GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática **Ano LXVII** | Julho 2006

nº151

4,20 Euros

Ruy Luís Gomes - Vida e Obra

por Natália Bebiano

Entrevista a Dana Johnson

Departamento de Matemática e Escola Superior de Educação
Williamsburg, Estados Unidos

Recordações de Ruy Luís Gomes

Ruy Luís Gomes foi uma figura ímpar e inesquecível, como matemático e como cidadão. O primeiro centenário do seu nascimento ocorreu no passado dia 5 de Dezembro e comemorou-se no Porto em sessão organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática e pela Sociedade Portuguesa de Física. Acabava de ver a luz do dia uma fotobiografia preparada por Natália Bebiano que documenta muito da sua vida.

Ruy Luís Gomes pertenceu à conhecida "geração de quarenta". Deixou uma obra notável no campo científico e desenvolveu grande actividade cívica e política em prol da democracia. Antes da revolução democrática de Abril chegou a ser indicado para candidato a Presidente da República e, depois daquela data, foi membro do Conselho de Estado, reitor da Universidade do Porto, pertenceu ao Tribunal Cívico Humberto Delgado, e presidiu à Comissão Directiva do Instituto de Ciências Biomédicas Abel Salazar, de que foi co-fundador.

Ao longo dos anos cruzei-me, em mais de uma ocasião, com Ruy Luís Gomes e recordo agora, com emoção, alguns desses encontros. Não sei quando ouvi o seu nome pela primeira vez. Mas recordo-me do primeiro contacto, um contacto quase físico que provava que ele existia e não era só produto de imaginações prodigiosas. Suponho que foi em 1958. Entrei na livraria Atlântida em Coimbra, como era meu costume, a fim de visitar as estantes, com especial atenção para os livros de matemática, aliás escassos. A certa altura dei com um livro com o título "Integral de Lebesgue-Stieltjes", tendo na lombada "Ruy Luís Gomes" e "Porto 1952". Fiquei deslumbrado. Naquela época havia figuras de que se falava em voz baixa mas nem se sabia ao certo se existiam; por isso se tornavam lendárias. Oficialmente não existiam. Os nomes pronunciavam-se mas não sabíamos bem se eram vivos ou mortos, onde residiam, se os feitos que se lhes atribuíam eram reais ou imaginários. Os jornais não falavam deles nem podiam. A rádio e televisão, muito menos. Existiriam? Seriam um perigo para o regime político, talvez mesmo criminosos, como alguns diziam? Mistério.

Dar com o livro foi, para mim, a confirmação de que Ruy Luís Gomes existia. Abri-o e deparei com esta dedicatória, escrita à mão: "A meu querido Pai, ofereço o 1º volume do Integral de Lebesgue-Stieltjes, pensado e levado ao fim em plena luta pelos valores morais e políticos em que fui educado." Como assinatura só "Ruy" e a seguir a data "Porto 9-VIII-52". Tudo manuscrito, pelo punho do próprio, provando que existia e tinha vida e que, se não se sabia do seu paradeiro, já vivera no Porto. Fiquei espantado e pensei que estava perante uma preciosidade. Apesar de ter a algibeira quase vazia, consegui juntar tostões suficientes para adquirir o livro que ainda hoje conservo.

Voltei a ter notícias de Ruy Luís Gomes em 1970. Desta vez recebi uma carta dele, suponho que em Abril, e custou-me a perceber como é que uma figura política eminente e matemático notável sabia da minha incolor existência. Vim a saber que fora o meu colega José Vitória que lhe havia falado da minha pessoa e exagerado as minhas aventuras. Por isso ele me escrevia e me sugeria um lugar de Professor na Universidade Federal de Pernambuco onde ele à data ensinava. No Verão desse ano estive presente no Congresso Internacional de Matemáticos em Nice onde pensava falar com Ruy Luís Gomes. Infelizmente ele não compareceu mas confraternizei com outras figuras lendárias portuguesas do mundo da Ciência que se encontravam no exílio. Entre eles José Morgado, um grande amigo e companheiro de muitas lutas de Ruy Luís Gomes.

Em fins de Janeiro de 1971, como consequência da carta que recebera, viajei para o Recife. Ruy Luís Gomes estava de férias na Europa e somente em Abril, se não me falha a memória, o vi pela primeira vez em carne e osso. Foi o início de uma convivência amistosa. Depois da revolução de 1974 encontrámo-nos diversas vezes em diversas circunstâncias, nalguns casos em actividades da Sociedade Portuguesa de Matemática.

O seu entusiasmo e interesse pelos problemas da Ciência, do ensino, das sociedades científicas, da actividade cívica e da vida política não esmoreceu até ao fim da vida. Muitas vezes, já na década de oitenta, me solicitou o envio de livros que a riquíssima biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra tinha e ele não encontrava no Porto. Para mim foi um privilégio conhecê-lo: o Professor Ruy Luís Gomes constituiu para mim um exemplo inesquecível pela sua acção, pelo seu saber e pela sua modéstia.

Graciano de Oliveira

Ruy Luís Gomes à direita com Manuel Zaluar Nunes e José Morgado, também eles excluídos do ensino universitário, na sequência da ofensiva repressora do Estado Novo de 1946 e 1947.

Ruy Luís Gomes - vida e obra

Natália Bebiano
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

A ciência pura não se poderá desenvolver em boas condições de continuidade e eficiência sem entrar em íntima colaboração com a indústria, fornecendo--lhe resultados e recebendo em troca sugestões para novos problemas.

Ruy Luís Gomes, *In* "O valor social da investigação científica", Palestra radiofónica em Maio de 1944.

1. Ruy Luís Gomes nasceu no Porto a 5 de Dezembro de 1905. Era filho de Dona Maria José de Medeiros Alves e de António Luíz Gomes, membro do Directório do Partido Republicano de 1906 a 1908, ministro do Fomento da primeira República, deputado e provedor da Santa Casa da Misericórdia do Porto.

Oriundo de uma burguesia aristocratizada, com seus irmãos recebeu primorosa educação, tendo beneficiado dos ensinamentos de uma preceptora inglesa que habitava com a família na residência da rua da Restauração na Invicta. Quando seu pai foi convidado para Reitor da Universidade de Coimbra pelo Presidente da República António José de Almeida (1866-1929) na tentativa de pacificar a instituição, a família mudou-se para a residência reitoral, então na antiga alcáçova real.

Aos 17 anos Ruy concluiu brilhantemente o curso liceal no liceu José Falcão em Coimbra e matriculou-se em Ciências Matemáticas na Universidade de Coimbra, onde seu pai foi Reitor até 1924, ocasião em que pediu a demissão por desentendimento com a tutela. Estudante do terceiro ano, publicou o seu primeiro artigo científico intitulado "O acaso nos nascimentos dos sexos", que apresentara no exame de "Cálculo das Probabilidades e suas Aplicações". Esta primeira obra matemática foi dada à estampa em 1928, na revista O *Instituto* publicada em Coimbra pela Imprensa da Universidade desde 1855.

Personalidade delicada, Ruy Luís Gomes jovem aderiu às ideias marxistas e ao sonho de uma revolução ideal contra os males, as injustiças e as opressões do mundo, realidade na origem da sua matrícula em 1925 no curso livre de "Economia Política", regido na Faculdade de Direito por Oliveira Salazar. Em 1927 concluiu a licenciatura em Ciências Matemáticas com a classificação final de 20 valores. Em 18 de Dezembro de 1926 foi proposta na Congregação da Faculdade de Ciências da sua *alma mater*, a sua nomeação para Assistente Livre da Secção de Ciências Matemáticas-Matemática e Astronomia. Exerceu por um ano a docência de *Geometria Descritiva* e *Geometria Projectiva*.

Em 1928, obteve o grau de doutor por unanimidade, tendo defendido a dissertação intitulada *Sobre o desvio das trajectórias dum sistema holónomo*, e que tinha como fontes principais obras de Levi-Civita e de Mira Fernandes.

Em 1929 concorreu a uma vaga de Professor Catedrático, cuja vacatura ocorrera aquando do assassinato em Caminha do lente de Física-Matemática Luciano Pereira da Silva. O concurso, em que teve como opositor Manuel dos Reis, decorreria com incidentes de recusa por parte de alguns académicos de pertencerem ao júri e só viria a terminar em 1933. Vicente Gonçalves contestou na Congregação da Faculdade a admissibilidade de Manuel dos Reis ao acto por este não cumprir os requisitos legais vigentes, designadamente não ser ainda doutorado na data prevista por lei. Na sequência, publicou dois artigos na imprensa nacional sobre concursos académicos que afrontaram a Congregação da Faculdade.

Entretanto, em 1929 Ruy Luís Gomes foi convidado para Assistente da Universidade do Porto, convite que aceitou, nessa qualidade tendo exercido funções docentes de *Álgebra Superior e Geometria Projectiva* de 1929 a 1933. Foi provido Professor Catedrático desta Universidade após concurso público que venceu em mérito absoluto e relativo, aqui tendo regido *Física-Matemática* de 1933 a 1947. A docência em Coimbra deixou de figurar no seu currículo, adivinhando-se neste silenciar alguma mágoa ou incomodidade.

2. A obra científica de Ruy Luís Gomes teve um acentuado pico de produtividade nos anos da juventude. Mira Fernandes e Vicente Gonçalves foram os matemáticos portugueses que marcaram a fase inicial da sua vida científica, tendo devotado a ambos admiração e afecto perenes, em reconhecimento da sua mestria, inteligência e saber.

O período da vida de Ruy Luís Gomes que vai desde a licenciatura em Ciências Matemáticas em 1927 até 1937 foi especialmente fecundo a nível de criação original, relevantemente em domínios cultivados por cientistas de génio.

Num país cientificamente periférico, sem tradições no campo das ciências exactas, um jovem formado na *alma mater* conimbricense, que não foi beber ao estrangeiro inspiração nem cultivar as suas qualidades de imaginação no convívio de grandes matemáticos, travou diálogo intelectual com gigantes da ciência e participou activamente na corrente do pensamento e das ideias das vanguardas.

Sessão de apresentação da candidatura à Presidência da República

Aos 24 anos, num interessante arroubo juvenil, escreveu ao académico ucraniano Krylov, de quem frequentara um curso de *Análise Superior* em Coimbra nos meses de Abril e Maio de 1927, colocando-lhe questões matemáticas. Ulteriormente, correspondeu-se com Tullio Levi-Civita, autoridade universalmente reconhecida em Mecânica Racional e Física-Matemática, discípulo do criador do cálculo tensorial Ricci, com o Prémio Nobel da Física Louis de Broglie, com o sábio John von Neumann, etc…

O primeiro domínio científico a atrair Ruy Luís Gomes consistiu na aplicação dos métodos do Cálculo Diferencial Absoluto aos sistemas holónomos, tendo versado sobre esta temática a sua dissertação de doutoramento. A obra inspirava-se nomeadamente no artigo de Tullio Levi-Civita *Sur l'ecart geodesique* publicado na revista Mathematische Annalen 97, 291-320 (1926).

A dissertação que apresentou ao concurso para professor catedrático - *Sobre a estabilidade dos movimentos dum sistema holónomo*, Lisboa, 1929, mereceu testemunho de interesse por parte do reputado matemático italiano que logo augurou ao jovem autor uma carreira brilhante: "...*apreciando os múltiplos desenvolvimentos e os úteis complementos que soube conseguir. Votos cordiais de novos sucessos na sua carreira científica que será indubitavelmente brilhante*."

Levi-Civita, introdutor do conceito de *transporte paralelo* que abriu novos horizontes à geometria diferencial, mantinha correspondência com Mira Fernandes, tendo sido pela mão deste que Ruy Luís Gomes se relacionou com o matemático italiano. E foi justamente sob o seu alto patrocínio que, em 1930, publicou na *Revista da Accademia Nazionale dei Lincei* o artigo: *Sur les mouvements isoénergétiques*.

Uma análise da vasta e diversificada bibliografia do matemático do Porto mostra que até começos dos anos quarenta a sua obra científica, publicada na revista dos *Lincei, no Journal de Physique et le Radium* sob a égide, respectivamente, de Levi-Civita e de Louis de Broglie, ou ainda em Portugal, incide sobre problemas de Matemática Aplicada, em particular de Física Teórica.

No curso de Física-Matemática que ministrou na Universidade do Porto de 1931 a 1947, expunha desde o Electromagnetismo Clássico aos temas candentes da Mecânica Quântica, fornecendo as bases matemáticas para o estudo teórico da Física Nuclear e oferecendo, na rigorosa formulação da problemática, perspectivas de investigação original.

A correspondência com Levi-Civita, cultor e divulgador da teoria da Relatividade, terá constituído incentivo para a pesquisa que Ruy Luís Gomes desenvolveu sobre as concepções relativistas de Einstein.

Na área da Relatividade, descobriu em 1935 uma nova dedução das fórmulas de Lorentz. Os problemas da Mecânica Quântica Relativista, inventada por Dirac, atraíram a atenção do matemático do Porto que obteve uma demonstração elegante das propriedades algébricas das matrizes de Dirac, publicada em 1937 nos *Lincei*. Esta demonstração era mais simples que as que tinham sido apresentadas em 1932 pelo famoso matemático holandês van der Waerden e em 1936 pelo físico Wolfgang Pauli, utilizando forte aparato matemático (teoria dos grupos e resultados de Schur). Neste espírito, Gomes dedicou-se à nova teoria do fotão de Louis de Broglie, na qual a partícula luminosa era descrita como o produto tensorial de um *spinor* de Dirac por um *spinor* adjunto, procurando simplificar um pouco uma teoria complicada que acabaria por ser superada pela electrodinâmica quântica, permanecendo, não obstante, de inquestionável valor histórico. Nos anos de 1934, 1935 e 1936 assinou contribuições para o estudo matemático das questões quânticas, abordando as concepções de Louis de Broglie, Schröedinger, Heisenberg e Dirac. Em 1937 encerra a sua fase juvenil de investigador, consagrada aos problemas decorrentes da dualidade "matéria-radiação".

3. Por esta ocasião, um bolseiro português em Paris ouviu com espanto o Professor Louis de Broglie nas suas lições no Institut Poincaré citar um matemático português, autor de simplificações na equação fundamental que Broglie concebera para estudo da radiação luminosa. Recorde-se que, dos doze artigos publicados por Ruy Luís Gomes nos *Lincei* de 1930 a 1937, dois referem explicitamente no título as noções introduzidas pelo físico e Prémio Nobel francês, sendo este tema recorrente noutras publicações e na origem de mútua troca de correspondência.

O eco vindo de Paris deste acontecimento causou viva impressão aos dinamizadores do recém-criado *Núcleo de Matemática, Física e Química*, António Aniceto Monteiro, Bento Caraça, Manuel Valadares entre outros. O "Núcleo" procurava criar um amplo movimento de vivificação da cultura científica portuguesa no campo daquelas ciências, pelo que convidou o prestigiado matemático do Porto a proferir conferências sobre Relatividade em Lisboa.

4. Este evento concorreria para fixar novas orientações na acção universitária e de pesquisa de Ruy Luís Gomes, que aqui iniciou o relacionamento com figuras no epicentro da agitação em redor do mundo das ciências exactas em Portugal. Seria especialmente marcante o encontro com o talentoso matemático António Aniceto Monteiro, que em Paris em 1936 fizera o doutoramento de estado sob orientação de Maurice Fréchet com a tese intitulada "Sur l'additivité des noyaux de Fredholm".

Outro acontecimento decisivo na vida de Ruy Luís Gomes foi o contacto com o Mestre Abel Salazar, figura cimeira da cultura portuguesa do século XX, professor catedrático da Faculdade de Medicina da Universidade do Porto demitido em 1935 "por influência deletéria na juventude", e de quem se aproximou movido pela solidariedade e admiração.

Da grande Amizade e estimulante convívio intelectual com Abel Salazar resultaram escritos e conferências versando teses fundamentais da Filosofia Científica da Escola de Viena defendidas por Rudolph Carnap, Mauritz Schlick, Hans Reichenbach, etc ..., teses cuja difusão em

Portugal tiveram no Professor de Medicina do Porto inspirado baluarte.

Recorde-se que Abel Salazar foi paladino da divulgação em Portugal do pensamento da escola vienense, tendo publicado no jornal *O Diabo* em 1936 uma longa série de artigos sobre o neopositivismo, os quais foram coligidos na obra *Pensamento Positivo Contemporâneo*.

Ruy Luís Gomes desempenhou papel de primeiro plano na difusão do ideário desta corrente filosófica. A análise dos conceitos de espaço e tempo, revistos à luz destas doutrinas, suscitaram a sua viva atenção. Nas comemorações do Primeiro Centenário da Universidade do Porto em 1937, proferiu uma lição magistral intitulada "Análise neopositivista das noções de espaço e de tempo", dilucidando como permitia o empirismo lógico vienense "enfrentar os problemas de um domínio que dizem ser supra-científico - o filosófico, por métodos exclusivamente científicos".

Em Dezembro de 1972 tentou vir a Portugal visitar a família. Foi preso no aeroporto, sendo-lhe negada autorização para permanecer em território nacional. Na foto, manifestação de apoio a RLG.

O matemático do Porto enfileirou com a pleiade brilhantíssima de divulgadores das teorias de Einstein, com Cartan, Weyl, Eddington, Levi-Civita ... A convite do *Núcleo de Matemática, Física e Química*, proferiu em 1937 uma série de quatro conferências no Instituto Superior Técnico, intituladas:

"As equações fundamentais e o seu grupo de invariância";

"O tempo em Relatividade";

"A interpretação física das fórmulas de Lorentz";

"Cinemática relativista".

Estas conferências foram publicadas pelo *Núcleo* em 1938 sob o título *Teoria da Relatividade Restrita*.

Os escritos anti-relativistas do Almirante Gago Coutinho de 1937 na *Seara Nova* estiveram na origem da publicação, por esta revista, de seis artigos de Ruy Luís Gomes (nos números 541, 543, 545, 547, 550, 553, respectivamente, de 25 de Dezembro de 1937, 8 e 22 de Janeiro de 1938, 5 e 26 de Fevereiro e 19 de Março de 1938), artigos que foram compilados no livro *A Relatividade - origem, evolução e tendências actuais* (primeira edição em 1938, segunda em 1943). E em Outubro de 1955, depois da morte de Einstein em Abril, deu à estampa o artigo"Albert Einstein – $E=mc^2$, o mais urgente problema do nosso tempo", publicado em separata pela revista *Lusíada*.

Escreveu Abel Salazar na rubrica "Movimento Científico Português" do quinzenário cultural de literatura e crítica "Sol Nascente" de 1 de Abril de 1938:

"António Monteiro é, com Ruy Gomes, a mais poderosa mentalidade da sua geração. Os dois formam contraste. Um, taciturno e melancólico, sempre recolhido em si próprio, no mistério das suas reflexões, de onde sai por vezes com uma expressão de riso infantil; o outro, intelecto-acção, sempre em efervescência; é o tipo do intelectual-energia, do intelectual que se insere na vida, e a domina".

5. O contacto com António Monteiro, grande entusiasta da criação de uma escola portuguesa de investigação matemática, levou Gomes a um ponto de viragem nos seus projectos científicos, relegando os seus interesses particulares de investigador para um plano secundário e abraçando um ousado "programa científico" de interesse nacional. Com outros matemáticos da chamada "geração de 40", tinha em vista que a investigação se tornasse uma primeira realidade no meio universitário português. A ciência pela ciência não constituía a sua função ou missão principal. A exigência histórica de reverter o atraso científico de Portugal sobrepunha-se a qualquer outro projecto. Era sua firme convicção que o ressurgimento dos estudos matemáticos em Portugal só era "possível na medida em que a imensa energia intelectual da juventude fosse completamente mobilizada". A imaginação dos jovens e a fé destes na sua própria capacidade criadora tinham que ser despertas. Formar a juventude portuguesa era, pois, assumidamente o primeiro e mais forte desígnio.

No ano da morte de Bento de Jesus Caraça (1948), na Gazeta de Matemática (números 37 e 38) assina os artigos "O Professor Bento Caraça - Grande Educador" onde expressa profunda admiração pela influência do emérito director da Biblioteca Cosmos, na ciência e cultura portuguesas, e onde claramente transparece a sua própria visão sobre a vida universitária:

...Alinhando com aqueles que pretendem transformar as nossas Universidades em Centros de Investigação e verdadeiras escolas de trabalho, escolheu como primeiro valor, no domínio da sua actividade de professor, a subordinação dos seus interesses imediatos a um interesse superior - o da preparação profissional da juventude.

