GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO IV **N.º 15** MAIO - 1943

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 5$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

FUNDADA POR

B. CARAÇA, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

CORRESPONDÊNCIA PARA: *M. Zaluar*, Rua Serpa Pinto, 17, 4.º esq. — Lisboa
COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO: *Soc. Ind. de Tipografia*, Rua Almirante Pessanha, 5 — Lisboa

ANO IV - N.º 15 GAZETA DE MATEMÁTICA MAIO - 1943

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Conceito de potência de conjuntos

por **L. Mendonça de Albuquerque**

1. — Diz-se que uma função φ estabelece uma correspondência biunívoca entre os elementos de dois conjuntos E e F, e escreve-se $E=\varphi(F)$, quando:

1.º — A todo o elemento $p \in E$ (pertencente a E) a função φ faz corresponder um e um só elemento $q \in F$; e

2.º — A qualquer dos elementos de F corresponde um único elemento de E.

Exemplos:

I — Existe uma correspondência biunívoca entre n quaisquer números inteiros consecutivos e as n raízes distintas da equação binómia $x^n-1=0$.

II — A função $y=\dfrac{a+bx}{1+x}$ estabelece uma correspondência biunívoca entre os números reais do intervalo (a, b) e os números reais do intervalo $(0, \infty)$.

As correspondências biunívocas gozam das seguintes propriedades (entre outras):

I — Formam um grupo. Isto é:

a) Se $E=\varphi(F)$ é uma correspondência biunívoca, a correspondência inversa $F=\varphi^{-1}(E)$ é da mesma natureza.

b) Se $E=\varphi(F)$ e $F=\psi(G)$ são correspondências biunívocas, o produto $E=\varphi[\psi(G)]$ é uma correspondência da mesma natureza.

II — Se $E \subset F$ (quere dizer, se E é um sub-conjunto de F) também $\varphi(E) \subset \varphi(F)$.

2. — *Teorema de Cantor-Bernstein.* Se φ e ψ são duas correspondências biunívocas tais que, sendo $E_1 \subset F$ e $F_1 \subset F$ se tem $\varphi(E_1)=F$ e $\psi(F_1)=E$, existe, nesse caso, uma correspondência biunívoca entre E e F.

(A demonstração dêste teorema encontra-se, por exemplo, em Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, pág. 104).

3. — *Potência.* Quando entre os elementos de dois conjuntos E e F se pode estabelecer uma correspondência biunívoca, diz-se que os conjuntos têm a mesma potência (são equipotentes) e escreve-se $\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{F}}$.

Exemplos:

I — O conjunto de n quaisquer números inteiros consecutivos e o conjunto das raizes distintas da equação $x^n-1=0$ são equipotentes.

Nota — A definição de correspondência biunívoca implica a igualdade do número de elementos para conjuntos finitos equipotentes. É o que se evidencia no exemplo precedente.

II — O conjunto (x) dos números inteiros positivos é equipotente ao conjunto (y) dos números pares e positivos. Pode estabelecer-se entre êles a correspondência $y=2x$, que é biunívoca.

III — Têm a mesma potência o conjunto dos números reais dos intervalos (a, b) e $(0, \infty)$. Isso resulta da correspondência biunívoca estabelecida pela relação $y=\dfrac{a+bx}{1+x}$.

4. — *Comparação de potências.* Os exemplos precedentes estabelecem a igualdade de potências de dois conjuntos em casos em que a determinação da correspondência biunívoca entre os seus elementos é extraordinàriamente simples. Nem todos os casos oferecem porém esta simplicidade. É muitas vezes necessário relacionar com os conjuntos dados os seus sub-conjuntos. Assim, se forem dados os conjuntos E e F, podem apresentar-se os quatro casos seguintes: (Borel, ob. cit., pág. 103 e Appert, Proprietés des ensembles abstraits les plus géneraux, tomo II, pág. 55)

1.º — Existe uma correspondência biunívoca $F=\varphi(E_1)$ entre um sub-conjunto $E_1 \subset E$ e F, e uma correspondência da mesma natureza $E=\psi(F_1)$ entre E e um sub-conjunto $F_1 \subset F$.

Então pelo teorema de Cantor-Bernstein, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca $E=\pi(F)$ entre os conjuntos dados que são, portanto, equipotentes.

2.º — Existe uma correspondência biunívoca $F=\varphi(E_1)$ entre um sub-conjunto $E_1 \subset E$ e F mas não existe qualquer relação da mesma natureza entre um dos sub-conjuntos de F e E. Diz-se então que a potência do conjunto E é superior à de F e escreve-se $\overline{\overline{E}} > \overline{\overline{F}}$. Deve notar-se que esta definição deixa entrever a possibilidade de escalonar as potências dos conjuntos numa sucessão crescente de tipos.

3.º — Pode concluir-se que $\overline{\overline{E}} < \overline{\overline{F}}$ quando, anàlogamente, se estabelece uma correspondência do mesmo género entre um dos sub-conjuntos $F_1 \subset F$ e E.

Exemplo:

Seja E o conjunto dos números reais positivos e F o conjunto das raízes positivas da equação $m \cos x - p = 0$ ($p < m$ e reais). É evidente que $\overline{\overline{E}} > \overline{\overline{F}}$.

4.º — Não existe qualquer correspondência biunívoca entre qualquer dos sub-conjuntos $E_1 \subset E$ e F, por um lado, e $F_1 \subset F$ e E, por outro.

5. — *Conjuntos ordenados e bem ordenados.* Diz-se que um conjunto E de elementos (p) é ordenado quando, quaisquer que sejam os elementos $p_1 \in E$ e $p_2 \in E$ existe entre êles uma dependência pela qual se pode afirmar uma das relações p_1 precede p_2 ou p_2 precede p_1 que obedece às propriedades assimétrica (se p_1 precede $p_2 \rightarrow p_2$ antecede p_1) e transitiva (se p_1 precede p_2 e p_2 precede $p_3 \rightarrow p_1$ precede p_3).

Se entre os elementos dum conjunto ordenado E existe um, p_0, que precede todos os outros, diz-se que p_0— é o primeiro elemento de E.

Se todos os sub-conjuntos de E contêm um primeiro elemento, E é um conjunto bem ordenado.

Axioma de Zermelo. — Consideremos o conjunto F de conjuntos E não vazios e sem elementos comuns dois a dois; existe pelo menos um conjunto que contém um e um só elemento de cada conjunto E.

Se admitirmos êste axioma, poderemos demonstrar o

Teorema de Zermelo. — Todo o conjunto pode ser bem ordenado, dum ponto de vista ideal. Quere dizer: sem que se garanta a possibilidade efectiva de determinar uma ordem. (Para demonstração, veja-se Sierpinski. Léçons sur les nombres transfinis, pág. 231).

6. — *A tricotomia.* O 4.º caso do parágrafo 4 sugere, naturalmente, uma pregunta: qual é a relação entre as potências dos conjuntos E e F quando se verifica essa hipótese?

Para Borel, e outros, o facto de se verificar a 4.ª hipótese apenas indica que a comparação das potências dos conjuntos E e F é impossivel.

Pelo contrário, Sierpinski, Appert, etc., aceitando o axioma de Zermelo que os primeiros repudiam, podem demonstrar o teorema de Hartogs. Êsse teorema demonstra (Sierpinski, ob. cit., pág. 228) que, dados dois conjuntos quaisquer, apenas se podem estabelecer entre êles e os seus sub-conjuntos as relações a que se referem os três primeiros casos. A impossibilidade do quarto caso chama-se tricotomia.

Não nos é possível ir mais longe na exigüidade duma nota desta índole; mas deve assinalar-se, entretanto, que muitos resultados têm sido obtidos com base no axioma de Zermelo e confirmados depois por desenvolvimentos que o regeitam. Para mais esclarecimentos e detalhes pode ler-se com proveito: Borel, ob. cit., (publica, em apêndice, cinco cartas muito interessantes sôbre o assunto); Sierpinski, ob. cit., cap. VI; Dugas, Essai sur l'incompréhension mathématique.

7. — *Escala de tipos de potência.* Dissemos no parágrafo 4, a propósito do segundo caso, que se entrevia a possibilidade de escalonar as potências dos conjuntos.

Para conclusão desta pequena notícia, queremos mostrar que a escala das potências fica bem determinada. É o que claramente evidenciam os dois teoremas seguintes:

Teorema I — O conjunto de todos os sub-conjuntos dum conjunto dado E (não vazio) tem uma potência superior à do conjunto E. (Sierpinski, ob. cit., pág. 84).

Teorema II — Dada uma família de conjuntos E quaisquer, existe sempre um conjunto E dessa família de potência inferior à de todos os outros. (Sierpinski, op. cit., pág. 214 e Appert, op. cit., tomo II, pág. 57).

Quere dizer: uma vez fixada a potência $\aleph_i$ dum conjunto E existem sempre conjuntos F de potência $\aleph_n > \aleph_i$; (Teorema I); e entre todos os conjuntos nessas condições há um de potência $\aleph_{i+1}$ menor que a de todos os outros.

Curiosidades

por Fernando A. de Carvalho Araújo

Um velho amigo, bibliófilo inveterado, persistente e infatigável pesquizador de velharias, ofereceu-me há pouco mais de um mês um exemplar precioso e em perfeito estado de conservação — três macissos volumes encadernados em boa e legítima carneira — intitulado «Encyclopédie Méthodique — Mathématiques — Par MM. D'Alembert, L'Abbé Bossut, De La Lande, le Marquis de Condorcet, &c ... — A Paris, chez Panckoucke, Libraire Hôtel de Thou, rue des Poitevins ; A Liège, Chez Plomteux, Imprimeur des Etats — MDCCLXXXIV — Avec Approbation, et Privilège du Roi». Colaboram nesta obra, além dos já citados, M. Jean Bernoulli, M. Dargenville, M. Diderot e outros, constituindo os dois primeiros volumes e parte do terceiro um dicionário de matemáticas enquanto mais de metade do último é preenchida com um dicionário de jogos.

A leitura de qualquer dos volumes é extremamente curiosa e elucidativa e fornece elementos de indiscutível valia para o estudo da história e génese dos métodos e idéias da Matemática nos séculos XVII e XVIII.

Há dias, quando folheava o 2.º volume deparei com um artigo intitulado «Quarrés Magiques» que começa assim: «em Aritmética dá-se êste nome a figuras *quadradas* formadas por uma seqüência ou série de números em proporção aritmética, dispostos em linhas paralelas ou em filas iguais de tal modo que as somas de todos aqueles que se encontram numa mesma banda horizontal, vertical ou diagonal sejam todas iguais entre si.»

O articulista dá depois uma explicação um pouco mais detalhada da definição e apresenta então um exemplo com os primeiros 25 números naturais, formando um quadrado natural e um quadrado mágico

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Quadrado natural

16	14	8	2	25
3	22	20	11	9
15	6	4	23	17
24	18	12	10	1
7	5	21	19	13

Quadrado mágico

e continua: «Poder-se-ia acreditar que os *quadrados mágicos* têm êste nome porque a propriedade de tôdas as suas bandas darem a mesma soma pareceu muito surpreendente, sobretudo em certos séculos em que as Matemáticas eram suspeitas de magia, mas há também forte evidência para crer que estes quadrados mereceram o seu nome devido às práticas supersticiosas onde eram empregados, tais como a fabricação de talismans, porque segunda a filosofia pueril daqueles que atribuiam virtudes aos números, que virtudes não deviam ter números tão maravilhosos? O que começou por ser uma prática vã dos construtores de talismans e dos adivinhos tornou-se o assunto de uma investigação séria para os Matemáticos embora não acreditassem que pudesse conduzir a *qualquer coisa de útil nem de sólido. Os quadrados mágicos sentem-se sempre da sua origem; não podem ter utilidade alguma; não são mais do que um jôgo cujo mérito reside na dificuldade e que sòmente pode originar, em relação aos números, alguns pontos de vista novos que os Matemáticos não querem perder.*»

O artigo continua ocupando mais umas sete colunas onde se faz um pouco de história e se estudam certas propriedades mas a parte transcrita fornece matéria mais do que suficiente para algumas considerações de ordem geral.

O contraste entre as afirmações do articulista e a aplicação actual de quadrados da mesma família à resolução de determinados problemas experimentais é flagrante. De facto os «quadrados latinos» como hoje são designados certos tipos de «quadrados mágicos» constituem, particularmente no campo agronómico, um dos traçados experimentais mais eficientes e mais largamente generalizados. Por outro lado a aplicação dos princípios de estatística à planificação, análise e interpretação dos ensaios baseados neste tipo de traçado exige em princípio o estudo de um certo número de problemas cuja solução está intimamente dependente da Teoria dos Grupos Finitos.

Estas breves considerações mostram, mais uma vez, como é extremamente difícil estabelecer uma demarcação rigorosa entre Ciência Pura e Aplicada. Para o articulista da Enciclopédia nada de útil nem de sólido poderia resultar do estudo dos «quadrados mágicos», mas, se por artes mágicas de qualquer poderoso e irónico demiurgo, voltasse a êste mundo, novamente na pele de um Matemático poderia, meditando com tristeza na fragilidade dos julgamentos humanos, repetir desconsoladamente com uma nova certeza: «porque... que virtudes não devem ter números tão maravilhosos!?»

Esbôço para uma algebrização da noção de integral

por *Constantin Carathéodory*

(Introdução a «Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs» — Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften—1938)

A teoria dos espaços abstractos foi muito estudada nos últimos dez anos e conseguiu-se introduzir aí, de diversos modos, a noção de integral [1].

Uma consideração mais profunda do assunto mostra que se pode avançar ainda nesta direcção. Os espaços — mesmo os chamados espaços abstractos — são naturalmente conjuntos, isto é, colecções de elementos, a que também chamamos pontos, de que o espaço considerado é constituído. Cada figura sôbre a qual se integrará, deverá, pois, encarar-se também como um conjunto de elementos. Porém, nestas condições pode reparar-se que não é essencial a significação dêstes elementos para a formação da noção de integral e que a própria demonstração da existência do integral já se possa essencialmente efectivar, em virtude da possibilidade da execução das operações fundamentais de reünião, de diferença e de intersecção estar contida na noção de conjunto.

A idéia assenta portanto, pouco mais ou menos, em abstrair inteiramente da estrutura das figuras sôbre as quais se deverá integrar e, destas figuras, só exigir que elas permitam operações que tenham certos laços de comum com as operações de reünião, de diferença e de intersecção de conjuntos. Disto resulta uma dupla vantagem: Uma vez por tôdas alargar-se-á consideràvelmente o campo das aplicações possíveis. E, depois, mostra-se que a teoria anterior se simplificará porque só fica o essencial do seu esqueleto. Em resultado da tarefa que nos impomos de tratar objectos que são tão pouco diferenciados, desaparecem, automàticamente, para muitas demonstrações, aquelas partes complicadas que se tinham mantido por êrro, com o emprêgo dum material substancial. Digno de nota é o facto de, com meios tão primitivos, se poder obter a maioria dos resultados que se conhecem para os integrais de Lebesgue e de Lebesgue-Stieltjes. Mais: são poucos os detalhes que por especialização das hipóteses se juntarão às noções gerais.

Os objectos matemáticos que nós definimos no primeiro capítulo dêste artigo poderão considerar-se como elementos duma álgebra de Boole generalizada, como é imediatamente compreensível [2]. Nestas álgebras, contudo, a soma e o produto de dois elementos quaisquer postulam-se simultâneamente e têm iguais privilégios. Para o nosso fim é, pelo contrário, vantajoso não tratar simultâneamente a reünião, a diferença e a intersecção. Nós só postularemos a primeira destas operações, para depois, por meio de ulteriores axiomas, nos restringirmos de maneira que se assegure a existência das outras duas. Obtem-se desta maneira um sistema de axiomas que, com imaginação de exemplos, se poderá manejar de modo particularmente simples. (comparem-se §§ 9 e 10).

Objectos matemáticos que possuem propriedades tão fundamentais e importantes devem ter um nome, que seja completamente neutro e que não desperte falsas associações. Veremos que (§ 9) estes objectos nem sempre são conjuntos, de ma-

---

[1] *M. Fréchet*, Sur l'intégrale d'une fonctionelle étendue à un ensemble abstrait, Bull. soc. math. de France 43 (1915), p. 248.

P. J. Daniell, A general form of integral. Ann. of Math. (2) 19 (1917-18) p. 279 — Integrals in an infinite munber of dimensions, ibid. (2) 20 (1918) p. 281.

A. Kolmogoroff, Unterserchungen über den Integrallbegriff, Math. Ann. 103 (1930) s. 654.

H. Hahn, Über den Integrallbegriff, Festselvr. d. 57.Vers. Deutsch. Philolog. u. Schulmänner in Salzburg 1929, S. 193.

Über die Multiplikation total additiver Mengenfunktionen. Ann. della R. Scuola Normale Sup. di Pisa (Sc. Fis. e Mat.) (2) 2 (1933) p. 429.

O. Nikodym, Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, Fund. math. 15 (1930) p. 131.

J. Ridder, Integration in abstrakten Räumen. Fund. math. 24 (1935), s. 72.

S. Saks, Theory of the Integral. Monografie Matematyezne, Tom. VII, Warszawa, 1937.

[2] *O. Ore*, On the foundation of Abstract Algebra. Ann. Math. (2) 36 (1935) p. 406.

M. H. Stone, Postulates for Boolean Algebras and generalized Boolean Algebras. Amer. Journ. of Mathem. 57 (1935) p. 703.

neira que a designação «conjunto» não poderá usar-se. O nome «corpo» que apresentava muitas vantagens é da mesma maneira a excluir, porque o seu uso conduziria a equívocos; as «estruturas», que Ore introduziu, são demasiado gerais. Nada se opõe porém à designação de *Soma* [3].

Para a extensão da noção de integral podem usar-se diversos princípios. Kolmogoroff seguiu até ao fim a idéia de Leibniz duma «Summa Omnium». Hahn deixou-se conduzir pelo pensamento de que, para a restrição dos conjuntos sôbre os quais se deverá integrar, o integral é uma função totalmente aditiviva.

Muito mais simples e mais directamente se atinge o objectivo se se parte das propriedades elementares das áreas, respectivamente dos volumes. Estas propriedades são tão intuitivas que Arquimedes as pôde postular [4]. Elas representam a generalização dos seguintes teoremas geométricos:

Teorema 1. Quando se cobre completamente uma figura plana F com um número finito, ou não, de figuras $F_1, F_2, \cdots$, a área de F não é superior à soma das áreas de tôdas as F_k.

Teorema 2. O volume dum cilindro recto é igual ao produto da altura pela área da base.

O primeiro dêstes teoremas conduz à teoria das funções de medida que eu há muito tempo desenvolvi [5]. As funções de medida podem definir-se também, sem dificuldade como funções de *Soma*. A estas entidades é dedicado o segundo capítulo dêste artigo.

Para extender o teorema 2, que poderá tratar-se em conexão com o teorema do valor médio do cálculo integral, consideramos funções de elemento sôbre um corpo de *Somas*. Estas funções de elemento que devem ser análogas às funções de ponto ordinárias, definir-se-ão por meio dos limites superior e inferior que elas admitem nas diferentes somas.

