantes en clase, etc.

Questão 7: Me remito a lo contestado a la pregunta 1. También es cierto que en España la gente teme al poder y prefiere no meterse en líos; incluidos los profesores de universidad, siempre tan pendientes de las subvenciones.

Luís Sanchez,
Universidade de Lisboa

Questão 1: Concordo.

Questão 2: Não. A responsabilidade é minha em primeiro lugar. Sempre achei o tema um pouco repelente, e como tive a sorte de não estar envolvido nas comissões para adaptação dos cursos, pude dar-me ao luxo de não me informar demasiado.

Questão 3: Um sistema de nivelação do ensino superior pela fasquia baixa. A penetração do eduquês e tudo o que ele representa no ensino superior.

Questão 4: Parece-me que haveria muito mais alarido e indignação. O título é muito importante cá no burgo.

Questão 5: Apetece dizer: tá-se mesmo a ver!

Questão 6: Concordo (ver a minha resposta 3).

Questão 7: Não me parece muito estranho. Há tantas más ideias que recebem a benção e o acolhimento das universidades! A concepção ingénua de que a universidade é sempre um espaço de discussão e tolerância é logo desmentida pelo proliferar desenfreado das mais abstrusas teorias cujo papel, aberta ou encapotadamente, é a legitimação do politicamente correcto mais na moda, sobrepondo uma ideologia ao método científico.

Competições internacionais de Matemática de 2006

António Salgueiro e Sílvia Barbeiro
Universidade de Coimbra

Olimpíadas Internacionais de Matemática, Ljubljana, Eslovénia

por António Salgueiro

Este ano Portugal participou pela décima oitava vez nas Olimpíadas Internacionais de Matemática (OIM), que tiveram a sua 47ª edição na Eslovénia, de 6 a 18 de Julho. A equipa portuguesa era constituída pelos atletas Afonso Bandeira, da Escola Secundária de São Pedro do Sul, Célia Borlido, da Escola Secundária de Águas Santas, João Caldeira, da Escola Secundária Emídio Navarro em Almada, João Guerreiro, do Colégio Valsassina em Lisboa, Joel Moreira, da Escola Secundária José Saramago em Mafra, e Rui Sequeira, da Escola Secundária Infante D. Henrique, no Porto. Estes frequentavam o 12º ano excepto o João Guerreiro, que era do 11º. O Afonso Bandeira, o João Caldeira, o João Guerreiro e o Joel Moreira já tinham participado na edição do ano anterior, em Mérida, no México. O líder e vice-líder da equipas foram respectivamente António Salgueiro e Jorge Neves, ambos professores no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e membros do Projecto Delfos, a quem está a cargo o treino da equipa.

Da esquerda para a direita: António Salgueiro, Afonso Bandeira, João Guerreiro, João Caldeira, Célia Borlido, Rui Sequeira, Joel Moreira e Jorge Neves

A preparação de Portugal para estas Olimpíadas iniciou-se em Abril, com o treino de cerca de 20 candidatos à equipa olímpica, que foram seleccionados com base nos resultados das Olimpíadas Portuguesas de Matemática, que tinham decorrido no mês anterior, no Porto. Em meados de Maio, após várias sessões de formação e avaliação foram escolhidos os seis representantes de Portugal para as OIM, bem como dois dos quatro representantes para as Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática (OIAM) que decorreram em Setembro no Equador. Os dois participantes adicionais seriam os dois a obter melhores resultados nas OIM. Após a selecção realizaram-se mais sessões de treino até ao início de Julho.