Gomes entendia que o fim da investigação científica, pelo seu alcance prático e projecção na vida de cada um, era melhorar as condições de vida do homem. A ciência, "ou por outras palavras, a técnica das descobertas para enriquecimento da existência", era condicionada pelo meio em que se realizava, sendo mais tarde factor da sua própria transformação. Como afirma na conferência "O valor social da investigação científica", em todas as descobertas participam, "embora nem sempre se apercebam disso, todo um mundo de indivíduos, que, pela sua viva curiosidade, forte poder de imaginação, grande habilidade manual ou inquebrantável tenacidade, contribuíram para aumentar o património científico da humanidade."

A "geração de 40" partilhava um núcleo de ideais comuns, de utopias, e era uma forte comunidade, imaginativa, empenhada, optimista a respeito do Futuro, empreendedora. Monteiro e Gomes tinham um optimismo de raiz hilbertiana, como muito bem aponta José Morgado: "This conviction of the solvability of every mathematical problem is a powerful incentive to the worker. We hear within us the perpetual call: There is the problem. Seek its solution. You can find it by pure reason, for in mathematics there is no ignorabimus."

Gomes, pacifista, zeloso defensor dos direitos humanos, crente nos valores supremos da liberdade, solidariedade e justiça, visionário de uma sociedade equânime onde a ciência tinha um papel-chave a desempenhar na felicidade humana, subscreveria a entusiástica declaração do cantor negro Paul Robeson no Congresso Mundial da Paz em Abril de 1949:

Em breve a vida será magnífica, porque nós a teremos feito assim.

Ruy Luís Gomes era um fautor desse admirável mundo novo que se antevia. Convicto da urgência da renovação e alargamento do movimento matemático nacional, a que era necessário garantir continuidade através da criação de institutos de investigação, com os seus superiores dotes tomou a peito esta causa.

6. Assim, foi um dos fundadores da Sociedade Portuguesa de Matemática (1940), do Centro de Estudos Matemáticos do Porto (1942), anexo ao qual funcionava o Seminário de Física Teórica dirigido pelo físico austríaco Guido Beck e posteriormente por Alexandre Proca do Institut Poincaré, da Junta de Investigação Matemática - JIM (1943) (com Monteiro e Mira Fernandes), encontrando-se ligado às iniciativas editoriais da *Portugaliae Mathematica* e da *Gazeta de Matemática*. O ambicioso projecto da JIM exigia meios, pelo que antigos estudantes da Faculdade de Ciências do Porto e professores criaram a Dotação da JIM. Os fundos para a JIM foram angariados numa campanha promovida por António Luíz Gomes, o irmão que professava ideologia política oposta mas a quem via como "Homem de Diálogo, da Solidariedade e de Indulgência partilhadas". Os fundos atingiram o então avultadíssimo montante de 51 contos!

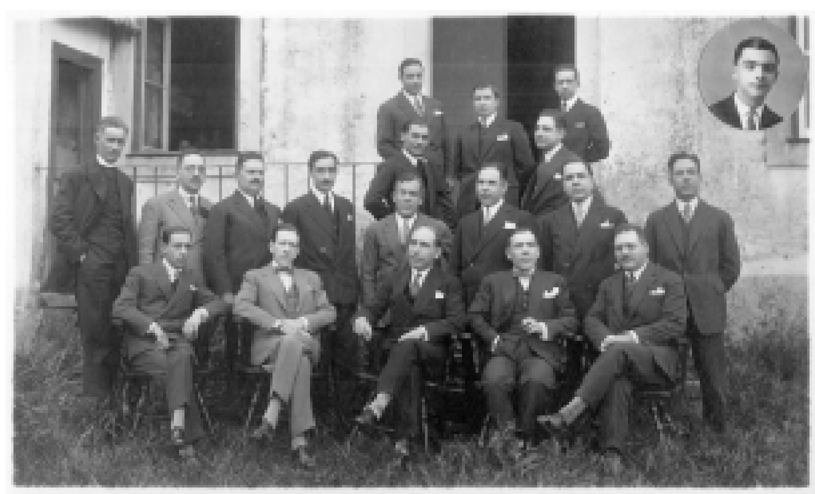
A constituição de um instituto de investigação nacional "de autêntica extensão universitária" englobando a matemática, a física, a química e a biologia esteve desde cedo nos horizontes de Ruy Luís Gomes, como mostra a correspondência nesse sentido encetada com o reputado biólogo José Antunes Serra da Universidade de Coimbra, ulteriormente professor de genética nos Estados Unidos. O sonho concretizar-se-ia 30 anos mais tarde, no período imaginativo pós- 25 de Abril, com a criação do Instituto de Ciências Biomédicas Abel Salazar. Também esteve no seu espírito, sempre solícito para com a juventude, a dinamização de uma secção de estudos matemáticos na Associação Académica de Coimbra, fundada em 1898 pela figura tutelar de seu pai e que foi o seu primeiro presidente.

Uma mudança de paradigma esboçou-se na cultura portuguesa, de um registo de tónica literário-filosófica para um de pendor científico-tecnológico. As novas doutrinas científicas nascidas no dealbar do século, nomeadamente a crise dos fundamentos, a relatividade e a teoria dos *quanta* (e o seu forte substracto matemático), suscitaram a atenção dos impulsionadores do *Movimento Matemático*, que sobre elas promoveram conferências marcantes na época. Como as memoráveis conferências de Caraça no Porto sobre "O Infinito" em 1942, as de Gomes em Lisboa sobre "Espaços de Hilbert e Mecânica Quântica", "Teoria da Medida e Mecânica Quântica". As projectadas conferências de Neves Real e Laureano Barros (1946) levaram o ministro da Educação a emitir uma circular proibindo a sua realização em qualquer dependência daquele ministério!

Se em Viena de Áustria, na década de 30, a Matemática saiu à rua a ensejo da famosa *crise dos fundamentos*, em Portugal nos anos 30 e 40, a *agitação* em redor da Matemática foi notável, a nível da criação original e da divulgação. Neste campo cumpre lembrar a emblemática *Biblioteca Cosmos*, a *Universidade Popular Portuguesa*, a pujante imprensa cultural (*Seara Nova, Diabo, Sol Nascente*), etc.

O que aconteceu em Portugal na primeira metade do século XX, no mundo da matemática e das ciências exactas, foi de facto singular e é merecedor de reflexão aprofundada. O *Movimento Matemático dos anos Quarenta*, a *efervescência matemática*, como António Monteiro lhe chamou, é disso prova irrefutável, sem qualquer paralelo nos demais campos da nossa ciência e cultura.

7. A natureza dos trabalhos de pesquisa realizados por Ruy Luís Gomes até aos começos dos anos 40, e as próprias tradições da sua Universidade, impeliram-no naturalmente a direccionar os seus colaboradores para as Matemáticas Aplicadas, em particular para a Mecânica, a Física-Matemática e a Astronomia. Entendeu, então, como premente a preparação intensiva de base dos orientandos em três áreas fundamentais: "Álgebra Moderna", "Topologia","Medida e Integração", consagrando-se especialmente a este domínio (ficando os outros dois campos a cargo, respectivamente, de Almeida e Costa e António Monteiro).



Ruy Luís Gomes na República da Beira, Coimbra, com figuras gradas do Salazarismo, tais como Mário Figueiredo, Presidente da Assembleia Nacional (sentado, ao centro).

A criação do Centro de Estudos Matemáticos do Porto (CEMP) em 1942, por proposta de Ruy Luís Gomes ao presidente do Instituto de Alta Cultura (IAC) Celestino da Costa, e de que Gomes foi director até à demissão da Universidade em 1947, é a primeira de uma longa cadeia de realizações na sua Universidade em prol da cultura matemática portuguesa.

No plano da docência, Ruy Luís Gomes sempre cuidou de actualizar a *sua cátedra*, e logo aflorou o estudo dos modelos matemáticos de von Neumann para a fundamentação da Mecânica Quântica. Ao ocupar-se da direcção do Gabinete de Astronomia, direccionou também para estes campos o seu empenho e larga visão, impulsionando a criação do Observatório Astronómico do Porto.

Em Dezembro de 1943, António Monteiro foi como bolseiro da JIM para o Porto, onde permaneceu cerca de um ano, dando novo fôlego ao labor matemático da Escola do insigne matemático Gomes Teixeira, orientando estudantes, como o então doutorando Alfredo Pereira Gomes, patrocinando viagens científicas, adquirindo bibliografia de ponta. Apesar da sua excepcional craveira, da sua invulgar capacidade de formar discípulos e de promoção de realizações, Monteiro antes do 25 de Abril nunca chegou a ser admitido como docente na Universidade Portuguesa devido à sua orientação política, subsistindo à custa de lições particulares e trabalhando num "Serviço de Inventariação de Biblioteca Científica", organizado pelo IAC. Só isto explica que não tenha sido expulso da Universidade pela Ditadura, porque de facto nela jamais sequer chegou a exercer funções docentes.

Em Janeiro de 1944 a Gazeta de Matemática noticiava uma das iniciativas da JIM: a realização dos "Colóquios de Análise Geral", todos os sábados a partir das 16 horas. Estes colóquios deram origem à colecção "Cadernos de Análise" e a diversos trabalhos de investigação.

Outra memorável iniciativa da JIM em 1944 foi a realização de uma série de conferências em diferentes áreas da ciência, lidas ao microfone do Rádio Clube Lusitânia, corajosamente cedido pelo proprietário senhor Nogueira, e nas quais intervieram Antunes Serra, Corino de Andrade, Branquinho da Fonseca, António Júdice, Gomes, Monteiro, entre outros. E na sequência da palestra de Aniceto Monteiro intitulada "Os objectivos da Junta de Investigação Matemática", o governo de Salazar encerrou os Clubes de Matemática para jovens, criados em Lisboa pelo palestrante.

Em Setembro de 1943, Monteiro aceitou o convite da Faculdade de Filosofia do Brasil (Rio de Janeiro) para assumir a cátedra de Análise Superior, convite feito por recomendação de Einstein, Von Neumann e Guido Beck.

8. Em Fevereiro de 1945, António Monteiro partiu para o Brasil. Face às crescentes ameaças do Regime às actividades intelectuais subversivas, como eram as matemáticas (recorde-se que a Ditadura nunca aprovou os estatutos da SPM e chegou a proibir as suas iniciativas em dependências do Ministério da Educação), cortes orçamentais a bolseiros e a outras iniciativas da esfera criativa, os que ficaram persistiram com idealismo o seu trabalho e continuaram a resistência. O doutoramento de Pereira Gomes em Julho de 1946 foi "um acontecimento importante como afirmação da capacidade científica" da escola do Porto. Mas, logo em Outubro seguinte, o jovem doutor foi afastado da Universidade por decisão governamental, sob alegação de "estar incurso no decreto-lei nº 25.317". A sua carreira científica prosseguiu no CNRS em França até final de 1952 e depois na América Latina.

O ano de 1945 marca a entrada de Ruy Luís Gomes na vida política activa, sendo certo que já anteriormente manifestava preocupações desta natureza. Seu pai dizia-lhe[1]: "Nunca devias enveredar pela política, porque tu não nasceste político!" De facto, faltar-lhe-iam os dons oratórios que sobravam ao pai e ao irmão. A partir deste ano Ruy Luís Gomes manteve-se intransigentemente ao lado dos que lutam pela Liberdade e pelos Direitos Humanos.

Em 1947, "uma disposição violenta" forçou-o a abandonar a Universidade, "vibrando um golpe profundo na sua delicada sensibilidade e no prestígio da Escola que ele tanto dignificara" (usando os termos em que o próprio se referiu à aposentação compulsiva de Levi-Civita da Universidade de Roma em 1938 perpetrada pelo regime fascista e à qual o matemático italiano sobreviveu três escassos anos), e onde se impusera pela probidade profissional e superioridade intelectual. Vários cientistas, em particular matemáticos, tiveram igual sorte e por razões políticas foram demitidos da Universidade Portuguesa.

[1] Comunicação privada da família.

Após a sua demissão da Universidade do Porto, o CEMP foi desfeito, mantendo-se algumas actividades científicas em casa de Neves Real, simbolicamente denominada *Universidade da Rua do Almada*. Assumiu, então, a condição de *professor sem escola* durante os onze anos que antecederam o seu exílio na América do Sul.

Desenvolveu intervenção cívica activa, em 1951 candidatou-se à Presidência da República, mas uma lei com efeitos retroactivos reprovou a sua candidatura, a única realizada segundo os preceitos legais. A Ditadura não lhe concedeu tréguas. Foi preso várias vezes, por períodos mais, ou menos, longos. De 1945 a 1957 a sanha persecutória da PIDE traduziu-se em pelo menos dez prisões e na instauração de catorze processos-crime.

Corajoso e determinado, vive os duros anos de perseguição, fazendo amizades que se perpetuaram ao longo de toda a vida. E o seu comprometimento com as lutas anti-fascistas, as perseguições, os sucessivos julgamentos e prisões, não o impediram de desenvolver labor científico.


RLG em Rio Tinto, 1951, depois da agressão no Cine-Victória

Na Colónia Penal de Santa Cruz do Bispo, prisão de presos de delito comum, ocupou o "anexo psiquiátrico" (com Lobão Vital, José Morgado e o operário Albertino Macedo). Dias antes de ali entrar, um preso matou outro durante o sono dando-lhe com um banco na cabeça em cumprimento de ordens que "recebera de Deus". José Ricardo, autor do "Romanceiro do povo miúdo", conta que, numa das suas visitas ao Professor Ruy, um preso entrou na sala e segredou-lhe demoradamente ao ouvido, levando-o a acenar afirmativamente com a cabeça e a murmurar que "sim senhor". Quando o homem se retirou, o matemático explicou: "é o rei D. Manuel que estava a dizer-me uma mensagem para eu transmitir lá fora." No anexo dos loucos, o barulho era ensurdecedor. Mas quando os guardas declaravam: "Silêncio, os professores querem estudar!", a ordem era levada muito a sério. Passou dois anos nas prisões de Santa Cruz do Bispo e na Pide, no Porto, sob o pretexto de ter defendido a autodeterminação dos povos coloniais, a ensejo do "Caso de Goa, Damão e Diu", e de preconizar uma solução política e pacífica para o conflito com a União Indiana.

Foi acusado de traição à Pátria, com o agente do Ministério Público a lamentar que para tal não houvesse pena de morte, ameaçado de cinquenta anos de prisão, acrescida "de medidas de segurança", mecanismo que permitia prolongar indefinidamente a clausura.

O ano de 1953 foi marcado por importantes acontecimentos: a sua eleição para o Conselho Mundial da Paz e a atribuição do Prémio Artur Malheiros pela Academia das Ciências de Lisboa à sua obra "Sobre as relações entre o integral de Riemann e o integral de Lebesgue".

Apesar do tumulto interior de uma vida conturbada, apresentou no Congresso Internacional de Matemática de Amesterdão em 1954 uma conferência intitulada "Espace de Lebesgue - un exemple d'espace régulier", desafiando uma vez mais a Ditadura que tentou impedi-lo de sair do país negando-lhe o passaporte, com o mesmo afinco que, anos mais tarde, usaria para impedi-lo de entrar.

No mesmo ano de 1954, quando se encontrava preso em Santa Cruz do Bispo, leu "Brasil Mental" de Sampaio Bruno. Da troca de opiniões com o amigo Neves Real, durante as suas visitas, resultou o trabalho apresentado ao Congresso Nacional de Filosofia, sob o título: "De Poincaré ao Intuicionismo actual na Crítica dos Fundamentos da Matemática; reflexos no pensamento filosófico e matemático português", onde afloram uma problemática de amplo espectro no campo da filosofia da matemática, particularmente acesa na primeira metade do século XX.

Em 1956, no ensaio "A revolução republicana de 31 de Janeiro", revela uma ideologia de matriz marxista firmemente consolidada.

Publicou livros científicos de reconhecido mérito, como "O integral de Riemann" em 1949 e "O integral de Lebesgues--Stieltjes" em 1952, cuja elaboração beneficiou do contacto com matemáticos franceses do grupo Bourbaki, de quem recebia originais antes da publicação. O renomado matemático francês Jean Dieudonné fez a recensão das obras na *Mathematical Reviews*, e mesmo perfilhando a posição intransigente de que depois de descoberto o integral de Lebesgue, não fazia sentido tratar o de Riemann, reconheceu o valor da exposição, escrevendo:
"This is a clear and well-written textbook on Jordan measure and the Riemann integral in *n*-dimensional Euclidean space".

Anos volvidos, quando Dieudonné visitou o Instituto de Matemática de Bahia Blanca, esperava-o um cartaz com a seguinte inscrição:
"Dr. Dieudonné: en este Instituto jamás se ha enseñado la integral de Riemann".
O sábio francês riu, recordando instintivamente o que estava na origem daquela inusitada recepção, logo iniciando uma cordial discussão com o professor do Porto sobre a pertinência da análise do integral de Riemann, conceito historicamente relevante. E ambos concordaram no inestimável alcance do recurso à História da Matemática na motivação do estudo da teoria da integração.

9. Em 1950, no Cinema Batalha teve lugar um concerto com estreia de uma sonata de Fernando Lopes Graça para angariação de fundos para financiamento da nossa primeira revista científica internacional de originais de matemática.

Cumpre salientar que a partir da criação da *Portugaliae Mathematica* (1937) e da *Gazeta de Matemática* (1939), Ruy Luís Gomes sempre privilegiou a publicação dos seus artigos nestas revistas, em detrimento de outras congéneres estrangeiras já com auréola de consagração. O seu empenho no enraizamento destas edições, partilhado com outros desta geração, foi notável. Pertenceu à Comissão Editora da *Portugaliae* a partir do número 4, dirigiu a Secção de *Mecânica e Física-Matemática* com Neves Real a partir do número 9, surgindo a partir do volume 5 no elenco dos responsáveis pela publicação. Cientistas renomados da cena internacional deram brilho às páginas destas publicações, correspondendo aos esforços desenvolvidos nesse sentido pelos nossos matemáticos. (A título de exemplo: John von Neumann publicou no volume 3 de 1942, Louis de Broglie no volume 8 de 1949, Paul Erdös no volume 11 de 1952, Jean Dieudonné nos volumes 14 e 20 de 1952 e 1955...)

10. Em 1958, Gomes viu-se forçado a tomar a difícil decisão de abandonar Portugal, aceitando um convite do seu grande amigo António Monteiro para ensinar em Bahia Blanca. Reencontraram-se na Argentina para escreverem na América do Sul, com outros cientistas portugueses exilados, singularíssimas páginas da nossa "Diáspora Científica". E ali concretizaram o clarividente projecto de promoção da investigação matemática traçado para Portugal e inviabilizado pela Ditadura.

Ruy Luís Gomes, na Universidad del Sur e na Universidade Federal de Pernambuco, orientou a investigação científica de matemáticos e físicos, participou na organização de cursos de mestrado, foi coordenador de cursos de pós-graduação, co-fundador da colecção "Notas e Comunicações de Matemática", dedicada exclusivamente à publicação de originais e das "Notas de Curso", colecção destinada a editar cursos de pós-graduação.

A sua obra permanece reconhecida nestes países, na Universidade Federal de Pernambuco há um "Auditório Ruy Luís Gomes", a "Biblioteca Ruy Luís Gomes", a "Olimpíada Pernambucana de Matemática Ruy Luís Gomes", que envolve cerca de 38 mil estudantes, e o prémio com seu nome para o melhor aluno do "Vestibular de Matemática". Em 1970, o Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, dinamizado por portugueses, foi reconhecido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Técnico como Centro de Excelência para o Mestrado. Em 1983, Ruy Luís Gomes reconhecia com emoção ter acabado por concretizar no Brasil as tentativas ligadas ao CEMP de criação de uma Escola de Matemática, regozijando-se por "o Departamento de Pós-Graduação da Universidade Federal Pernambucana ser considerado um dos três ou quatro melhores Centros do Brasil!"

Os seus discípulos, Luíz Monteiro e Edgaro Stacco na Argentina, Fernando Cardoso no Brasil, Geraldo Soares de Souza nos Estados Unidos (Souza nos anos 80 deu contributos pioneiros para a teoria das *wavelets*), ou Luísa Itarrioz em Paris, entre tantos outros, testemunham eloquentemente o brilho do saber que o Mestre lhes transmitiu.

11. Durante os anos de exílio, o seu papel na denúncia do colonialismo português revelou-se fundamental. Foi colaborador do jornal *Portugal Democrático*, que era publicado no Brasil e que, segundo o jornalista e escritor Miguel Urbano Rodrigues, era uma "espécie de pólo de acusação do fascismo". Como o mesmo revelou, Ruy Luís Gomes e Humberto Delgado eram os primeiros subscritores de um memorial que todos os anos era enviado às Nações Unidas exigindo a retirada das tropas portuguesas das nossas antigas colónias.