Agora pouco falta para completar a teoria; basta considerar o integral de Lebesgue-Stieltjes como uma função de medida para a qual é válido o teorema do valor médio. A definição acima da função de elemento é particularmente apropriada a esta concepção do integral. Para o desenvolvimento destas idéias podem usar-se métodos muito correntes. Esta parte do capítulo III, que é fácil de completar, poderá preencher-se muito fàcilmente com estes fundamentos.

Nota-se, de resto, que se obtêm os resultados de Hahn quando se define o integral I^*A só no corpo em que esta função de medida é mensurável.

Tradução de MARIA PILAR RIBEIRO

Observações ao presente artigo — A transcrição precedente é interessante, além do mais, porque nos apresenta, sobretudo nos primeiros parágrafos, num exemplo sugestivo e indubitàvelmente importante preocupações e atitudes que, se não são características dos matemáticos de hoje, são hoje ainda pouco vulgarisadas embora muito familiares aos estudiosos.

Outra observação é-nos sugerida pela tradução com o título «O discreto e o contínuo» do número 14 da nossa «Gazeta de Matemática». Aí, em nossa opinião, arrisca-se o leitor a equívoco (talvez simplesmente porque as idéias estão demasiadamente condensadas e expressas com demasiada brevidade). Não se trata, agora, de sublinhar a confusão, ali possível, entre as noções de densidade e continuïdade para a recta. Queremos simplesmente dizer que (a nosso ver!) essa «encorporação da análise matemática, álgebra, teoria dos números, lógica matemática e geometria» se encontra já realizada num grau muito mais avançado do que aquela leitura pode fazer supor. A memória de Carathéodory vem em apoio desta observação. Especialmente importantes, sob êste aspecto, são outras noções cujo estudo está hoje tão avançado, como são as de «grupo topológico» e «estrutura». Delas procuraremos brevemente dar, aqui, uma idéia.

Finalmente (e em primeiro lugar!) possa esta tanscrição sugerir o estudo da própria memória a algum leitor da «Gazeta» que esteja desejoso de conhecer a matemática no seu desenvolvimento e tenha já pressentido que, para isso, precisa de conhecer a matemática moderna cuja contribuïção é, desde já, simultâneamente, tão recente e tão rica.

HUGO RIBEIRO

---

(3) A palavra *soma* foi, sem dúvida, a empregada já por von E. Study nas suas investigações sôbre cinemática. O uso da mesma designação para objectos que aparecem em domínios da matemática inteiramente distintos não pode levar a equívocos. Também a palavra «corpo» (Körper) se usa na geometria e na álgebra com diferentes significações.

(4) Veja-se o λαμβανόμενα (Postulado) de Arquimedes no início do primeiro livro sôbre esfera e cilindro. Opera Omnia, ed. Heiberg, Leipzig, Teubner, 1910, Bd. I p. 8.

(5) *C. Carathéodory*, Über das lineare Maß-eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs. Gött. Nachr. (1914) s. 404. Veja-se tambám Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin, Teubner, 1918 (2 aufl. 1927) kap. V.

ASTRONOMIA

A ROTAÇÃO DA TERRA E O MOVIMENTO DA LUA

por ***Manuel Peres Júnior***

No meu tempo de estudante o estudo da aritmética iniciava-se por estas duas definições:

Grandeza é tudo quanto pode aumentar ou deminuir; *quantidade* é a grandeza que se pode medir.

Um ou outro professor mais dado a esclarecer os alunos dava, como exemplo de uma grandeza que não é quantidade, isto é, de uma coisa que pode ser maior ou menor mas que não se pode medir, uma dor, uma alegria, ou coisa análoga.

O incipiente letrado decorava cuidadosamente estas duas definições e era quanto lhe bastava até que, se continuasse os estudos, voltava, no curso superior, a ouvir falar em grandezas que não se podem medir e o exemplo fatal era a temperatura.

Aqui vou falar de outra: o tempo. Também não se pode medir e, quanto a esta característica, está até muito abaixo da temperatura.

Com efeito, se não é possível dizer se uma dada temperatura é dupla ou tripla de outra, pode-se dizer que duas temperaturas são iguais: as de duas moléculas de uma massa que se possa considerar em equilíbrio térmico ou as de dois líquidos nos quais o *mesmo* termómetro mergulhado num ou noutro apresenta a mesma dilatação. Com o tempo não sucede o mesmo. Se, em alguns casos, é possível afirmar que um intervalo de tempo é maior do que outro (casos em que o primeiro inclui o segundo), nunca é possível reconhecer a igualdade de dois intervalos de tempo. Há, portanto, que recorrer a convenções para construir a definição dessa igualdade.

É a Mecânica que nos fornece os meios.

O primeiro é a sua definição de movimento uniforme: movimento uniforme é aquêle em que o móvel percorre espaços iguais em *iguais* intervalos de tempo.

Infelizmente esta definição obriga-nos a ir à procura de movimentos uniformes e êsses, para se descobrirem, exigem-nos um prévio conhecimento da igualdade dos intervalos de tempo para os comparar com os espaços percorridos. Um ciclo vicioso de que só se pode sair decidindo que um dado movimento é uniforme.

É claro que nem todos os movimentos se prestam a isto; e, entre os que se prestam, escolhido um para base da definição, ficam excluídos os outros, isto é, de todos os movimentos que podemos tomar como uniformes, um, o escolhido será o *definidor* da igualdade de intervalos de tempo e os outros serão ou não serão uniformes se se ajustarem ou não à definição.

O movimento que se usa para definir aquela igualdade é o movimento de rotação da Terra. E assim, medindo ângulos descritos nesse movimento, indirecta e virtualmente medimos intervalos de tempo, pois a correspondência «ângulo-intervalo» permite-nos afirmar que um dado intervalo de tempo é duplo ou triplo de outro, tal como se se tratasse de verdadeiras medições.

É porém, indispensável não esquecer que êste belo edifício está construído sôbre a areia movediça duma definição arbitrária.

Há ainda uma pequena coisa a atender: o movimento é uma noção essencialmente relativa que não se pode descrever sem mencionar uma referência.

¿A que corpo ou a que sistema se há-de referir o movimento de rotação da Terra? Evidentemente a um astro ou a um sistema relacionado com os astros; o Sol, a Lua, um planeta ou o conjunto das estrêlas fixas. E assim temos o tempo solar, o lunar, o marciano, o troiano..., o sideral. Salvo em questões teóricas muito especiais, só o primeiro e o último se usam.

Nova dificuldade: estes dois tempos não acertam um com o outro, isto é, o movimento de rotação da Terra, considerado uniforme quando referido às estrêlas, é variado quando referido ao Sol. Mas ainda é possível harmonizá-los definindo o tempo solar, não pelo próprio Sol, mas por um astro imaginário a que se dá o nome de Sol médio. É desnecessário dar pormenores que são conhecidos dos leitores.

Nem só o movimento uniforme serve para definir a igualdade de dois intervalos de tempo; a Mecânica oferece-nos também outra classe de movimentos, os movimentos periódicos: movimento periódico é aquêle que se repete ou reproduz em iguais [1] intervalos de tempo.

---

[1] Quando, uma vez definida a unidade de tempo, se observa um movimento que se repete em intervalos de tempo desiguais, diz-se que se trata de um movimento periódico de «período variável»; um tal movimento não é considerado *simples* pela Mecânica, mas sim o resultado da sobreposição de vários movimentos.

São movimentos aproveitáveis as oscilações dos pêndulos, as vibrações dos corpos elásticos e as translacções dos planetas.

Nunca foi possível harmonizar todas estas diferentes e independentes *fontes* de igualdade de intervalos de tempo: embora com pequenas diferenças, nunca se encontraram oscilações ou vibrações isócronas quando as suas durações foram avaliadas por meio da rotação da Terra. Os astrónomos atribuíram estes desoladores resultados a imperfeições de tôda a espécie: erros de observação provenientes de imperfeições do observador, dos instrumentos e do conhecimento do comportamento óptico da atmosfera. E todo o seu esfôrço incidiu na redução dessas imperfeições, melhorando os métodos de observação para reduzir os erros do observador e aperfeiçoando os instrumentos de observação para diminuir os erros provenientes dêstes, por um lado, construindo pêndulas e cronómetros em que as causas da falta de isocronismo das oscilações e vibrações foram reduzidas ao mínimo, por outro. Apareceram assim os micrómetros chamados impessoais, os «relais» electrónicos, os registos automáticos fotográficos, as pêndulas de pêndulo livre, os relógios de quartzo, etc. A desharmonia, embora atenuada, manteve-se. No que respeita ao movimento de rotação da Terra, mereceu especial cuidado a escolha do ponto de referência e chegou-se ao que se chama o «tempo sideral uniforme».

Enquanto a desharmonia se verifica entre a rotação da Terra e a marcha dos relógios, é sempre possível atribuí-la à imperfeição dêstes. Outro tanto não acontece com outra classe de movimentos periódicos que não resultam da habilidade manual do homem: os movimentos de translacção dos planetas.

Êstes movimentos não têm a simplicidade teórica que a mecânica exige para garantir o seu isocronismo. Não há apenas um planeta gravitando em tôrno do Sol, nem cada planeta se pode rigorosamente considerar um ponto material, mas a mesma Mecânica ensina a descontar, para cada um, os efeitos dos outros e a influência do volume, isto é, da distribuïção das massas no interior dos corpos que apenas se podem assimilar a pontos quando são formados por camadas esféricas homogéneas.

Para a observação, os intervalos de tempo traduzem-se por arcos de órbitas e assim a medição de tais arcos corresponde à medição de intervalos de tempo. Aquela medição é tanto mais precisa quanto menor fôr o periodo dum planeta ou, o que é o mesmo, quanto menor fôr a órbita.

Com efeito, um dado intervalo de tempo é uma fracção do período tanto maior quanto menor êste fôr e corresponde, portanto, a uma fracção da órbita tanto maior quanto menor esta fôr. Vistas do Sol, tódas as órbitas dos planetas se projectam no céu como circunferências, isto é, têm tôdas o mesmo tamanho aparente; o mesmo acontece com os satélites vistos dos respectivos planetas. Vistas da Terra (que é o caso que nos interessa), as órbitas dos planetas, salvo as de Mercúrio e Vénus, não diferem muito do que parecem vistas do Sol e a Lua é o satélite da Terra [2]. É por isto que em um dia vemos a Lua percorrer no céo um arco de cêrca de 13 graus ao passo que Neptuno parece imóvel (menos de 1 minuto); por outras palavras, num dado intervalo de tempo o deslocamento aparente da Lua no céo é cêrca de mil vezes maior que o de Neptuno. A Lua é, pois, o astro mais apropriado a servir de base a uma útil definição de igualdade de intervalos de tempo a comparar com a definição baseada no movimento de rotação da Terra.

Pois bem. O tempo *medido* pelo movimento da Lua não concorda com o *medido* pelos outros meios. E no que respeita à sua comparação com o movimento de rotação da Terra não há o recurso de atribuír o desacôrdo, como no caso dos relógios, a imperfeições de instrumentos, pois nem a Terra nem a Lua foram feitas pelos homens. Dos homens são as leis da Mecânica e a Lua vagabundeia no céo com uma lastimável falta de respeito por elas. Tudo se tem feito para lhe justificar os erros e já se chegou a esta desoladora conclusão: não há influência de outros corpos, não há distribuïção de densidades na Terra, não há mesmo modificação nos princípios da lei da gravitação que explique as irregularidades do movimento da Lua. Só há uma explicação possível que salve o edifício da Mecânica Celeste: o movimento de rotação da Terra não é uniforme. Isto é, temos de abandonar o movimento de rotação da Terra como meio de medir intervalos de tempo para estudar os movimentos dos astros e adoptar o movimento da Lua para êsse fim, incluindo o estudo do movimento da Terra.

Isto requere uma comparação cuidadosa dos dois movimentos que só pode basear-se numa longa e volumosa massa de observações. Há que

[2] Para o caso pode chamar-se-lhe satélite, embora difira muito dos satélites dos outros planetas. Na realidade a Lua é uma das componentes do planeta duplo Terra-Lua.

multiplicar, como há já bastantes anos aconselhou Newcomb, as determinações rigorosas das posições da Lua em tempos avaliados pelo movimento de rotação da Terra. As observações podem ser as de passagens meridianas, como as de qualquer outro astro, ou umas especiais para a Lua (e muito raramente para alguns planetas), muito simples e muito precisas, que são as das ocultações de astros, geralmente estrêlas, por ela. Estas últimas, embora de grande precisão, não necessitam de dispendiosos ou complicados instrumentos; bastam-lhes um óculo e um cronómetro de que actualmente é possível determinar a correcção com rigor e freqüência; podem, pois, ser feitas por muitas pessoas e em muitos lugares. Há anos que uma campanha internacional promove estas observações; o Observatório da Tapada colabora nela. O que tem conseguido, em qualidade e quantidade, vai o leitor apreciar num próximo artigo escrito pelo astrónomo encarregado de coligir e reduzir as observações feitas em Lisboa e suas proximidades.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

O «PRÉMIO NACIONAL DOUTOR FRANCISCO GOMES TEIXEIRA»

por ***António Monteiro***

Já por duas vezes a Gazeta de Matemática chamou a atenção dos seus leitores para o *Prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira* (1) que se destina a galardoar, mediante concurso, o melhor trabalho de matemáticas puras, elaborado em cada ano lectivo por um aluno dum dos estabelecimentos de ensino universitário em que são professadas. A criação dêste prémio tem grande interêsse para o movimento matemático português porque êle é susceptível de criar uma atmosfera de emulação entre escolas superiores, em que as matemáticas puras são professadas, encorajando os estudantes na realização de trabalhos de investigação e estimulando os professores das mesmas escolas a fomentarem a realização dêsses trabalhos.

A portaria do Ministério de Educação Nacional que criou êste prémio, foi publicada no ano de 1939 e nela se fixava aos directores das três Faculdades o prazo de noventa dias para elaborarem (depois de ouvidos os respectivos conselhos) as normas técnicas e regulamentares a que haveriam de obedecer o trabalho e o concurso, que se projectava realizar pela primeira vez no ano lectivo 1939-1940. O regulamento do prémio foi publicado em 2 de Abril de 1940 e por isso êle foi pôsto a concurso pela primeira vez no ano lectivo de 1940-1941.

Até hoje o prémio não foi ainda atribuído. No primeiro ano, 1940-1941, apareceu um único concorrente (aluno da Faculdade de Engenharia do Pôrto) com um trabalho que não era de matemáticas puras. Não temos conhecimento de que tenha aparecido algum concorrente no ano lectivo passado.

Como se explica que existindo três Faculdades de Ciências no nosso país com um número considerável de alunos freqüentando a licenciatura em ciências matemáticas, não se tenha ainda criado uma atmosfera de interêsse pelo Prémio Gomes Teixeira?

É certo que o ensino das Ciências Matemáticas se encontra no nosso país num estado de atrazo considerável (ainda recentemente um professor universitário declarou aos seus alunos que êsse atrazo era de cêrca dum século) (2); as correntes vitais do pensamento matemático moderno não são ainda ensinadas entre nós, não existe uma atmosfera de interêsse efectivo pela investigação matemática entre os estudantes das escolas superiores; mas tôdas estas circunstâncias deviam precisamente galvanizar a vontade dos professore progressivos, que existem entre nós, para criarem entre os estudantes uma atmosfera de interêsse pelo Prémio Gomes Teixeira. Na realidade a criação dêsse prémio foi acolhida pràticamente com uma indiferença quási geral. Que esforços se fizeram e que iniciativas se tomaram nas escolas superiores para levar os alunos a realizarem trabalhos de investigação?

Que temas de trabalho se propuzeram aos alunos para êsse efeito?

Em face da situação em que se encontra a cultura matemática portuguesa há, pelo menos, duas atitudes possíveis: a primeira, a que poderíamos chamar uma *atitude realista ou progressiva,* consiste em olhar a situação face a face, sem subterfúgios, e procurar determinar o grau de decadência em que nos encontramos, as suas causas e remédios; a segunda, a que podemos chamar uma *atitude idealista ou regressiva,* é caracterizada por uma tendência para considerar como satisfatória a situação em que

(1) Vejam-se os n.os 1 e 10 da «Gazeta de Matemática»

(2) Ponho de lado, nêste momento, a questão de saber se o atrazo do nosso ensino *deve* ser avaliado em anos.

nos encontramos e por um desinterêsse quási geral, e por vezes por uma hostilidade marcada, pelas tarefas mais urgentes que há a realizar no nosso meio. Um exemplo típico desta última atitude é a opinião (formulada também pùblicamente por um professor universitário) de que o ensino das matemáticas em Portugal se pode considerar a par do ensino francês. Para pôr em evidência a inconsistência desta opinião vou referir o seguinte facto. Como todos sabem a escola matemática americana é hoje uma das primeiras do mundo. Existem na América centenas de investigadores de categoria, entre os quais figuram alguns dos primeiros matemáticos da nossa época. O ensino atingiu um nível altamente qualificado. A América possui alguns dos centros de investigação matemática mais importantes do mundo: Princeton (o paraíso da Topologia) Harvard, New-York, etc., etc.

Publicam-se na América do Norte um grande número de periódicos de Matemática de variada natureza entre os quais figuram uma meia dúzia de revistas indispensáveis em tôdas as bibliotecas de matemática e sem os quais é hoje *impossível* trabalhar em matemática. A América é o país que possui o maior número de associações científicas que dedicam a sua actividade ao progresso das ciências matemáticas, Sociedades de matemática, clubes de matemática, etc., etc.. Pois bem, numa crítica num jornal americano a um livro de Exercícios de Análise do Professor da Sorbonne Gaston Julia (destinados aos alunos da cadeira de cálculo diferencial e integral — 1.° ano da licenciatura em ciências matemáticas) declarava-se que aquêle livro mostrava bem a elevada preparação matemática dos estudantes franceses da licenciatura, cujo nível não era atingido *em nenhuma universidade americana.*

Como todos sabem não existe uma escola matemática portuguêsa; limitamo-nos a ter uma meia dúzia de investigadores entre os quais não há nenhum que se possa considerar um grande matemático da nossa época. Não temos nenhum centro de investigação matemática importante. Há em Portugal duas revistas de matemática, criadas recentemente, uma sociedade de matemática que esboça os primeiros passos, não existem pràticamente clubes de matemática, etc.. Mas... o nosso ensino é superior ao ensino americano, visto que... se pode pôr a par do ensino francês.

Duas atitudes diferentes de dois professores da mesma escola superior: *o nosso ensino matemático está um século em atrazo — o nosso ensino matemático é dos melhores do mundo.* A primeira é uma atitude progressiva porque é uma atitude crítica e portanto potencialmente construtiva a segunda uma atitude demagógica e portanto potencialmente regressiva e susceptível no caso de se generalizar de conduzir a nossa cultura matemática a uma decadência completa. Nada mais perigoso para a cultura matemática portuguesa que a generalização dêste espírito de suficiência (consciente ou não, pouco importa) que tem exercido uma influência tão perniciosa.