Em 6 de Julho iniciaram-se as OIM, com a chegada à Eslovénia dos líderes dos diversos países. Neste ano participaram 90 países, num total de 498 participantes. À medida que os líderes iam chegando, foram sendo transportados até Portorož, uma localidade costeira, perto da vila histórica de Pirán. Seria nesta localidade onde os líderes ficariam alojados durante dez dias. Para manter o sigilo das reuniões do júri, a sua localização não foi divulgada até à realização da prova. Este primeiro dia foi uma ocasião para ver pela primeira vez as trinta questões que a Comissão de Problemas tinha seleccionado previamente, com base nas questões que lhe tinham sido enviadas pelos vários países. No dia seguinte iniciaram-se as reuniões do júri, onde foram inicialmente postos de parte os problemas inadequados, por exemplo, por já terem aparecido em Olimpíadas anteriores. Durante este dia e os três dias seguintes foram sendo seleccionados, um a um, os seis problemas que compuseram a prova. Foi escolhido um problema de álgebra, um de combinatória, dois de geometria e dois de teoria de números, sendo dois considerados fáceis, dois de dificuldade média e dois difíceis. Depois de elaborada a prova, iniciaram-se as traduções para as diversas línguas, onde os líderes de Portugal e Brasil ficaram encarregues da versão em língua portuguesa. O líder de Moçambique, o outro país lusófono a participar nas OIM, chegou à Eslovénia mais tarde, devido a problemas burocráticos. As longas discussões serviram para encontrar uma tradução adequada às diferentes versões do português e também às diferentes notações usadas. Depois de vários acertos restava apenas optar entre "polinómio" e "polinômio". Para não causar estranheza a nenhum participante, decidiu-se colocar "polinomio", o que teve o efeito desejado, uma vez que nenhum dos 16 participantes lusófonos reparou no erro ortográfico.

No dia 10 chegaram à Eslovénia os participantes acompanhados pelos respectivos vice-líderes, tendo ficado alojados na capital, Ljubljana. No dia seguinte os líderes deslocaram-se a esta cidade para a cerimónia de abertura. Os líderes puderam assim verificar que todos os participantes tinham chegado, podendo-os cumprimentar de longe, visto a prova neste momento já ter sido elaborada.

As duas manhãs seguintes foram dedicadas à realização da prova. Enquanto os participantes se debatiam com os problemas, os líderes encontravam-se reunidos para, em conjunto, esclarecer eventuais dúvidas de enunciado que surgissem na primeira meia hora de prova. As respostas dos participantes foram fotocopiadas e enviadas aos respectivos líderes na tarde de cada um dos dias de prova. No primeiro dia era já claro que os resultados da nossa equipa eram bastante bons e que seria possível obter medalhas. Na tarde do segundo dia de prova, o líder pôde pela primeira vez conversar com o resto da equipa, que teve uma tarde de praia em Portorož. Depois de saber como tinha corrido este dia de prova, que era bastante difícil, confirmou que quase certamente haveria medalhas. Os vice-líderes mudaram-se neste dia para Portorož para colaborar na correcção e classificação das provas. A organização foi excelente sendo possível ver, em tempo real, como estavam em cada momento as classificações dos diversos participantes. As classificações dos participantes portugueses foram: Afonso Bandeira (15 pontos), Célia Borlido (8 pontos), João Caldeira (15 pontos), João Guerreiro (15 pontos), Joel Moreira (13 pontos) e Rui Sequeira (12 pontos).

Da esquerda para a direita: João Guerreiro, Rui Sequeira, João Caldeira, Célia Borlido, Afonso Bandeira e Joel Moreira.

Nos dias seguintes, os participantes tiveram diversas actividades em Ljubljana e alguns passeios. Visitaram os Alpes eslovenos, Bled, as grutas de Postojna e o castelo de Predjama. No dia 17 de Julho, decorreu a cerimónia de encerramento onde pela primeira na história das participações portuguesas nas OIM, a bandeira de Portugal subiu ao palco três vezes, quando o Afonso Bandeira, o João Caldeira e o João Guerreiro receberam as suas medalhas de bronze. O Rui Sequeira recebeu uma menção honrosa por ter resolvido integralmente um problema. Punha-se neste momento o problema de saber quais seriam os dois participantes a participar nas OIAM, uma vez que as três medalhas de bronze correspondiam à mesma pontuação. No entanto, o João Caldeira estava também apurado para as Olimpíadas Iberoamericanas de Física e optou por ir a estas, que decorreram em Coimbra, em simultâneo com as OIAM.