Panfleto de candidatura presidencial.

No campo da intervenção cívica, merece especial menção a "Carta Aberta" que, juntamente com José Morgado, endereçou ao Cardeal Cerejeira aquando da sua visita ao Brasil em 1968, confrontando-o com o colaboracionismo com a Ditadura, responsável por graves atropelos aos Direitos Humanos. A Carta Aberta a Cerejeira abre com um poema de "O Canto e as Armas" de Manuel Alegre: "Chega um tempo de agir no sentido do Tempo/tempo de se ganhar o tempo já perdido"...

Outro importante documento subscrito pelos mesmos signatários é a carta enviada em 1965 ao secretário Geral da ONU, U'Thant, sobre " a hipótese de assassinato do General Humberto Delgado" e em que pediam julgamento internacional para Salazar e Franco.

12. Como diz Hardy, a matemática é uma arte essencialmente juvenil, arte que Ruy Luís Gomes cultivou ao longo da vida, mesmo quando a sua actividade política se intensificou deixando livre à criatividade estreita margem. E, numa afirmação de juventude perene, manter-se-ia cientificamente activo até ao fim da vida.

De regresso à Pátria depois do 25 de Abril, no Reitorado que ilustrou com os seus notáveis dotes intelectuais e de carácter durante a conturbada época pós-revolucionária, lançou importantes acções de política universitária. A devoção pela memória do Amigo e Mestre Abel Salazar levou-o a dedicar infatigável esforço à criação de instituições que preservassem e perpetuassem a sua obra estética e científica. O seu programa culminou com a criação do Instituto de Ciências Biomédicas Abel Salazar, instituição de renome internacional no campo da ciência, e ainda com a fundação da sua Casa-Museu e respectiva Sociedade Divulgadora.

Tarde, numa tarde cinzenta de Outono, a luz apagada, sentado no seu sofá, circunvagueia o olhar pela penumbra da sala. O sobrinho Joaquim pergunta-lhe[2]: "Tem frio? Não quer ler nada?" Absorto, não responde, estampado no rosto um sentimento de solidão existencial.

Dias depois, morre. Talvez para dar razão ao poeta, que diz "que nunca ninguém morreu de morte natural", o assento de óbito reza que foi de ataque cardíaco.

Nuno Grande, seu Amigo e colaborador na Comissão

[2] Comunicação Privada

Instaladora do Instituto de Ciências Biomédicas Abel Salazar, numa homenagem ao Professor Ruy na Cooperativa Árvore por iniciativa da Associação Intervenção Democrática, em 13 de Maio de 1995, relatou o seguinte episódio, esclarecedor da sua nobreza e integridade moral.

...Um dia mandou-me um cartão de visita pedindo-me que visse medicamente o carcereiro que ele tinha tido em Santa Cruz do Bispo, dizendo: "Este homem foi meu carcereiro, mas precisa de ajuda! Veja lá se consegue arranjar uns minutinhos para ver a saúde dele que não está bem".

Para além do seu prestígio científico, da pureza das suas convicções e intransigência democrática, deixou-nos a memória de um Homem de afectos, intrinsecamente bom, que desde sempre repartiu os seus proventos com os mais necessitados.

13. O labor científico de Ruy Luís Gomes traduz-se na presença de 76 entradas na base de dados *Zentralblatt Math* e 39 na *MathSciNet*. Ilustres matemáticos estrangeiros recensearam a sua obra que versa importantes áreas da Matemática (Análise e Física-Matemática). É um dos *matematici famosi* do mundo (cfr.http://felix.unife.it/ Root/ Mathematics/d-The-mathematician/t-Mathematicians-A-Z). Nos *Rendiconti da Academia dei Lincei*, publicou vários artigos por recomendação de Levi-Civita. O Prémio Nobel da Física Louis de Broglie elogiou-o nas suas aulas no Institut Henri Poincaré em França. E outro Prémio Nobel da Física, F. Joliot-Curie expressou numa missiva de 1952 a sua preocupação pela perseguição que era movida ao "sábio e homem de ciência" de um país de cultura.

Ruy Luís Gomes, "le savant sérieux" como Levi-Civita lhe chamou, deixou uma obra científica com a marca do seu superior talento, reconhecida internacionalmente pelos mais rigorosos padrões. E a memória do lutador estrénuo pelas causas da Paz, da Justiça e da Liberdade, tão essenciais ao destino da Humanidade.

Bibliografia

Bebiano, Natália, *Ruy Luís Gomes, Uma Fotobiografia*, Universidade do Porto & Gradiva, 2005.

Coutinho, Gago. "Mecânica Clássica e Mecânica Relativista" *Seara Nova*, n.os 534, 535, 536, 537, 1937.

Coutinho, Gago. "Questões científicas do nosso tempo. A relatividade examinada por um observador exterior", *Seara Nova*, 593, pp.217-219, 1938.

Coutinho, Gago. "A relatividade perante o observador exterior", *Seara Nova*, 601, p.13, 1939.

Einstein, Albert. 1905, *Zur Elektrodynamic bewegter Korper*, Annallen der Physik, 17, 891 ("Sobre a electrodinâmica dos corpos em movimento", tradução de Mário José Saraiva, *in O Princípio da Relatividade*, Lisboa, Fundação Cal. Gulb., 1978)

Fitas, A.J., Marcial, E. Rodrigues, M. Fátima Nunes, *A Filosofia da Ciência no Portugal do século XX*, in Pedro Calafate (dir.), "História do Pensamento Filosófico Português", (vol.5, tomo II), Lisboa, Editorial Caminho, 421-582.

Fitas, A.J. *A Teoria da Relatividade em Portugal* (1910-1940), *preprint* (Texto da Conferência proferida na 13ª Conferência Nacional de Física, Évora, Setembro 2002.)

Gagean, David Lopes e Leite, Manuel da Costa. "Cultura Científica em Portugal: a Universidade e o ensino científico da relatividade e da quântica na 1ª metade do século XX", *Actas Memória, História, Perspectivas*, Coimbra, 1990, pp. 499-512.

Gomes, Ruy Luís. *Sur la déduction des Formules de Lorentz*, Rendiconti della Real Academia dei Lincei, vol.XXI, série 6, 1. sem, p.433.

Gomes, Ruy Luís. "A relatividade, origem, evolução e tendências actuais", Seara Nova, n.os 541, 543, 545, 547, 550,553, 1938. Posteriormente editadas em opúsculo pela revista.

Gomes, Ruy Luís. "Teoria da relatividade restrita", Publicações do Núcleo de Matemática, Física e Química, Lisboa, 1938.

T. Levi-Civita. *Noziona di paralelismo in una varietá qualunque*, Palermo, 1917.

Morgado, José. "Ruy Luís Gomes Professor e Companheiro", *Boletim da SPM* n.8, 1985, pp. 5-40.

Morgado, José. "Evocação do querido professor e companheiro Ruy Luís Gomes", manuscrito.

Neves Real, Luís. "A obra de investigação empreendida recentemente pelo Prof. Ruy Luís Gomes no domínio das matemáticas", Diário de Lisboa, 1-4-1953.

Rezende, Jorge. http://ruyluisgomes.blogspot.com

Q.E.D.

Nos manuais escolares portugueses houve um tempo em que era hábito acabar as demonstrações com a sigla «c.q.d.». A moda passou um pouco de moda; e por uma razão simples: as demonstrações rareiam no ensino básico e secundário. Como não se pode terminar o que não se começa, a marca de fim de demonstração tornou-se menos popular. Mas ainda há quem escreva «c.q.d.» — «como queríamos demonstrar», pois claro! À entrada da universidade, há alunos que reconhecem essa sigla, embora não todos.

É pena que se demonstrem poucos resultados e seria bom que, pouco a pouco, na própria escolaridade básica, os alunos se habituassem a seguir o raciocínio estruturado de uma demonstração. O ensino da matemática não pode ser só o enunciado de teoremas e sua prova. Mas é importante que, desde cedo, os jovens comecem a perceber que os teoremas não são bizarrias de matemáticos, mas sim uma forma de organizar os resultados. E que comecem também a perceber que há uma forma típica de estruturar o raciocínio dedutivo, partindo de uma hipótese e chegando a uma tese através de uma sequência lógica de passos. Finalmente, será útil que vejam que há vantagens em anunciar o fim de uma demonstração.

Tudo isto é mais do que uma simples formalidade. É bom que os estudantes se habituem a perceber e registar os pressupostos de um raciocínio, a enunciar claramente as conclusões e a mostrar onde pára uma argumentação. Quando lemos os discursos de muitos políticos, agentes educativos e intervenientes na vida pública, reparamos que há falhas de lógica que radicam no afastamento destes bons hábitos. Expressões tão usuais como «isto prende-se com» ou «até por que» são mais do que tiques de linguagem: são vícios de raciocínio. O «prende-se» é tão vago que nada diz e o «até por que» é usado como argumento principal, quando pressupõe que não o é. O ensino da matemática pode ajudar a pensar. Mas é preciso que se proceda com rigor e que se vá até ao zénite do raciocínio abstracto, que é a demonstração.

Tudo isto é trabalho árduo, que demora anos e envolve gerações de professores e alunos. Uma coisa mais simples, contudo, é escolher uma boa notação. E «c.q.d.» é péssima! Porquê aportuguesar o célebre «q.e.d.»?

Há quem já não se lembre, mas houve tempos em que na escola se usava «q.e.d.» para marcar o fim de uma demonstração. José Sebastião e Silva usava-a e continuou a usá-la nos textos da reforma do ensino liceal que dirigiu no fim dos anos 60.

Os estudantes que se habituaram a ver essa sigla, estão mais habilitados para entender muitas coisas. E não só de matemática.

Saiu há pouco tempo um livro de Pacheco Pereira intitulado «Quod Erat Demonstrandum: Diário das Presidenciais». O autor julgaria que todos os leitores perceberiam o seu título, mas enganou-se redondamente. Hoje pouca gente sabe o que essa sigla significa. E é lamentável que os próprios estudantes de matemática não a conheçam.

Houve tempos em que se pensou que usar palavras portuguesas tornaria a ideia mais clara e mais fácil de memorizar para os estudantes. É pouco provável. Pode ser bem divertido explicar numa aula que «q.e.d.» significa «quod erat demonstrandum», o que é o mesmo que dizer «que é aquilo que queríamos demonstrar» ou «como queríamos demonstrar».

Pacheco Pereira não foi o primeiro a inspirar-se nesta expressão latina para compor o título de um livro. O físico norte-americano Richard Feynman fê-lo antes, tal como o dramaturgo Peter Parnell. Uma busca na Amazon revela 449 livros com «q.e.d.» no título, subtítulo ou outro campo. No célebre *Candide*, Voltaire coloca a sigla na boca do optimista Pangloss. No romance *The Tommyknockers*, o popular escritor norte-americano Stephen King usa-a várias vezes. Desconhecê-la é pois uma limitação. E é essa limitação que o aportuguesamento de uma expressão universal cria. Quem terá tido esta ideia?

Há outras escolhas na notação matemática que podem ser igualmente decisivas. Uma das mais infelizes, na opinião do autor desta crónica, é a escolha de «injectiva» em detrimento de «biunívoca», para classificar uma aplicação ou função que tem sempre imagens diferentes com argumentos diferentes. É certo que esta designação fazia sentido como parte de um conjunto de termos inventados pelo grupo Bourbaki. Nesse quadro, havia as classificações «injectiva», que já se explicou, «sobrejectiva», que designa uma aplicação em que o conjunto imagem ou contradomínio coincide com o conjunto de chegada, e «bijectiva», que designa uma função simultaneamente injectiva e sobrejectiva. Perceber a diferença entre todas estas definições é essencial para o domínio do conceito de função e é pena que no Ensino Secundário nem sempre se clarifiquem todas estas ideias.

É certo que as designações são muito arbitrárias. Neste como noutros aspectos, os anglo-saxónicos têm a vida simplificada. Como possuem uma língua muito rica em preposições, falam em «onto» para sobrejectiva. Como são despretensiosos e gostam de simplificar a linguagem, usam a expressão «one to one» para injectiva.

Tudo isto seria secundário se não tivesse efeitos na vida cultural dos estudantes. Nos alunos acabados de chegar à universidade há muitos que desconhecem o termo «biunívoco» e têm uma ideia mais ou menos precisa do que «injectivo» quer dizer. É triste, pois o primeiro termo deveria ser parte do vocabulário geral, enquanto o segundo poderia constituir apenas uma alternativa ao primeiro, conhecida somente pelos que estudassem matemática. Isso mesmo o reconhecem os dicionários da língua portuguesa, que habitualmente incluem uma entrada para «biunívoco», mas não para «injectivo».

Será interessante ver o que preconizava Sebastião e Silva. No seu compêndio para a reforma do ensino pré-universitário dos anos 1960, define aplicação biunívoca e apresenta o termo «injectiva» incluído em «outras maneiras de dizer» (págs. 188–189 da edição GEB de 1975, 1º volume, 1º tomo). O bom senso pedagógico do grande matemático português não vingou. Acabaram por ser incluídos os termos mais específicos e esquecidos os mais comuns. Passadas algumas décadas, a situação é ainda mais grave. Restam apenas resquícios do antigo rigor. Esquecem-se os termos mais comuns e esquecem-se os termos menos comuns...

Basil Bernstein (1924–2000), conceituado sociólogo que se dedicou ao estudo da educação, preocupava-se com os códigos de linguagem dos estudantes. Sublinhava que os limites de linguagem de alunos oriundos de grupos minoritários e marginais constituíam obstáculos ao seu acesso à cultura letrada. Mas a sua perspectiva não consistia em manter limitados esses códigos, como muitos defendem. O que Bernstein defendia era que se trabalhasse para a elevação de todos os jovens à compreensão dos termos e conceitos abstractos que fazem parte da linguagem culta. Como afirmava, «elaborated codes give access to universalistic orders of meaning».

Desconhecer a sigla «q.e.d.» ou o termo «biunívoco» é também um obstáculo ao acesso à cultura letrada. Não deveríamos nós, professores de matemática, preocupar-nos?

Entrevista a Dana Johnson*

conduzida por Maria do Céu Pinto

A Formação de Professores de Matemática nos Estados Unidos

MCP: Em Portugal, os alunos e as pessoas em geral consideram a Matemática uma disciplina muito difícil (horrível mesmo). Há quem ache que os seus segredos são acessíveis apenas a uns quantos dotados e quem a considere inútil. Por isso, os alunos não se sentem atraídos pela Matemática e os professores das escolas secundárias têm muita dificuldade em motivá-los. Qual é a situação nos EUA?

DJ: Nos Estados Unidos verificamos as mesmas atitudes. A posição pública do Conselho Nacional de Professores de Matemática é a de que a matemática é para *todos* os alunos, recomendando, simultaneamente, estratégias que visam a participação/envolvimento de todos. Hoje em dia, os alunos que pretendem concluir o ensino secundário são obrigados a matricular-se em álgebra e geometria. Antigamente, apenas os alunos que pretendiam ir para a universidade depois de concluírem o ensino secundário é que seguiam estes assuntos.

São despendidos mais tempo e atenção com os alunos que manifestaram dificuldades. As estratégias recomendadas incluem material de apoio, trabalhos de grupo, novas tecnologias como calculadoras gráficas e software informático, a associação dos temas de matemática com o mundo real, muita resolução de problemas, em particular de problemas referentes a situações reais, métodos alternativos de avaliação dos alunos e levar os alunos a construir significados em vez de memorizar factos (aprendizagem construtivista).

A maioria das atitudes negativas em relação à matemática constitui um estereótipo cultural. Foi feito um esforço grande junto dos pais para torná-los mais positivos em casa e assim permitir uma mudança de atitudes. É verdade, existem ainda alunos que não gostam da matemática, mas muito mais são os que estão a conseguir ultrapassar estas atitudes negativas a respeito das suas capacidades, das ansiedades em relação aos exames ou da ausência de utilidade da disciplina.

* *Department of Mathematics and School of Education*
The College of William and Mary
Williamsburg, Virginia, EUA

MCP: Existem programas especiais de Matemática para os alunos excepcionalmente dotados?

DJ: A maioria das escolas distritais oferece oportunidades especiais para os alunos dotados. E cada distrito escolhe os seus próprios métodos, entre os quais:

- Escolas especiais, como a North Carolina School for Science and Mathematics, que é uma escola em regime de internato (para mais informação consulte `http://www.ncssm.edu/`) ou a Thomas Jefferson High School for Science and Technology, que é um externato (para mais informação consulte `http://www.tjhsst.edu/`). Escolas especiais como estas não são muito comuns.
- Existem cursos no ensino secundário que oferecem currículos avançados e enriquecidos. É bastante comum isto acontecer. São normalmente designados cursos de "honors" ou Advanced Placement (AP), estando estes últimos disponíveis em cálculo, estatística e informática. Caso os alunos obtenham uma pontuação suficientemente elevada num teste realizado no final de um curso AP, são-lhes atribuídos créditos universitários pelo curso. Poderá encontrar-se uma descrição detalhada destes cursos em `http://apcentral.collegeboard.com/courses/descriptions/1,3061,151-151-0-8879,00.html?course= several&posted=1`
- A oportunidade de frequentar um curso numa universidade local que dá lugar à obtenção de créditos em vez da disciplina de matemática na escola secundária.
- Aulas de matemática no ensino básico ou intermédio, em que os alunos são organizados em grupos para receberem aulas avançadas de matemática.
- Um professor suplente, que instrui os restantes professores sobre como poderão responder às necessidades dos alunos dotados sem que tenham de os tirar das aulas normais. O ónus aqui pesa sobre o professor habitual, que deverá propor trabalho diferente aos alunos que necessitem de mais desafios.
- Cursos *online* para alunos que obtêm notas elevadas nos exames nacionais (ver JHU CTY em `http://cty.jhu.edu/cde/catalog.html`). Embora não seja comum isto acontecer, os alunos podem consultar individualmente este site em vez de assistirem às aulas de matemática normais, caso se encontrem num grau mais avançado e não existam na escola cursos ajustados ao seu nível.
- Programas de verão especiais administrados pelas escolas ou universidades locais, ou ainda programas que reúnem alunos de todo o país, como o Center for Talented Youth na Universidade de Johns Hopkins. `http://www.jhu.edu/gifted/`. Estes programas são pagos.

A posição pública do Conselho Nacional de Professores de Matemática é a de que a matemática é para *todos* os alunos, recomendando, simultaneamente, estratégias que visam a participação/envolvimento de todos.

MCP: Qual é o futuro de um jovem licenciado em Matemática nos Estados Unidos? É fácil encontrar emprego em empresas?

DJ: As empresas americanas valorizam as capacidades quantitativas, pelo que o conhecimento de matemática é muito procurado no mercado de trabalho. Alguns alunos encontram emprego depois de se formarem em gestão de empresas, seguros, consultoria ou administração pública. Outros frequentam cursos de especialização em matemática ou noutra área, como as ciências da computação, a economia, as finanças ou o direito.

MCP: É fácil arranjar trabalho como professor?

DJ: Em muitas zonas dos Estados Unidos existe falta de professores de matemática. Por exemplo, no ano lectivo de 2003-2004, a matemática figurava em primeiro lugar na lista de áreas com falta crítica no estado da Virgínia e, em 2004-05, ocupava o quarto lugar. Assim, não é difícil aos professores de matemática encontrarem trabalho.

MCP: Que formação é que um professor de matemática do ensino secundário tem nos Estados Unidos? Existem diferentes sistemas de preparação?

DJ: Cada estado impõe requisitos diferentes, embora sejam parecidos. A maioria dos estados aceita um professor que tenha a certificação normalmente aceite noutro estado qualquer. As escolas privadas normalmente não exigem formação específica em ensino, mas o candidato tem de ter no mínimo um *Bachelor* (semelhante ao 1º ciclo do Ensino Superior no formato de Bolonha) em matemática. A seguinte informação refere-se ao estado da Virgínia e constitui um exemplo típico dos requisitos mínimos exigidos.