A nossa cultura matemática só pode ser refundida e melhorada, só pode ser conduzida a um nível altamente qualificado por indivíduos que tenham a consciência da situação em que nos encontramos e que estejam animados duma fé inabalável na capacidade criadora da nossa juventude estudiosa.

O desinterêsse que existe pelo Prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira é um índice revelador do estado em que se encontra o ambiente matemático nas nossas escolas. Num país em que é obrigação legal dos professores do ensino superior a realização de trabalhos de investigação científica, a realização dêsses trabalhos inspiraria por certo os discípulos mais atentos, se os resultados obtidos fôssem expostos em conferências e cursos livres.

O exemplo é contagioso para a juventude. O primeiro passo a dar para que o Prémio Gomes Teixeira encontre um ambiente adequado junto dos estudantes é que os professores de matemática das escolas superiores consagrem a sua actividade à realização de trabalhos de investigação, como está indicado na lei, que exponham aos seus alunos os resultados encorajando-os e animando-os na realização de trabalhos de investigação.

É preciso porém não esquecer que o ensino das cadeiras da especialidade (Complementos de Álgebra, Geometria Projectiva, Geometria Superior, Análise Superior e Cálculo das Probabilidades, para não citar outras) oferece também numerosas oportunidades para difundir idéias modernas e propôr têmas de trabalho de matemáticas puras.

É pelos vinte anos de idade que os estudantes devem iniciar-se no trabalho de investigação, mas é necessário para isso que o ensino tenha uma orientação conveniente.

Não é com a realização de cursos cristalizados em formas que parecem definitivas que se pode modificar o ambiente matemático existente em Portugal. É preciso renovar completamente o ensino para se criar no nosso país um movimento matemático moderno.

O Prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira deve desempenhar um papel importante nêsse movimento.

O superior interêsse da cultura matemática portuguesa exige que lhe seja prestada a atenção que merece.

CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA DO PORTO

Conferências do Professor Sixto Ríos e do Doutor António Monteiro

O absorvente serviço das aulas e dos exames de freqüência não permite, em geral, sossêgo, nem oferece oportunidade para se realizarem com continuïdade, no decorrer do ano lectivo, cursos ou palestras a que se poderá chamar de «extensão cultural universitária». Não deixa lugar, pelo menos, àquelas condições em que êsses cursos e essas palestras, de carácter técnico especializado ou simplesmente com o carácter de vulgarização, seriam rodeados da atenção e do interêsse necessários para que dêles se pudessem colher bons resultados. E, na verdade, só êsses resultados poderiam justificar a sua realização.

Por isso é que, quando se pensa em levar a efeito um dêsses cursos, se escolhe, em regra, ou o comêço do ano lectivo, por não ser ainda muito intensa a actividade escolar, ou a pausa entre os últimos exames de freqüência e os exames finais. É êste o periodo em que entramos agora.

A convite do Centro de Estudos de Matemática da Faculdade de Ciências do Pôrto, o Prof. Sixto Rios, da Escola Superior de Engenheiros Aeronáuticos, Director da Secção de Análise do Instituto «Jorge Juan» do Conselho Superior de Investigações Científicas (Madrid) e antigo discípulo do grande matemático Rey Pastor, veio realizar nesta Faculdade, de 20 a 26 de Maio, uma série de lições sôbre algumas questões de Análise Clássica.

Os temas dessas lições foram os seguintes:

I — *Propriedades gerais do integral de Laplace.*
II — *Prolongamento analítico e ultraconvergência do integral de Laplace.*
III — *Pontos singulares e ultraconvergência das séries de Dirichlet.*
IV — *Singularidades do integral de Laplace.*
V — *Reordenação de séries funcionais e suas aplicações.*

O estudo pormenorizado de tôdas estas questões, disse-nos o Professor Sixto Ríos, constituiria assunto para um curso de alguns meses, e não foi êsse o objectivo destas lições.

O Professor Sixto Rios pôs, por isso, o seu maior interêsse em apresentar os problemas de um modo natural e compreensivo, traçando em seguida, numa exposição sempre simples, clara e precisa, o caminho para a sua resolução.

Estas lições serão publicadas na colecção do Centro de Estudos de Matemática do Pôrto. Dispensamo-nos, por êsse motivo, de acrescentar qualquer resumo à indicação que demos dos assuntos tratados.

Também a convite do Centro de Estudos de Matemática da Faculdade de Ciências do Pôrto, o Dr. António Monteiro realizou nesta Faculdade, nos dias 21 e 22 de Maio, duas lições de que damos a seguir os tópicos principais:

1.ª — *Caracterização da noção de quási-ordem por intermédio da noção de quási-métrica* — Anéis de conjuntos (Hausdorff); σ-anel; anel completo; exemplos (conjuntos fechados (abertos) dos espaços topológicos de Kuratowski, conjuntos mensuráveis do espaço R_n, etc.); importância matemática desta noção. Noção de quási-ordem; igualdade e ordem parcial. Espaços topológicos completamente distributivos. Equivalência das noções de quási-ordem e de topologia completamente distributiva. Noção de quási-métrica; caracterização da noção de quási-ordem por intermédio da noção de quási-métrica.

2.ª — *Funcionais semi-contínuas superiormente* — Definição no caso de funções reais de variáveis reais (Baire). Definição por meio de vizinhanças (topologia de Kuratowski). Comportamento da topologia assim definida com respeito aos axiomas de separação (Kolmogoroff, Fréchet, Hausdorff). Funcionais; exemplo de uma funcional descontínua, semi-contínua inferiormente. Problema da determinação da topologia dum espaço pelo conhecimento da família das funções semi-contínuas superiormente.

A. PEREIRA GOMES

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Conferência do Professor Sixto Rios

A convite desta Sociedade e da Faculdade de Ciências de Lisboa, a que acedeu gentilmente, o Prof. Sixto Rios realizou uma conferência no Anfiteatro de Matemática da Faculdade sôbre o tema: *Resultados recentes e problemas actuais da teoria das séries de Derichlet.*

Eleições

Não tendo podido o Professór Aureliano de Mira Fernandes aceitar o cargo de presidente da Direcção da S. P. M. procedeu-se a novas eleições tendo sido eleito para o mesmo logar o Professor Bento Caraça.

O cargo de secretário geral encontra-se vago.

CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA APLICADOS À ECONOMIA

O «Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia», do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, planeou para êste ano, com a colaboração de estudantes, um conjunto de palestras em que seriam tratadas questões de matemáticas elementares, ou assuntos de particular interêsse para os alunos do Instituto.

Dando início a êsse ciclo, tiveram já lugar duas palestras. Realizou-as o estudante João Marujo Lopes que se ocupou da resolução de problemas de máximos e mínimos, sem auxílio do cálculo diferencial.

Do programa projectado faziam ainda parte vários outros trabalhos que o final do ano lectivo, relativamente próximo, justifica não ter levado a efeito.

SÔBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA EM ESPANHA

A Academia Militar de Engenheiros Aeronáuticos de Madrid

*por **Sixto Ríos***

A «Gazeta de Matemática» prosseguindo no seu desejo de esclarecer o público português sôbre o desenvolvimento que os estudos matemáticos tomam, na época presente, nos vários países do mundo, tem o prazer de apresentar aos seus leitores a entrevista que ao Professor Ruy Luís Gomes concedeu o Professor Sixto Ríos, de visita ao nosso país, a convite do C. E. M. P., como acima referimos. Trata-se desta vez duma escola de aplicação à engenharia aeronáutica, a «Academia Militar de Engenieros Aeronáuticos», onde ensina o nosso novo colaborador Professor Sixto Rios.

Por ela o leitor avaliará, se ainda não convencido de tal, do papel fundamental que as matemáticas clássica e moderna desempenham numa escola técnica que não se limita, como é legítimo, a repetir e decalcar técnicas já adquiridas mas pretende acompanhar todos os desenvolvimentos destas e criar novos processos.

M. Z.

— Qual é o objectivo da Escola e quando foi criada?

— La Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos tiene la misión de formar en España Ingenieros aeronáuticos en las distintas especialidades (aeronáutica, aerotecnica, infraestructura) que permitan un desenvolvimiento fecundo de la indústria aeronáutica nacional con independencia de la ayuda extranjera.

La Academia tuvo primeramente cáracter civil y su fundación es reciente: quince años.

— Preparação matemática dos alunos:

Qual é o programa de admissão?

É grande o número de concorrentes?

Quantos são admitidos em média?

Os candidatos ao exame de admissão aonde é que fazem a sua preparação?

Quais são as habilitações mínimas?

Que tempo levam os candidatos a fazer essa preparação?

Qual é a idade média dos alunos do primeiro ano?

Qual é a duração do curso?

— Los exámenes de ingreso se realizan en los meses de junio y septiembre, siendo de 200 a 300 los alumnos concurrentes y de 15 a 20 los admitidos cada curso.

Las materias de examen están divididas en cuatro grupos que pueden aprobarse independientemente: 1º—Cultura general (conocimientos fundamentales, dibujo, traducción correcta de francés, inglés y alemán). 2.º—Matemáticas (Análisis algebraico, Geometrías métrica y proyectiva). 3.º—Matemáticas (Cálculo diferencial y sus aplicaciones algebraicas y geométricas, analítica y descriptiva). 4.º—Física y Química.

Los exámenes comienzan por varias sesiones eliminatorias en que los alumnos deben resolver en un tiempo fijado problemas que se les proporcionen. A continuación hacen un examen oral de la teoría.

La preparación de los alumnos para estos exámenes es completamente libre y suele hacerse, como para otras Escuelas de Ingenieros españolas, en academias particulares. Este es un defecto que, a nuestro juicio, deberá corregirse, pues la enseñanza de dichas academias particulares tiene en general un precio muy superior a su bondad, lo que impide el acceso a las carreras de ingeniería a algunos alumnos.

Normalmente los alumnos emplean tres años en hacer la preparación para el ingreso, aunque algunos lo logren en dos y muchos en cuatro.

La edad media de los alumnos en el primer año es de 20 años; pero no tienen problema de servicio militar, dado el carácter de la Academia. A partir del 2º año de estudios, los alumnos tienen el grado de alféreces con el sueldo y ventajas consiguientes, que les permite una consagración completa a sus estudios. Salen de la Academia después de cinco años de carrera con la graduacion de Capitanes.

— Como está organizado o ensino?

É regime livre ou obrigatório? Os exames?

Há cadeiras fixas de matemática?

Os programas das diferentes cadeiras são fixos?

Quantos professores tem a escola?

Como é que se tem feito o seu recrutamento?

Os professores também fazem investigações? Como auxiliam estas obrigações? Há assistentes?

Quem dá as aulas práticas e as aulas teóricas?

Qual é a orientação geral do ensino?

Ensinam na Escola algumas teorias modernas de matemática?

A que critério tem subordinado a organizacão dos seus cursos e respectivo programa?

—La orientación general de la Academia corresponde al Il.mo Sr. Director Coronel Montalvo, y la orientación concreta de las enseñanzas al Il.mo Sr. Jefe de estudios Teniente Coronel Pérez Marín. Cabe a ambos el acierto de haber logrado conjugar en sabia síntesis el carácter y disciplina militar de la Academia con una amplitud de criterio abierta a todas las reformas e innovaciones. El Profesorado es seleccionado por concurso de méritos científicos y pedagógicos entre todos los ciudadanos españoles sin limitación de títulos. La enseñanza de las materias fundamentales de carácter formativo (Matemáticas, Hidrodinámica, Física, Química) corren, en general, a cargo de Profesores de origen universitario (Catedráticos de Universidad) que con gran entusiasmo consagramos una parte de nuestro tiempo a tan importante labor. En general, la enseñanza de estas disciplinas tiene a la vista las aplicaciones, pero el criterio es darle un carácter formativo y así es frecuente encontrarse en los programas cuestiones de Matemática moderna que no responden a una idea utilitaria de la Ciencia.

Los programas son sometidos a revisión anual por la Jefatura de Estudios, de acuerdo con el Claustro de Profesores.

Los Profesores no tenemos Cátedras fijas, sino que cambiamos cada año, no siendo extraño el caso de Profesores universitarios que introducidos por afición en el estudio de temas aeronáuticos son ya especialistas de primera fila, universalmente apreciados. Tal es el caso de Terradas, alma hoy del recién creado Instituto Nacional de Técnica Aeronáutica, del que se espera una revolución completa en la técnica aeronáutica nacional.

La enseñanza de la parte teórica y práctica de una disciplina corre a cargo del mismo Profesor, quien dispone de una libertad completa en el método de enseñanza y, en general, procuramos establecer una discontinuidad entre las clases teóricas y prácticas. Es corriente el criterio de hacer cada quince días un examen teórico-práctico escrito a los alumnos. El Profesor llega a conocerlos perfectamente aun sin esto, pues yo observé anteriormente que las clases no tienen más de 20 alumnos.

— Como têm resolvido o problema dos livros do curso? Dotações da Biblioteca e Laboratórios.

—Los cursos suelen ser tomados en apuntes por los alumnos y estos apuntes corregidos por el Profesor son copiados rápidamente en litografía, mediante el servicio perfectamente organizado a este efecto por la Jefatura de estudios.

Estos apuntes sirven de base al estudio de los alumnos y han sido el germen de algunos libros excelentes que ha comenzado a publicar la Academia: tales como la Aerodinámica de Terradas, la Mecánica Física de Palacios, las Tablas de Análisis Armónico del Jefe de Estudios Teniente Coronel Pérez Marín, el Curso Superior de Análisis matemático de Navarro Borrás.

En prensa se encuentran: Elasticidad, Hidroaviones y Aerodinámica Aplicada del Coronel Lafita, Vistas de Aeropuertos y Física de Materiales Solidos de Terradas, Tratado de Instrumentos de a bordo de Palacios y Tnte. C. Martinez Pisón y otros.

El Ministerio del Aire edita a sus expensas estos libros y se resarce del importe de la edición mediante la venta de los primeros ejemplares, siendo el resto para el autor. De este modo se fomenta de manera notable la publicación de obras que si no quizá quedarían inéditas por dificultades económicas de los autores.

La Biblioteca de la Academia y los talleres y Laboratorios están dotados con esplendidez extraordinaria.

— Como se justifica uma Escola de Engenharia com um tão grande desenvolvimento de matemáticas puras?

A Escola corresponde a uma necessidade do país?

— Ciertamente que si la Academia tuviera únicamente la pretensión de crear Ingenieros para que resolvieran los problemas «standard» que suelen presentarse en la práctica corriente de la profesión, el plan de Estudios sería superabundante. Más como la idea es llegar a lograr una colaboración de España en la investigatión aeronáutica, tales planes de estudios serán en breve incrementados notablemente con la proyectada creación del título de Doctor en Ingeniería Aeronáutica.

Los nombres gloriosos de La Cierva, Torres Quevedo, Terradas y otros, ponen fuera de duda la capacidad de inventiva de los cerebros españoles en esta importantísima rama de la técnica y hacen esperar un futuro de esplendor para nuestra ciencia aeronáutica, encauzada por la Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos.

La Academia reserva anualmente algunas plazas para alumnos extranjeros y considera un gran honor contar actualmente entre ellos al Capitán portugués Pereira do Nascimento, pues en España perdura el recuerdo y la admiración por la gloriosa gesta de vuestros aviadores Gago Coutinho y Sacadura Cabral.

ANTOLOGIA

EVOLUÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

por ***Beppo Levi***

(Conferência realizada em 18 de Maio de 1940 na inauguração do Instituto de Matemática — Universidad Nacional del Litoral — Rosário-Argentina)

Disse Galileo que «la filosofía è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto dinanzi agli occhi (io dico l'Universo), ma non si puó intendere se prima non s'impara a intender la lingua e a conoscer i caratteri ne'quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche...». Números, figuras e medições são os instrumentos para fixar na nossa mente as manifestações do cosmos: mas não existiriam números nem medições se não houvesse homens. Poderiam os astros rodar pelos espaços, poderia a luz percorrê-los, mas faltaria a pregunta da velocidade da luz e faltaria a resposta de Michelson. Os números foram-nos dados por Deus com o pensamento, e a matemática encontra-se, sempre, onde os factos da natureza se fundem com os do intelecto. Não se trata porém dum ponto de intersecção, mas dum contacto extenso, visto que não é só para dar precisão e forma mnemónica aos nossos conhecimentos que contamos e medimos; é também, e possivelmente mais, porque uma necessidade do espírito nos impele a adoptar os factos da natureza aos esquemas das relações lógicas. Esta necessidade não é contudo igualmente sentida por todos os homens, nem sequer por todos os povos e em todos os tempos. Varia portanto o próprio conceito da matemática, varia o valor que se lhe atribue, varia o seu desenvolvimento.

As notícias mais antigas que actualmente se têm sôbre conhecimentos matemáticos parece que datam de há aproximadamente quatro mil anos e referem-se a dois povos não muito afastados geogràficamente mas de raças e civilizações bastante diferentes: os egípcios e os babilónios; quanto aos primeiros pode dizer-se que tratam só de regras aritméticas tendo em vista cálculos concretos ou de regras geométricas que parecem consagrar certos resultados experimentais de aplicação prática; quanto aos segundos, pode pensar-se numa matemática desinteressada e talvez já de estrutura lógica. Foi Neugebauer — sagaz intérprete de numerosos tijolos encontrados nas excavações do vale do Eufrates — quem descobriu estes documentos dum conhecimento algébrico muito semelhante, segundo parece, ao que floresceu na Europa nos primeiros anos do renascimento científico não só pelo seu conteúdo, mas ainda pela forma geométrica como está expresso. No entanto a genial interpretação de Neugebauer deixa-nos assombrado porque os documentos só apresentam regras dogmáticas, através de exemplos escolhidos de modo a acentuar combinações numéricas que encobrem a parte lógica.

Supõe Negebauer que o papel deductivo ausente, fôsse reservado ao ensino oral e ainda que êste ensino tivesse um certo carácter de importação: parece-me, porém, mais provável que estes documentos revelem uma fase de decadência na qual, tendo-se perdido o gôsto pelo raciocínio deductivo, não tivesse ficado senão uma tradição de escola, facto talvez comparável ao que se deu na Idade Média quando proposições euclideanas de que se tinha perdido o verdadeiro significado, foram objecto de discussões escolásticas. Certo é que a esta antiquíssima cultura matemática se seguiu um período de obscurecimento e houve que esperar um milénio para que a chama voltasse a brilhar noutro lugar e noutro povo: o povo grego.