Nestas OIM, Portugal ficou em 47º lugar, sendo esta a melhor posição de sempre, tendo ficado à frente de muitos países que tradicionalmente obtêm melhores resultados. Entre os países da União Europeia, Portugal ficou em 15º lugar entre 24 países participantes. O melhor classificado, como já vem sendo hábito, foi a China, e o Vietname, o organizador da próxima edição, ficou em décimo terceiro.

XXI Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, Guayaquil, Equador

por Sílvia Barbeiro

As Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática decorreram este ano no Equador, em Guayaquil, de 23 a 30 de Setembro. A competição contou com a presença de 82 estudantes de 21 países Ibero-Americanos: Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Costa Rica, Cuba, Equador, El Salvador, Espanha, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguai, Perú, Portugal, Porto Rico, Uruguai e Venezuela. Dos países convidados só não esteve presente a República Dominicana.

A delegação portuguesa era constituída por quatro estudantes, Afonso Bandeira (da Escola Secundária de S. Pedro do Sul), Filipe Valeriano (da escola E.B.2,3/s Dr. João De Brito Camacho, Almodôvar), João Guerreiro (do Colégio Valsassina, Lisboa) e João Matias (da Escola Secundária José Gomes Ferreira, Lisboa), e ainda por quatro docentes do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, Sílvia Barbeiro, como chefe da delegação e vogal no Júri Internacional, Margarida Camarinha, como tutora, Paulo Oliveira, como observador do Júri Internacional e Carlota Simões, como observadora do grupo olímpico.

Da esquerda para a direita: João Matias, Filipe Valeriano, João Guerreiro e Afonso Bandeira

As provas decorreram, como habitualmente, em duas manhãs, nos dias 26 e 27 de Setembro. O desafio proposto era a resolução de 6 problemas valendo 7 pontos cada. Foram entregues 7 medalhas de ouro, 15 de prata e 21 de bronze. Um estudante do Perú obteve a pontuação máxima. Os estudantes portugueses obtiveram três medalhas de bronze (atribuídas ao Afonso Bandeira, ao João Guerreiro e ao João Matias) e uma menção honrosa (atribuída ao Filipe Valeriano). O Afonso Bandeira e o João Guerreiro obtiveram 28 pontos, ficando a um ponto da medalha de prata e a 5 pontos da medalha de ouro. Esta boa participação da equipa fez Portugal merecer o terceiro lugar na classificação para a Copa Puerto Rico, ganha pelo Paraguai, que premeia o país com melhor progresso nas últimas três edições das Olimpíadas.

Da esquerda para a direita: Sílvia Barbeiro, Margarida Camarinha, João Matias, Afonso Bandeira, Diego Cervantes (guia), João Guerreiro, Paulo Oliveira, Filipe Valeriano e Carlota Simões

Integrado nas actividades para os tempos livres foi organizado um Torneio por Equipas, sendo os grupos formados por dois estudantes olímpicos de países diferentes e dois alunos do ensino secundário equatorianos. Este torneio tem como objectivo proporcionar o intercâmbio de experiências e convívio. Este ano foram postos à prova não só o talento matemático mas também a habilidade desportiva. O João Guerreiro teve mais um prémio por fazer parte da equipa vencedora, e o Filipe Valeriano mais uma menção honrosa por pertencer à equipa que mostrou melhor interacção entre os seus membros.

Ainda no âmbito destas olimpíadas realizou-se, de 20 a 23 de Setembro, o Segundo Seminário Ibero-Americano de Matemática com ênfase na resolução de problemas (POLI 2006) que contou com a participação de dois elementos da delegação portuguesa.

Portugal confirmou a organização das Olimpíadas Ibero-Americanas em 2007, que decorrerão em Coimbra, durante o próximo mês de Setembro.