Para estar habilitado a ensinar matemática no ensino secundário (do 6º ao 12º anos), o candidato deve: (1) Ser formado em ensino de matemática por uma instituição credenciada ou (2) ter um diploma em matemática, encontrar-se contratado numa escola e ter recebido habilitação "provisória" por um período de três anos. Durante este período o professor deverá preencher certos requisitos, a seguir descritos. Os programas de formação credenciados incluem estes elementos, juntamente com 10 semanas de estágio de ensino acompanhado.

a) Uma nota de aprovação no teste Praxis I, que consiste numa avaliação geral das competências de leitura e escrita e conhecimentos básicos de matemática (*vide* perguntas modelo em `http://www.ets.org/praxis/prxtest.html#ppst`) e o Praxis II, que é um exame com um conteúdo único de matemática (*vide* perguntas modelo em `http://ftp.ets.org/pub/tandl/0061.pdf`).
b) 36 horas de aulas semestrais de matemática, distribuídas pelas áreas seguintes:
   - Álgebra – Experiência em álgebra linear e abstracta;
   - Geometria – Experiência em geometria euclidiana e não euclidiana;
   - Geometria analítica;
   - Probabilidades e estatística;
   - Matemática discreta – Experiência em estudo de propriedades matemáticas de conjuntos finitos e sistemas e programação linear;
   - Ciências da Computação – Experiência em programação de computadores;
   - Cálculo – Experiência em cálculo com várias variáveis.

   Para obter certificação para ensino num nível não superior ao primeiro ano de álgebra (normalmente o 9º ano) o candidato deve ter completado 24 horas de aulas semestrais de matemática, distribuídas pelas áreas seguintes:
   - Funções elementares e introdução à álgebra;
   - Trigonometria;
   - Álgebra linear;
   - Cálculo;
   - Geometria euclidiana;
   - Probabilidades ou estatística ou ambos;
   - Matemática discreta;
   - Ciências da Computação.
c) As seguintes cadeiras em pedagogia:
   - Crescimento e desenvolvimento humano - 3 horas semestrais;
   - Procedimentos curriculares e educacionais - 6 horas semestrais;
   - Fundamentos da educação - 3 horas semestrais;
   - Leitura na área científica específica – 3 horas semestrais.

As empresas americanas valorizam as capacidades quantitativas, pelo que o conhecimento de matemática é muito procurado no mercado de trabalho.

MCP: Como é o processo de selecção dos professores de matemática nas escolas públicas e privadas?

DJ: Os candidatos entregam a sua candidatura no gabinete de recursos humanos do departamento escolar. Se a candidatura for considerada prometedora, por responder aos requisitos de determinado posto de trabalho, o candidato é convocado para uma entrevista. Se esta correr bem, o candidato é convocado para uma nova entrevista com o director de uma determinada escola, que toma a decisão de contratar ou não o candidato juntamente com os restantes professores de matemática da escola. Em relação às escolas privadas, as candidaturas são analisadas ao nível da escola, onde são seleccionados os candidatos para entrevista.

MCP: O grau de preparação académica dos professores de matemática varia muito de escola para escola? O nível de qualidade é muito diferente de uma escola para a outra? O nível de qualidade nas escolas públicas difere muito do das escolas privadas?

DJ: A mesma preparação pedagógica é exigida a todos os professores de um mesmo estado. Contudo, tal como acontece com as outras profissões, existem diferenças de qualidade entre professores e algumas diferenças de qualidade entre escolas. Algumas diferenças entre as escolas resultam do tipo de alunos da região servida pela escola. Há ainda diferenças nos orçamentos disponíveis nas várias escolas dos distritos. Tudo isto pode afectar o tamanho das turmas, o número de computadores disponíveis, o estado de conservação das instalações e os ordenados dos professores. Os professores melhores podem pedir transferência para uma escola que considerem melhor, mas por vezes excelentes professores permanecem numa escola com dificuldades por acharem que lá podem dar um contributo maior.

As escolas privadas normalmente têm menos problemas disciplinares, porque podem decidir quem é que desejam admitir ou manter na escola. Os alunos, na sua maioria, preparam-se para entrar para a universidade, por isso levam os estudos mais a sério e inscrevem-se em disciplinas mais exigentes. As turmas são geralmente mais pequenas e os pais apoiam mais os filhos, possivelmente porque estão a pagar muito para terem os filhos nessas escolas. Existem diferenças de qualidade entre escolas públicas e privadas, e mesmo de escola pública para escola pública. Não se pode dizer se as escolas privadas ou as públicas são melhores, pois existe muita variedade de cada tipo.

MCP: Como é que os professores são avaliados na sua actividade profissional? Por quem? Pode tal avaliação influenciar as suas carreiras?

DJ: Cabe antes de mais ao director da escola avaliar os professores. O director assiste a uma aula de cada professor no mínimo 3 vezes por ano para observar o nível de ensino e a gestão da turma. As notas obtidas pelos alunos nos exames estaduais de álgebra e geometria são vistas como outra componente de avaliação do ensino. Se um professor obtiver uma nota satisfatória durante três anos seguidos, é-lhe oferecido um contrato permanente. Contudo, os aumentos salariais são determinados com base no tempo de serviço e no grau académico mais elevado, e não pelo desempenho.

Como existe uma grande procura de professores de matemática nos Estados Unidos, os professores portugueses podem ser candidatos interessantes.

MCP: Como é que os professores de matemática nos Estados Unidos procuram actualizar-se ao longo da vida *profissional? Que tipo de cursos é que frequentam? Onde é que podem encontrar este tipo de formação?*

DJ: Para manter a acreditação, os professores são obrigados a acumular "pontos de renovação de acreditação" todos os anos. Para cumprirem estes requisitos, podem voltar à universidade para obter um grau superior na sua área de formação, frequentar *workshops* organizados pelas próprias escolas ou publicar artigos. Poderá encontrar mais exemplos relativos ao estado da Virgínia no seguinte sítio `http://www.pen.k12.va.us/VDOE/Compliance/TeacherED/remanual.pdf`. Na Virgínia, os professores são obrigados a cumprir 180 horas anuais de forma a satisfazerem os requisitos.

Os professores com grau de *Bachelor* inscrevem-se frequentemente em cursos universitários para alcançarem o grau de *Master* (semelhante ao 2º ciclo do Ensino Superior no formato de Bolonha), pois assim podem auferir um ordenado mais elevado. Algumas universidades oferecem cursos em horário nocturno e cursos de Verão para professores.

Uma alternativa, relativamente recente, é a nova acreditação especial e rigorosa, designada *National Board Certification*. Este certificado é reconhecido em todos os estados e é uma indicação do elevado grau de qualificação do professor. Podem candidatar-se professores com um mínimo de 3 anos de experiência de ensino. Os candidatos participam numa avaliação de ensino em situação real que se estende por um ano, o que implica normalmente entre 200 a 400 horas de trabalho. Submetem os seus *portfolios* de ensino e vídeos. Também são obrigados a fazer vários testes escritos com limite de tempo, que visam avaliar o seu conhecimento na disciplina, bem como o seu entendimento de como ensinar a matéria aos alunos. É preciso pagar um valor de inscrição muito elevado, mas normalmente este é subsidiado pelo distrito escolar local. A partir do momento em que é atribuída a um professor a *National Board Certification*, este passa a receber um ordenado mais elevado.

MCP: É possível um professor de matemática português ocupar um lugar equiparado nos Estados Unidos? Seria um professor de matemática português um candidato interessante? É difícil obter a equivalência dos diplomas?

DJ: Como existe uma grande procura de professores de matemática nos Estados Unidos, os professores portugueses podem ser candidatos interessantes. As equivalências, no entanto, podem constituir um problema. O departamento de educação de cada estado é que analisa os papéis e determina se um professor pode receber a certificação necessária ou se terá ainda de frequentar outras formações. Talvez o mais fácil para um professor estrangeiro seja começar por procurar nas escolas privadas, onde as exigências de certificação não são tão rigorosas. Por outro lado, como é necessário um visto para trabalhar nos EUA, esta poderá ser outra dificuldade. No entanto, se houver uma escola que esteja disposta a contratar o professor por falta de candidatos, é mais fácil que o visto lhe seja concedido.

O chamado Programa de Professores Estrangeiros Convidados (*Visiting International Teacher*) permite que professores de outros países sejam seleccionados para ensinar nos Estados Unidos por um período máximo de três anos. O programa exige que o professor tenha, no mínimo, dois anos de experiência para que possa candidatar-se. Para mais informação, consulte `http://www.vifprogram.com/`. O programa verifica a equivalência dos diplomas e oferece muito apoio aos professores vindos do estrangeiro.

O chamado Programa de Professores Estrangeiros Convidados (*Visiting International Teacher*) permite que professores de outros países sejam seleccionados para ensinar nos Estados Unidos por um período máximo de três anos.

Livros contados

Paulo Ventura Araújo

Fundamentos da Geometria,

de José Joaquim Dionísio (colecção *Textos de Matemática*, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2004)

recensão crítica por Paulo Ventura Araújo, Universidade do Porto

As edições universitárias são, em Portugal mais do que noutros países de mercado editorial mais diversificado, um modo de publicar textos em que as editoras convencionais dificilmente apostariam. Além de visarem um público restrito, as edições técnicas ou científicas têm as vendas prejudicadas pela *fotocopilhagem* que grassa nas universidades; e, se ao autor de um manual poderá interessar mais a difusão e uso da sua obra do que o lucro (em geral irrisório) que dela poderia tirar, não é razoável esperar igual altruísmo por parte das editoras.

É bom, pois, que existam edições universitárias: porque disponibilizam aos estudantes material de consulta na sua língua; porque combatem a rarefacção do português no discurso técnico-científico; e porque asseguram às obras de valor uma dignidade e permanência que lhes estaria vedada enquanto sebentas ou maços de fotocópias.

Acontece que a vocação de um livro só se cumpre quando ele ultrapassa as paredes da escola onde nasceu. Mau seria se cada universidade usasse em exclusivo os seus livros e ignorasse os das outras; mas a nossa entranhada desconfiança face ao produto nacional, agravada pela distribuição deficiente dessas edições, tende a produzir exactamente esse resultado.

O livro agora em apreço é o 18.º da colecção *Textos de Matemática* da F.C.U.L. O seu autor, José Joaquim Dionísio (1924-1999), foi professor catedrático na F.C.U.L. e membro da Academia das Ciências de Lisboa (para um resumo biográfico, leia-se a evocação de F. R. Dias Agudo no n.º 41 (1999) do Boletim da SPM). O livro vem juntar-se – com grande atraso, pois o manuscrito que lhe serviu de base existe há mais de uma década – aos vários manuais de geometria editados em Portugal nos últimos anos; é por isso de todo o interesse averiguar o que o distingue desses outros livros.

O capítulo 1 descreve o modo como a obra de Euclides foi sendo entendida nos mais de 2300 anos decorridos desde a escrita dos *Elementos*: paradigma do rigor lógico durante mais de 22 séculos, o seu estatuto foi abalado pela revisão crítica dos fundamentos da geometria, empreendida, na viragem dos séculos XIX e XX, por matemáticos como Pasch e Hilbert. Mas já antes disso, com Bolyai, Lobatchevski e Gauss, se tinha entendido que eram logicamente concebíveis geometrias diversas da euclidiana, não sendo possível sequer estabelecer o até então presumido carácter euclidiano do mundo físico. Temos assim Euclides duplamente apeado do seu pedestal: a sua geometria deixa de ser a ciência do espaço, e o seu rigor é tido como insuficiente pelos padrões modernos. Embora factualmente correcto, este capítulo – a começar pelo título: *os postulados de Euclides e a sua insuficiência lógica, matemática e científica* – acentua talvez em excesso o *fracasso* de alguém que é afinal, pela influência e longevidade da sua obra, o autor científico mais bem sucedido de sempre. Para contrabalançar a ênfase negativa, bom seria complementar o presente livro com a leitura de *Geometria Euclidiana* de Franco de Oliveira [4] e de A *Matemática na Grécia Antiga* de Carlos Sá (texto incluído em [2]).

Com um interregno sobre geometria afim no capítulo 3, o livro passa de seguida à construção axiomática da geometria absoluta segundo Hilbert. Tal como Euclides, Hilbert rejeita a introdução de conceitos métricos na sua axiomática: a identificação das rectas com o corpo dos números reais (ou com qualquer outro corpo de números) e a possibilidade de medir grandezas geométricas terão de resultar do desenvolvimento da teoria, e não serem impostas *a priori*. Esse constrangimento era natural em Euclides, que não dispunha da moderna noção de número real; e Hilbert, por seu lado, propunha-se tapar as brechas que o rigor moderno detectava no edifício euclidiano, mas sem o descaracterizar pelo uso de materiais dissonantes. No entanto, é difícil hoje encontrarmos motivação para prescindirmos, no ensino dos fundamentos da geometria, de uma actividade tão natural como a medição ou de um conceito tão básico como o de número. Embora com tal amputação se ganhe um entendimento minucioso de certos conceitos (ordem, separação, propriedade arquimediana, continuidade), há o risco de esse ensino se perder em demonstrações miudinhas e de fraco conteúdo geométrico. Por exemplo, na geometria métrica de Birkhoff dois segmentos dizem-se congruentes se tiverem igual comprimento; neste livro, além dos três axiomas que governam a congruência de segmentos, ainda se prova à parte que se trata de uma relação de equivalência (o que na abordagem métrica dispensa menção especial). É óbvio que, em vez de tais axiomas, outros de conteúdo não menos plausível poderiam ter sido adoptados: por que é que a transitividade (semi)postulada no Axioma III-2 há-de considerar-se mais intuitiva do que a reflexividade demonstrada na Proposição 5.1?

Este livro é, ao que sabemos, o primeiro em Portugal a propor um curso baseado na axiomática de Hilbert ([1] e [4] perfilham a de Birkhoff); e, ainda que tenhamos reservas ao uso pedagógico dessa teoria, ela é um dos marcos da história da matemática. Dá-se até o caso de a obra de Hilbert – igualmente intitulada *Fundamentos da Geometria* – ter sido em 2003 editada em Portugal [3]; e quem quiser lê-la fará bem em estudar previamente o livro de J. J. Dionísio. O livro de Hilbert reserva-nos algumas surpresas; por exemplo, o uso de construções geométricas para definir as operações de corpo, no que é a melhor justificação moderna para a recusa em algebrizar a geometria por via axiomática.

Os axiomas de continuidade completam, no capítulo 6, a descrição da geometria absoluta, permitindo introduzir os números reais para medir comprimentos e ângulos. A construção da função comprimento peca por excessivamente sumária, o que é remediado por um apêndice no final do livro; mas a equivalência entre as versões linear e angular do axioma arquimediano, assunto raro em textos elementares, é tratada ao pormenor. De seguida, a geometria bifurca-se, conforme se acolha ou não o axioma das paralelas. O capítulo 7 versa a geometria euclidiana, começando por apresentar uma série de enunciados equivalentes ao da unicidade das paralelas, entre eles o de ser π a soma de ângulos de um triângulo; em seguida, além de expor a teoria da proporcionalidade (teorema de Tales) e os resultados básicos sobre circunferências, apresenta-nos um ramalhete de teoremas famosos: o do círculo dos nove pontos, os de Menelau e de Ceva, o da recta de Euler, o de Ptolomeu sobre quadriláteros cíclicos, o da recta de Wallace, etc. (mas o melhor livro em português para descobrir a geometria pela sua faceta estética e pela riqueza dos seus métodos e resultados é ainda o de Eduardo Veloso [5]).

O capítulo 7 é maculado por dois deslizes sérios. O primeiro é a formulação errónea do teorema de Menelau: é que, não se usando distâncias orientadas, a condição $AZ \cdot BX \cdot CY = ZB \cdot XC \cdot YA$ – onde ABC é um triângulo, $X \in BC$, $Y \in AC$ e $Z \in AB$ – **não é suficiente** para X, Y e Z serem colineares. De facto, tal condição fica então idêntica à do teorema de Ceva, e portanto qualquer caso deste último em que as rectas XY e AB não sejam paralelas fornece um contra-exemplo ao teorema de Menelau (tal como ele aparece no livro). O segundo erro é a anunciada construção da função área para regiões poligonais. Uma vez estabelecido que a área de um triângulo, dada por metade

do produto da base pela altura, está bem definida (ou seja, não depende do lado escolhido como base), a área de uma região poligonal calcula-se dividindo-se a região em triângulos de que se somam as áreas. A prova que nos é oferecida de que o valor obtido não depende da triangulação usada (lema 7.3) é defeituosa, pois pressupõe a validade de igual resultado para triângulos – ou seja, admite, sem demonstração, que se um triângulo for dividido arbitrariamente em triângulos então a área do triângulo maior é igual à soma das áreas dos menores.

A geometria hiperbólica, ou de Lobatchevski, é o assunto do capítulo 8, que inclui estudos aprofundados do ângulo de paralelismo e do defeito angular de um triângulo (diferença para π da sua soma de ângulos), e culmina com a prova da existência, no plano de Lobatchevski, de triângulos com defeitos tão próximos de zero ou de π quanto se queira. O nono e último capítulo trata das isometrias do plano em geometria absoluta e em geometria euclidiana, ilustrando o uso da teoria com resultados geométricos sugestivos; só é pena que não apresente a classificação das isometrias quando o trabalho adicional para isso seria mínimo. O livro inclui ainda cópia facsimilada de um manuscrito de J. J. Dionísio, datado de 1993, que funciona como complemento ao texto principal – ao tratar, por exemplo, da projecção estereográfica e do modelo de Poincaré para a geometria hiperbólica plana – e dá a conhecer as pertinentes opiniões do autor sobre as vicissitudes do ensino da geometria.

Que méritos podemos apontar ao livro de J. J. Dionísio? Primeiro, a opção por desenvolver a geometria do espaço em simultâneo com a geometria do plano, com isso conseguindo demonstrar, em geometria absoluta, resultados (como os da perpendicularidade entre rectas e planos) que, em abordagens sintéticas, só costumam ser referidos na geometria euclidiana; segundo, a judiciosa escolha dos exercícios; terceiro, o modo como exemplifica, em especial no capítulo 3, através de planos finitos e de modelos analíticos baseados em diferentes corpos, o facto de uma mesma axiomática poder cobrir situações díspares. Além disso, é constante no livro a preocupação em amenizar alguma aridez da teoria com resultados geometricamente sugestivos: temos assim o teorema de Sylvester sobre o número de rectas determinado por n pontos não-colineares no plano; o teorema de Steiner-Lehmus sobre a relação num triângulo entre os comprimentos dos lados e os das bissectrizes dos ângulos; o teorema de Hjelmslev sobre uma correspondência isométrica entre duas rectas; e uma demonstração em geometria absoluta, como corolário do teorema de Fagnano, de que as alturas de um triângulo acutângulo são concorrentes.

Em suma, o livro é útil e bom: útil porque sobre alguns dos seus assuntos não há outros textos em português com o mesmo grau de profundidade; bom porque está bem escrito, bem organizado e bem apresentado, saudando-se em especial a inclusão de um índice remissivo. A ausência de uma bibliografia final é pecado menor, redimido pelas numerosas referências bibliográficas disseminadas no texto. Menos desculpável é a avareza em ilustrações, que torna penosa a leitura de certas passagens: são vários os capítulos sem uma única figura! Até Hilbert ilustrou o seu livro à boa maneira euclidiana, com diagramas representando pontos, rectas e planos – muito embora tenha defendido que a verdade em geometria não seria abalada se, em vez desses objectos tradicionais, nela se falasse de mesas, cadeiras e canecas de cerveja.

Referências

[1] Paulo Ventura Araújo, *Curso de Geometria* (3.ª ed.), Gradiva, 2002

[2] Maria Fernanda Estrada, Carlos Correia de Sá (coordenadores), *História da Matemática*, Universidade Aberta, 2000

[3] David Hilbert, *Fundamentos da Geometria*, Gradiva, 2003

[4] A. J. Franco de Oliveira, *Geometria Euclidiana*, Universidade Aberta, 1995

[5] Eduardo Veloso, *Geometria. Temas Actuais*, Instituto de Inovação Educacional, 1998

Comentário à «recensão» ao livro «Contar e fazer contas – uma introdução à Teoria dos Números», publicada na *Gazeta de Matemática*, nº 149, Julho 2005

Quem publica um trabalho submete-se sempre à crítica dos seus leitores e quando o(a) autor(a) de uma recensão se dá ao trabalho de examinar o texto publicado e de assinalar defeitos que lá julgue encontrar, só resta a quem escreveu e publicou exprimir um sincero agradecimento a quem o fez, presumindo que o exame crítico, a enumeração de gralhas e a apresentação de sugestões de modificação têm um sentido eminentemente construtivo e se destinam a contribuir para a melhoria de futuras edições. Se, pelo contrário, a crítica for gratuita ou motivada pelo mesquinho sentimento da inveja de quem não fez – porque não quis ou porque não foi capaz de fazer – o que vê feito por terceiros, os defeitos apontados não tiverem outro propósito que o de apoucar o trabalho alheio, se, em suma, a crítica for afinal destrutiva e escrita a ácido que corrói as páginas em que assenta, nada restará senão ignorá-la. No caso presente, estamos, decerto perante uma crítica do primeiro tipo e apraz-nos registar comentários elogiosos, quer quanto ao público-alvo («esta é uma excelente razão para avançarmos na leitura...»), quer quanto à organização do trabalho («os temas dos cinco primeiros capítulos correspondem a uma escolha primorosa de um vasto leque de assuntos possíveis em teoria de números»).