É provável que até aos gregos tenham chegado algumas tradições práticas de natureza matemática dos povos próximos do Mediterrâneo, porque, segundo testemunha Heródoto, êles teriam aprendido as primeiras noções geométricas dos agrimensores egípcios; e o nome de geometria exprime claramente uma originária intenção prática. Mas ¿quem poderá tomar os «Elementos» de Euclides por um tratado de Topografia? Não foi na medição dos campos, mas nas discussões das escolas filosóficas, sob o estímulo da crítica lógica que se desenvolveu a geometria grega, cujo pensamento, atingiu o auge com a obra de Arquimedes, que anuncia quási todos os temas fundamentais da matemática moderna. Se o rápido desaparecimento dêste pensamento com a chegada da Idade Média não nos surpreende muito, é sòmente porque estamos acostumados a considerar êste período, talvez mais do que realmente foi, como época de barbarie. Mas, em verdade, o declínio da matemática explica-se melhor com a expansão do mundo romano do que com o avanço da Idade Média. Ao contrário da Grécia, Roma que em tantos ramos do progresso civil foi sua rival, que pelo poder militar e político lhe foi imensamente superior, teve por certo uma arte de cálculo, mas não teve — ou quási não teve — um pensamento matemático. Os problemas práticos da medição dos terrenos, do traçado das estradas, das construções municipais, existiam, e grandiosos, na época romana; não deixaram de existir, embora deminuídos, na decadência do Império; mas também estes podem resolver-se por meio de uma técnica mais ou menos perfeita. Parece realmente que o declínio da matemática coincide com o desvio do interêsse dos problemas da razão para as menos complicadas necessidades da técnica.

Durante muitos séculos o pensamento matemático parece ter-se apagado completamente. Para falar duma matemática medieval é preciso dar valor aos mais pequenos aperfeiçoamedtos na arte do cálculo numérico e da numeração.

A matemática renasce com a volta do pensamento livre, do pensamento crítico, com o afirmar-se da filosofia positiva: o que distingue o pensamento positivo do escolástico ou do idealista, não é, como às vezes se diz, porque o primeiro só repare na natureza, porque é igualmente escolástico um materialismo milagroso que se reduza a afirmação de factos, de acontecimentos, de atributos. O que mais distingue o pensamento positivo, julgo eu, está em pedir à natureza respostas bem definidas, lògicamente determinadas. Por tudo isto é preciso afirmar que o que se chama por antonomásia ciência da dedução, é, na verdade, como forma mental, mais do que como instrumento técnico, o antecedente necessário, o guia luminoso da ciência experimental. O nome de Galileo, que figura à frente da escola filosófica positiva, é também o primeiro grande nome do renascimento matemático, não só porque, como recordei, êle tenha afirmado ser a matemática a linguagem em que se exprimem os factos físicos, nem tão pouco porque a matemática lhe seja devedora directamente de algum descobrimento, mas porque da sua escola surgiram os Cavalieri, os Torricelli, os Viviani, porque o pensamento de Galileo tornou possível a obra de Newton. Como já na escola grega de Platão, pareceu novamente com Descartes, Leibniz, Pascal, ser a matemática o fundamento da filosofia; e o século do iluminismo, das revoluções da América e da França, da declaração dos direitos do homem, foi também aquêle em que surgiram as bases das principais teorias matemáticas e físicas modernas. Pode afirmar-se, sem dúvida alguma, que êste período do desenvolvimento das matemáticas ultrapassou em esplendor todos os anteriores: citaremos Euler, Lagrange, Gauss, Fourier, Ampère, Cauchy, Hermite, Poincaré, etc. No prólogo do primeiro volume das Acta Mathematica, Mittag Leffler podia dizer: «A época em que começámos a nossa publicação é certamente uma das mais fecundas na história da matemática, pelo número e importância dos descobrimentos que se referem aos princípios mais essenciais da análise»: isto passou-se em 1882, e, apesar de que sempre é fácil aos contemporâneos errar por falta de perspectiva, pode-se ainda hoje não discordar desta afirmação.

¡Chegámos assim às minhas recordações pessoais: à matemática que eu próprio vivi!

No fim do século passado foi moda uma definição de matemática que a identificava com a lógica dedutiva; e um matemático filósofo chegou ao enunciado paradoxal de que a matemática é a ciência na qual se tiram conclusões exactas, sem conhecer o objecto de que se fala, nem a verdade do que lhe diz respeito: porque as regras da lógica operam sôbre as proposições independentemente do seu significado intrínseco, independentemente da sua verdade objectiva, assegurando às deduções uma verdade hipotética, condicionada à verdade das proposições de que se partiu. Pela mesma razão disse-se da matemática que é ciência tautológica, que nada nos faz conhecer que não conhecêssemos antecipadamente; e um ou outro filósofo idealista pode ter julgado êste argumento suficiente para proclamar a vaidade científica da Matemática, ciência de pseudo-conceitos.

Ao primeiro argumento responderemos, que caracterizar uma ciência pelo instrumento que emprega, é talvez, ao mesmo tempo, excessiva presunção e humildade de mais: presunção porque dá a essa ciência um campo ilimitado, humildade porque fica privada de todo o direito ao ao valor intrínseco sôbre o valor do objecto que investiga.

No que respeita ao segundo argumento, há um sofisma dissimulado, como sempre, num jôgo de palavras: não se deve negar que a tautologia matemática só nos faz conhecer o que antecipadamente se afirmou; mas tambem não tem sentido querer conhecer o que antecipadamente não exista, ou na natureza que nos rodeia, ou no nosso íntimo, ou, ainda, nas afirmações do nosso pensamento; e se a pretendida tautologia consegue descobrir nalgum sistema muito restricto e aparentemente simples, de tais afirmações um conteúdo de extensão inesgotável, de surpreendente variedade e beleza, de que muitas vezes também não se suspeitava, parece-me que a ironia transforma-se em sublime exaltação.

Quero acrescentar que, apesar da dedução lógica ser o que caracterisa a matemática, seria paradoxal chamar matemática a tôda e qualquer dedução; apesar das teorias matemáticas aparecerem como o desenvolvimento unívoco das implicações contidas em poucas proposições iniciais, o verdadeiro espírito matemático manifesta-se precisamente no acto de escolher estas proposições e de escolher entre essas implicações as valiosas e as interessantes.

Talvez colocando-se neste ponto de vista, ao olhar para a imensa variedade e o enorme desenvolvimento da nossa literatura matemática contemporânea possa alguma vez surgir a dúvida de que a indiscutível arbitrariedade do objecto sôbre o qual se exerce a dedução matemática nos leve no fim de contas ao capricho individual. Objecta-se às vezes, que nós os homens não podemos prever — e isto poderá ser útil nas aplicações futuras — que a matemática prepara quadros racionais que, pelo progresso da ciência, poderiam vir a ser úteis, talvez necessários, para colocar nêles os dados e as preguntas da experiência e da prática, e que muitos dêstes quadros possíveis são necessários se se pretende que prática e teoria possam encontrar, no momento oportuno, aquilo de que carecem. Correm de bôca em bôca exemplos deslumbrantes, como o do cálculo diferencial absoluto, que encontrou aplicação na teoria da relatividade, e o do cálculo das matrizes e dos auto-valores, nas teorias atómicas. Não é esta a ocasião para discutir tais exemplos; há, na verdade, diferenças essenciais entre os dois casos: no primeiro, pode pensar-se que a ligação deu-se com o decorrer do tempo e o facto das considerações pluridimensionais serem actualmente habituais entre os matemáticos e até, um pouco também, entre os não matemáticos; no uso cada vez mais generalizado dos referenciais intrínsecos na mecânica e na física matemática, etc., pode pensar-se que se a concepção de Einstein não tivesse sido precedida da creação do cálculo de Ricci e Levi-Civita, não teria encontrado por isso dificuldades essenciais e teria originado ela própria êste desenvolvimente teórico visto que dêle precisava como pode provar adiante a história das teorias vectoriais, que ainda não tem um século. Pode pensar-se precisamente o contrário pelo segundo caso: não é fácil imaginar que algumas idéias vulgares na física chamada ondulatória se teriam produzido sem o precedente abstracto de certas teorias matemáticas: mas parece-me que se trata, mais que duma aplicação, de simples analogias, das quais ainda duvido um pouco.

Direi, concluindo, que não acredito numa ciência feita de retalhos ou, se se prefere, de partes compostas mas ao mesmo tempo independentes. Creio que a matemática tem, a respeito das ciências da natureza, a mesma posição que a filosofia relativamente à história e às ciências morais: os resultados, as fórmulas dão muito menos valor à matemática como factor de progresso, do que os métodos, do que a soma de experiências mentais com que ela vai enriquecendo a nossa faculdade de raciocínio. Nada significa um ou outro caso, caso feliz em que uma fórmula matemática pode resolver um problema de aplicação, porque a história mostra-nos que é muito mais freqüente o caso em que os problemas propostos pela filosofia natural constituem o ponto de partida para o desenvolvimento de novas teorias matemáticas. E eu penso que, para a ciência, deve temer-se como uma doença, o procurar uma justificação exterior, assim como no homem a pregunta do fim, do como e do porquê da vida. Sabe-se quanta filosofia desesperada há no fundo desta pregunta; e, no entanto, vive-se pelo amor à vida, pelo amor aos filhos, pelo amor à humanidade. O mesmo sucede com a ciência: as teorias valem pela luz interior que devemos a quem as criou, valem pela luz que ainda dão a quem as estuda. ¡Não interessa que esta luz possa derivar duma pregunta de pura especulação científica ou de ciência aplicada! ¿Deve pois considerar-se só como acaso que muitas vezes preguntas dum e doutro tipo, conduzem aos mesmos resultados? Também não acredito, porque a fôrça do homem reside no entendimento e a distinção entre entendimento e aplicação só pode ser provisória e aparente.

A finalidade da vida é a vida digna e a da ciência é a ciência digna; mas o conceito de dignidade sai só da nossa consciência; por isso, estão igualmente afastadas da verdade ambas as fórmulas: a da ciência para a prática e a da ciência para a ciência.

Um dos campos em que mais se tem empregado a matemática como simples dedução lógica é na investigação dos «fundamentos». Pode dizer-se, com verdade, que o que fez nascer a definição da matemática como lógica pura foi verdadeiramente o grande interêsse suscitado pelos fundamentos. ¡Mas não se deve acreditar por isso que a preocupação dos fundamentos lógicos das deduções matemáticas seja exclusivamente moderna. Quanta investigação de fundamentos está contida na obra de Euclides: no cuidado com que estão enunciados nos «Elementos» — embora de maneira que não corresponde completamente às exigências modernas — os axiomas, as «noções comuns»; no esfôrço para atrasar o mais possível o uso do célebre axioma que mais tarde foi a preocupação dos geómetras durante muitos séculos; na teoria das proporções, no princípio da exaustação. O método é certamente diferente do nosso: nunca na antiguïdade se tratou de construir sistemas lógicos hipotéticos; pensava-se nessa época só em dar forma lógica, baseada sôbre alguns conceitos que pareciam mais intuïtivos, a teorias conhecidas, quer pela experiência, quer pela intuïção. Nós, pelo contrário, construímos, a priori, as geometrias não-euclideanas. Mas, ¿é verdadeiramente para antecipar uma geometria possível num espaço físico que uma pretendida experiência viria a demonstrar não euclideana, que nos vêm interessando há mais de dois séculos, aproximadamente, as geometrias não euclideanas? e as geometrias dos espaços curvos? A resposta não pode ser senão negativa se repararmos nas origens: começando com a obra de Saccheri, e seguindo com a de Gauss, Bolyai, Lobachewski, Riemann, nunca o estímulo para a investigação matemática foi a dúvida acêrca da natureza física do espaço, mas o desejo de penetrar através do artifício da hipótese contrária, no íntimo sentido das hipóteses que caracterizam a geometria euclideana que domina as nossas experiências diárias. É certo que, formada a teoria, sob a influência duma filosofia empírica, talvez no vão desejo duma justificação utilitária, poude nascer a questão: se uma geometria não-euclideana com raio de curvatura suficientemente grande, mas não infinito, corresponderia melhor aos factos da experiência. Eu julgo que se a resposta nunca foi decisiva, é porque a geometria precede as medições, é a condição para a sua interpretação, é a teoria dos instrumentos de medir.

Na filosofia matemática moderna, tomou transcendente importância a consideração de que os conceitos postos como fundamento das teorias operam na dedução, não pelas «intuïções» que êles representam, mas sim pelas propriedades inerentes a estas intuïções. Tudo aquilo que concebemos como intuïção imediata, tudo aquilo que exprimimos habitualmente com uma palavra «número», «ponto», «recta», «espaço», «curvo», «infinito», ...é sempre, sem darmos por isso, um conjunto, uma constelação de atributos que se podem dizer mais simples, com o mesmo sentido que o cloro e o sódio são mais simples, mas não mais intuïtivos, que o sal comum: a matemática opera como o reagente revelador: sem renunciar à tarefa de reduzir, quando e como pode, o problema complexo às intuïções mais simples, vai descobrindo muitas vezes o complexo sob a ilusão da simplicidade; então desintegra o conjunto de atributos e uma ou outra parte impele-nos para conseqüências lógicas muitas vezes inesperadas. Muitas das teorias matemáticas modernas de maior valor, derivaram desta decomposição de conceitos mais ou menos intuïtivos noutros de menor conteùdo (e, por isto, do ponto de vista lógico, de maior extensão). Recordarei aqui as teorias das operações e dos grupos, as generalizações da noção de número (números algébricos, números complexos, ideais, módulos,...) a teoria dos conjuntos. Esta última teoria tem as suas raízes no desejo de esclarecer as noções fundamentais daquêle «cálculo infinitèsimal», cálculo de fluentes e fluxões, cálculo dos indivisíveis, Analysis infinitorum, que desde Newton e Leibnitz durante dois séculos, muitas vezes por brilhantes intuïções, tinha dado resultados tão surpreendentes. Estão relacionadas com esta teoria as questões de lógica matemática; mas, ainda que, como teoria, ocupe um lugar bastante limitado entre outras teorias matemáticas, tem nomes ilustres como Peano, Russell, Hilbert, a escola de Varsóvia e a de Viena; e certas exigências lógicas não conhecidas anteriormente adquiriram transcendência em todo o campo matemático.

Não é esta a ocasião para falar das grandes teorias mais intimamente relacionadas com o desenvolvimento da mecânica e da física matemática:

equações diferenciais e às derivadas parciais, equações integrais, cálculo das variações, problemas de valores sôbre um contôrno... Recordarei que a fôrça de abstracção contida nos símbolos, impelindo as intuições primitivas a desligar-se de idéias contingentes gerou extra-explorações importantes no desenvolvimento da física: tais os conceitos de energia e de campo; daqui as teorias de Maxwell, de Planck, de Einstein.

Nos últimos anos parece que a matemática poderia indicar-nos o caminho dos segredos da natureza, não pela faculdade de generalização pela qual a fantasia se concilia com a lógica, mas só pelas propriedades formais dos seus símbolos; parece também que, sem claras hipóteses inteligíveis, um simples mecanismo algorítmico pudesse, talvez por uma nova magia, revelar-nos alguma coisa da essência íntima das íntimas leis da matéria. Se esta tarefa, nesta forma, pudesse ser realizada pela matemática, então ficaria justificado o acumular fórmulas com preceitos combinatórios completamente arbitrários. Não o creio; tenho fé em que, também no campo reservado agora às novas mecânicas, outros triunfos possa alcançar a matemática, dando ao intelecto humano o prazer de conhecer racionalmente.

Tradução de M. AUGUSTA PEREZ FERNANDEZ

O PROGRESSO DA MATEMÁTICA

por *J. G. Crowther*

(De «The Social Relations of Science», p. 54-55)

Parece que os grandes progressos na Matemática estão relacionados com os novos contactos entre culturas. Pode surgir, portanto, um período curto de progresso rápido, enquanto as possibilidades do novo conjunto de conceitos fundamentais evoluem do contacto que se estabeleceu. Quando a nova tradição matemática foi estabelecida, alguns dos seu ramos fundamentais esperaram para surgirem o grande passo seguinte da civilização. Se esta teoria é verdadeira, parecerão impossíveis progressos fundamentais na matemática moderna, porque os povos de todo o globo estão agora em íntimo contacto. Talvez os progressos fundamentais do futuro venham a ser devidos não a contacto ou assimilação entre povos de diferentes culturas, mas a assimilação entre classes sociais de culturas diversas. A ciência moderna, com o seu equilíbrio entre a teoria e a prática, parece dever muito ao contacto entre os escolares e os técnicos manuais e pode ser uma expressão da assimilação crescente das duas classes. É possível que uma Matemática fundamentalmente nova não seja criada até que a nossa própria civilização se extinga e o redescobrimento das suas ruínas provoque a inspiração a novos povos, daqui a milhares de anos, os quais encararão o nosso conhecimento matemático dum novo ponto de vista e verão nele possibilidades invisíveis para nós em virtude da feição particular dada à nossa mente pela civilização que herdámos.

Tradução de A. SÁ DA COSTA

ENSINO UNIVERSITÁRIO APÓS A GUERRA

(De «The Advancement of Science» Vol. II, n.º 6, July 1942)

A Sub-Comissão Executiva da Secção das Relações Sociais e Internacionais da Ciência, da Associação Britânica para o Progresso da Ciência, realizou uma reünião para estudo da acção a levar a efeito pela Associação em relação com o ensino universitário após a guerra.

Resolveu-se constituir uma comissão com os objectivos gerais que seguem:

a) Considerar a política e métodos gerais do ensino universitário tendo em vista a promoção da colaboração internacional e a livre permuta de ideias, e a relacionar o ensino universitário com as necessidades e para o serviço da comunidade.

b) Estudar a reorganização dos programas e dos *curricula* de acôrdo com as concepções modernas das inter-relações dos diferentes ramos do conhecimento, sobretudo os da ciência e das humanidades.

c) Investigar a situação no que respeita ao material de ensino, aparelhos, livros e pessoal, nas universidades que foram danificadas, destruídas desorganizadas ou encerradas, em virtude da guerra, e interessar-se pela sua reintegração.

Esta comissão foi constituída sob a presidência do Dr. Maxwell Garnett, C. B. E., com o Prof. F. E. Weiss, F. R. S. e A. Gray Jones, como secretários honorários adjuntos, e empenhou-se activamente na sua tarefa.

Tradução de A. SÁ DA COSTA

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1942)

Faculdade de Ciências — Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

Ponto n.º 2

I

1344 — Determinar as condições a que deve satisfazer m para que a equacão $x^4-(2m-1)\,x^2+$ $+m^2-4=0$ tenha 4 raízes reais e diferentes. R: *A resolvente deverá ter* 2 *raizes positivas e diferentes, pelo que* m *deverá satisfazer simultâneamente às seguintes condições:* $2m-1>0$, $m^2-4>0$ *e* $(2m-1)^2-4(m^2-4)>0$. *Os valores de* m *são todos os compreendidos entre* 1/2 *e* 17/4.

1345 — *a)* Simplifique a fracção $\dfrac{x^2-6x+5}{3x^2+6x-9}$. R: $(x-1)(x-5):3\,(x+3)(x-1)=(x-5):(3x+9)$.

b) Sendo $y=3\operatorname{sen}2x$ deduza a expressão que dá explicitamente o valor de x em função de y. R: $y/3=\operatorname{sen}2x$; $2x=\operatorname{arcsen}y/3$ *e* $x=1/2.\operatorname{arcsen}y/3$.