Essa avaliação de conteúdos é extremamente positiva, visto que a obra se compõe, na realidade, de apenas seis capítulos de texto efectivo (sendo o sexto considerado «menos feliz», o que, face ao «primor» dos cinco anteriores, deixa ainda uma margem positiva acentuada). Já a afirmação de que o «livrinho» tem conteúdo «essencialmente histórico» será discutível, dado o importante volume de material técnico incluído, enquadrado, sempre que possível, numa perspectiva histórica, que se julgou tornar a leitura mais aliciante. De agradecer – por vir claramente ao encontro das intenções e dos esforços dos autores e dos diversos colegas que leram e comentaram o trabalho, antes da sua publicação – é a clara indicação de que o produto final ficou «acessível a todos os que se interessam por matemática».

No plano técnico, a autora da recensão em análise faz diversas observações, de desigual pertinência. Analisemos algumas delas:

Critica-se uma certa repetição entre capítulos, sem se entender que é voluntária (e não espelha qualquer «descoordenação») e que o seu objectivo é o de permitir a leitura de um capítulo independentemente de outros, tornando mais flexível a utilização do livro. Protesta-se quanto à apresentação de opiniões, quando, desde que se não fira a verdade científica ou histórica, cada qual está no pleníssimo direito de ter as suas... A propósito do reparo em atribuir a Andrew Wiles a totalidade dos méritos da demonstração do chamado «Último Teorema de Fermat», confirmam-nos os especialistas em Teoria de Números que temos razão.

Assinalam-se «erros, imprecisões e omissões» no conteúdo matemático da obra e certamente que há gralhas, muitas das quais já detectadas pelos próprios autores, após a publicação do livro – e, consequentemente, tarde demais para se poder corrigi-las. Quem está habituado a publicar, está familiarizado com tais acidentes. Felizmente, muitas das gralhas e imprecisões são de tal modo evidentes que os próprios leitores as corrigirão por si. Não podendo nem pretendendo os autores arrogar-se dons de infalibilidade, de boa vontade dão a mão à palmatória por cada lapso detectado, que tencionam corrigir assim que possível.

Lamenta-se que a autora da recensão entenda que «o argumento das páginas 38 e 42 para mostrar a unicidade do resultado das operações em *IN* não se percebe». Esse argumento, com maior ou menor peso de escrita simbólica – no livro, optámos por reduzi-la ao mínimo indispensável – costuma ser apresentado aos estudantes dos cursos de Matemática de diversas Universidades, sem que se note particular dificuldade em o acompanhar. Saúda-se o reconhecimento de que «a ordem por que se apresentam as propriedades das operações facilita a verificação». Já no que se refere ao uso do termo «característica», aplicado a um número real, há que reconhecer que se regista alguma imprecisão, sendo preferível dizer explicitamente, em vez de deixar subentendido, que estamos a lidar com números positivos. «Cela va sans dire», diz o bom senso; «mais cela va mieux en le disant», acrescenta a prudência!

A simplicidade relativa das duas argumentações apresentadas para provar a existência de uma infinidade de números naturais primos não passará nunca de uma questão de opinião: uns preferirão uma, outros encontrarão maior facilidade em acompanhar a outra. Custa perceber o alcance das objecções apontadas ao texto do capítulo cinco, pois discutem-se pormenores de apresentação dos assuntos, mas não se apontam quaisquer erros. Tudo equivale pois a dizer «se fosse eu, teria feito de outra maneira». Pois que faça, que ninguém lhe levará a mal; permita também que os autores façam como melhor entendem. Já no capítulo seis, a autora da recensão parece procurar pormenores com que possa implicar e, como deverá ter sido assim, só uma explicação se adivinha para tão peculiar comportamento, que é a de estar já fatigada pela leitura dos cinco capítulos anteriores. Parece perfeitamente óbvio, por exemplo, que a escolha do intervalo $]0,1[$ se destina a restringir a lista dos números a estudar a dízimas de parte inteira igual a 0, o que, efectivamente, simplifica as coisas. Seria objectivamente mais maçador utilizar o intervalo]23,49[, por exemplo. Não tem nada a ver com a questão da unicidade da representação decimal. Por sua vez, perguntar-se se zero tem dízima infinita é descabido, porquanto zero não está no intervalo considerado. Há, evidentemente, pormenores que são deixados ao cuidado do leitor, suscitando o seu esforço de compreensão e de pesquisa, que seria lamentável perder.

Tem razão a autora da recensão quando sublinha que, na nota de rodapé número 68, falta a palavra «positivos» a seguir a «inteiros». Oxalá fosse esta a única imperfeição! Felizmente ela mesma iliba os autores de preocupações de maior, por afirmar peremptoriamente que o teorema só se refere a soluções inteiras positivas, «como é óbvio». Ora se é óbvio, é de crer que os leitores possam detectar a gralha e entender a emenda necessária (sem a qual, de resto, a coisa resultaria trivialmente falsa, bastando tomar $x = z$ e $y = 0$; logo se compreende que há «gato»...).

Quanto ao enunciado do Teorema de Wilson, há discrepância, de que os autores têm de penitenciar-se, entre as páginas 80 e 192, no que se refere ao uso da implicação ou da equivalência (sendo esta válida, como é sabido). Restará aos autores (consolando-os do uso mas não da discrepância) apoiar-se em textos de qualidade reconhecida, como, por exemplo, Adler, Andrew & Coury, John E., *The Theory of Numbers – a text and source book of problems* (Jones & Bartlett Publishers, 1995), no qual o teorema é apresentado apenas na forma de implicação, remetendo-se a prova da recíproca para o estatuto de mero exercício.

Outros comentários – a timidez de apresentação de assuntos mais difíceis (pudera!) ou a omissão de determinadas justificações e explicações – não merecem observação. Mais uma vez, outros fariam de outro modo, escolheriam outros tópicos, variariam a ênfase dada aos tópicos comuns, etc. Os autores decidiram fazer assim, fizeram, está feito. Por exemplo, o algoritmo (supõe-se que na recensão se pretendia dizer «algoritmo» e não «argumento») para cálculo da raiz quadrada de um número não é mais nem menos verdadeiro por ser ou não explicado ou justificado. Não se pretendeu ser exaustivo em tais justificações, assim como quando se diz que Lagrange nasceu em 1736, não houve a preocupação de documentar essa afirmação com a exibição da respectiva certidão de nascimento.

Do mesmo modo e para dar outro exemplo de inutilidade de uma objecção apresentada, repare-se na questão de se discutir como é que alguém se lembrou de uma dada mudança de variável. O que é verdade é que alguém se lembrou dela! E funciona! Que mais poderíamos desejar? Quantas e quantas demonstrações requerem a utilização de artifícios, alguns bastante rebuscados? Se tivéssemos de explicar, em cada caso, como é que tais malabarismos ocorreram aos seus inventores, todos os livros de Matemática atingiriam proporções descomunais e indesejáveis.

É despropositada e imerecida a comparação do trabalho em discussão com os manuais escolares destinados ao ensino secundário, com base na utilização de «caixas» onde parte do conteúdo é incluída. Na verdade, os tais manuais usam as «caixas», a maior parte das vezes, para destacar os enunciados ou as fórmulas mais importantes, enquanto no livro em análise, foram remetidas para as «caixas» porções do texto cuja leitura se não tornasse indispensável à compreensão do que viria a seguir, por forma a que os leitores que desejassem optar por uma consulta mais rápida pudessem omiti-la, ao menos numa primeira abordagem. Quanto à preferência por destacar Pedro Nunes menos que Anastácio da Cunha, a razão é tão óbvia que não merece qualquer comentário, pese embora a deferência que todos temos pela memória do segundo.

Finalmente, tece a autora da recensão em análise considerações depreciativas sobre a qualidade da linguagem utilizada, chegando ao ponto de classificar como «coxo» o português usado. Julgamos que se trata, neste e só neste ponto, de uma crítica que os autores não merecem, porque é injusta e errada, e que não podem, nem devem admitir, independentemente das habilitações que a referida autora tenha ou a si mesma se outorgue e que nos são inteiramente desconhecidas. Para mais, dos três exemplos que apresenta, em apoio das suas afirmações, o primeiro não enferma de qualquer vício gramatical, o segundo peca apenas por redundância, que se pretendia enfática, e o terceiro apresenta meramente uma gralha no uso de um singular que devia ser plural, como qualquer pessoa bem-falante mas, acima de tudo, bem intencionada, fácil e imediatamente reconhecerá. Já agora, julgará a autora da recensão em análise exemplar o seu uso da Língua Pátria? Para além de outros pormenores que nos dispensamos de assinalar, atente-se na forma como inicia o antepenúltimo parágrafo da sua exposição: «Impunha-se dos cinco autores...». Não será antes «Impunha-se aos cinco autores» ou "Esperava-se dos cinco autores»? Ou será "impor-se de alguém" a forma mais correcta de utilização da forma reflexa do verbo «impor»?

Em resumo, os autores estão gratos à autora da recensão pelas muitas palavras amáveis que lhes destina, indo mesmo ao ponto de pugnar pela correcção, numa segunda edição do livro, de lapsos ora verificados, de modo a fazer «justiça à qualidade dos autores». Sendo imerecidos tais encómios, mais servirão de estímulo a futuras realizações.

J. Eurico Nogueira, Suzana Nápoles, António Monteiro
José A. Rodrigues, Mª Adelaide Carreira

A Escolha dos livros escolares

Graciano de Oliveira
Universidade Lusófona, Lisboa

O problema da qualidade dos livros escolares tem sido agitado desde há muito. Nunca se encontrou solução.

Já se pôs a hipótese, recentemente renovada, de o Ministério da Educação criar uma comissão de sábios para decidir quais os bons, e, por exclusão de partes, quais os maus livros escolares.

Interesses económicos reagiram de imediato com desagrado. Percebem-se as razões e não é a primeira vez que tal acontece. Já foram feitos estudos cujos resultados nunca viram a luz do dia, não se sabe bem porquê. Mas imagina-se. Há muitas forças que não gostam de comissões de sábios, detestam prémios, vêem com maus olhos recensões críticas, a tudo preferindo as técnicas do marketing. Mas além dos interesses económicos há outros que não são menos legítimos. Por isso há outras maneiras de encarar o problema, há outros modos de encarar a escolha dos manuais, há outros intervenientes no jogo. As técnicas de marketing não são tudo. O estudo, a crítica, a meditação e o debate representam valores muito altos que não podem ser negligenciados e que devem desempenhar aqui um papel de primeira importância.

Temos de reconhecer que uma comissão de sábios de origem estatal tem a seu favor o estar de acordo com a nossa cultura de dependência do Estado. Mas, pode perguntar-se, não deveriam ser os professores a ter a última palavra? Os professores já são demasiado tutelados pelo Ministério, tanto no que ensinam como no modo de ensinar. Como podem ser eles os responsáveis pelo ensino e não serem responsáveis pela escolha dos livros nem dos métodos pedagógicos?

A existir uma Comissão de Sábios, os seus pareceres deveriam ser só indicativos e nunca vinculativos; deveriam constituir um elemento, para discussão, a pesar a par de outros. Os seus pareceres deveriam ser obrigatoriamente divulgados sem necessidade do beneplácito de ninguém, evitando-se assim o veto de gaveta. A bem da transparência, a composição da comissão deveria ser bem conhecida tal como o método de nomeação dos seus membros. De preferência, não deveriam ser todos designados pela mesma entidade.

Provavelmente, os professores necessitarão de melhores condições, sobretudo de mais tempo para procederem às suas escolhas. Tempo para estudo e reflexão que, por exemplo, poderia ser retirado à burocracia, às reuniões rotineiras e inúteis. Por que não criar condições para os professores lerem e estudarem em vez de os fazer preencher fichas e organizar dossiers que servem principalmente para serem arquivados? É bom que haja muitos livros, muitas possibilidades de escolha e também muitas fontes de informação e oportunidades de confrontar opiniões.

A Comissão de Sábios poderia mesmo ser dispensável. Necessitamos de outra atitude cultural, uma atitude mais activa e menos passiva. Precisamos de quem acredite mais nas suas próprias opiniões do que nas de comissões estatais ainda que os pareceres destas (e outros) possam ser tidos em conta. Deveria haver mais leitura e mais que ler e mais oportunidades para ler. Seria desejável mais estímulo à leitura e ao pensamento autónomo e menos incentivo à dependência das directivas do Ministério. Deveria haver mais recensões, incluindo de manuais escolares, e discussões críticas. Somos pobres em jornais e revistas, somos deficientes em discussão e em debate. A diversidade é preferível à monotonia, uma vasta panóplia de escolhas é sempre uma coisa boa. Temos de deixar de confundir discordância e crítica com menos respeito ou agravo. E temos de exaltar e promover a autoconfiança, contrariando a orientação tradicional do Ministério da Educação.

Nota: Depois de ter escrito este texto, soube pela imprensa que a Assembleia da República aprovou por unanimidade (estranho!) a certificação dos manuais escolares. A unanimidade é quase sempre mau sinal...

A matemática no ensino recorrente: 3º ciclo e secundário

Georgina Tomé
Escola Secundária de Camões, Lisboa

1. Introdução

Em 1986 iniciou-se o projecto de reforma dos Cursos Nocturnos com a consequente implementação a nível nacional, em 1993 para o ensino básico e em 1996 para o secundário. Foi então adoptado um sistema de ensino por unidades capitalizáveis, regulamentado pelos despachos normativos nº189/93 de 7 de Agosto (ensino básico), nº41/SEED/94, de 14 de Junho e nº16/SEED/96, de 29 de Abril (ambos do ensino secundário) que teoricamente se caracteriza pela:

- Flexibilidade e permeabilidade, que permitem a valorização dos conhecimentos de que o aluno é portador, quer esses conhecimentos tenham sido adquiridos na vida activa, quer em qualquer das componentes do sistema educativo.
- Aceitação de diferentes ritmos de aprendizagem, apelo à autoformação e nova relação professor-aluno já que se remete para o professor um papel de orientador dos diferentes "itinerários individuais de formação".

No artigo 20º da Lei de Bases do Sistema Educativo, pode ler-se que o Ensino Recorrente de Adultos se destina a indivíduos que já não se encontram na idade normal de frequência dos ensinos básico e secundário e que não tiveram oportunidade de se enquadrar no sistema de educação escolar na idade normal de formação, tendo em especial atenção a eliminação do analfabetismo.

Assim, este sistema de ensino destina-se a alunos maiores, embora se possam matricular alunos menores no Ensino Básico Recorrente, em circunstâncias excepcionais. Pretende ser portanto para estes indivíduos uma segunda oportunidade.

2. Programas

• **BÁSICO**

O programa [*PB*] é constituído sensivelmente pelos conteúdos programáticos que constam nos programas do 7º, 8º e 9º anos de escolaridade. As principais diferenças são um estudo mais aprofundado das Semelhanças e da Estatística e a omissão das Probabilidades. Esses conteúdos estão distribuídos por treze unidades da seguinte forma:

UNIDADE 1 - O conjunto dos números racionais.
UNIDADE 2 - Polinómios. Equações do 1º grau.
UNIDADE 3 - Aplicações. Gráficos.
UNIDADE 4 - Elementos de geometria.
UNIDADE 5 - O conjunto dos números reais. Enquadramentos. Valores aproximados.
UNIDADE 6 - Polinómios. Equações do 1º grau. Inequações do 1º grau.
UNIDADE 7 - Isometrias.
UNIDADE 8 - Sistemas de duas equações do 1º grau com

duas incógnitas. Sistemas de duas inequações do 1º grau com uma incógnita.

UNIDADE 9 - Elementos de estatística.

UNIDADE 10 - O conjunto dos números reais. Radicais quadráticos.

UNIDADE 11 - Semelhanças. Trigonometria.

UNIDADE 12 - Polinómios. Equações do 2º grau. Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Sistemas de duas inequações do 1º grau com duas incógnitas.

UNIDADE 13 - Geometria no espaço. Posições relativas de rectas e planos. Áreas e volumes de sólidos geométricos.

• **SECUNDÁRIO**

O programa [*PS*] é constituído por doze unidades organizadas em três temas designados por A, B e C.

Em cada tema as unidades são identificadas pela letra que corresponde ao tema, seguida de um número que estabelece a ordem de aprendizagem das unidades.

Constituição dos temas:

Tema A

A1 Os Números Reais
A2 Funções Lineares e Quadráticas
A3 Funções Polinomiais e Racionais
A4 Sucessões
A5 Trigonometria e Funções Trigonométricas
A6 Limites de Funções, Continuidade e Derivadas
A7 Funções Exponenciais e Logarítmicas
A8 Funções Trigonométricas

Tema B

B1 Estatística
B2 Probabilidades e Cálculo Combinatório

Tema C

C1 Geometria no Plano
C2 Geometria no Espaço

De acordo com esta organização, para cada tema, o aluno deve seguir obrigatoriamente a ordem numérica das unidades, podendo realizar os temas B e C quando quiser a partir das indicações do esquema de roteiro:

A1
↓
A2
↓
A3 B1
| ←
↓ ↓
A4 B2
↓ ←
A5
|
C1 ↓
→ A6
↓ ↓
C2 A7
→ ↓
A8

As saídas do tema A podem ser feitas em qualquer momento a partir daquele que está indicado no esquema.

As setas horizontais indicam que se pode retornar ao tema A no ponto em que foi interrompido.

Os conteúdos programáticos são semelhantes aos que constam nos programas dos cursos diurnos, mas há algumas discrepâncias entre as quais se destaca o facto de os *números complexos* e a *probabilidade condicionada* nunca terem sido leccionados até ao presente ano lectivo porque não faziam parte de qualquer das unidades. Isto gerava graves injustiças quando os alunos do recorrente pretendiam ingressar no Ensino Superior já que tinham de fazer o mesmo exame que os alunos dos cursos diurnos. A título de exemplo, um aluno do Ensino Recorrente que tivesse feito o exame da 2ª fase de 2004, estaria à partida "penalizado" em 40 pontos, correspondentes a assuntos que não tinha estudado no seu curso. No entanto, em Agosto de 2004 foram dadas indicações no sentido de, em cada escola, os professores do 1º grupo tentarem alterar os programas do Secundário Recorrente, aproximando-os do ensino regular (Ofício-Circular nº 26/DSEE/ES/2004). Como? Cada Escola terá articulado esta alteração como entendeu ser melhor e há escolas onde nada foi alterado!!!

Quanto à unidade A1, que não tinha correspondência directa com os programas dos cursos diurnos, pode agora desempenhar o papel do actual módulo inicial dos programas de Matemática A e B.

Também é curioso constatar que nos cursos de carácter geral do Ensino Secundário Recorrente (correspondentes aos CSPOPE do ensino regular), é perfeitamente possível concluir um curso de "Ciências" sem ter a disciplina de Matemática.

Relativamente às novas tecnologias, embora o programa refira a importância do seu uso e dê mesmo orientações para a sua utilização, verifica-se que ainda não são parte integrante da prática lectiva da maior parte dos professores.

• **MODOS DE AVALIAÇÃO**

Neste sistema de ensino há dois tipos de alunos:

PRESENCIAIS – com obrigatoriedade de assistir às aulas e sujeitos por isso ao regime de faltas.

NÃO PRESENCIAIS – sem obrigatoriedade de assistir às aulas, tendo no entanto à disposição apoios semanais nalgumas disciplinas.

Para os alunos presenciais, a avaliação é feita, numa escala de 0 a 20 e por unidade capitalizável, em três vertentes:

- Avaliação contínua
- Trabalhos desenvolvidos extra-aulas
- Exames

Cabe ao professor em cada situação, optar por uma ou por uma combinação entre elas (devendo sempre haver um suporte escrito), embora o "clássico exame" seja de facto o mais utilizado.

Para os alunos não presenciais há três épocas de exames por ano lectivo (Janeiro, Abril e Junho) durante as quais podem realizar os exames das unidades que previamente requererem; um exame pode abranger mais do que uma unidade.

3. Dificuldades Encontradas e Estratégias

A filosofia do sistema de ensino por unidades capitalizáveis pressupõe que os alunos sejam capazes de desenvolver autonomamente o seu estudo, deixando mais ao professor o papel de orientador. Deste modo, é possível aos alunos que não possam ser assíduos, por razões de ordem profissional ou outras, progredir ao seu próprio ritmo.

Mas quando os alunos se revelam incapazes de progredir sem a intervenção permanente do professor surgem os problemas da gestão do trabalho na sala de aula. O professor pode ter na mesma sala vários alunos de unidades diferentes, e mesmo dentro da mesma unidade alunos que progridem a ritmos diferentes.

Muitas têm sido as estratégias utilizadas pelos professores ao longo deste percurso para tentar superar esta grande dificuldade (talvez a maior em todo o processo), pois a formação de professores neste âmbito ficou muito aquém das necessidades. Há professores que logo no início do ano estabelecem um calendário de exames das unidades que têm a seu cargo e tentam que os alunos das diferentes unidades se adaptem a essa calendarização leccionando os conteúdos programáticos como se todos os alunos estivessem ao mesmo nível; há outros que subdividem a turma em tantos grupos quantas as unidades e vão dedicando uma parte do tempo de cada aula a cada grupo tentando que a progressão dos alunos que constituem cada um dos grupos seja a mesma; outros há, que tentando não se afastar muito da filosofia deste tipo de ensino, se vão desmultiplicando aula a aula num acompanhamento quase individualizado dos alunos de acordo com as suas capacidades, interesse e ritmo de trabalho; há ainda alunos que tendo condições para fazer um estudo mais autónomo extra aulas, prescindem dum acompanhamento permanente do professor e solicitam mais uma orientação do estudo, esclarecimento de dúvidas e realização dos respectivos exames.

Também os manuais adoptados, quando existem, não têm contribuído para superar estas dificuldades, pois não foram concebidos à luz da filosofia deste sistema de ensino de modo a facilitar uma aprendizagem consistente mas mais autónoma.

Relativamente ao Ensino Básico, o Ministério da Educação editou os chamados guias de aprendizagem [*GAB*] que são uma espécie de "sebenta" onde as matérias são abordadas aparentemente da forma mais resumida que aos autores foi possível fazer sem que a qualidade ou até mesmo a estética tenha sido a sua preocupação central. Foram também editados, pela Texto Editora, manuais [*AGB*] que curiosamente são a cópia integral (mas mesmo integral) dos guias de aprendizagem apenas com a forma de livros que contêm varias unidades agrupadas. Há também outros como, por exemplo, [*NFB*], editados pela Porto Editora, que sendo de melhor qualidade e com uma apresentação mais agradável estão longe de responder às necessidades destes alunos.

Quanto ao Ensino Secundário a situação é ainda mais caótica:

- Os guias de aprendizagem [*GAS*] editados pelo Ministério da Educação não estão disponíveis para todas as unidades que constituem o programa em vigor, não se sabe se pelo reconhecimento generalizado da sua falta de qualidade ou se por outra razão qualquer;
- A Porto Editora também só editou manuais [*NFS*] relativos a algumas unidades;
- Resta a cada professor, na sua sempre infinita boa vontade, preparar o melhor que pode e sabe, os materiais de apoio ao estudo dos alunos.

4. O futuro - módulos ?

E passados quase 20 anos, quando já se estão a dar os primeiros passos duma nova reforma do Ensino Recorrente de Adultos, verifica-se que mais uma vez ela se vai implementando sem um currículo adequado às especificidades dos alunos adultos e completamente à margem dos verdadeiros intervenientes neste sistema de ensino. É o chamado Sistema por Módulos (portaria nº 550-E/2004, de 21 de Maio) que entrou em vigor no ano lectivo de 2004/05, apenas para o Ensino Secundário, para o qual foi adoptado o programa dos cursos diurnos.

A má qualidade e, em muitos casos, a completa inexistência de manuais adaptados aos programas em vigor no Sistema de Ensino por Unidades Capitalizáveis foi agora substituída pelos manuais adoptados para o Ensino Secundário diurno. A autogestão dos ritmos de aprendizagem que muitas vezes se traduzia em anarquia ou mesmo abandono para os alunos pouco organizados ou menos motivados, foi agora substituída por uma densa mancha horária (de segunda a sexta, das 19 às 24 h), com presença obrigatória, aulas onde cada professor lecciona os conteúdos programáticos repartidos por 3 módulos (um por período lectivo), que poucos alunos têm capacidade de acompanhar.

Neste primeiro ano de experiência já se verificou que, embora os programas e os manuais sejam agora exactamente iguais aos dos cursos diurnos, nestes cursos os conteúdos programáticos que constituem o 1º módulo estão a ser leccionados em mais horas do que as disponíveis para os cursos nocturnos uma vez que aqui não se pode ultrapassar o primeiro período. Parece ter sido esquecido que a extensão do segundo e terceiro períodos varia consideravelmente de ano para ano por causa da Páscoa.

Já se verificou também que em turmas com uma composição média de 20 alunos, apenas três a quatro conseguiram aprovação no 1º módulo (os restantes poderão frequentar o 2º módulo e, simultaneamente tentar aprovação no 1º, nos exames que ao longo do ano se realizarem para os alunos não presenciais). No entanto, não será provável que estudantes trabalhadores que lutam com enormes dificuldades de tempo e têm em geral uma deficiente preparação básica em Matemática consigam acompanhar com sucesso o 2º módulo em sobreposição com uma nova tentativa de obter aprovação no 1º.

Será talvez necessário lembrar aos responsáveis o velho ditado popular "no meio é que está a virtude..."

Assim parece longínqua a realidade de assegurar para estes alunos uma escolaridade de verdadeira segunda oportunidade - um dos objectivos gerais da educação recorrente.

5. Referências

[AGB] Augusto, I. N. e Gaspar, M. H. (1994), Matemática – Ensino Básico Recorrente – 3º Ciclo, Lisboa, Texto Editora, Lda.

[GAB] Augusto, I. N. e Gaspar, M. H.(1991), Matemática – Guia de Aprendizagem - Ensino Recorrente por Unidades Capitalizáveis, Lisboa, Ministério da Educação.

[GAS] Departamento do Ensino Secundário (1996), Matemática – Guia de Aprendizagem - Ensino Secundário Recorrente, Lisboa, Ministério da Educação.

[NFB] Neves, M. A. F. e Fernandes, J. A. (1994), Matemática 3º ciclo – Ensino Recorrente, Porto, Porto Editora.

[NFS] Neves, M. A. F. e Fernandes, J. A. (1996), Matemática-Ensino Secundário Recorrente, Porto, Porto Editora.

[PS] Departamento do Ensino Secundário (1996), Matemática – Programa do Ensino Secundário Recorrente, Lisboa, Ministério da Educação.

[PB] Direcção Geral de Extensão Educativa (1991), Matemática – Programa do 3º Ciclo do Ensino Recorrente por Unidades Capitalizáveis, Lisboa, Ministério da Educação.

Bartoon

Luís Afonso, Público, 29-05-2006
(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)

Visualização de construções geométricas

Pedro Quaresma e Ana Pereira
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

1 Introdução

No âmbito dos Estágios Pedagógicos da Licenciatura em Matemática, Ramo Educacional, do Departamento de Matemática da F.C.T.U.C. foi proposto como trabalho científico a formalização dos resultados geométricos apresentados, em geral sem demonstração, no 3º ciclo[1]. No decurso desse trabalho foi identificada a necessidade de uma ferramenta computacional capaz de, a um tempo visualizar as diferentes construções geométricas, e por outro lado permitir a inclusão dessas construções num dado texto matemático, sejam notas de apoio, testes de avaliação, ou um outro qualquer texto que verse a Geometria Euclidiana. Note-se que, no que diz respeito ao processamento de textos, aponta-se para a utilização do processador LaTeX [1,4][2].

A ferramenta encontrada foi o programa `eukleides` [2,3] que, embora desenvolvido num ambiente *Linux/X-windows*, está também disponível no ambiente *MS-Windows*. Como se verá de seguida esta ferramenta permite responder às necessidades acima referidas e até ultrapassá-las. Com este programa é possível:

- descrever uma construção geométrica através de elementos construtivos básicos - *linguagem* `eukleides`;
- transformar as descrições em comandos legíveis pelo LaTeX - *conversor* `eukleides`;
- editar e visualizar as descrições. Podem-se acrescentar elementos interactivos nas construções geométricas - *editor/interpretador/visualizador* `xeukleides`.

Como se pode ver por esta lista, além das tarefas que tinham sido identificadas, e que foram resolvidas, acrescenta-se ainda a possibilidade de criar construções geométricas com um certo grau de interacção, o que, como se verá mais à frente, permite ilustrar algumas das demonstrações de resultados geométricos.

No seguimento apresentam-se alguns dos aspectos do *Sistema* `eukleides`.

2 O Sistema `eukleides`

Aquilo que se convencionou chamar o *Sistema* `eukleides` pode ser dividido em três componentes: uma linguagem de especificação para a descrição de figuras em Geometria Euclidiana, e dois programas capazes de interpretarem essa mesma linguagem: `eukleides`, o conversor para o formato LaTeX + pstricks; `xeukleides`, um editor e visualizador. De seguida descreve-se cada uma destas facetas do sistema `eukleides`.

2.1 A Linguagem

A linguagem de especificação `eukleides` utiliza os

[1] Ana Pereira, Demonstrações Geométricas, Primeiro Trabalho Científico, Estágio Pedagógico, Licenciatura em Matemática - Ramo Educacional, F.C.T.U.C., 2004.
[2] GUTpt, Grupo de utilizadores de (La)TeX Portugal, http://gentzen.mat.uc.pt/~gutpt, TUG, TeX User Group, http://www.tug.org.

construtores básicos da Geometria Euclidiana para especificar as figuras, por exemplo:

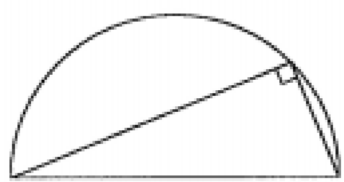


Figura 1: Teorema de Tales[3]

foi produzido a partir dos seguintes comandos:

```
A=ponto(0,0); B=ponto(6,0)
c=círculo(A,B)
C=ponto(c,45:)
desenhar(c,0:,180:)
desenhar(A,B,C)
marca(A,C,B,recto)
```

Quais são então os construtores da linguagem `eukleides`? A resposta a esta pergunta é dada pelo manual que acompanha o programa [2,3]. No texto que se segue dá-se somente uma descrição breve dos vários construtores existentes, os quais se agrupam nos três tipos genéricos seguintes:

Tipos Numéricos

Números reais e ângulos em graus. Estão disponíveis os habituais operadores aritméticos, assim como as funções pré-definidas usualmente disponíveis em linguagens de programação.

Medidas Geométricas

Está disponível um conjunto extenso de funções de informação numérica sobre os vários objectos geométricos. Por exemplo dado um ponto A, tem-se que abcissa(A) é o valor da abcissa de A no referencial ortonormado definido.

Construtores Geométricos

Conjunto extenso de construtores através dos quais se definem os vários objectos que depois se pode decidir «desenhar». Os elementos básicos que se podem especificar são: vectores; pontos; linhas rectas; segmentos de recta; círculos; cónicas; triângulos; polígonos.

Eis um outro exemplo:

```
caixa(-3,-1,9,14)
A B C D quadrado(6)
C E F G quadrado(3*sqrt(3),60:)
D G H I quadrado(3,60:)
J = projecção(G,linha(A,B))
desenhar(A,B,C,D)
desenhar(C,E,F,G)
desenhar(D,G,H,I)
desenhar(segmento(G,J),tracejado)
desenhar(segmento(G,A),ponteado)
desenhar(segmento(G,B),ponteado)
desenhar(segmento(D,E),ponteado)
desenhar(segmento(C,I),ponteado)
marca(C,G,D,recto)
marca(B,J,G,recto)
```

são os comandos necessários para se obter a figura 2.

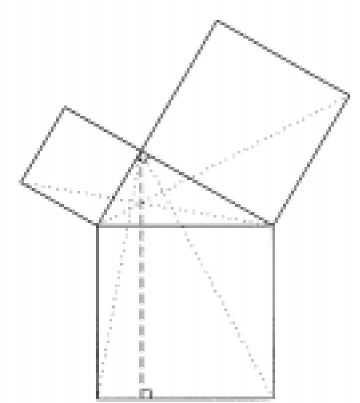


Figura 2: Teorema de Pitágoras

2.2 O Conversor `eukleides`

O programa `eukleides` funciona como um compilador capaz de reconhecer textos na linguagem eukleides e os traduzir para a linguagem do sistema LaTeX+pstricks. A sua utilização é muito simples bastando na linha de comando («bash», «msdos», ou outra) escrever o comando (aplicado à figura anterior):

```
eukleides pitagoras.euk > pitagoras.tex
```

[3] Existem dois teoremas que recebem o mesmo nome de Teorema de Tales. O outro resultado estabelece que sempre que um feixe de rectas paralelas for cortado por duas ou mais transversais, todos os segmentos formados nessas transversais serão proporcionais.

para se obter o ficheiro «`pitagoras.tex`» contendo os comandos LaTeX+pstricks necessários para a criação da figura especificada em «`eukleides.euk`».

De seguida basta[4] incluir o ficheiro «`pitagoras.tex`» no local onde queremos ver inserida a figura.

2.3 O Visualizador `xeukleides`

O `xeukleides` é, a um só tempo, um editor, um interpretador e um visualizador, sendo que nesta última função acrescenta a possibilidade de construir figuras interactivas. Tendo tudo isto em conta não é de estranhar que, de certa forma, esta componente seja a mais utilizada pelo utilizador.

A interface simples mas muito eficaz do `xeukleides` permite ao utilizador criar as figuras geométricas que deseja com muita facilidade e rapidez (figuras 3 e 4).

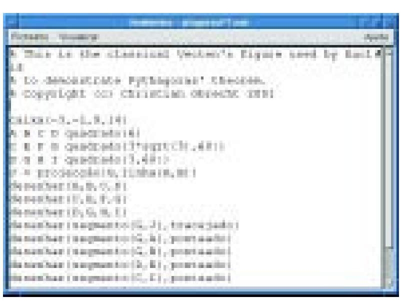


Figura 3: `xeukleides`, modo de edição

O menu «Visualizar» permite passar do modo de edição para o modo de visualização, momento em que o interpretador é chamado a intervir e, caso haja erros, é dada a indicação da linha onde ocorreu o primeiro erro. Caso não haja nenhum erro é então visualizada a figura.

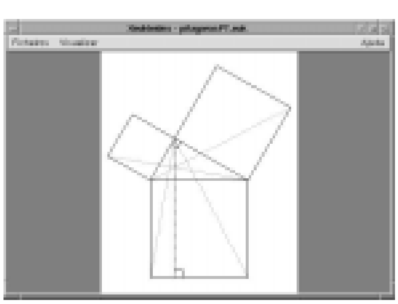


Figura 4: `xeukleides`, modo de visualização

Como já foi dito o `xeukleides` permite definir figuras interactivas, isto é, figuras em que um dos seus elementos (em geral um ponto) se pode movimentar de acordo com os comandos do utilizador na altura da visualização. Recuperando o exemplo referente ao Teorema de Tales pode-se construir a figura 5 através da seguinte especificação:

```
A=ponto(0,0);
B=ponto(6,0)
c=círculo(A,B)
x interactivo(45,-2,0,180,"C",direita)
C=ponto(c,x:)
desenhar(c,0:,180:)
desenhar(A,B,C)
marca(A,C,B,recto)
```

o ponto x de um valor inicial de 45 vai poder tomar todos os valores de 0 a 180 com saltos de 2, sendo que o seu movimento vai-se processar na «horizontal», a movimentação é possível após o pressionar da tecla «C» pelo utilizador.

Tentando, com uma série de imagens, ilustrar o movimento do ponto C definido à custa da entidade variável x, partindo do ponto inicial e movimentando o ponto para a esquerda através da tecla correspondente ter-se-ia algo como:

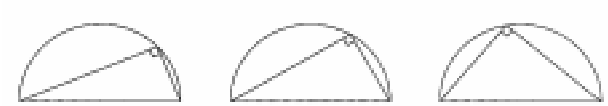


Figura 5: Teorema de Tales - movimentação

3 O `eukleides` na Sala de Aula

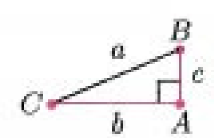
A possibilidade de utilização deste sistema num ambiente de ensino advém da facilidade da sua utilização, assim como das suas capacidades de visualização de construções da Geometria Euclidiana. A título de ilustração dessas

[4] É necessário que o texto onde é feita a inserção contenha, no preâmbulo, o comando \include{pstricks}.

capacidades vamos de seguida apresentar um esboço da demonstração do Teorema de Pitágoras no qual o `eukleides` joga o seu papel.

3.1 Demonstração do Teorema de Pitágoras

Teorema 1 (Teorema de Pitágoras) *Se ΔABC for um triângulo rectângulo de hipotenusa $\overline{BC}$*

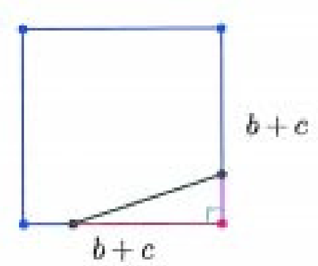


então $a^2=b^2+c^2$.

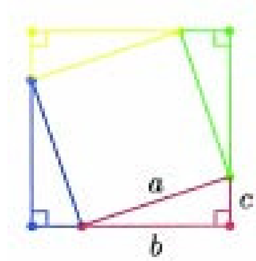
Na demonstração deste resultado o `eukleides` pode ser usado como um auxiliar precioso na visualização dos diferentes passos a dar até à conclusão que se pretende obter.

Demonstração

Dado o triângulo acima referido, considere-se um quadrado de lado $b+c$



de seguida divide-se o quadrado em quatro cópias do triângulo dado e num quadrado cujo lado é igual a a, a hipotenusa do triângulo.



Calculando a área do quadrado de dois modos diferentes têm-se:

$$Q=(b+c)^2 \qquad \text{e} \qquad Q=4(\frac{1}{2}bc)+a^2$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (b+c)^2 &= 4(\frac{1}{2}bc)+a^2 \\ b^2+2bc+c^2 &= 2bc+a^2 \\ b^2+c^2 &= a^2 \end{aligned}$$

c.q.d.

Acresce dizer que numa utilização/apresentação utilizando um computador poder-se-ia acrescentar interacção, fazendo mover os pontos que definem o triângulo, ilustrando deste modo a generalidade do resultado para um qualquer triângulo rectângulo.

4 Conclusões

O sistema `eukleides` é um sistema de fácil utilização, mas poderoso nas suas capacidades. A sua ligação com o sistema LaTeX dá-nos a possibilidade de facilmente incluir figuras geométricas em textos matemáticos em que a qualidade tipográfica está fora de questão. Por todas as razões expostas ao longo do texto julgamos que este é um sistema que merece uma «vista de olhos» [2,3] por parte de todos os leitores da *Gazeta de Matemática*.

Referências

[1] Leslie Lamport. LaTeX: A Document Preparation System. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 2nd edition, 1994.

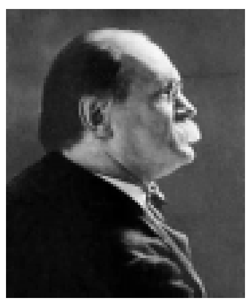
[2] Christiam Obrecht. Eukleides. http://perso.wanadoo.fr/obrecht/.

[3] Pedro Quaresma. EukleidesPT. http://gentzen.mat.uc.pt/~eukleides.

[4] Pedro Quaresma. Introdução ao LaTeX. Escolar Editora, 1996.

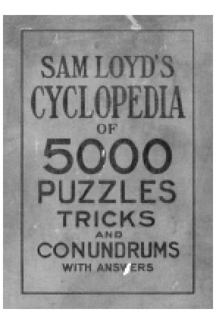
O que vem à rede...

Os fantásticos "Quebra-Cabeças" de Sam Loyd



Sam Loyd (1841-1911)

Samuel Loyd, nascido em Janeiro de 1841, em Filadélfia, nos Estados Unidos da América, foi um incansável inventor de quebra-cabeças de cariz matemático, sem dúvida um dos mais criativos de sempre, rivalizando apenas (e de facto) com o britânico Henry Ernest Dudeney (1857-1931). Em 1914, três anos após a sua morte, que ocorreu em Abril de 1911, o seu filho, Samuel Loyd Jr., publicou uma enorme colecção de problemas e puzzles concebidos pelo seu pai, numa obra intitulada *Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums*. Esta obra está integralmente disponível na internet, em:



http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_ 01_03_05.html

Esta página contêm ainda uma série de "links" interessantes para várias outras páginas que vale a pena visitar, contendo biografias de Sam Loyd assim como "applets" com alguns dos seus puzzles que envolvem alguma manipulação.