1346 — *a)* Determine, recorrendo ao cálculo logarítmico, a altura de um triângulo isósceles sendo 43° 21′ 30″ o ângulo formado pelos dois lados do triângulo que têm comprimentos iguais, e 14,42 o comprimento do terceiro lado. R: $h=7{,}21\operatorname{cotg}21^\circ\,40\,45''$, $\log h=\log 7{,}21+$ $+\log\operatorname{cotg}21^\circ\,40'\,45''=0{,}85794+0{,}40063=1{,}25867$ *e* $h=18{,}14$. *b)* Transforme na soma de dois radicais simples a expressão: $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$ R: $\sqrt{7+2\sqrt{6}}=$ $=\sqrt{x}+\sqrt{y}$; $7+2\sqrt{6}=x+y+2\sqrt{xy}$ *donde se conclue que* $x+y=7$ *e* $xy=6$. *Os valores de* x *e* y *são as raizes da equação* $x^2-7x+6=0$: $x=6$ $y=1$.

II

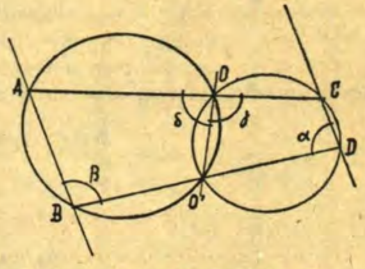
1347 — Verifique a identidade $\operatorname{sen}3a\operatorname{cosec}a-$ $-\cos 3a\sec a=2$. R: $\operatorname{sen}3a:\operatorname{sen}a-\cos 3a:\cos a=2$. *Mas:* $\operatorname{sen}3a=3\operatorname{sen}a\cos^2 a-\operatorname{sen}^3 a$ *e* $\cos 3a=$ $=\cos^3 a-3\operatorname{sen}^2 a\cos a$ *donde* $3\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a-$ $-\cos^2 a+3\operatorname{sen}^2 a=2(\cos^2 a+\operatorname{sen}^2 a)=2$.

Obs. — Para calcular $\operatorname{sen}3a$ e $\cos 3a$ aplique sucessivamente as expressões de $\operatorname{sen}(a+b)$ e $\cos(a+b)$.

III

1348 — Que números inteiros se podem juntar aos termos duma fracção irredutível sem lhes alterar o valor? Justifique a resposta. R: *Veja a resposta à mesma questão no exercício n.º* 1356.

1349 — Por cada um dos pontos O e O′ de intersecção de duas circunferências tire uma recta que corte as duas circunferências. Demonstre que as cordas que unem os pontos em que as rectas



cortam as duas circunferências são paralelas. R: $\hat{\alpha}=180^\circ-\hat{\gamma}$; $\hat{\gamma}=\hat{\beta}$ *visto que* $\operatorname{med}\hat{\gamma}=\operatorname{med}\hat{\beta}=$ $=1/2\cdot\widehat{AOO'}$. *Portanto* $\hat{\alpha}=180^\circ-\beta$ *e os ângulos* $\hat{\alpha}$ *e* $\hat{\beta}$ *têm os lados* AB *e* CD *paralelos.*

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus

Ponto n.º 4

1350 — Resolva a inequação $\dfrac{x+1}{x-1}<\dfrac{x-1}{x+1}$.

R: *A inequação dada é equivalente a* $\dfrac{4x}{x^2-1}<0$ *ou aos sistemas:* $4x>0$, $x^2-1<0$ *e* $4x<0$, $x^2-1>0$ *cujas soluções são respectivamente* $0<x<1$ *e* $x<-1$.

1351 — *a*) Forme a equação biquadrada de coeficientes reais de que é raiz o número $1-2i$. R: *As outras raizes são:* $1+2i$, $-1+2i$ *e* $-1-2i$, *e a equação será:* $[x-(1-2i)]\,[x-(-1+2i)]\,[x-$ $-(1+2i)]\,[x-(-1-2i)]=0$ *ou* $[x^2-(1-2i)^2]\,[x^2-$ $-(1+2i)^2]=0$ *ou* $x^4+6x^2+25=0$.

b) Reduza ao menor índice comum os radicais $\sqrt[12]{16}$ e $\sqrt[20]{81}$. R: *Reduzindo-os primeiro ao mesmo indice tem-se:* $\sqrt[60]{16^5}$ *e* $\sqrt[60]{81^3}$ *ou* $\sqrt[60]{2^{20}}$ *e* $\sqrt[60]{3^{12}}$ *que simplificados dão:* $\sqrt[15]{2^5}$ *e* $\sqrt[15]{3^3}$.

1352 — Determine por logaritmos, a altura dum trapézio rectângulo cujas bases medem 17,31 metros e 12,43 metros e em que um dos ângulos internos mede 122°16′. R: $h=4{,}88\operatorname{tg}(180^\circ-122^\circ16')$ $h=4{,}88\operatorname{tg}57^\circ\,44'$ $\log h=\log 4{,}88+\log\operatorname{tg}57^\circ\,44'=$ $=0{,}68842+0{,}19972=0{,}88814$ *e* $h=7{,}729$ m.

1353 — Escreva a expressão geral dos ângulos x que satisfazem à condição: $\operatorname{tg}(x/2-\pi/3)=$

$= \operatorname{cotg} 2/3\pi$. R: $x/2 - \pi/3 = \pi/2 - 2/3\pi \pm k\pi$; $x/2 = \pi/6 \pm k\pi$ *e* $x = \pi/3 \pm 2k\pi$.

1354 — Deduza o valor da razão das áreas dos círculos circunscritos a um triângulo equilátero e a um hexágono regular cujos perímetros são iguais. R: $P = 3L = 6l$ *e* $\therefore L = 2l$ *e* $\pi R^2/\pi r^2 = R^2/r^2 = L^2/3 : l^2 = 4l^2/3 : l^2 = 4/3$ *visto que* $R = L/\sqrt{3}$ *e* $r = l$.

1355 — *a)* Trace por um ponto P exterior a uma circunferência uma tangente e uma secante a essa circunferência. Que relação existe entre os segmentos da tangente e da secante limitados pelo ponto dado e pela circunferência.

b) Quais são os poliedros regulares que conhece? Indique, entre êles, dois em que o número de vértices de um seja igual ao número de faces do outro.

1356 — Quais são os números que podem juntar-se aos dois termos duma fracção irredutível sem alterar o valor dessa fracção? Justifique a resposta. R: *Os dois números deverão ser tais que* $a : b = (a+x) : (b+y)$ *ou* $ay - bx = 0$ *donde* $a/b = x/y$. *Os números* x *e* y *são portanto dados pelas expressões* $x = na$ *e* $y = nb$ *sendo* n *um inteiro positivo.*

Soluções dos n.os 1344 a 1356 de J. J. Rodrigues dos Santos

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 4

1357 — Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\operatorname{tg} x - \frac{1-\operatorname{tg} y}{4} = \operatorname{tg} y \\ \frac{1}{4}\operatorname{tg} y + \frac{1-\operatorname{tg} x}{6} = 0. \end{cases}$$

R: *O sistema proposto é equivalente a* $6 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg} y = 1$; $2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg} y = 2$ *o que dá imediatamente* $\operatorname{tg} x = -1/4$ *e* $\operatorname{tg} y = -5/6$; *donde* $x = 165^0 57' + n\,180^0$ *e* $y = 140^0 12' + n\,180^0$.

1358 — Dado um tetraedro regular de $1^m{,}135$ de aresta, determine o seu volume e o ângulo de duas faces. R: *Sendo* l *a aresta será o volume dado por* $V = \frac{l^3}{12}\sqrt{2}$, *donde* $\log V = 3 \log l + \frac{1}{2}\log 2 + \operatorname{colg} 12 = 3 \cdot 0{,}05500 + 0{,}15051 + 2 \cdot \bar{2}{,}92082 = \bar{2}{,}15715$ *e* $V = 0{,}01436^{m3}$. *O ângulo diedro é dado por* $\cos \alpha = 1/3$ *como se verifica fàcilmente considerando as perpendiculares a uma aresta baixadas dos vértices opostos e a altura do tetraedro.*

1359 — Simplifique a expressão

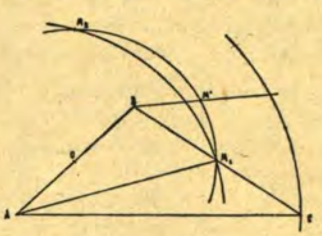
$$\frac{(a^{-1}\sqrt{b})^{1/2}\,(x^2-3x+2)}{(a^{1/2}b)^3\,(x-1)}.$$

R: $\frac{a^{-1/2}\,b^{1/4}\,(x-1)\,(x-2)}{a^{3/2}\,b^3\,(x-1)} = (x-2) \cdot a^{-2} \cdot b^2\,\sqrt[4]{b^3}$.

1360 — Quantas circunferências pode tirar tangentes simultâneamente a três rectas? Sendo *n* rectas ¿qual é o número máximo de circunferênciais que pode tirar em tais condições? R: *No primeiro caso o número máximo de circunferências que se podem traçar é de* 4. *No segundo caso, se considerarmos que as rectas estão dispostas de modo que não há mais de duas que passem pelo mesmo ponto, o número total será* $4 \times {}^nC_3$.

1361 — O número 2012 está escrito na base 3 de numeração. Diga qual é o resto da divisão daquele número por 3^2. Justifique a resposta. R: $2012 = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3 + 2 = 2 \cdot 3^3 + 5 = \dot{3}^2 + 5$ *logo o resto é* 5 *escrito no sistema de base* 10 *ou* $12_{(3)}$.

1362 — Diga como construia um triângulo sendo dados os comprimentos de dois lados e da mediana que partem de um mesmo vértice. (Principie por considerar apenas dados os comprimentos dos lados, e, fixando um dêles, veja qual é o lugar geométrico dos meios do 3.º lado. R: *Consideremos um dos lados dado* AB *em que* A *é o vértice pelo qual passam a mediana e o outro lado* AC. *O lugar geométrico das posições que pode ocupar o terceiro vértice* C *é*



uma circunferência de centro A *e raio* AC. *Por outro lado, considerando tôdas as posições que pode ocupar* C, *o meio do terceiro lado descreve um lugar que é uma circunferência homotética da descrita pelo ponto* C, *de raio igual a metade de* AC *e centro o ponto médio de* AB. *Por outro lado o extremo da mediana dada descreverá uma circunferência de raio igual ao comprimento da mediana e centro em* A. *O encontro dos dois lugares que contêm o meio do terceiro lado define o ponto médio dêste, que com* B *determina o terceiro lado e conseqüentemente o triângulo.*

Soluções dos n.os 1357 a 1362 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia

Ponto n.º 1

I

1363 — Calcule os valores a atribuir ao parâmetro *m* para que a desigualdade

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1) < 0$$

seja verificada para todos os valores reais atribuídos a x. R: *Para que a desigualdade seja veri-*

ficada para todos os valores reais atribuidos a x, *deverão as raizes do trinómio ser imaginárias e o coeficiente de* x^2 *ser negativo, isto é :*

$$\begin{cases} \Delta<0 \\ m+1<0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} (m-1)^2-3(m-1)(m+1)<0 \\ m+1<0 \end{cases}$$

donde : $\begin{cases} m^2+m-2>0 \\ m+1<0 \end{cases} \quad \begin{cases} m>1 \text{ e } m<-2 \\ m<-1 \end{cases}$

e portanto $\boxed{m<-2}$.

1364 — *a)* Defina arranjos de *n* objectos *p* a *p*. Considere formados os arranjos de ordem $p-1$; ¿cada um dêstes arranjos a quantos arranjos de ordem *p* dá origem? Justifique a sua resposta. R: *Chamam-se arranjos de* n *objectos, tomados* p *a* p, *aos grupos que se podem constituir com* p *dos* n *objectos dados, de modo que difiram uns dos outros quer pela ordem, quer pela natureza dos objectos que os constituem. Cada arranjo de ordem* $p-1$ *de* n *objectos, dá origem a* $n-(p-1)$ *arranjos de ordem* p. *Com efeito, formados os arranjos de ordem* $p-1$, *para formar os arranjos de ordem* p, *basta colocar à sua direita um dos* $n-(p-1)$ *objectos que nela não figuram.*

b) Supondo que $\operatorname{colog}\sqrt{N^3}=-3a$, diga qual é o $\log N$ e justifique a sua resposta. R: *De* $\operatorname{colog}\sqrt{N^3}=-3a$ *deduz-se* $3/2 \operatorname{colog} N=-3a$ $\operatorname{colog} N=-6a/3=-2a$ *e portanto* $\log N=2a$.

II

1365 — De um ponto *P* que dista 437,12 metros do centro *O* de uma circunferência de raio *x* igual a 144,5 metros, conduziram-se duas tangentes à referida circunferência. Calcule o ângulo θ formado por essas tangentes. Utilize logaritmos. R: *Tem-se* $r=\overline{OP}\cdot \operatorname{sen}\theta/2$ *ou* $\operatorname{sen}\theta/2=\dfrac{r}{\overline{OP}}=\dfrac{144,5}{437,12}$ *donde* $\log \operatorname{sen}\theta/2=\log 144,5+\operatorname{colog} 437,12=2,15987+\bar{3},35940=\bar{1},51927$, *e* $\theta/2=19^\circ\,18'\,13'',3$ *ou* $\theta=38^\circ\,36'\,26'',6$.

1366 — *a)* Calcule $\operatorname{sen}(1135^\circ\,30')$. Utilize as tábuas naturais. R: $\operatorname{sen}1135^\circ 30'=\operatorname{sen}55^\circ 30'=0,824$.

b) Verifique a identidade

$$\frac{2\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}=\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b.$$

R: $$\frac{2\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}=$$

$$=\frac{2(\operatorname{sen}a\cos b+\operatorname{sen}b\cos a)}{\cos a\cos b-\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b+\cos a\cos b+\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}=$$

$$=\frac{2(\operatorname{sen}a\cos b+\operatorname{sen}b\cos a)}{2\cos a\cos b}=\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b. \quad \text{c. q. d.}$$

III

1367 — Demonstre que se duas alturas de um triângulo são iguais, o triângulo é isósceles. R: *Sejam, com efeito,* h_a *e* h_b *as alturas referentes aos lados* a *e* b *do triângulo dado. A área do triângulo é, como se sabe,* $S=\dfrac{a}{2}\times h_a$ *ou* $S=\dfrac{b}{2}\times h_b$ *donde* $\dfrac{a}{2}\times h_a=\dfrac{b}{2}\times h_b$ *e, por ser* $h_a=h_b$, *se deduz* $\boxed{a=b}$.

1368 — Os catetos de um triângulo rectângulo medem respectivamente 3 centímetros e 4 centímetros. Calcule a *área lateral* do sólido gerado pela rotação do triângulo em tôrno do cateto maior, supondo que o *ângulo de rotação é de* 180°. R: *O sólido obtido é um semi-cone de geratriz igual à hipotenusa do triângulo dado* (5 cm) *e raio igual a* 3 cm. *Êste sólido é limitado por metade da superfície do cone de geratriz igual a* 5 cm *e raio da base igual a* 3 cm *e por um triângulo isósceles de base igual a* 6 cm *e altura igual a* 4 cm. *A sua área lateral será*

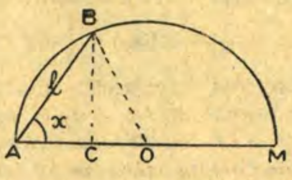
$$S=\frac{3,14\times3\times5}{2}+\frac{6\times4}{2}=1,57\times15+12=35,55\ \text{cm}^2.$$

Soluções dos n.os 1365 a 1368 de J. Calado.

I. S. C. E. F. — Exames de Aptidão — 9-10-1942

Ponto n.º 4

1369 — *a)* Defina as funções trigonométricas; dê as suas relações mais importantes; relacione as funções trigonométricas de dois ângulos cuja diferença seja $3\pi/4$. R: $\operatorname{sen}\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)$; $\cos\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)$ *e* $\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}$. *b)* Dados dois pontos *A* e *B* à distância *l*, faz-se passar por êles uma semi-circunferência de raio *r*. Seja *O* o centro da semi-circunferência, $\overline{AM}$ o diâmetro e tire-se $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{AM}$. Calcule, em função de *l* e do ângulo $x=\widehat{BAO}$, a área do triângulo *BCO*. R: $S=1/2\,\overline{BC}\times\overline{CO}=1/2\,\overline{BC}\,(r-\overline{AC}=$ $=1/2\cdot l\operatorname{sen}x\,(1/2\cdot\sec x-l\cos x)=l^2/4(\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}2x)$.

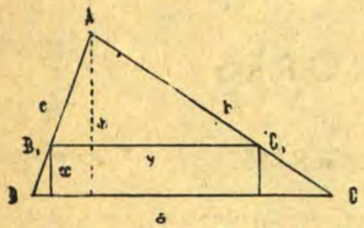


1370 — Calcule $(x+a)^4+(x-a)^4$. ¿A equação $(x+a)^4+(x-a)^4=0$ pode ter raízes reais? Porquê? (*a* é um número real qualquer). R: $(x+a)^4+(x-a)^4=2(x^4+6a^2x^2+a^4)$. $x^4+6a^2x^2+a^4=0 \to x=\pm\sqrt{-3a^2\pm\sqrt{9a^4-a^4}}=\pm a\sqrt{-3\pm\sqrt{8}}$. *A equação não tem raizes reais porque, qualquer que seja* a, *é sempre* $-3\pm\sqrt{8}<0$.

1371 — Calcule a área da esfera cujo volume é 1^{m3}. ¿Se se opera com uma tábua de logaritmos de cinco decimais, que confiança merece o resultado? R: *Tem-se* $\frac{4}{3}\pi r^3=1$ *donde* $r=\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$. *Substituindo êste valor em* $S=4\pi r^2$ *vem* $S=4\pi\sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2}}=\sqrt[3]{36}\cdot\pi$. *Portanto* $\log S=1/3(\log 36+\log\pi)=1/3(1{,}55630+0{,}49715)=0{,}68448$ *donde* $S=4{,}8359^{m2}$.

1372 — *a)* Defina simetria no plano e enuncie as propriedades que conhecer.

b) Dado um triângulo de lados *a*, *b* e *c*, calcule os lados *x* e *y* de um rectângulo inscrito nêle de modo tal que a soma dêsses lados seja um número dado *p*. R: *Tem-se* $x+y=p$. *Da semelhança dos triângulos* ABC *e* AB_1C_1 *resulta* $\frac{a}{y}=\frac{h}{h-x}\to hy=a(h-x)$.



O sistema $\begin{cases} x+y=p \\ ax+hy=ah \end{cases}$ *resolve o problema e dêle se deduz* $x=\frac{h(p-h)}{h-a}$, $y=\frac{a(p-h)}{a-h}$. *Designando por* S *a área do triângulo e por* $2p'$ *o perímetro* $(2p'=a+b+c)$ *tem-se, evidentemente* $S=ha/2=\sqrt{p'(p'-a)(p'-b)(p'-c)}$ *donde se deduz* h *em função de* a, b *e* c.