Um dos mais originais e intrigantes quebra-cabeças inventados por Sam Loyd é o *"Get off the earth puzzle"*. Consiste num disco representando a Terra e num anel concêntrico com esse disco, contendo desenhos de figuras representando guerreiros chineses. Em http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbgetoffearth.htm estão disponíveis estas duas peças, que deverão ser coladas em cartão e montadas de modo a que o anel rode em torno do disco (será talvez mais fácil fazer o contrário: fixar o anel e permitir que o disco rode). Numa certa posição podem-se contar 13 guerreiros chineses.

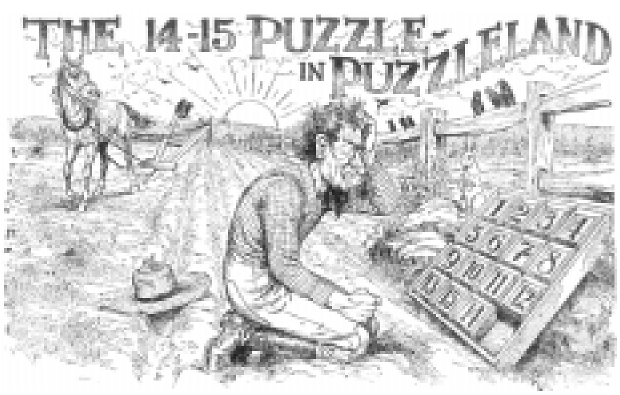
Rodando numa das direcções de modo a que cada guerreiro passe a ocupar a posição do seguinte, há um que desaparece. O efeito é absolutamente desconcertante! Não é nada fácil explicar, de um modo claro e preciso, a razão de tal desaparecimento!

Uma variação deste quebra-cabeças é *"o duende desaparecido"*. Ver:

http://britton.disted.camosun.bc.ca/jblep1.htm

Uma curiosa versão animada pode ser vista em:
http://www.debreuil.com/ddw/puzjava/picmove.htm

Um puzzle bem conhecido cuja invenção é atribuída a Sam Loyd, embora hajam algumas dúvidas sobre a sua autoria, é o famoso "puzzle dos 15". Ver a seguinte página, que faz parte do excelente "site" de Alexander Bogomolny *"Cut-the-Knot"*:
http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/fteen.shtml

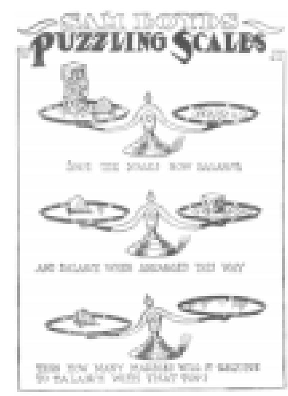


Sam Loyd gostava de adornar os seus puzzles com pequenas histórias, usando de algum humor e fantasia. Em particular, publicou em 1903 um livro intitulado *O Oitavo Livro de Tan*, onde coloca cerca de 700 puzzles usando as figuras do Tangram, não sem antes contar uma história, inteiramente fictícia, sobre a origem do próprio Tangram. Apesar de ser absolutamente claro que se trata de uma brincadeira, a afirmação feita por Loyd de que o Tangram tem mais de 4000 anos pode ainda hoje ser lida como certa em alguns livros e artigos sobre este assunto (para o que deve ter contribuído o facto desta obra ser relativamente rara, e a disseminação de boatos ser umas das actividades favoritas dos seres humanos...). De facto não é conhecida nenhuma menção ao Tangram que seja anterior ao século XIX.

Um Tangram virtual, com alguns problemas, está disponível no "site" do Atractor, em:
http://www.atractor.pt/mat/numeros/quadrados/TanApp/index.html

A terminar, aproveito para colocar três dos meus problemas favoritos de Sam Loyd. No primeiro, o objectivo é descobrir quantos berlindes equilibram um pião, sabendo que 12 berlindes equilibram 3 cubos e um pião, e que um cubo e 8 berlindes equilibram um pião.

É um problema relativamente simples, e que pode ser usado para explicar, no ensino básico, algumas das ideias por detrás das manipulações algébricas elementares[1].



Qual o peso do pião, em berlindes?

O segundo problema requer algum esforço de interpretação:

As idades combinadas da Maria e da Ana totalizam 44 anos, e a Maria tem o dobro da idade que a Ana tinha quando a Maria tinha metade da idade que a Ana terá quando a Ana tiver três vezes a idade que a Maria tinha quando esta tinha três vezes a idade da Ana.

Qual a idade da Maria?

E, finalmente, deixo o leitor com o seguinte desafio de Sam Loyd:

Colocar a dama no tabuleiro de xadrez e passar com ela por todos os quadrados do tabuleiro, regressando no fim à casa inicial, em apenas 14 lances.

1 É interessante notar que, no século XVI, Pedro Nunes começa o seu *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* com as seguintes palavras: "En esta Arte de Algebra el fin que se pretende, es manifestar la quantidad ignota. El medio de que vsamos para alcançar este fin, es ygualdad. Las principales quãtidades a q por discursos demõstratiuos procuramos esta ygualdad, dandoles o quitandoles quanto cõuiene, como quien pone en balança, son tres: Numero, Cosa, Censo.

Somas de números naturais consecutivos

António Pereira Rosa
Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho, Lisboa

1. Introdução

O objectivo deste trabalho é abordar o problema da representação de números naturais por meio de somas de dois ou mais números naturais consecutivos. Estuda-se a possibilidade e a unicidade de uma tal representação e descrevem-se algoritmos para a obter; veremos ainda uma caracterização menos conhecida dos números primos ímpares. Utilizam-se apenas ferramentas matemáticas muito simples, como algumas propriedades das progressões aritméticas e propriedades elementares de divisibilidade em *IN*[1].

2. O problema da representação

É óbvio que há números naturais que não podem ser escritos como soma de naturais consecutivos, como 2 e 4. Por outro lado, é claro que qualquer número *ímpar* maior que 1 pode ser escrito nesta forma: se n é ímpar, $n = C\left(\frac{n}{2}\right) + \left[C\left(\frac{n}{2}\right) + 1\right]$, sendo $C(n)$ a característica de n. Esta representação como soma de duas parcelas é única (um exercício simples, que se pode propor aos alunos) e, evidentemente, é impossível para números pares[2].

No que se segue, vão ser utilizados os chamados números triangulares 1, 3, 6, 10, 15, 21,... que são definidos por $T_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. É óbvio que todos estes números, à excepção de 1, admitem uma representação do tipo que estamos a considerar. Por exemplo, $T_5 = 15 = 1+2+3+4+5 = 7+8$; estas igualdades mostram que a representação não é, em geral, única.

O resultado principal é o seguinte:

Teorema 1
Um número natural pode ser escrito como uma soma de números naturais consecutivos se e só se não for uma potência de 2.

Demonstração
Seja N um número natural que não é potência de 2; então, ele pode ser escrito na forma $N = 2^k(2m+1)$, sendo 2^k a maior potência de 2 que divide N e $2m+1$ o maior factor ímpar de N. Tem-se obviamente que $m \geq 1$ e $k \geq 0$. Consideremos agora a soma

$$\left(2^k - m\right) + \left(2^k - m + 1\right) + \ldots + \left(2^k - m + 2m - 1\right) + \left(2^k - m + 2m\right) (1).$$

Trata-se da soma de termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 1, pelo que o seu valor é

[1] assim, o conteúdo deste trabalho é acessível, pelo menos em parte, a alunos do 11º ano (Matemática A) e pode ser aproveitado no estudo do Tema III (Sucessões Reais) dessa disciplina. Temos mais dúvidas quanto à sua utilidade para alunos de Matemática B; em todo o caso, a sua apresentação terá de ser adiada para o Tema II do 12º ano.

[2] para evitar trivialidades, só consideraremos somas com duas ou mais parcelas; a generalidade dos alunos considera absurdas somas com uma só parcela.

$$\frac{(2m+1)\left(2^k-m+2^k-m+2m\right)}{2}=2^k(2m+1)=N\,.$$

Se alguns dos números inteiros que aparecem na soma (1) forem negativos, eles anulam-se com os primeiros números naturais que aparecem na expressão, sobrando sempre pelo menos as duas últimas parcelas. Com efeito, se ficasse apenas a última, resultaria que $2^k+m=N=2^k(2m+1)$ donde $k=-1$, o que é absurdo. Podemos assim escrever o número N na forma de uma soma de números naturais consecutivos.

Reciprocamente, se uma potência 2^k pudesse ser escrita como soma de m números naturais consecutivos, ter-se-ia $2^k=n+(n+1)+\ldots+(n+m-2)+(n+m-1)$, para um certo natural n. Viria então

$$\begin{aligned}2^{k+1}&=2\Big(n+(n+1)+\ldots+(n+m-2)+(n+m-1)\Big)=\\&=m(n+n+m-1)=m(2n+m-1)\end{aligned}.$$

Ora a diferença dos dois factores $2n+m-1$ e m é o número ímpar $2n-1$, pelo que um deles deve ser ímpar; como são ambos diferentes de 1 ($m>1$ e $n>0$, por hipótese, o que mostra logo que $2n+m-1\neq 1$), segue-se que 2^{k+1} tem um factor ímpar maior que 1, o que é absurdo.

É de observar que este teorema proporciona um método para obter uma representação do tipo em análise. Por exemplo, se $N=100=2^2(2\times 12+1)$ vem, usando as notações anteriores, $k=2$ e $m=12$, donde:

$$\begin{aligned}100&=\left(2^2-12\right)+\left(2^2-11\right)+\ldots+(-1)+0+1+\\&\quad+\ldots+\left(2^2+4\right)+\left(2^2+5\right)+\ldots+\left(2^2+12\right)=\\&=\cancel{-8}+\cancel{(-7)}+\ldots+\cancel{(-1)}+\cancel{0}+\cancel{1}+\ldots+\cancel{8}+9+\\&\quad+10+11+12+13+14+15+16=\\&=9+10+11+12+13+14+15+16.\end{aligned}$$

O método é, frequentemente, muito moroso (experimente-se $N = 1000$...) mas torna-se bastante mais prático se repararmos que estamos a somar números inteiros consecutivos desde 2^k-m até 2^k+m; se o primeiro for positivo, o resultado é imediato, a soma vai de 2^k-m até 2^k+m; se for negativo, a soma que nos interessa começará em $\left|2^k-m\right|+1$ e terminará em 2^k+m.

No exemplo anterior, $2^k-m=2^2-12=-8$, pelo que devemos começar em $\left|2^k-m\right|+1=|-8|+1=9$ e terminar em $2^k+m=2^2+12=16$. Vem assim que $100=9+10+11+12+13+14+15+16$, como anteriormente.

Exercício 1

Escreva 76 como soma de naturais consecutivos.

Exercício 2

Justifique que qualquer número natural que não seja uma potência de 2 é triangular ou é dado pela diferença de dois números triangulares; exemplifique com 76.

Observação 1

O teorema 1 pode ser provado recorrendo aos números triangulares. Para isso, basta estudar a equação diofantina $T_x-T_y=N$, sendo N o número a representar. A demonstração é, no entanto, mais extensa e difícil que a apresentada.

Exercício 3

Escreva um programa de computador que, dado um natural N, apresente uma representação como soma de naturais consecutivos (ou que indique que tal representação é impossível).

Apresentamos em seguida um processo diferente para resolver o problema desta representação, recorrendo a um exemplo detalhado.

Exemplo 1

Escrever 105 como soma de naturais consecutivos.

Pretendemos determinar os naturais m e k de modo que $105 = m+(m+1)+\ldots+(m+k)$.

Pela fórmula que permite calcular a soma de termos consecutivos numa progressão aritmética, vem

$$\frac{m+(m+k)}{2}\left((m+k)-m+1\right)=105$$

ou ainda

$$(2m+k)(k+1)=210 \qquad (2)$$

Parece então razoável considerar os 16 divisores distintos de 210 (como $210=2^1\times 3^1\times 5^1\times 7^1$, 210 tem $(1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=16$ divisores; ver tabela no fim do exemplo), agrupados em pares cujo produto seja 210 e igualar cada um dos factores do primeiro membro de (2) aos dois elementos de cada par. Porém, um pouco de reflexão mostra que se está a fazer muito trabalho desnecessário: como $(2m+k)-(k+1)=2m-1$ é ímpar, um dos factores $2m+k$ e $k+1$ é ímpar e o outro é par. Além disso, é óbvio que $2m+k>k+1$. Assim, temos apenas de considerar os casos

$$\begin{cases}k+1=1\\2m+k=210\end{cases};\begin{cases}k+1=3\\2m+k=70\end{cases};\begin{cases}k+1=5\\2m+k=42\end{cases};\begin{cases}k+1=7\\2m+k=30\end{cases}$$

$$\begin{cases}2m+k=105\\k+1=2\end{cases};\begin{cases}2m+k=35\\k+1=6\end{cases};\begin{cases}2m+k=21\\k+1=10\end{cases};\begin{cases}2m+k=15\\k+1=14\end{cases}$$

que nos dão as soluções

$$\begin{cases}k=0\\m=105\end{cases};\begin{cases}k=2\\m=34\end{cases};\begin{cases}k=4\\m=19\end{cases};\begin{cases}k=6\\m=12\end{cases}$$

$$\begin{cases}k=1\\m=52\end{cases};\begin{cases}k=5\\m=15\end{cases};\begin{cases}k=9\\m=6\end{cases};\begin{cases}k=13\\m=1\end{cases}$$

Desprezando a primeira solução, obtém-se finalmente

$$\begin{aligned}105&=34+35+36\\&=19+20+21+22+23\\&=12+13+14+15+16+17+18\\&=52+53\\&=15+16+17+18+19+20\\&=6+7+8+9+10+11+12+13+14+15\\&=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14.\end{aligned}$$

A última solução exprime precisamente o facto de 105 ser um número triangular: $105=T_{14}$.

É de observar ainda que o número de soluções poderia ser previsto: na verdade, ao aplicarmos o método, as expressões $k+1$ e $2m+k$ "percorrem" sucessivamente os 8 divisores *ímpares* de 210; como devemos excluir a solução trivial $105=105$, segue-se que há $8-1=7$ soluções distintas.

Divisores de 210	
1	210
2	105
3	70
5	42
6	35
7	30
10	21
14	15

Tabela 1

Exercício 4
Escreva como soma de números naturais consecutivos os números 23, 25, 200, 400 e 1000, pelo processo do exemplo 1, começando por estimar em cada caso o número de soluções.

Exercício 5
Tente demonstrar o teorema 1 pelo processo sugerido no exemplo 1.

Exercício 6
Apresente um método para resolver (em números naturais, é claro) a equação de Pell *degenerada* $x^2-n^2y^2=\alpha$, onde n e α são números naturais dados; exemplifique com $x^2-4y^2=36$.

Exercício 7
Procure obter uma fórmula para estimar o número de parcelas da representação com maior número de parcelas de um número n dado.

3. Uma caracterização dos números primos ímpares

Ao resolver o exercício 4, o leitor terá talvez notado que o número primo *ímpar* 23 tem apenas uma representação, a saber $23=11+12$; como observámos anteriormente, todo o número ímpar maior que 1 admite uma representação deste tipo. Sucede que o problema das representações como soma de números naturais consecutivos leva a uma caracterização dos números primos ímpares. Tem-se, com efeito:

Teorema 2
Um número ímpar maior que 1 é primo se e só se não puder ser escrito como soma de três ou mais números naturais consecutivos.

Demonstração
Comecemos por supor que n é primo, com vista a provar que não pode ser escrito como soma de três ou mais números naturais consecutivos. Vamos provar o contra-recíproco: se n puder ser escrito como soma de três ou mais números naturais consecutivos, então n não é primo.

Seja $n=m+(m+1)+\ldots+(m+t-1)$, sendo m e t números naturais, com $t\geq 2$. Segue-se que $n=t\times m+\frac{t(t-1)}{2}$. Dois casos se podem dar:

(i) t é ímpar.
(ii) t é par.

No primeiro caso, é óbvio que $t-1$ é par e portanto $\frac{t-1}{2}$ é natural. Vem então que $n=t\left(m+\frac{t-1}{2}\right)$ o que mostra que n não é primo, pois tanto t como $m+\frac{t-1}{2}$ são números naturais maiores do que 1.

No segundo caso, escreva-se $t=2k$, sendo k um número natural maior que 1. Vem então que

$$n=2km+\frac{2k(2k-1)}{2}=k(2m+2k-1)$$

e, tal como anteriormente, n não é primo.

Para provar a implicação no outro sentido ("Se n não se pode escrever como soma de três ou mais números naturais consecutivos, então n é primo"), vamos de novo recorrer ao contra-recíproco, mostrando que se n for composto ímpar, então pode ser escrito como soma de três ou mais números naturais consecutivos.

Seja pois n um número composto ímpar; então pode escrever-se $n=q\times p$, com $q\geq p\geq 3$, p e q números naturais ímpares. Vejamos que n é soma de p números naturais consecutivos, o primeiro dos quais é $q-\frac{p-1}{2}$. Com efeito:

1. $p-1$ é par, logo $q-\frac{p-1}{2}$ é inteiro.
2. $q-\frac{p-1}{2}\geq 1$, pois como $q\geq p$, vem $2q>p$ donde se segue que $2q\geq p+1$ e que $2q-p+1\geq p+2>2$; portanto $q-\frac{p-1}{2}\geq 1$.

$$3\left(q-\frac{p-1}{2}\right)+\left(\left(q-\frac{p-1}{2}\right)+1\right)+\ldots+\left(\left(q-\frac{p-1}{2}\right)+p-1\right)=$$
$$=\frac{\left(q-\frac{p-1}{2}\right)+\left(\left(q-\frac{p-1}{2}\right)+p-1\right)}{2}\times p=q\times p=n,$$

o que conclui a prova.

4. Observações finais

Para terminar, e a título de curiosidade, vamos enunciar dois teoremas sobre representação de números naturais por meio de somas de números ímpares consecutivos.

Teorema 3

Qualquer número ímpar composto pode ser representado como soma de números ímpares consecutivos; tal representação é impossível para números primos.

Teorema 4

Um número par pode ser escrito como soma de números ímpares consecutivos se e só for divisível por 4.

As demonstrações são semelhantes às do Teorema 1 e podem ser vistas em [SCY].

Agradecimento

O autor agradece ao "referee" as sugestões apresentadas, que muito contribuíram para a melhoria do texto.

5. Referências

[BA] Beiler, A. H. (1964) - *Recreations in the Theory of Numbers*, New York, Dover Publications Inc.

[NZM] Niven, I. , Zuckerman, H. e Montgomery, H. (1991) - *An Introduction to the Theory of Numbers*, New York, John Wiley & Sons.

[Ol] Oliveira, G. N. (1981) - *Resolução de Equações em Números Inteiros*, Coimbra (notas de um curso integrado na Escola de Verão organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática).

[PA] Carvalho e Silva, J. (Coord.) et al. (s/d) - *Matemática A 11º ano*, Lisboa, Ministério da Educação-Departamento do Ensino Secundário (disponível em www.mat-no-sec-org).

[PB] Carvalho e Silva, J. (Coord.) et al. (s/d) - *Matemática B 12º ano*, Lisboa, Ministério da Educação-Departamento do Ensino Secundário (disponível em www.mat-no-sec-org).

[SCY] Shklarsky, D. O., Chentzov, N. N. e Yaglom, I.M. (1993) - *The USSR Olympiad Problem Book*, New York, Dover Publications Inc.

[WD] Wells, D. (1987) - *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, London, Penguin Books Ltd.

Pesagens contra falsários

Os problemas de pesagens são muito populares entre os entusiastas da Matemática Recreativa. Alguns podem ser muito divertidos, e nem sempre são fáceis.

Vejamos um clássico:

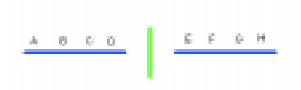
Material: 12 moedas aparentemente iguais das quais uma é falsa. A moeda falsa não pesa o mesmo que as outras, mas não se sabe se é mais leve ou mais pesada.

Problema: Com uma balança de pratos descobre qual é a falsa, e se é mais leve ou mais pesada que as outras, em três pesagens.

A balança que se utiliza nestes problemas é, se não houver indicação em contrário, uma balança de pratos, que indica somente qual a mais pesada de duas cargas.

Vamos dar os nomes A, B, C, D, E, F, G, H, I, J , K e L às moedas. Comecemos por pesar quatro em cada prato da balança, por exemplo A, B, C e D de um lado e E, F, G e H do outro.

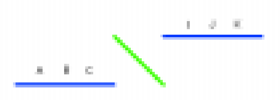
Caso 1. Se os pratos se equilibrarem então as moedas envolvidas nesta pesagem são todas verdadeiras.



Pesemos então A, B e C (que são verdadeiras) contra I, J e K.

Caso 1a. Se se equilibrarem, então a falsa é L. Uma pesagem de L contra uma verdadeira (por exemplo, A) diz-nos se a falsa é mais pesada ou mais leve.

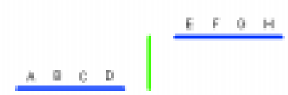
Caso 1b. Consideremos o caso em que o prato da esquerda é mais pesado (o desequilíbrio inverso seria tratado de forma semelhante):



Neste caso ficamos imediatamente a saber que a moeda falsa é uma das que se encontram no prato direito e que é mais leve do que as verdadeiras.

Uma última pesagem, I contra J, permite concluir qual é a falsa.

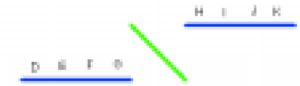
Caso 2. Se não equilibrarem, sem perda de generalidade vamos supor que o prato esquerdo é mais pesado.



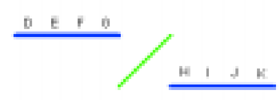
Vamos agora pesar D, E, F e G contra H, I, J e K.

Caso 2a. Se houver equilíbrio, então é porque a falsa é uma entre A, B e C e necessariamente mais pesada que as verdadeiras. Uma pesagem de A contra B esclarece completamente a situação.

Caso 2bi. Suponhamos que há desequilíbrio da forma ilustrada: Neste caso a falsa é D e é pesada, ou é H e é leve. Uma pesagem de D contra A esclarece completamente a situação.



Caso 2bii. Se o desequilíbrio for em sentido inverso:



Jorge Nuno Silva
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

Recreio

Então a falsa é uma entre E, F e G e é mais leve que as verdadeiras. Uma pesagem de E contra F esclarece completamente a situação.

Estes procedimentos podem ser indicados esquematicamente:

$$
\begin{array}{l}
ABCD = EFGH \left\{ \begin{array}{l}
ABC > IJK \left\{ \begin{array}{l} I < J \mapsto I \text{ leve} \\ I = J \mapsto K \text{ leve} \\ I > J \mapsto J \text{ leve} \end{array} \right. \\
ABC = IJK \left\{ \begin{array}{l} A < L \mapsto L \text{ pesada} \\ A > L \mapsto L \text{ leve} \end{array} \right. \\
ABC < IJK \left\{ \begin{array}{l} I < J \mapsto J \text{ pesada} \\ I = J \mapsto K \text{ pesada} \\ I > J \mapsto I \text{ pesada} \end{array} \right.
\end{array} \right. \\
ABCD > EFGH \left\{ \begin{array}{l}
DEFG < HIJK \left\{ \begin{array}{l} E < F \mapsto E \text{ leve} \\ E = F \mapsto G \text{ leve} \\ E > F \mapsto F \text{ leve} \end{array} \right. \\
DEFG = HIJK \left\{ \begin{array}{l} A < H \mapsto H \text{ pesada} \\ A = H \mapsto C \text{ pesada} \\ A > H \mapsto A \text{ pesada} \end{array} \right. \\
DEFG > HIJK \left\{ \begin{array}{l} D > A \mapsto D \text{ pesada} \\ D = A \mapsto H \text{ leve} \end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{array}
$$

Para manter os leitores ocupados até ao próximo número da *Gazeta*, aqui ficam quatro problemas desta família, da autoria de Dick Hess. As soluções, bem como outros *puzzles*, estão disponíveis em **http://ludicum.org.**

1. Material: 11 moedas (10 iguais, uma diferente das outras).
Problema: Usando duas pesagens com uma balança de pratos descobre se a falsa é mais leve ou mais pesada do que as outras.

2. Material: 5 moedas das quais se sabe que são todas verdadeiras (10g) ou há duas falsas. Se houver duas falsas uma é mais leve do que as verdadeiras (9g), a outra é mais pesada (11g).
Problema: Com três pesagens numa balança de pratos identifica a falsa leve (se existir) e a falsa pesada (se existir).

3. Material: 6 moedas das quais 2 são falsas. As falsas são ambas mais pesadas do que as verdadeiras, mas têm pesos diferentes.
Problema: Com três pesagens numa balança de pratos descobre as moedas falsas.

4. Material: 4 moedas das quais se sabe terem os pesos 4, 5, 6 e 7 gramas.
Problema: Com quatro pesagens numa balança de pratos descobre o peso de cada moeda.

Inquérito:
Avaliação dos professores

A Europa arrisca-se a perder a batalha da educação, diz um relatório da OCDE apresentado em Bruxelas em Março. A França e a Alemanha já não são líderes no que respeita ao saber e à ciência. Em Portugal, o Ministério da Educação diz que quer mudar… e, para isso, propõe-se alterar as condições de acesso à profissão de docente. Há pouco tempo, falou-se no estabelecimento de provas nacionais para candidatos a professores: para se ser professor seria necessário obter aprovação num exame de recrutamento, isto é, não bastaria a licenciatura adequada. A Gazeta de Matemática foi procurar opiniões sobre estes assuntos.

Questão 1: *Até aqui a colocação de professores baseava-se na classificação da licenciatura e nos anos de serviço. Que lhe parece a ideia de também contar, com um certo peso, a classificação obtida num exame especial de acesso?*
Questão 2: *E para efeitos de promoção na carreira? Concorda com a existência de provas de carácter científico e pedagógico?*
Questão 3: *Que importância atribui à preparação científica e actualização de um professor? Que incentivos existem para um professor se manter actualizado? Que incentivos deveriam existir?*
Questão 4: *Façamos um paralelo com a carreira de docente no Ensino Superior. Para se ascender é necessário prestar certas provas, para além da licenciatura, como o doutoramento e a agregação. Não deveria também a progressão na carreira docente no ensino secundário e no básico depender da aprovação em certas provas (devidamente adaptadas e não idênticas às do ensino superior)?*

Bruna Pereira, Estudante da Licenciatura em Matemática da Universidade Lusófona

Questão 1: A classificação obtida na licenciatura é, por vezes, um indicador algo enviesado da capacidade real de um licenciado. Algumas Faculdades e Universidades incitam, através da forma como conduzem o seu ensino, à simples mecanização e memorização, conseguindo os alunos que têm estas capacidades obter bons resultados.

Assim, julgo que um exame especial de acesso seria uma mais valia para evitar que estes licenciados ingressem, sobretudo no ensino, sem que estejam devidamente dotados das ferramentas e raciocínio lógico suficientes para o exercício da actividade docente. Obviamente que este teste devia testar, não a mecanização, mas sim o raciocínio lógico e dedutivo dos professores, pois este é indispensável para que a qualidade de ensino seja a desejável.

Mais ainda, penso que tal distorção poderia ser evitada se houvesse alguma forma de controlar objectivamente e com rigor a qualidade dos cursos universitários, e assim garantir que apenas ingressem no ensino as pessoas que têm capacidades reais para o efeito.

Quanto aos anos de serviço, por vezes revelam-se não uma mais valia mas sim um sinónimo de acomodação e desinteresse.

Questão 2: Parece-me natural e desejável que a qualidade dos docentes, não só quando ingressam no ensino, mas ao longo de toda a sua profissão, seja cultivada.

Os professores do ensino básico e secundário, a partir do momento em que entram para a profissão, não necessitam de mostrar quaisquer provas do seu valor nem de produzir resultados do seu, por vezes inexistente, trabalho contínuo.

Aliás, caso os professores queiram progredir na carreira precisam de adquirir créditos, mas a verdade é que até há bem pouco tempo, estes podiam ser adquiridos em cursos que nada tinham a ver com a sua área de origem (por exemplo: um professor de matemática podia ganhar créditos que lhe permitiam ascender profissionalmente num curso de pintura, ou fotografia), e actualmente apenas 50% dos créditos necessários à passagem de escalão precisam de ser na área respectiva.

Assim parece-me evidente que os professores tenham de prestar provas de carácter científico e pedagógico ao longo da sua carreira, podendo estas funcionar como um incentivo, motivando os professores na busca contínua do conhecimento.

Questão 3: A preparação científica e a actualização constante de um professor é de importância máxima para assegurar a qualidade que se exige e se espera. Ninguém pode formar jovens, entenda-se desenvolver raciocínio, se a sua própria formação não for sólida nem, tão pouco, lhe tiver proporcionado a construção e dedução de elementos lógicos. A falta de preparação de alguns professores é um dos principais motivos de desinteresse e estagnação dos bons alunos. Com isto pretendo expor as inúmeras situações em que alunos dotados de um raciocínio bastante desenvolvido e lógico são ignorados por professores que não os conseguem acompanhar.

Os incentivos para um professor se manter actualizado deveriam ser derivados da própria curiosidade intelectual e brio profissional, pois a actualização é indispensável para garantir a qualidade das aulas. Assim sendo, cada professor deve sentir que a actualização faz parte do seu trabalho de docente, e não apenas a exposição sistemática de matéria em aulas.

Em todo o caso, a haver incentivos julgo que os existentes (v.g. a ascensão na carreira e consequente aumento de remuneração) seriam suficientes. Penso que o mais importante dos incentivos seria a renovação da imagem da classe professoral que, manifestamente, tem sido bastante desprestigiada.

Questão 4: Como já referi, penso que as provas de estudo contínuo devem estar associadas à progressão na carreira dos professores de todos os níveis de ensino, sendo estas adequadas a cada um dos níveis.

Mais uma vez refiro que estas provas devem visar maioritariamente o raciocínio lógico e dedutivo dos professores, pois uma mera resolução de exercícios sobre as matérias que estes exploram com os seus alunos não é, na minha opinião, suficiente.

Luizete Dias, professora de Filosofia da Escola Secundária Poeta António Aleixo, Portimão

Questão 1: Antes de mais, o que se entende por um exame especial de acesso? Que competências se pretende avaliar? Quem será o responsável pela sua elaboração? Fazer um exame de carácter científico parece-me abusivamente ilegítimo porque coloca em causa as instituições universitárias que preparam os futuros professores.

Questão 2: Concordo. Aliás sempre fui defensora de que a progressão na carreira não devia ser feita nos moldes em que se processou até há pouco tempo. A recente medida do governo de obrigar os professores a fazerem créditos em 50% na área científica é de louvar. As provas de carácter científico e pedagógico poderiam ser a investigação de um tema e a criação de materiais à sua leccionação, sujeitos à discussão/avaliação por uma comissão científica e pedagógica específica da área. A sua divulgação em revistas da área também seria uma possibilidade.

Questão 3: A actualização de um professor é só o aspecto essencial da sua vida profissional. Costumo dizer repetidamente que um professor que não se actualiza perde qualidade ainda que disso possa não ter consciência. Os incentivos existentes parecem-me ser apenas o mestrado e o doutoramento com benefícios na progressão da carreira. Sendo de saudar, à excepção de uma nuance em relação ao doutoramento. Se este for na área científica o professor apenas progride 2 anos, enquanto que com um doutoramento na área pedagógica o benefício é de 6 anos! Quanto aos incentivos que deveriam existir, penso que poderiam passar por um maior benefício fiscal na aquisição de livros e, por outro lado, maior acesso à frequência de seminários em universidades.

Questão 4: A minha resposta vai no sentido da resposta à segunda questão. Os relatórios de progressão são um mero *pro forma*. A realização de trabalhos de investigação com efeitos na prática pedagógica é benéfica no crescimento do professor, cientificamente e pedagogicamente, e como tal esta seria uma forma de prestação de provas adequadas. Ficarmos por uma prova de papel e lápis poderá contribuir para uma visão enviesada do que se pretende com o ensino.

Maria Engrácia Gonçalves Fernandes, Escola Secundária de Carlos Amarante, Braga

Questão 1: Concordo plenamente que se faça um exame especial de acesso para ingressar na carreira docente, tal como se faz para ingressar noutras profissões (ordem dos engenheiros, ordem dos advogados, etc...).
Questão 2: Quanto à progressão na carreira, concordo mais com a existência de provas de carácter científico-pedagógico do que com o actual sistema. No entanto, este tipo de provas teria de se ajustar à realidade escolar onde cada professor está a exercer a sua profissão pois, como sabemos, "o nosso país é muito desigual".
Questão 3: O professor deve estar permanentemente actualizado. O brio profissional e a possibilidade de contribuir de forma positiva para o desenvolvimento dos jovens são, de longe, os maiores incentivos. De qualquer forma, esta actualização requer meios e condições de trabalho que, na maioria das escolas, são escassos.
Questão 4: Sem me querer repetir, acho que sim. Mas levantam-se uma série de questões: De quem seria a responsabilidade da elaboração das provas? Seriam iguais para todos os professores, independentemente das escolas onde se encontram a exercer a sua profissão (localização em zonas problemáticas ou em zonas de extractos sócio--culturais elevados)? É um tema importante, urge ser resolvido, mas carece de uma reflexão muito cuidada.

Telma Guerra, Escola Superior de Tecnologia do Barreiro

Questão 1: Uma pessoa quando termina uma licenciatura em ensino de qualquer área, à partida, significa que não tendo obviamente experiência na leccionação, conseguiu apreender os saberes que lhe foram propostos e dar mostras dessa apreensão, dentro da sua área de estudo. Assim sendo, penso que essa pessoa está em condições de transmitir os saberes apreendidos adequando-os ao nível de ensino em que se encontra a leccionar, sem necessitar de prestar provas de conhecimento num exame especial de acesso, porque afinal foi isso que fez durante todo o tempo em que esteve a estudar.

Terminar uma licenciatura significa obter uma licença para o desempenho de alguma função. No caso de uma licenciatura em ensino significa obter uma licença para ensinar.
Questão 2: Para efeitos de progressão na carreira já me faz sentido que o professor preste provas de carácter científico e pedagógico. No ensino superior é assim que se progride. O professor tem que obter os graus e fazer investigação publicando os resultados obtidos em revistas científicas da especialidade. Penso que também no ensino secundário deveriam existir provas de carácter científico e pedagógico adequadas, que garantissem a manutenção e evolução dos saberes adquiridos dos professores que vão progredindo e chegam ao topo.
Questão 3: É claro que é muito importante que um professor seja bom cientificamente, e no caso de não o ser, que tenha consciência das suas lacunas e que tente corrigi-las. Não menos importante é manter-se actualizado numa época em que a ciência avança a um ritmo frenético. Um professor não deve deixar-se cair em "desuso" mas sim procurar actualizar-se permanentemente.

Para essa actualização penso que o professor deve frequentar cursos de formação, congressos, colóquios, seminários, workshops, dentro da sua área de formação. E por que não obter doutoramentos, se assim o desejar? Por outro lado, e friso que não conheço a realidade das escolas secundárias, penso que deve partir das escolas esse incentivo, no sentido de fazerem divulgação dos diversos acontecimentos que existem, criarem bolsas de deslocação e horários de substituição que permitam que o professor se ausente sem prejuízo para os alunos.
Questão 4: Penso que a progressão na carreira de docente no ensino secundário, à semelhança do que acontece no superior, deveria também depender da aprovação em provas de carácter científico e pedagógico. Aliás já o tinha dito na questão 2. Agora não sei, e muito provavelmente devido ao meu desconhecimento da realidade do ensino secundário e básico, que tipo de provas seriam, mas parece-me que realmente deveriam ser adaptadas e não idênticas às do ensino superior.

XXIV Olimpíadas Portuguesas de Matemática

Sílvia Barbeiro
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

Terminou no dia 2 de Abril mais uma edição das Olimpíadas Portuguesas de Matemática. A Final Nacional decorreu na Escola Secundária Alexandre Herculano, no Porto, que celebra este ano o 1º centenário. A selecção dos 58 alunos que estiveram na final foi feita em duas eliminatórias que se realizaram nos dias 9 de Novembro de 2005 e 18 de Janeiro de 2006. Participaram na competição cerca de 18 mil alunos.

Como habitualmente, para além de resolver problemas, os participantes tiveram oportunidade de viajar e assistir a espectáculos. Do programa recreativo destacam-se visitas guiadas ao Porto antigo e à Casa da Música.

A medalha é, com certeza, o prémio mais ambicionado mas as ofertas dos patrocinadores das Olimpíadas fizeram também grande sucesso entre os vencedores, e não só. "O prémio de que mais gostei foi o computador", afirmou João Caldeira, referindo-se ao portátil oferecido pelo Banco Espírito Santo aos seis medalhados com ouro ou prata da categoria B. Para os seis medalhados com bronze, a CP ofereceu quatro InterRails, complementados com dois oferecidos pela SPM. A Sociedade entregou ainda cheques brinde no valor de 50 euros (ouro) e 150 euros (bronze). Aos vencedores da categoria A, a SPM ofereceu calculadoras gráficas. Os medalhados ganharam também assinaturas digitais do jornal Público. Já a Escola Secundária Alexandre Herculano e as editoras Gradiva, Porto Editora e Areal Editores ofereceram prémios a todos os finalistas. Chegar à final é uma vitória!

As medalhas foram entregues pelo presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, Prof. Nuno Crato, numa sessão onde os presentes assistiram a uma interessante conferência proferida pelo Prof. Carlos Sá. Muitos familiares e amigos dos concorrentes compareceram. Todos foram convidados para um almoço ao ar livre onde não faltou boa comida e muito sol.

No próximo ano, as Olimpíadas Portuguesas de Matemática completam um quarto de século de existência, o que será certamente motivo de comemoração. Todas as escolas que pretendam participar com os seus alunos podem obter informações no site

http://www.mat.uc.pt/~opm/

Os medalhados deste ano da categoria A (8º ano e 9º ano) e da categoria B (do 10º ano ao 12º ano) foram os seguintes:

Da esquerda para a direita: Sílvia, Pedro, Miguel

Medalha de Ouro, Categoria A

Miguel Brito
Colégio Valsassina, Lisboa
Pedro Manuel Paços de Sousa Vieira
Escola E. B 2, 3 Soares dos Reis, Vila Nova de Gaia
Sílvia Moreira Cavadas
Escola E. B. 2, 3 de Paredes, Paredes

Da esquerda para a direita: João, Filipe e Rita

Medalha de Prata, Categoria A

Filipe Campino Vaz do Nascimento
Oficinas de S. José (Salesianos – Lisboa) Lisboa
João Morais Carreira Pereira
Escola E. B. 2, 3 Dr. Correia Alexandre, Caranguejeira
Rita Neves Gomes da Costa
Escola E. B. 2, 3 Prof. Delfim Santos, Lisboa

Da esquerda para a direita: Margarida, Pedro, Inês, João Pedro, Jorge, Ana Raquel

Medalha de Bronze, Categoria A

Ana Raquel Duque Gonçalves Fernandes
Escola E. B. 2, 3 de Inês de Castro, Coimbra
Inês Homem de Melo Marques
Colégio Luso-Francês, Porto
João Pedro Nina Martins Rodrigues dos Santos
Colégio Militar, Praia do Ribatejo, Lisboa
Jorge Ricardo Landeira da Silva Miranda
Escola Sec. Anselmo de Andrade, Almada
Margarida Bragança Catarina Anselmo
Escola Sec. Quinta do Marquês, Oeiras
Pedro Filipe Dias Belchior Campelo
Escola E. B 2, 3 de Leça da Palmeira, Leça da Palmeira

Medalha de Ouro, Categoria B

Afonso José Sousa Bandeira
Escola Sec. C/3 de S. Pedro do Sul, São Pedro do Sul
João Leitão Guerreiro
Colégio Valsassina, Lisboa
Rui Jorge Nunes Sequeira
Escola Sec. Infante D. Henrique, Porto

Da esquerda para a direita: Afonso, Rui e João

Medalha de Prata, Categoria B

João Manuel Gonçalves Caldeira
Escola Sec. Emídio Navarro, Almada
Joel Pedro de Oliveira Moreira
Escola Sec. José Saramago, Mafra
Luís Carlos Pinheiro Durão Branco
Escola Sec. Fernão de Magalhães, Chaves

Da esquerda para a direita: Luís, João, Joel

Medalha de Bronze, Categoria B

Célia Mariana Rabaçal Borlido
Escola Sec. de Águas Santas, Águas Santas
David Boaventura Mesquita
Escola Sec. Alcaides de Faria, Barcelos
Filipe Manuel Figueira Valeriano
Escola E. B. 2, 3 Dr. João de Brito Camacho, Almodôvar
João Pedro Correia Matias
Escola Sec. José Gomes Ferreira, Lisboa
Pedro Alexandre Marques Ramalhinho
Escola Sec. Emídio Navarro, Almada
Victor Mihali
Escola Sec. de Lagoa, Lagoa

Todos os medalhados (Categoria B)
Da esquerda para a direita e de cima para baixo:
David, Victor, Pedro, Filipe, João Matias, Joel e Luís
João Caldeira, Afonso, Célia, Rui e João Guerreiro