1373 — Ache um número inteiro de três algarismos sabendo que a soma dos dois primeiros é igual ao último e que o número dividido por 9 dá um cociente múltiplo de 9.

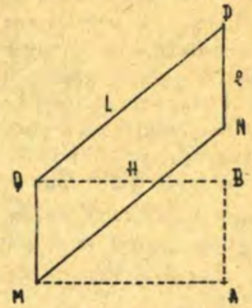
$$R:\ \begin{cases} N=100a+10b+c=\dot{8}1 \\ b+c=a \end{cases} \quad \begin{cases} b+c=a \\ 101a=9(\dot{9}-b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+c=a \\ a=9 \end{cases} \quad \begin{cases} a=9 \\ b=9,8,7,6,5,4,3,2,1,0 \\ c=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \end{cases}$$

introduzindo a primeira condição vem $N=972$.

1374 — *a)* Defina e descreva alguns sólidos de revolução importantes.

b) Calcule a razão dos volumes dos sólidos gerados por um paralelogramo girando em tôrno de cada um dos seus lados. R: *Volume do sólido gerado pela revolução em tôrno de* l $V_l=\pi/3\,H^2\cdot\overline{BP}+\pi\overline{MA}^2\cdot\overline{AB}-\pi/3\,\overline{MA}^2\cdot\overline{AN}=\pi\cdot H^2\cdot l$ *por ser* $H=\overline{MA}$ *e* $\overline{BP}=\overline{AN}$. *Volume do sólido gerado pela revolução em tôrno de* L $V_L=\pi\cdot h^2\cdot L$. *Razão dos volumes* $\frac{V_l}{V_L}=\frac{\pi H^2 l}{\pi h^2 L}=\frac{H^2 l}{h^2 L}$.



Soluções dos n.os 1369 a 1374 de A. Sá da Costa.

Instituto Superior Técnico

1375 — Se a velocidade de um veículo aumentar de modo que as rodas em cada volta gastem menos um segundo, o tempo gasto num percurso diminuirá uma hora e meia. Sabendo que as rodas do veículo têm o raio igual a 40 centímetros, calcular a extensão daquêle percurso. R: *Qualquer que seja a velocidade do veículo, a extensão do percurso será* $2\pi Rn$, *sendo* n *o numero de voltas dadas pelas rodas e* R *o seu raio. Se por cada volta das rodas se gastou menos* 1 *segundo e se foi* 5400 *segundos* ($\equiv$1h 30m) *o tempo gasto a menos no percurso total, o número* n *de voltas será* 5400; *portanto* $2\pi Rn=2\pi\cdot 40\cdot 5400$ cm $\cdot\sim 13{,}571$ km (*com* $\pi=3{,}1416$).

1376 — Mostre que se *a*, *b* e *c* são lados de um triângulo, o trinómio $a^2x^2+(b^2-a^2-c^2)x+c^2$ é positivo para todos os valores *x*. R: *Terá que ser:* $\Delta=(b^2-a^2-c^2)^2-4a^2c^2=(b^2-a^2-c^2-2ac)(b^2-a^2-c^2+2ac)=[b^2-(a+c)^2]\cdot[b^2-(a-c)^2]<0$.

De facto, por serem a, b *e* c *lados de um triângulo será:* $b<a+c$, $b>a-c$, *donde* $b^2-(a+c)^2<0$, $b^2-(a-c)^2>0$ *e portanto* $\Delta<0$.

1377 — Determinar os ângulos *B* e *C* de um triângulo rectângulo, sendo $\operatorname{tg} B/2\cdot\operatorname{tg} C/2=1/6$. R: *Como* $B+C=\pi/2$, $\operatorname{tg}B/2\cdot\operatorname{tg}C/2=\operatorname{tg}B/2\cdot\operatorname{tg}(\pi/4-B/2)=\operatorname{tg}B/2\cdot(1-\operatorname{tg}B/2)/(1+\operatorname{tg}B/2)=1/6$. *Por ser* $1+\operatorname{tg}B/2\neq 0$ *virá:* $6\operatorname{tg}^2 B/2-5\operatorname{tg}B/2+1=0$ *donde* $\operatorname{tg}B/2=1/2$ *e* $\operatorname{tg}B/2=1/3$. *De* $\operatorname{tg}B/2=1/2$ *vem* $\log\operatorname{tg}B/2=\operatorname{colog}2=\bar{1}{,}69897$ *donde* $B=53^\circ\,7'\,48'',75$

e $C=90°-B=36°\,52'\,11'',25$. *Seria fácil ver que a equação* $\operatorname{tg} B/2=1/3$ *conduz a* $B=36°\,52'\,11'',25$ *e* $C=53°\,7'\,48'',75$.

1378 — A área da corôa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita a um hexágono regular é igual a 31,4 cm². Determinar a área do hexágono. R: *Sendo* R *e* r $(R>r)$ *os raios das circunferências que limitam a corôa circular, a sua área será:* $\pi(R^2-r^2)=31{,}4\,\text{cm}^2$ *donde* $R^2-r^2=10\,\text{cm}^2$ (*com* $\pi=3{,}14$). *O lado do hexágono é* R *e o seu apótema* r. *É fácil ver que* $r^2=R^2-R^2/4$, $r=R\sqrt{3}/2$ *e portanto* $R^2-r^2=1/4\cdot R^2=10\,\text{cm}^2$, $R=2\sqrt{10}$ cm. *A área do hexágono será pois* $S=60\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

1379 — Inscrever numa circunferência de raio R um triângulo isósceles tal que a base seja m/n da altura. R: *É fácil ver que em tal triângulo se verificará a relação* $R^2=(h-R)^2+(b/2)^2$, *sendo* h *a altura e* b *a sua base. Atendendo a que* $b=m/n\cdot h$, *virá:* $(m^2+4n^2)/4n^2\cdot h^2-2Rh=0$ *donde* $h=0$, *solução sem interêsse e* $h=8Rn^2/(m^2+4n^2)$.

1380 — Dado um tetraedro regular de aresta a, tirar, por uma das arestas, um plano que divida o tetraedro em duas partes cujos volumes estejam na razão 1/2. R: *A solução é evidente. Com efeito, visto que o plano passa por uma das arestas, o tetraedro dado ficará dividido noutros dois tetraedros não regulares com a mesma altura do proposto; portanto a razão dos seus volumes* V_1 *e* V_2, *será a razão das áreas das suas bases* B_1 *e* B_2. *As suas bases serão dois triângulos cujas alturas são iguais à altura do triângulo equilátero, base do tetraedro dado; portanto a razão das suas áreas será a razão das suas bases* b_1 *e* b_2. *Logo* $V_1/V_2=$ $=B_1/B_2=b_1/b_2=1/2$. *Trata-se pois de fazer passar um plano por uma aresta do tetraedro regular e pelo ponto que divide a aresta oposta em dois segmentos de razão* 1/2. *Como há dois pontos nestas condições, o problema admite duas soluções. São dois planos simétricos em relação ao plano que passa pela mesma aresta e pelo ponto médio da aresta oposta.*

Soluções dos n.os 1375 a 1380 de O. Morbey Rodrigues.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

Exames de freqüência

ALGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **1.º exame de freqüência, 1943.**

I

1381 — Derive $y=(1+\operatorname{tg}^2 x)^{-e^{\sqrt[3]{-x}}}$.

1382 — Primitive

$$y=\frac{2x}{1+\cos 2x}+\frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}-\frac{x^3}{x^2-1}.$$

1383 — Forme a razão incremental, de $\dfrac{1}{f(x)}$ relativamente ao valor $x=a$ $(f(a)\neq 0)$ e prove a sua convergência, supondo que $f'(a)$ existe.

II

1384 — Como são constituídas as secções de números racionais de que $\sqrt[51]{3}$ é fecho comum?

1385 — $\sqrt[51]{3}$ é racional ou irracional? Porquê?

1386 — Se $u_n\to-\infty$ e $v_n\to 2$, $e^{u_n v_n}\to$?

1387 — Quando z descreve a recta que passa pelos afixos de $z'=1$ e $z''=-i$, entre que limites varia o seu argumento principal?

1388 — Quais são (entre 0 e 2π) os argumentos das raízes cúbicas de i^9?

1389 — Que é o círculo de convergência de uma série de potências $\Sigma a_n z^n$? Que valor tem o raio dêsse círculo?

1390 — Pode dar-se o caso de a série divergir num ponto da circunferência dêsse círculo, sendo absolutamente convergente noutro ponto da mesma linha? Porquê?

1391 — De que grau é a derivada de ordem k de um polinómio de grau n?

1392 — Se $\varphi(x)>0$ e $\psi(x)$ forem funções contínuas no ponto a, $[\varphi(x)]^{\psi(x)}$ também é contínua nêsse ponto? Porquê?

1393 — Se duas funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ diferem por um polinómio do 2.º grau, qual a diferença das suas primitivas?

III

1394 — Trocando numa dada série cada têrmo u_{2n} com o termo u_{2n+1}, vem uma série da mesma natureza? Porquê?

1395 — Sejam $P_0\,P_1\,P_2\,P_3$ os afixos das raízes quartas de certo número A. Imprima-se ao quadrado daqueles pontos uma rotação de amplitude $w>0$ em tôrno do centro. Que representam os novos pontos $Q_0\,Q_1\,Q_2\,Q_3$?

1396 — Demonstre a igualdade
$$sh\,(a+b)=sha\cdot chb+shb\cdot cha\,.$$

F. C. P. — Álgebra Superior — **2.º Exame de freqüência, Maio de 1942**

Ponto n.º 1

1397 — Resolver a equação $3x^5-2x^4-3x+2=0$. R: *Admite as raizes* 1 *e* -1. *Baixando o grau temos* $3x^3-2x^2+3x-2=0$. *Fazendo* $y=3x$ *vem:* $y^3-2y^2+9y-18=0$. *Admite as raizes* 2 *e* $\pm 3i$. *Soluções:* $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=2/3$; $x_4=i$; $x_5=-i$.

1398 — Achar a equação do lugar geométrico dos pés das perpendiculares tiradas do ponto $(1,2)$ sôbre as rectas cuja distância ao centro da circunferência $x^2+y^2-2y-3=0$ é igual a metade do raio da mesma. R: *Temos* $R=2$. *Designando por* $Ax+By+C=0$ *a equação da recta vem:* $B+C=\sqrt{A^2+B^2}$ *ou* $C^2+2BC-A^2=0$. *Equações da perpendicular* $\left\{\begin{array}{l} Bx-Ay+2A-B=0 \\ Ax+By+C=0.\end{array}\right.$ *Obtém-se o seguinte:* $y^2+2x^2-4y-3x+5=0$.

1399 — Dada a cónica $2x^2-y^2+xy-x=0$ determinar: *a)* Os diâmetros principais. *b)* As assíntotas. *c)* O polo do eixo OX. R: a) *As equações dos diâmetros principais são:* $(1+\sqrt{10})\,x+(7-2\sqrt{10})\,y=1$ *e* $(1-\sqrt{10})\,x+(7+2\sqrt{10})\,y=1$. b) *As equações das assintotas são:* $y-1/9=2\,(x-2/9)$ *e* $y-1/9=-(x-2/9)$. c) *O polo é o ponto* $(0,1)$.

1400 — Mostrar que os planos $2x+ay+z-a=0$ passam pela mesma recta. Determinar os cosenos directores dessa recta. ¿Que valor se deve atribuir a a para que o plano correspondente seja perpendicular ao plano $3x-y+4z-2=0$? R: $\cos\alpha=-1/\sqrt{5}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=2/\sqrt{5}$; $a=10$.

Soluções dos n.os 1397 a 1400 de J. Rios de Sousa.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — **2.º Exame de Freqüência — Extraordinário, 23-VI-42.**

1401 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=\log(1-x^2)$. Utilisar o seu desenvolvimento em série para o cálculo do valor da função para $x=1/3$ com um êrro superior a 10^{-4}. R: *A função é definida no campo real verificada a condição* $1-x^2>0$; *o seu dominio é, portanto, o intervalo aberto* $(-1,+1)$ *e o contra-dominio o intervalo aberto à esquerda* $(-\infty,0)$. *A função é par, a sua imagem geométrica admite como eixo de simetria o eixo* Oy. *A origem é um ponto de máximo, como se reconhece imediatamente. A função não admite outros máximos ou minimos; com efeito, tem-se* $y'=-2x/(1-x^2)$. *Por ser* $y''=\dfrac{-2\,(1+x^2)}{(1-x^2)^2}>0$ *qualquer que seja* x *real, a imagem da função tem sempre a concavidade voltada no sentido dos* yy *negativos e não tem pontos de inflexão. Os pontos* $x=\pm 1$ *são pontos de descontinuïdade, visto que não existem os limites* $\lim\limits_{x\to -1-0} y$ *e* $\lim\limits_{x\to 1+0} y$, *e tem-se* $\lim\limits_{x\to -1+0} y=-\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to 1-0} y=-\infty$. *É sabido que* $\log(1-x)=-x-x^2/2-\cdots x^n/n-\cdots$ *e, portanto,* $\log(1-x^2)=-x^2-x^4/2-\cdots-x^{2n}/n-\cdots$. *Para* $x=1/3<1$ *será* $\log\left(1-\dfrac{1}{9}\right)=-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{2\cdot 3^4}-\cdots-\dfrac{1}{n\cdot 3^{2n}}-\cdots$. *A convergência desta série pode ser verificada pelo critério d'Alembert e, por conseqüência* (V. «Gazeta de Matemática» n.º 11), *tem-se* $-\dfrac{1}{(p+1)\,3^{2p+2}}-\dfrac{1}{(p+2)\,3^{2p+4}}-\cdots\leq\dfrac{1}{p\cdot 3^{2p}}\,[k+k^2+\cdots]$, *onde* $k=\dfrac{p\cdot 3^{2p}}{(p+1)3^{2p+2}}$, *ou* $\leq\dfrac{1}{p3^{2p}}\cdot\dfrac{k}{1-k}=\dfrac{1}{(p+1)3^{2p+2}-p\cdot 3^{2p}}$. *Se considerarmos três termos da série, cometeremos um êrro sistemático inferior a* $1/24057$. *Se efectuarmos o cálculo de cada um dêstes três termos até à quinta casa dècimal, cometeremos êrros de cálculo tais que a soma dos seus módulos é inferior a* $3/100000$. *Logo,* $\log\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\simeq -0{,}11111-0{,}00617-0{,}00045=-0{,}1177$.

1402 — Resolver a equação $2x^5-6x+3=0$. Utilisar o método gráfico para a localização das raízes irracionais e determiná-las com um êrro inferior a 10^{-2}. R: *A equação pode pôr-se sob a forma* $2x^5=6x-3$. *As suas raizes reais serão as abscissas dos pontos de intersecção das curvas* $y=2x^5$ *e* $y=6x-3$. *A equação admite duas raizes positivas e uma negativa, que pertencem aos intervalos* $(0,1)$ $(1,2)$ $(-2,-1)$. *As outras duas raizes são complexas conjugadas. As três raizes reais não são inteiras. Também não são fraccionárias, porque a equação não é satisfeita para* $x=\pm 1/2$, $\pm 3/2$, *únicos números fraccionários que poderiam ser suas raizes.*

Uma tábua de potências e uma máquina de calcular permitem a construção dos quadros de que se deduziria $-1{,}41<x_1<1{,}40$, $0{,}51<x_2<0{,}52$ *e* $1{,}13<x_3<1{,}14$.

1403 — Dada função $z=\log(x^2+y^2)+\operatorname{arctg} y/x$ calcular as suas derivadas de 1.ª e 2.ª ordens.

R: $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{2x-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x+2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y^2+2xy-4x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-4xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-xy-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Soluções dos n.os 1401 a 1403 de A. Sá da Costa.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de freqüência, Março 1942

Ponto n.º 4

1404 — Verifique a identidade vectorial: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})^2+(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2=2(\mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2)$. Traduzirá alguma propriedade do paralelogramo? R: *A identidade verifica-se imediatamente. Com efeito, é* $(\mathbf{u}+\mathbf{v})^2=\mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2+2\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *e* $(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2=\mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2-2\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *e notando que* $\operatorname{mod}(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ *e* $\operatorname{mod}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ *são as medidas das diagonais do paralelogramo construido sôbre* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$, *a propriedade referida pode enunciar-se: «a soma dos quadrados das diagonais é igual ao dôbro da soma dos quadrados dos lados».*

1405 — Construa o produto das n determinações de $\sqrt[n]{A}$ $(A>0)$. Tenha em atenção a paridade de n. R: *Seja* $\alpha_k=\sqrt[n]{A}$ $(k=0,1,2,\cdots n-1)$. *Tem-se* $\alpha_k=(\sqrt[n]{A})\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)$. *O produto dos módulos de* α_k *é, evidentemente,* A ; *a soma dos argumentos é* $0+\frac{2\pi}{n}+\frac{4\pi}{n}+\cdots+\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{2\pi}{n}(1+2+\cdots+n-1)=(n-1)\pi$. *Se* n *é impar o produto* $\Pi\alpha_k$ *tem o valor* A *e se* n *for par o valor* $-A$.

1406 — Dados a recta r e o plano π de equações: $r\equiv\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ e $\pi\equiv x+y+z=1$ determine a equação do plano que passa por r e é perpendicular a π e a do que passa pela mesma recta e faz o menor ângulo com π. R: *A equação do feixe de planos de eixo* r *é* $x-2+\lambda(y-3)=0$; *para o plano desta família perpendicular a* π *tem-se* $1+\lambda=0$ *e portanto a equação* $x-y+1=0$. *O ângulo* φ *de* r *com* π *é dado por* $\operatorname{sen}\varphi=\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{r}}{\operatorname{mod}\mathbf{n}\,.\operatorname{mod}\mathbf{r}}$ *sendo* $\mathbf{n}$ *o vector de* π $\mathbf{n}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\operatorname{mod}\mathbf{n}=\sqrt{3}$ *e* $\mathbf{r}$ *o vector de* r, $\mathbf{r}=\mathbf{k}$, $\operatorname{mod}\mathbf{r}=1$. *Tem-se então* $\operatorname{sen}\varphi=\sqrt{3}/3$ *ou* $\cos\varphi=\sqrt{2/3}$. *Para a plano que faz o menor ângulo com* π *tem de determinar-se* λ *de modo que* $\frac{1+\lambda}{\sqrt{3}\,.\sqrt{1+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ *donde* $\lambda^2-2\lambda+1=0$ *ou* $\lambda=1$. *O plano pedido tem pois por equação* $x+y-5=0$.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de freqüência, 25 de Fevereiro de 1942.

Ponto n.º 1

1407 — Designando por α_1, α_2 e α_3 os valores por ordem crescente dos argumentos de $\sqrt[3]{1}$, desenvolver o determinante: $D(x)=\begin{vmatrix}\alpha_1 & x & x^2\\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3\\ -1 & 0 & \alpha_3\end{vmatrix}$ e calcular $D(\alpha_2)$. R: *Tem-se* $D(x)=\alpha_2 x^2-\alpha_3 x+\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ *e* $D(\alpha_2)=\alpha_2^3-\alpha_3\alpha_2+\alpha_1\alpha_2\alpha_3=1$, *atendendo a que* $\alpha_2^3=1$ *e a que* $\alpha_1=1$.

1408 — São dados os vectores: $P-0=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $Q-0=2\mathbf{j}$, $R-0=\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. Determinar o volume do tetraedro $[OPQR]$, a área da face oposta ao vértice O e as equações das faces. Pela projecção de P sôbre o plano $z=0$ conduzir uma recta que determine com os eixos OX e OY um triângulo de área 8. (O é a origem do referencial). R: *Vol.* $[OPQR]=\frac{1}{6}(P-O)\times(Q-O)\wedge(R-O)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&3&3\\0&2&0\\0&1&2\end{vmatrix}=2/3$. *Área* $[PQR]=1/2\cdot\operatorname{mod}[(P-Q)\wedge(R-Q)]=\sqrt{30}/2$ *visto que* $P-Q=\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $R-Q=-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ *e* $(P-Q)\wedge(R-Q)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&1&3\\0&-1&2\end{vmatrix}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$. *As coordenadas dos vértices são* $O(0,0,0)$, $P(1,3,3)$, $Q(0,2,0)$ *e* $R(0,1,2)$, *a equação da face* OQR *é* $x=0$ *e a da face* PQR *é* $\begin{vmatrix}x&y&z&1\\1&3&3&1\\0&2&0&1\\0&1&2&1\end{vmatrix}=0$. *A projecção de* P *sôbre* $z=0$ *é o ponto* $P'(1,3,0)$ *ou simplesmente* $P'(1,3)$. *Trata-se de um problema de geometria plana.*

Seja $x/p+y/q=1$ *a equação procurada. Temos* $\pm 8=pq/2$ *e* $1/p+3/q=1$, *sistema que fornece as soluções pedidas.*

Soluções dos n.os 1404 a 1408 de M. Zaluar.

CÁLCULO INFINITESIMAL E ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — Cálculo — 2.º exame de freqüência, 1941-42

1409 — Integrar o sistema $y''+5y-3z=e^x$, $z'+6y-4z=x$. R: *Aplicando o símbolo* D *vem:* $y=\dfrac{-3e^x+3x}{D^3-4D^2+5D-2}$ *e integrando vem:* $y=C_1e^x+$ $+C_2xe^x+C_3e^{2x}+3/2\cdot x^2e^x-3/2\cdot x-15/4$ *e* $z=(2C_1+2/3\cdot C_2)e^x+2C_2xe^x+3C_3e^{2x}+3x^2e^x+$ $+2x^2e^x+2/3\cdot e^x-5/2\cdot x-25/4$.

1410 — Calcular $\iint\limits_D dx\,dy$. O domínio D é limitado pelas linhas $y=-x/2+1$, $y=x+1$ e $y=2(2-x)$. R: $I=\int_0^1 dx\int_{1-x/2}^{1+x}dy+\int_1^2 dx\int_{1-x/2}^{4-2x}dy=3/2$.

1411 — Determinar a tangente à linha x^3+xy^2- $-2y^2=0$ na origem.

1412 — Determinar a evoluta da linha $y=x^2/2$.

1413 — Determinar a subtangente da linha $x=t^2$; $y=\operatorname{sen}\pi t/2+t$ no ponto correspondente a $t=1$.

1414 — Determinar os pontos de inflexão da linha $y=\operatorname{sen}x+\cos x$.

1415 — Determinar as assíntotas da linha $\rho=\dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

1416 — Integrar a equação $y'^2-xy'+y=0$ e determinar a solução singular.

Soluções dos n.os 1409 e 1410 de J. Rios de Sousa.

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — 2.º exame de freqüência, 1943

Ponto n.º 1

1417 — Integrar a equação $(x^2-1)y'-2y=1$, e determinar o raio de curvatura, na origem, da linha integral que passa por êste ponto. R: *Pode integrar-se por separação de variáveis:* $\dfrac{dy}{2y+1}-$ $-\dfrac{dx}{x^2-1}=0$; *o integral geral é* $2y+1=C\dfrac{x-1}{x+1}$. *Para* $x=y=0$, *vem* $C=-1$; *a linha integral que passa pela origem tem, pois, para equação* $2y+1=$ $=\dfrac{1-x}{1+x}$. *Como* $y_0'=-1$, $y_0''=2$, *vem* $R_0=\sqrt{2}$.

1418 — Integrar o sistema $\begin{cases} y'+z=\operatorname{tg}^2x \\ z''-z'+y+z=\operatorname{tg}x,\end{cases}$ e determinar o plano osculador no ponto $(0,2,-1)$ da linha integral que passa por êste ponto. R: *Usando o símbolo* D, *fica* $\begin{cases} Dy+z=\operatorname{tg}^2x \\ y+(D^2-D+1)z=\operatorname{tg}x;\end{cases}$ *eliminando* y, *vem* $(D^3-D^2+D-1)z=1$, *cujo integral geral é* $z=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\operatorname{sen}x-1$; *e, portanto,* $y=-C_1e^x+C_3\cos x-C_2\operatorname{sen}x+1+\operatorname{tg}x$. *As condições iniciais dão-nos* $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=1$; *a linha integral tem, pois, para equações* $\begin{cases} y=\cos x+\operatorname{tg}x+1 \\ z=\operatorname{sen}x-1\end{cases}$; *donde* $\begin{cases} y_0'=1 \\ z_0'=1\end{cases}$, $\begin{cases} y_0''=-1 \\ z_0''=0\end{cases}$. *A equação do plano osculador é* $x-z=1$.

1419 — Calcular $\iint\limits_D \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$. O domínio D é limitado pela curva $\rho=\theta\ (0\leq\theta\leq\pi/2)$ e pelo eixo dos yy. R: *Temos, em coordenadas polares* $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\operatorname{sen}\theta\end{cases}$, $I=\iint\limits_D\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dx\,dy=\iint\limits_D\rho\cos 2\theta\,d\rho\,d\theta=$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\,d\theta\int_0^{\theta}\rho\,d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\theta^2\cos 2\theta\,d\theta;$$

integrando por partes vem $I=-\pi/8$. *Podíamos integrar em primeiro lugar em ordem a* θ; *e, então,*

$$I=\iint\limits_D\rho\cos 2\theta\,d\rho\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\rho\,d\rho\int_{\rho}^{\pi/2}\cos 2\theta\,d\theta=$$

$$=-1/2\int_0^{\pi/2}\rho\operatorname{sen}2\rho\,d\rho=-\pi/8.$$

1420 — Sejam $x=\dfrac{\cos u}{2}$, $y=\dfrac{\operatorname{sen}u}{2}$, $z=\dfrac{\sqrt{3}\,u}{2}$ as equações da linha (L) e sôbre a binormal em M marque-se um segmento MP de comprimento constante l. Determinar o ângulo θ que a tangente em M à curva (L) faz com a tangente em P à linha (c) lugar dos pontos P. R: *A linha* (L) *é uma hélice em que* $u=s$. *Teremos em notação vectorial:* $\mathbf{P}=\mathbf{M}+l\mathbf{b}$; *atendendo à segunda fórmula de Frenet, vem* $\dfrac{d\mathbf{P}}{ds}=\mathbf{t}+l\dfrac{\mathbf{n}}{T}$; *donde* $\dfrac{d\mathbf{P}}{ds}|\mathbf{t}=\mathbf{t}|\mathbf{t}+\dfrac{l}{T}\mathbf{n}|\mathbf{t}=1$. *Temos, pois,* $\dfrac{dP}{ds}\cos\theta=1$, *sendo* $\left(\dfrac{dP}{ds}\right)^2=1+\dfrac{l^2}{T^2}$. *Como* $T=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, *vem finalmente* $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{4+3l^2}}$.

Soluções dos n.os 1417 a 1420 de A. Pereira Gomes.

I. S. T. — Cálculo — 2.º exame de freqüência, 1942-43

1421 — Dadas as três funções $P=xy$, $Q=yz$, $R=zx$, verificar o teorema de Ostrogradski no cilindroide limitado pelo plano xy, pela superfície cilíndrica $x^2+y^2=1$ e pelo hemisfério superior da esfera $x^2+y^2+(z-4)^2=1$.

R: $\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$; $\iiint_V (y+z+x)\,dx\,dy\,dz=\iint_S (xy\cos\alpha+yz\cos\beta+zx\cos\gamma)\,dS$ *onde* V *e* S *são o volume e a superfície do cilindroide definido no enunciado. Tem-se* $\iiint_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{V_1}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz+\iiint_{V_2}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ *onde* V_1 *é o volume do cilindro definido por* $z=0$, $z=4$, $x^2+y^2=1$ *e* V_2 *o do hemisfério definido por* $z=4$, $x^2+y^2+(z-4)^2=1$. *Tem-se*

$$\iiint_{V_1}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz=\iint_{A_1}x\,dx\,dy\int_0^4 dz+\iint_{A_1'}y\,dy\,dz\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}}dx+\iint_{A_1''}z\,dx\,dz\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}}dx=$$
$$=4\iint_{A_1}x\,dx\,dy+2\iint_{A_1'}y\sqrt{1-y^2}\,dy\,dz+2\iint_{A_1''}z\sqrt{1-x^2}\,dx\,dz$$

onde A_1, A_1', A_1'' *são as áreas limitadas por* $x^2+y^2=1$; $y=\pm1$; $z=0$; $z=4$ *e* $x=\pm1$, $z=0$, $z=4$, *respectivamente. Anàlogamente*

$$\iiint_{V_2}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz=\iint_{A_2}x\,dx\,dy\int_4^{4+\sqrt{1-x^2-y^2}}dz+\iint_{A_2'}y\,dy\,dz\int_{-\sqrt{1-y^2-(z-4)^2}}^{+\sqrt{1-y^2-(z-4)^2}}dx+\iint_{A_2''}z\,dx\,dz\int_{-\sqrt{1-x^2-(z-4)^2}}^{+\sqrt{1-x^2-(z-4)^2}}dy=$$
$$=\iint_{A_2}x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy+2\iint_{A_2'}y\sqrt{1-y^2-(z-4)^2}\,dy\,dz+2\iint_{A_2''}z\sqrt{1-x^2-(z-4)^2}\,dx\,dz.$$

Por outro lado, tem-se $\iint_S (xy\cos\alpha+yz\cos\beta+zx\cos\gamma)\,dS=\iint_{S_1}(xy\cos\alpha+yz\cos\beta+zx\cos\gamma)\,dS_1+\iint_{S_2}(xy\cos\alpha+yz\cos\beta+zx\cos\gamma)\,dS_2$ *onde* S_1 *é a superfície do cilindro definido por* $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=4$ *e* S_2 *a do hemisfério superior de* $x^2+y^2+(z-4)^2=1$ *e* $z=4$. *Tem-se*

$$\iint_{S_1}(xy\cos\alpha+yz\cos\beta+zx\cos\gamma)\,dS_1=$$
$$=2\iint_{A_1'}y\sqrt{1-y^2}\,dy\,dz+2\iint_{A_1''}z\sqrt{1-x^2}\,dx\,dz+4\iint_{A_1}x\,dx\,dy$$
$$\iint_{S_2}(xy\cos\alpha+yz\cos\beta+zx\cos\gamma)\,dS_2=$$
$$=2\iint_{A_2'}y\sqrt{1-y^2-(z-4)^2}\,dy\,dz+$$
$$+2\iint_{A_2''}z\sqrt{1-x^2-(z-4)^2}\,dx\,dz+\iint_{A_2}x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

onde A_1, A_1', A_1'', A_2, A_2' *e* A_2'' *são as áreas já definidas.*

1422 — Calcular o volume limitado pela esfera de raio 3 e de centro na origem, pelo plano xy e pela superfície cilíndrica $x^2(x^2+y^2)=9(x^2-y^2)$.

R: $V=\iiint_V dx\,dy\,dz=\iint_A dx\,dy\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{+\sqrt{9-x^2-y^2}}dz=$
$=2\iint_A\sqrt{9-x^2-y^2}\,dx\,dy$ *onde* A *é a área limitada por* $x^2(x^2+y^2)+9(y^2-x^2)=0$;

$$V=\int_{-3}^{+3}dx\int_{-x\sqrt{\frac{9-x^2}{9+x^2}}}^{+x\sqrt{\frac{9-x^2}{9+x^2}}}\sqrt{9-x^2-y^2}\,dy.$$

1423 — Integrar a equação $(x^2+2x)\,y''-(2+2x)\,y'+2y=(x^2+2x)^2$ sabendo que é $y=c_1x^2+c_2(1+x)$ o integral geral da equação homogénea correspondente. R: *A equação admite um integral particular da forma* $Y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=x^4/6+2x^3/3$. *O integral geral é* $y+Y$.

1424 — Determinar as curvas planas cujo raio de curvatura é inversamente proporcional à raiz quadrada da derivada (em ordem à abscissa) do coeficiente angular da tangente. R: *O problema reduz-se à integração da equação diferencial* $\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\cdot\sqrt{y''}=k$ *ou* $(1+y'^2)^3=k^2y''$ *que, mediante a mudança* $y'=z$, *se converte em* $(1+z^2)^3=k^2z'$, *equação de variáveis separáveis.*

Soluções dos n.os 1421 a 1424 de A. Sá da Costa.

F. C. P. — Análise Superior — 3.º exercício de repetição, 5 de Fevereiro de 1943

1425 — Determinar uma função analítica tal que a parte real seja: $\varphi=x^2-y^2+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ e que tome o valor -1 para $z=i$. R: $z^2+\log z-i\pi/2$.

1426 — Calcular $\int_c \frac{dz}{z^2(z+1)\sqrt{z+3}}$ ao longo duma circunferência de raio 2 e centro 0. R: $2i\pi\left(-\frac{7}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1427 — Calcular, aproveitando a teoria dos resíduos o seguinte integral: $\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{1+x^2}dx$. Lembra-se que $z^{1/2}=\rho^{1/2}\,e^{1/2\cdot i\cdot(\theta+2k\pi)}$ e que 0 é um ponto crítico da função. R: $-\pi/\sqrt{2}$.

Soluções dos n.os 1425 a 1427 de J. Rios de Sousa.

MECÂNICA RACIONAL - FÍSICA MATEMÁTICA - ASTRONOMIA

I. S. T. — Mecânica Racional — 2.º exame, 1942

1428 — Quando é que excepcionalmente não existe, no movimento instantâneo dum sólido, um só ponto de aceleração nula?

1429 — Um fio flexível e inextensível, pesado e homogéneo, de comprimento dado, é suspenso, uma primeira vez, pelas suas extremidades, em dois pontos A e B situados à mesma altura. O mesmo fio é suspenso, uma segunda vez, pelas suas extremidades, nos pontos A e B e pelo seu meio no ponto C que é o meio do segmento $\overline{AB}$. Mostrar que, no segundo caso, as tensões das duas catenarias, em A e B, fazem, com a vertical, o mesmo ângulo que faziam as da catenária primitiva; e que a sua grandeza comum é metade da grandeza das tensões da primeira catenária.

1430 — Conhecidos os eixos principais de inércia, em relação a um ponto O, determinar os pontos do espaço em relação aos quais os eixos principais são paralelos àqueles. Discussão.

1431 — Um ponto pesado é obrigado a mover-se, sem atrito, sôbre uma superfície cilíndrica de geratrizes verticais. Qualquer que seja a secção recta da superfície cilíndrica, a trajectória do ponto é tal que a sua transformada, na planificação da superfície, é uma parábola.

F. C. P. — Física Matemática — 2.º exame de freqüência, 21 de Maio de 1942

1432 — Seja $f(x)$ uma função mensurável em R_1 e E um conjunto mensurável -L arbitrário. 1) A que condições se deve sugeitar $f(x)$ para que a função de conjunto $\mu(E)=L\int_E f(x)\,dx$ se possa identificar com uma medida (exterior) de E? R: *A função* f(x) *deve ser uma função mensurável, satisfazendo a* $|\underset{x}{E}[f(x)<0]|=0$. 2) Será possível escrever todo o conjunto E como soma dum número finito ou infinito numerável de conjuntos E_i de medida μ finita? R: *Aproveite-se a possibilidade de decompor o conjunto* E *numa soma de conjuntos* $E=\sum_{j=1}^{\infty}G_j$ *disjuntos, mensuráveis e de medida* L *finita; e atenda-se a que é possível escrever o mesmo conjunto* E *do seguinte modo* $E=\sum_{n=1}^{\infty}E\cdot\underset{x}{E}[n-1\le f(x)<n]=\sum_{i=1}^{\infty}H_i$. *A solução do problema é então* $E=\sum_{j,i=1}^{\infty}G_j\cdot H_i$ *visto que no conjunto da medida* L *finita,* $G_j\cdot H_i$, *a função* f(x) *é limitada.* 3) A que condição satisfazem duas funções $f(x)$ e $g(x)$ que conduzem à mesma medida μ? R: *As duas funções devem ser equivalentes.* 4) Supondo que $f(x)$ é somável em R_1, mostrar que para todo o número arbitrário η se pode determinar um conjunto aberto G satisfazendo às duas seguintes condições: $G\supset E$ e $L\int_{G-E}f(x)\,dx<\eta$. R: *Se assim não fôsse, construir-se-ia uma sucessão de conjuntos* G_n *satisfazendo a* $G_n\supset E$, $|G_n-E|<\varepsilon_n$ *e* $L\int_{G_n-E}f(x)\,dx>\eta$ *e nesse caso ter-se-ia por passagem ao limite* $\int_B f(x)\,dx\ge\eta$, *sendo* $B=\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}(G_n-E)$ *o que é absurdo visto que* B *é um conjunto de medida* L *nula.*

Soluções de L. Neves Real.

F. C. P. — Astronomia — 2.º exame de freqüência, ano lectivo 1941-42

I Parte — 1. Deduza a expressão da variação da latitude celeste duma estrêla em virtude do fenómeno da aberração das fixas.

2. Em que difere o fenómeno da aberração planetária do fenómeno da aberração das fixas?

3. Como atende ao efeito da aberração diurna nas observações feitas com o instrumento de passagens suposto colocado no meridiano?

4. ¿A aberração tem alguma influência sôbre as observações feitas com o astrolábio de prisma?

5. A que chama período sinódico dum planeta? ¿O período sinódico dum planeta é maior ou menor que um ano? Justifique as respostas.

6. As fases dos planetas dependem das posições relativas do planeta, do Sol e da Terra? Examine em pormenor o caso dos planetas exteriores.

7. Explique o que é a elipse de paralaxe anual e deduza as expressões analíticas dos seus eixos.

8. Explique o que entende por depressão do horizonte e como a toma em consideração nas observações feitas com o sextante.

9. Indique os êrros dum altazimute distinguindo os de construção do instrumento dos de colocação.

II Parte — Quais são as declinações das estrêlas que, devido à refracção astronómica, se vêm acima do horizonte durante o espaço de um dia, mais 8 minutos siderais do que se a refracção não existisse? Latitude do local $41^\circ\,8'$ N.

Nota — Os alunos têm hora e meia para responder à primeira parte e outra hora e meia para responder à segunda. Em relação à primeira parte os alunos devem: responder a uma das preguntas 1, 2, 3 ou 4; responder a uma das preguntas 5 ou 6; responder às preguntas 7, 8 e 9. Seguidamente podem responder às restantes preguntas.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1433 — Estabelecer a fórmula

$$\int \operatorname{sen}^{n-1} x \cos(n+1)\, x \cdot dx = \frac{\operatorname{sen}^n x \cdot \cos nx}{n} + C$$

(Euler). Achar as fórmulas correspondentes para $\int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen}(n+1)\, x\, dx$, $\int \cos^{n-1} x \cos(n+1)\, x dx$, $\int \cos^{n-1} x \operatorname{sen}(n+1)\, x \cdot dx$.

1434 — Calcular $I_{m,n} = \int \frac{x^n\, dx}{\sqrt[m]{a+bx}}$ (m, n inteiros positivos).

1435 — Achar em termos finitos as equações das evolutas da curva que corta sob um ângulo constante φ as geratrizes do cone circular recto de semi-abertura u.

1436 — Prove que o grupo de movimentos que transformam em si mesmo um sólido regular de $n+1$ vértices num espaço n-dimensional é o grupo alternante de grau $n+1$; e que no espaço de $n+1$ dimensões, o grupo para o mesmo sólido é o grupo simétrico de grau $n+1$.

(Maud Willey, *Am. Math. Monthly* 1937)

1437 — Uma esfera S de raio constante move-se mantendo fixo um ponto P da sua superfície. Sendo C uma esfera fixa e Q a projecção ortogonal de P no plano radical de S e C prove que Q se move na superfície duma esfera.

(V. Thébault)

1438 — João e Francisco jogam 500 partidas de cara ou cunho a um escudo de aposta. João possui 40 escudos e Francisco 25. Supondo que o ajuste de contas só se realiza depois de acabada a série, calcular a probabilidade de que êsse ajuste de contas possa realizar-se integralmente.

1439 — Um diamante bruto de valor a partiu-se em três fragmentos. Calcule a esperança matemática do valor total do diamante quebrado supondo que o preço dum diamante é proporcional ao quadrado do seu pêso. Enuncie as hipóteses de que tem de se servir para a solução, sempre que elas não estejam implícitas no enunciado.

(Émile Borel)

1440 — Calcular o limite da soma de uma sucessão de fracções, cujos numeradores estão em progressão aritmética e os denominadores em progressão geométrica. Condição de convergência. (Aplicação numérica: $1/2+2/4+3/8+4/16+\cdots$).

Problemas propostos por Mário de Alenquer.

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1250 — Dado o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ substituí-lo por outro que tenha por limites dois números dados, A e B, por meio da substituïção $x=my+n$, sendo m e n dois números a determinar (Sturm). R: *Fazendo no integral* $I=\int_a^b f(x)\,dx$, $x=my+n$ *e atendendo a que* $a=mA+n$ *e* $b=mB+n$ *vem* $I=m\int_A^B f(my+n)\,dy$, *onde* $m=\dfrac{a-b}{A-B}$ *e* $n=\dfrac{bA-aB}{A-B}$ *o que exige* $a\neq b$ *e* $A\neq B$.

Solução de José Morgado (do Pôrto).

Enviaram também soluções correctas: F. Soares David e Laureano Barros (Pôrto).

1251 — Dum barril cheio tira-se um litro de vinho, e substitui-se por água. Depois tira-se um litro da mistura e substitui-se por água. Efectuada esta operação 35 vezes, verifica-se que o barril contém quantidades iguais de água e vinho. Calcular a capacidade do barril. R.: *Seja* V_i *o vinho contido no barril ao fim da operação de ordem* i *e* V_{i+1} *o vinho contido ao fim da operação de ordem* $i+1$. *É fácil ver que se tem* $V_{i+1}=V_i-V_i/C=V_i(1-1/C)$ *onde* C *é a capacidade do barril e* $i=0,\cdots 35$.

Efectuando o produto, membro a membro, de tôdas as igualdades e atendendo a que $V_{35}=C/2$, *vem* $C/2=C(1-1/C)^{35}$. *Aplicando logaritmos, vem* $35\log(1-1/C)=\log 1/2 \therefore 1=1/C=0,9803;\ C=51^l{,}02$.

Solução de Laureano Barros (do Pôrto).

Enviaram também soluções correctas: F. Soares David (Pôrto), J. S. Faria Abreu (Penafiel) e J. Morgado (Pôrto).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

20 — ALBUQUERQUE, Luís Mendonça de — **Exercícios de Geometria Descritiva** — Tip. Emprêsa Guedes — Pôrto, 1942.

Trata-se de uma compilação de 192 exercícios organizada pelo Autor, assistente de Geometria Descritiva da Faculdade de Ciências de Coimbra, com o intuito de auxiliar e orientar o estudo dos alunos desta cadeira.

O critério seguido na elaboração do livro é indicado pelo Autor no prefácio: «Fizemos seguir alguns dos problemas nela (colectânea) incluídos de uma indicação do método mais prático para obter a solução. Quando nos pareceu necessário fêz-se acompanhar essa indicação sumária da resolução gráfica. Mas, na maioria dos casos, deixa-se ao leitor o trabalho de escolher o método mais cómodo, por analogia com problemas gerais ou já resolvidos».

A obra está dividida da seguinte forma:
1.ª parte — Geometria de Monge (Ex. n.os 1 a 60).
2.ª parte — Geometria cotada (Ex. n.os 61 a 85).
3.ª parte — Triedros e poliedros (Ex. n.os 86 a 106).
4.ª parte — Superfícies (Ex. n.os 107 a 165).
5.ª parte — Perpectiva rigorosa (Ex. n.os 166 a 184).
6.ª parte — Perspectiva cavalheira (Ex. n.os 185 a 192).

O livro de aspecto agradável é ilustrado com 37 gravuras bem apresentadas. Estamos convencidos que prestará serviços, sobretudo aos estudantes a que é destinado, e desejamos que o exemplo seja seguido e vão aparecendo mais obras no género desta, bastante necessárias no nosso meio, onde tão escassa é a produção matemática, mesmo no campo didáctico.

Manuel Zaluar

21 — AMOROSO, L. — **Meccanica Economica** — Macrì, Bari-Città di Castello, 1942.

Neste original e interessantíssimo curso, lições feitas no ano académico de 1941-42 no «Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica», o Autor apresenta uma representação matemática dos fenómenos económicos, que partindo da doutrina pareteana do equilíbrio conduz a uma construção dinâmica que nas suas linhas fundamentais recalca as construções da mecânica clássica.

Identificando o equilíbrio com uma configuração em que as acções económicas são uniformemente repetidas e que portanto resultam estacionárias em relação ao tempo, o Autor considera sucessivamente os sectores do consumo e da produção, mostrando como se determinam as incógnitas (quantidades consumidas e produzidas) em funções dos preços do mercado. Cada actuante (consumidor ou produtor) inspira a sua conduta pelo critério de realizar as combinações preferidas dentre as que lhe são acessíveis. Da oposição entre tôdas as acções e reacções determina-se o processo de nivelamento da produção ao consumo, através do qual se formam os preços do mercado.

Exposta dêste modo a teoria do equilíbrio, o

Autor passa a indicar as dificuldades essenciais que se encontram quando se tenta impedir ao movimento o carácter estacionário; isto é evitar a hipótese de que as acções económicas se repitam uniformemente.

O Autor mostra como tal se pode resolver supondo que as funções fundamentais — ofelimidade e produtividade — dependem não só da velocidade do fluxo das quantidades consumidas e empregadas mas ainda da correspondente aceleração. Por êste modo introduz-se no sector do consumo e da produção um princípio análogo ao princípio galileano da inércia e daí portanto, as equações do movimento económico nestes dois sectores tornam-se equações diferenciais de 2.ª ordem, análogas às equações de Lagrange. Daqui resulta uma espécie de dualidade entre os teoremas fundamentais da Economia e os da Mecânica. O princípio económico do mínimo esfôrço vem identificado ao princípio mecânico da mínima acção e o princípio da conservação da energia pode ser interpretado como um princípio ricardiano de nivelamento de custos aos preços.

Nas transformações físicas duma e doutra forma de energia a natureza operaria como um produtor que efectuasse as transformações com o mínimo custo. Os coeficientes que exprimem os equivalentes da transformação da energia (eléctrica, térmica, etc.) em termos, por exemplo, de energia mecânica representam na economia da natureza funções análogas às dos preços.

Se os preços fôssem constantes universais a Economia reduzir-se ia completamente às equações diferenciais do consumo e da produção e o paralelismo com as equações diferenciais da Mecânica seria completo.

Mas os preços são porém variáveis, determinados em cada instante pelo processo de adaptação da produção ao consumo. O Autor passa a estudar êste processo e demonstra que o clássico princípio do equilíbrio da procura e da oferta deve ser oportunamente modificado, se se quere tomar em atenção as flutuações dos stocks. Chega-se assim a um sistema de equações integro-diferenciais que representam o movimento dos preços e que dá uma explicação teórica do movimento cíclico dos fenómenos económicos.

(De F. C. em «Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari» Anno XIII, Roma, 1942—Trad. M. Z.)

22—DAVIS, Harold T.—**The Theory of Econometrics** — Principia Press, Inc., Bloomington, Ind., 1941. XVI+482 págs.

A Econometria é uma ciência relativamente nova que se desenvolveu grandemente na última dezena de anos. O seu objecto é uma formulação quantitativa das teorias económicas de par com o problema das suas verificações estatísticas. Muitas das modernas investigações estão dispersas num grande número de periódicos e urgia uma apresentação total da teoria. O presente livro, com as extensas referências bibliográficas, que contém, contribue certamente para tal.

O livro compreende duas partes. A primeira trata da estática económica e a segunda da dinâmica económica. Os principais assuntos discutidos na estática económica são: a natureza da riqueza e do rendimento; o conceito de utilidade; curvas de oferta e de procura; a teoria de troca pura; a teoria do monopólio e do regime de 2 concorrentes; funções de produção; orçamentos; a teoria do equilíbrio e do imposto. Dentre os assuntos tratados na segunda parte devem destacar-se os seguintes: crescimento da população e indústria com uma discussão da curva logística; a equação da troca; números índices do ponto de vista económico; crono-séries e sua correlação, incluindo tendências, análise harmónica e correlação de séries; conceitos dinâmicos de oferta e de procura; a dinâmica das crono-séries económicas com uma discussão da teoria dos choques casuais (erratic-shock theory); teoria dos ciclos económicos e troca internacional.

O livro foi evidentemente escrito para ser usado como texto. Êste propósito é auxiliado também pelo grande número de problemas que em cada capítulo são propostos aos estudiosos. Os métodos matemáticos são largamente adoptados em tôda a obra ainda que num nível não muito elevado bastando para a leitura de quási todo o livro o conhecimento do Cálculo. O livro foi feito para texto, e não é um tratado, mas o tratamento de certos assuntos é feito muito elementarmente e não é tão completo e profundo como conviria num tratado.

Em vários casos recomenda-se ao leitor para uma análise mais detalhada a consulta de uma outra obra mais desenvolvida do autor [The Analysis of Economic Time Series].

Os economistas matemáticos encontrarão interêsse na discussão de numerosos resultados técnicos modernos e na grande quantidade de dados estatísticos que são confrontados com a teoria. Os professores de economia matemática encontrarão no livro um auxiliar para o seu trabalho pedagógico.

(de A. Wald (New York) em «Mathematical Reviews», Vol. 3, n.º 1 — 1942 — Trad. M. Z.)

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Agros — Boletim dos Estudantes de Agronomia — Ano XXVI — n.º 1 — Janeiro-Fevereiro de 1943.

Boletim Matemático — (Buenos Aires). Revista argentina de Matemática — Ano XV — n.º 11.

Euclides — (Madrid) — Revista de Ciências Exactas, Físico-Químicas y Naturales — Ano III (1943) — n.º 25, 26 e 27.

Exercícios de Geometria Descritiva — Luís Mendonça de Albuquerque — Tipografia Emprêsa Guedes, L.da — Pôrto.

Seguros — Ano V — n.º 27 — Abril de 1943.

Portugaliae Physica — Vol. 1 (1943), Fasc. 1 — M. T. Antunes. *Les valeurs de l'énergie de la configuration électronique* $3d^2\,4p$. — A. Gibert. *Analyse de spectres β de raies.* — Ruy Luís Gomes. *Sur une généralisation de l'opérateur de projection* $\mathcal{E}$ (I) — Manuel Valadares. *La loi photoélectrique d'Einstein et le phénomène de conversion interne.*

Sur la possibilité d'une cinématique générale — Guido Beck — Publicação n.º 5 do Centro de Estudos de Matemática da Universidade do Pôrto — 1943.

Técnica — Revista de Engenharia dos alunos do I. S. T. — n.os 136 e 137.

DISTRIBUIÇÃO GEOGRÁFICA DOS ASSINANTES DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Localidades por Distritos	Na data da publicação do N.º 10	N.º 11	N.º 15
Aveiro			
Águeda	1	—	1
Anadia	—	—	2
Aveiro	—	—	2
Espinho	—	—	2
Pinheiro da Bemposta	—	—	1
Sangalhos	1	—	2
	2	—	10
Beja			
Beja	—	1	4
	—	1	4
Braga			
Barcelos	—	—	2
Braga	1	2	3
Fafe	—	1	—
Guimarães	—	—	1
Portela de Cabras	—	—	1
Riba d'Ave	—	—	1
Vila Nova de Famalicão	—	1	—
	1	4	8
Bragança			
Sendim	—	—	1
Urros	—	1	1
	—	1	2

Localidades por Distritos	Na data da publicação do N.º 10	N.º 11	N.º 15
Castelo Branco			
Castelo Branco	1	2	2
	1	2	2
Coimbra			
Coimbra	8	8	13
Figueira da Foz	2	2	3
Oliveira do Hospital	—	—	1
	10	10	17
Évora			
Évora	—	1	2
Reguengos de Monsaraz	—	—	2
Vendas Novas	1	1	1
	1	2	5
Faro			
Lagos	—	—	1
Loulé	—	—	1
Vila Real de Santo António	—	—	1
	—	—	3
Leiria			
Bombarral	1	1	1
Leiria	3	3	4
Pombal	—	—	1
	4	4	6

Localidades por distrito	Na data da publicação do N.º 10	N.º 11	N.º 15
Lisboa			
Alhandra	1	1	2
Amadora	1	2	1
Carcavelos	1	1	2
Cascais	1	1	3
Caxias	—	—	1
Cruz Quebrada	1	1	—
Estoril	—	—	1
Lisboa	192	270	505
Mont'Estoril	—	1	1
Moscavide	—	2	1
Paço d'Arcos	1	1	2
Parede	1	2	4
Queluz	2	2	4
Sacavém	—	—	1
Sintra	1	1	2
S. João do Estoril	—	1	1
Vila Franca de Xira	1	2	2
	203	288	533
Portalegre			
Crato	—	1	1
Elvas	—	—	1
Portalegre	1	1	1
	1	2	3
Pôrto			
Cête	—	1	—
Ermezinde	—	1	4
Foz do Douro	—	—	3
Matozinhos	—	—	1
Penafiel	—	—	1
Pôrto	14	76	129
Póvoa de Varzim	—	1	2
Praia da Granja	—	—	1
Rio Tinto	—	—	1
S. Mamede de Infesta	—	—	1
A transportar	14	79	143

Localidades por distrito	Na data da publicação do N.º 10	N.º 11	N.º 15
Transporte	14	79	143
Santo Tirso	—	—	1
Touguinhó	—	—	1
Trofa	2	2	1
Valadares	—	—	1
Vermoim	—	—	1
Vila do Conde	—	—	1
Vila Nova de Gaia	2	4	7
	18	85	156
Santarém			
Muge	—	—	1
Ribeira de Santarém	1	1	1
Santarém	3	5	7
	4	6	9
Setúbal			
Almada	—	—	1
Cacilhas	—	—	1
	—	—	2
Viana do Castelo			
Arcos de Valdevez	—	—	1
Ponte da Barca	—	1	1
Ponte de Lima	—	—	2
Viana do Castelo	—	—	4
	—	1	8
Vila Real			
Chaves	1	1	1
Pêso da Régua	—	—	1
	1	1	2
Vizeu			
Canas de Senhorim	—	—	1
Caramulo	1	1	—
Carregal do Sal	—	—	1
Mangualde	—	1	1
Souto-Côvo	—	—	1
	1	2	4
Total geral	247	409	774

A situação financeira da «Gazeta de Matemática»

CONTA DO N.º 14 DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Receita

Receita da venda avulso e por assinatura de 794 números	3.133$75
Existência de 442 números ao preço de custo	1.365$70
26-V-1943, *Déficit*	137$05
	4.636$50

Despesa

Composição, impressão, papel e brochura	4.002$50
Sua quota parte nas despezas gerais realizadas até 26 de Maio de 1943	634$00
	4.636$50

O. M. R. e M. O. M.

A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

publicará em 1943 cinco números nos meses seguintes:
Janeiro, Março, Maio, Julho e Novembro

Cada número terá um mínimo de 32 páginas e o preço de Esc. 5$00

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exame de freqüência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuïção normal dêstes pontos, pelos diferentes números da *Gazeta de Matemática* é a seguinte:

Exames de aptidão — N.os de Março, Maio e Julho.
1.º exame de freqüência — N.os de Novembro e Janeiro.
2.º exame de freqüência — N.os de Março e Maio.
Exames finais — N.os de Maio e Julho.

Cada um dêstes números poderá publicar e publicará, em geral, outros pontos além dos indicados.

A *Gazeta de Matemática* não é um mero arquivo de pontos, mas um jornal de cultura matemática.

NÚMEROS ATRAZADOS

Encontram-se completamente esgotados os N.os 1, 2, 4, 5, 9 e 10. Vendem-se avulso: N.º 3 Esc 6$50, N.º 6 Esc. 4$00, N.º 7 Esc. 6$00, N.º 8 Esc. 4$00, N.º 11 e seguintes, Esc. 5$00.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A Administração da *Gazeta de Matemática* aceita assinaturas anuais de cinco números, ao preço de Esc. 20$00, para o que basta dar a indicação do nome, morada, local da cobrança e do número em que deve ter início. A assinatura será renovada, automàticamente no seu têrmo, salvo aviso prévio em contrário.

Para simplificar o trabalho da cobrança, tôdas as assinaturas serão acertadas de modo tal que passem a ter início com o número de Janeiro de cada ano, pelo que a primeira cobrança das assinaturas, com início em qualquer outro número, será de Esc. 4$00, Esc. 8$00, Esc. 12$00 e Esc. 16$00, correspondendo a 1, 2, 3 ou 4 números.

COLECÇÕES COMPLETAS

Com excepção duma pequena reserva que a Administração da *Gazeta de Matemática* retirou do comércio, estão inteiramente esgotadas as colecções completas.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial