GAZETA DE MATEMÁTICA

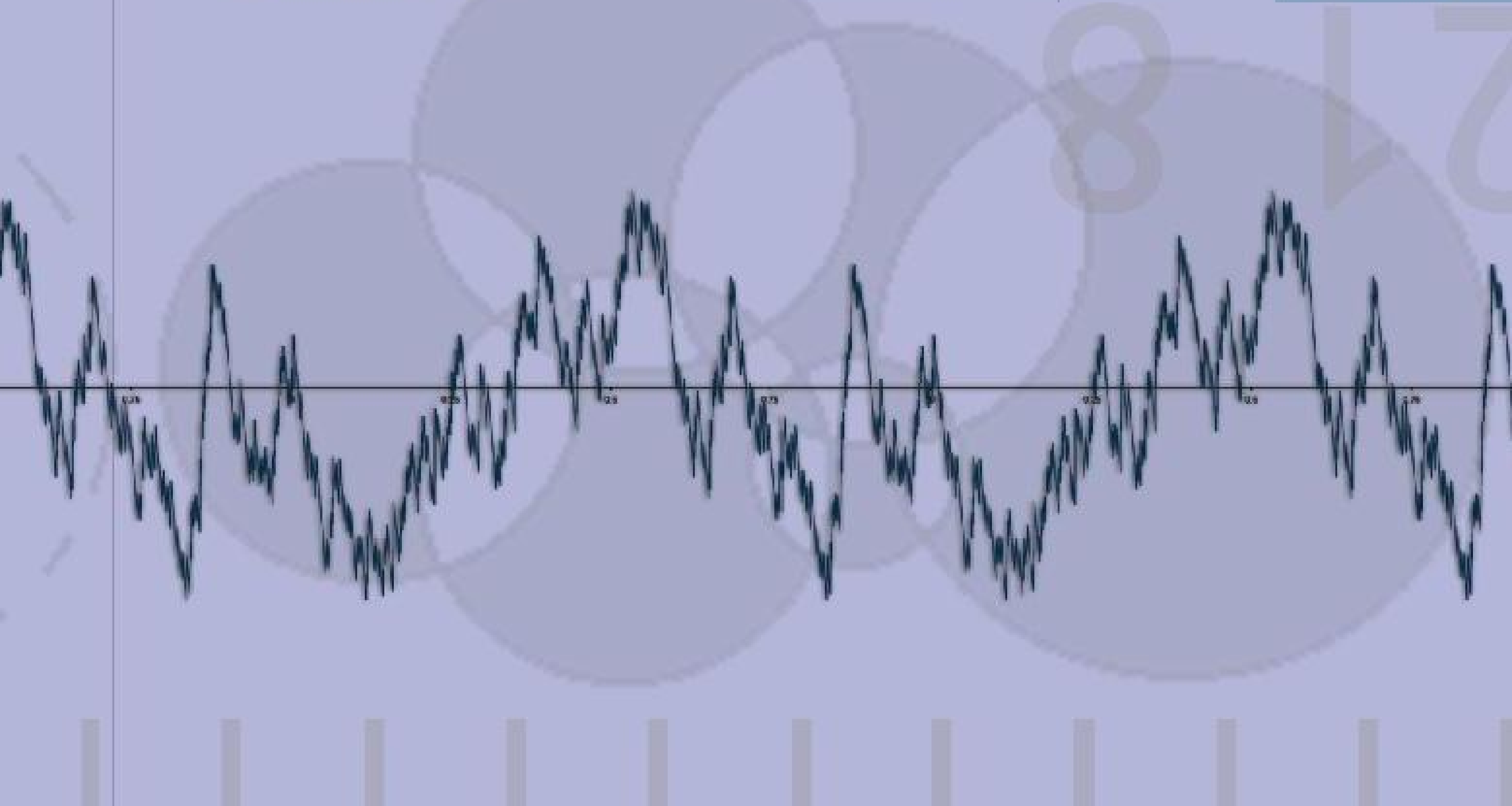
Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática **Ano LXVI** | Julho 2005

nº 149

Einstein e o Ano *Mirabilis*
por Augusto Barroso

Para a História da Álgebra em Portugal: II
por José Morgado

4,10 Euros



Einstein e o Ano *Mirabilis*

Augusto Barroso
Centro de Física Teórica e Computacional, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

1. Introdução

Em 30 de Abril de 1905 Albert Einstein submete a sua tese de doutoramento à Universidade de Zurique. No decurso desse ano publica na revista "Annalen der Physik" cinco artigos: dois sobre o movimento Browniano, dois sobre a teoria da relatividade restrita e um sobre os quanta de luz. Podemos sintetizar a importância destes trabalhos para o desenvolvimento da Física do século XX dizendo que os trabalhos do movimento Browniano permitiram o estabelecimento de uma prova irrefutável da existência de átomos; os dois artigos sobre relatividade terminam com o conceito de tempo absoluto e o último, que cronologicamente foi o primeiro a ser publicado, ajudou ao nascimento da Mecânica Quântica.

Para a maioria das pessoas são os artigos sobre relatividade que imediatamente são associados ao nome de Einstein, basta recordar a célebre equação $E=mc^2$. Contudo, na opinião do próprio autor foram os problemas da Mecânica Quântica que mais ocuparam o seu espírito e que mais o fascinaram. Apesar disso, e apesar da importância inegável que estes trabalhos de Albert Einstein tiveram para o desenvolvimento de toda a Física do século XX, são os artigos sobre o movimento Browniano os mais citados. Talvez por isso resolvi dedicar-lhes este pequeno trabalho de divulgação.

2. O movimento Browniano

À temperatura ambiente, digamos 300 K, consideremos um certo volume de oxigénio. Como sabemos, as moléculas de oxigénio estão em movimento. Movem-se em todas as direcções, aqui e acolá chocam umas com as outras e, evidentemente, chocam também com as paredes do recipiente que contém o gás. Este movimento é desordenado, isto é, cada molécula pode, com igual probabilidade, mover-se em qualquer direcção. Dito por outras palavras, o valor médio do **vector velocidade** é zero, i. e.

$$\langle \vec{v} \rangle = 0.$$

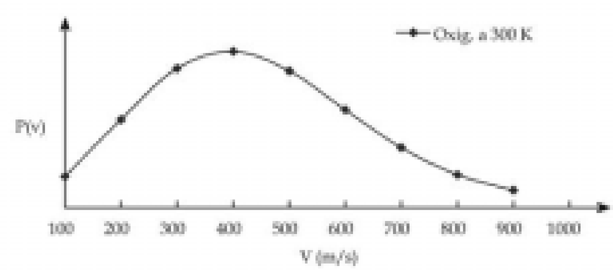
Contudo não é verdade que o valor médio do **módulo da velocidade** seja zero. Antes pelo contrário, Maxwell no final do século XIX mostrou que a lei de distribuição das velocidades é dada por:

$$P(v) = \left[\frac{m}{2\pi kT}\right]^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2, \tag{1}$$

em que m é a massa da molécula, T a temperatura e k a constante de Boltzmann. A fórmula anterior é uma lei de distribuição de probabilidade o que significa que se fizer o integral para todos os v de zero a infinito devemos obter 1, i.e.

$$\int_0^\infty P(v)dv = 1. \tag{2}$$

A figura seguinte representa esta distribuição para o oxigénio a 300 K.

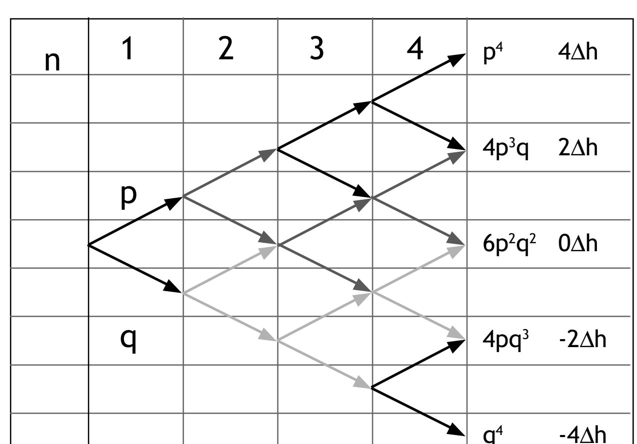


A curva mostra que as moléculas do oxigénio, à temperatura considerada, têm velocidades que se situam entre algumas dezenas de metro por segundo e o milhar de m/s. A curva apresenta um máximo a cerca de 400 m/s o que significa que esta é a velocidade mais provável.

Se em vez de um gás considerarmos um líquido, também se verifica que as suas moléculas estão em movimento desordenado. A primeira evidência experimental deste movimento foi descrita em 1827 por um naturalista Britânico, Robert Brown, que observou ao microscópio o movimento desordenado de pequenos grãos de pólen em suspensão em água. Dado que o movimento nunca parava, inicialmente Brown chegou a pensar que estaria a observar um ser vivo. Contudo, depois de várias experiências conseguiu mostrar que esta hipótese era falsa e que o efeito se observava com grãos, de qualquer material inerte, cujas dimensões e peso lhes permitiam estar em suspensão na água. Não se tratava pois de um problema biológico mas sim físico. Dado que as leis da física excluíam a possibilidade da existência de movimento perpétuo como explicar que os grãos de pó nunca parassem?

No final do século XIX, vários físicos, adeptos da teoria atómica, tinham a convicção de que este movimento dos grãos de pólen era o resultado de serem incessantemente bombardeados pelas moléculas do líquido. O movimento era perpétuo porque, de alguma forma, o que se estava a observar era a agitação térmica das moléculas do líquido. Em 1905 Einstein apresentou uma explicação quantitativa convincente para o fenómeno. Tal explicação permitiu obter por meio do estudo do movimento Browniano, a determinação experimental do número de Avogadro, o que constituiu um poderoso argumento em favor da estrutura atómica da matéria. Recorde-se que, na altura, a existência de átomos ainda não era completamente aceite pela totalidade dos físicos.

Vejamos então os aspectos mais importantes desta explicação. Consideremos o movimento de um grão de pólen. De cada vez que observo que o grão se move, isto é o resultado de um número enorme de choques das moléculas do líquido. Procurar descrever cada um destes choques é uma tarefa impossível. Contudo o relevante é o carácter aleatório do movimento que deles resulta. Simplifiquemos ainda mais o problema e admitamos que este movimento se faz apenas numa direcção. Inicialmente o grão está na posição zero. Admitamos ainda que o grão tem uma probabilidade p de se deslocar Δh e q de se deslocar para a posição $-\Delta h$. Se mantivermos esta regra, ao fim de 4 movimentos as várias hipóteses para a posição final do grão são as que representámos no esquema seguinte. Escusado será dizer que os verdadeiros grãos de pólen em suspensão na água realizam movimentos a três dimensões e que os saltos erráticos que o Senhor Brown observou no seu microscópio não tinham todos o mesmo comprimento. Apesar disso, continuemos com o modelo. Muito do progresso da Física e de todas as outras ciências ficou a dever-se à possibilidade de substituir um problema complexo por outro mais simples.



Neste esquema, as setas indicam as sucessivas possibilidades de percurso. Na coluna da direita mostramos a probabilidade da ocorrência de um determinado caso e o deslocamento total obtido. Assim, se o grão avançar sempre Δh a probabilidade de ocorrência é p^4 e, no final, terá avançado $4\Delta h$. Esta situação corresponde à primeira linha do esquema. Na segunda linha o avanço total foi de $2\Delta h$ e isto ocorre com uma probabilidade $4p^3q$. O leitor poderá facilmente verificar que há quatro possíveis caminhos que podem conduzir a esta posição.

Calculemos agora o valor médio do deslocamento do grão. No primeiro salto temos:

$$\langle \Delta x \rangle = p\Delta h + q(-\Delta h) = (p-q)\Delta h\,. \tag{3}$$

No quarto salto teremos:

$$\langle \Delta x \rangle = p^4 4\Delta h + 4p^3q^2\Delta h + 6p^2q^2 0\Delta h + 4pq^3(-2\Delta h) + q^4(-4\Delta h).$$

Facilmente se reconhecerá que este problema obedece à distribuição binomial,

$$P[k] = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^{n-k}q^k \tag{4}$$

e, portanto, ao fim de n saltos temos:

$$\langle \Delta x \rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}p^{n-k}q^k \Delta h(n-2k)\,. \tag{5}$$

Se recordarmos que

$$1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}p^{n-k}q^k \tag{6}$$

podemos, derivando em ordem a q e depois multiplicando por q, obter

$$nq = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}p^{n-k}q^k k\,. \tag{7}$$

Com a ajuda das duas últimas equações é fácil completar o cálculo de $<\Delta x>$ e obter

$$\langle \Delta x \rangle = n(p-q)\Delta h\,. \tag{8}$$

O que é interessante neste resultado é que o deslocamento médio é proporcional a n, número de saltos, ou, numa descrição contínua, ao tempo decorrido desde o instante inicial. Se considerarmos o caso tridimensional, o que teremos é a descrição do movimento do grão, especificando a sua posição por um vector $\vec{r}$. O seu valor médio é, evidentemente, zero, dado que todas as direcções são igualmente prováveis. Contudo, o valor médio de r^2 não é nulo, é proporcional ao tempo t.

Einstein admitiu que o problema do movimento dos grãos de pólen era análogo à difusão, por exemplo, das moléculas de um gás noutro. Seja então n o número de grãos por unidade de volume. Num determinado volume V, a variação temporal do número de grãos é dada por:

$$\int dV \frac{\partial n}{\partial t}\,. \tag{9}$$

Por outro lado, esta variação é igual ao fluxo através da superfície que delimita o volume V de um vector $\vec{S}$ que é proporcional ao gradiente de n, i. e. com $\vec{S} = D\vec{\nabla} n$ obtemos:

$$\oint ds\vec{u}.D\vec{\nabla} n\,, \tag{10}$$

em que $\vec{u}$ designa o vector unitário da normal à superfície. Igualando as duas equações anteriores e usando o teorema da divergência, é fácil verificar que a distribuição dos grãos de pólen é dada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}\right) \tag{11}$$

cuja solução é

$$n(x,y,z,t) = \frac{n(0)}{\sqrt{(4\pi Dt)^3}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}\right). \tag{12}$$

Com $n(0)=1$ obtemos a distribuição normal. Usando esta distribuição de probabilidade podemos facilmente calcular o valor médio de r^2. O resultado obtido é

$$\langle r^2 \rangle = 2Dt\,, \tag{13}$$

em que D é o coeficiente de difusão. Aplicando as leis da Termodinâmica a este sistema, Einstein mostrou ainda que D depende da temperatura e da viscosidade do líquido e das dimensões dos grãos. Em particular para grãos esféricos com raio a em suspensão num líquido de viscosidade η à temperatura T tem-se:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \qquad (14)$$

Fazendo a experiência em água ($\eta = 0,8\ kg\ m^{-1}s^{-1}$), à temperatura ambiente e com grãos com 10^{-3} milímetros de raio obtemos um livre percurso médio de cerca de uma centésima de milímetro por minuto.

As equações (13) e (14) relacionam o valor médio de uma grandeza, uma flutuação, com a viscosidade que é uma grandeza que caracteriza a dissipação de energia no fluido. Para o mesmo tempo, em média o grão de pólen andará menos se o líquido for mais viscoso. Por outras palavras, terá um maior percurso médio na água do que em Drambuie. O *kT* caracteriza a energia média devida à agitação térmica das moléculas e quanto maior for esta energia, isto é, quanto maior for a temperatura, maior será o percurso médio do grão de pólen.

Alguns anos depois dos trabalhos de Einstein, o Físico Francês Jean Perrin realizou várias experiências que comprovaram a teoria que resumimos. Por outras palavras, medindo, em função do tempo, o percurso médio de grãos com dimensões conhecidas em suspensão em água, Perrin pôde determinar experimentalmente o valor da constante de Boltzmann, k.

3. Nota Final

No final do século XIX, a estrutura atómica e molecular da matéria, apesar de poder contar com muitos sucessos, estava ainda longe de recolher o apoio unânime de todos os Físicos. Esta ideia tinha essencialmente sido suportada pelos Químicos que progressivamente tinham vindo a estabelecer leis empíricas que procuravam explicar a razão para a ocorrência das reacções químicas. Se para fazer, por exemplo, água, é preciso juntar hidrogénio e oxigénio sempre numa determinada proporção relativa e o mesmo se passa para todas as reacções químicas, então parece plausível fazer corresponder a cada elemento um átomo. Deste modo, preciso de dois átomos de hidrogénio para cada átomo de oxigénio para fazer água e de um de cloro por cada um de sódio para fazer cloreto de sódio. Guiados por esta ideia faz sentido perguntar que tamanho tem um átomo? Ou, melhor ainda, que massa terá cada átomo? Foram também os Químicos que estabeleceram uma tabela relativa de massas atómicas, impropriamente chamada tabela de pesos atómicos. Por razões que não importa aqui detalhar foi escolhido como padrão 1/12 da massa do átomo de carbono[1] e esta quantidade designa-se como *amu* (unidade de massa atómica). Nesta escala, o oxigénio tem uma massa de 16 *amu* e o hidrogénio 1 *amu*. Estamos agora em condições de inverter a questão e perguntar: um grama de hidrogénio, ou dezasseis de oxigénio, quantos átomos são? Cerca de 6×10^{23} átomos. Este número enorme designa-se por número de Avogadro, N_A.

A constante de Boltzmann *k* é o quociente da constante dos gases *R* a dividir por N_A. O valor experimental de N_A obtido por Perrin estava em bom acordo com outras determinações desta grandeza feitas anteriormente, por outros processos. Desta forma, não só a teoria de Einstein foi verificada, como a hipótese atómica que a fundamentava resultou validada.

[1] Em rigor o padrão é o isótopo 12 do carbono.

Sete Passos em Topolo(ma)gia, IV

A função distância
é talvez maior
talvez até igual
de facto nula
no ar um ponto fixo
tu
vestido
ou não
de teorema

Teresa Maio

Porque é que certas funções elementares não são racionais*

Gabriela Chaves e José Carlos Santos
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Um exercício clássico que se costuma propor a alunos de cursos de introdução à Análise Real consiste em pedir para provar que a função seno não é uma função polinomial nem, mais geralmente, uma função racional. Que assim é resulta de nenhuma função racional ter uma infinidade de zeros, a menos que se trate da função nula. No entanto, isto não elimina a possibilidade de a restrição da função seno a um intervalo aberto ser uma função racional. Uma maneira de se provar que uma função definida num intervalo aberto não é uma função polinomial consiste em ir calculando as sucessivas derivadas; se a função fosse polinomial então, uma vez que o grau da derivada de uma função polinomial não constante é menor que o grau da função de que se partiu, ao fim de algumas derivações acaba-se por obter uma função constante. No entanto, esta abordagem não funciona para funções racionais.

Ou funciona?

Será demonstrado neste artigo, por métodos elementares, que as restrições a intervalos abertos de certas funções elementares não são racionais e isso será feito recorrendo ao conceito de grau de uma função racional.

No que se segue, o domínio de qualquer função será um intervalo aberto da recta real. Quando se mencionar a função exponencial, a função seno, etc., será de facto às restrições daquelas funções ao intervalo que se estará a fazer referência.

Definição: Se R for uma função racional não nula, então chama-se grau de R (que será representado por gr(R)) à diferença entre os graus do numerador e do denominador. Mais precisamente, se P_1 e P_2 forem funções polinomiais tais que $R=P_1/P_2$, então $gr(R)=gr(P_1)-gr(P_2)$.

Vê-se facilmente que esta definição faz sentido, ou seja, que o grau de R não depende das escolhas de P_1 e de P_2 ([**1**, cap. 4, §3.1]).

Teorema: Sejam f e g funções racionais, nenhuma das quais é a função nula.

1. Se $f+g \not\equiv 0$, então $\mathrm{gr}(f+g)\leq\max\{\mathrm{gr}(f),\mathrm{gr}(g)\}$.
2. O grau do produto satisfaz a relação $\mathrm{gr}(f.g)=\mathrm{gr}(f)+\mathrm{gr}(g)$.
3. Se $f' \not\equiv 0$, então $\mathrm{gr}(f')<\mathrm{gr}(f)$. Mais geralmente, se $n\in IN$ e se $f^{(n)}\not\equiv 0$, então $\mathrm{gr}(f^{(n)})\leq\mathrm{gr}(f)-n$.

Demonstração. Como afirma Bourbaki [**1**, cap. 4, §3.1], as demonstrações das duas primeiras alíneas resultam das fórmulas análogas para funções polinomiais. Sejam P_1, P_2, Q_1 e Q_2 funções polinomiais tais que $f=P_1/P_2$ e que $g=Q_1/Q_2$. Se $f+g$ não for a função nula, então

$$\begin{aligned} gr(f+g) &= \mathrm{gr}(P_1Q_2+P_2Q_1)-\mathrm{gr}(Q_1Q_2)\\ &\leq \max\{\mathrm{gr}(P_1)+\mathrm{gr}(Q_2),\mathrm{gr}(P_2)+\mathrm{gr}(Q_1)\}-\mathrm{gr}(Q_1)-\mathrm{gr}(Q_2)\\ &= \max\{\mathrm{gr}(P_1)-\mathrm{gr}(Q_1),\mathrm{gr}(P_2)-\mathrm{gr}(Q_2)\}\\ &= \max\{\mathrm{gr}(f),\mathrm{gr}(g)\}. \end{aligned}$$

* Tradução de *Why Some Elementary Functions Are Not Rational*, publicado originalmente em *Mathematics Magazine*, vol. **77(3)**, 2004, pp. 225-226.

A Gazeta de Matemática agradece à The Mathematical Association a gentileza de ter permitido esta publicação.

A segunda alínea decorre imediatamente da definição. Finalmente, caso f' não seja a função nula, então

$$\begin{aligned} gr(f') &= \mathrm{gr}\left(\frac{P_1'P_2 - P_1P_2'}{P_2^2}\right) \\ &= \mathrm{gr}(P_1'P_2 - P_1P_2') - 2\mathrm{gr}(P_2) \\ &\leq \max\{\mathrm{gr}(P_1') + \mathrm{gr}(P_2), \mathrm{gr}(P_1) + \mathrm{gr}(P_2')\} - 2\mathrm{gr}(P_2) \\ &= \max\{\mathrm{gr}(P_1) - 1 + \mathrm{gr}(P_2), \mathrm{gr}(P_1) + \mathrm{gr}(P_2) - 1\} - 2\mathrm{gr}(P_2) \\ &= \mathrm{gr}(P_1) - \mathrm{gr}(P_2) - 1 \\ &= \mathrm{gr}(f) - 1. \end{aligned}$$

Resulta, por indução, que se $n \in IN$ é tal que $f(n) \not\equiv 0$, então $\mathrm{gr}(f^{(n)}) \leq \mathrm{gr}(f) - n$.

Este teorema já nos permite demonstrar que certas funções não são racionais. Considere-se, por exemplo, a função f definida por $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}$. Se fosse racional, resultaria da segunda alínea do teorema que $2 = \mathrm{gr}(f^3) = 3\mathrm{gr}(f)$, o que é impossível, visto que o grau de f é um número inteiro. Por outro lado, visto que exp'=exp, a terceira alínea garante que a função exponencial não é uma função racional.

Embora seja verdade que, para funções polinomiais não constantes, se tem $\mathrm{gr}(P') = \mathrm{gr}(P) - 1$, isto não é verdade em geral para funções racionais: se $n \in IN$ e se $f(x) = (x^n - 1)/(x^n + 1)$, então $\mathrm{gr}(f) = 0$, mas $\mathrm{gr}(f') = -n - 1$.

Como consequência do teorema temos o seguinte

Corolário: Se f for uma função racional não nula, se $k \in IR$ e se $n \in IN$, então $f^{(n)} \neq k \cdot f$, a menos que f seja polinomial, que $k=0$ e que $n > \mathrm{gr}(f)$.

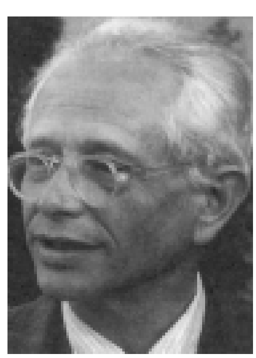
Este corolário pode ser usado (com $k=1$ e $n=1$) para mostrar novamente que a função exponencial não é racional e também (com $k=-1$ e $n=2$) para mostrar que nem a função seno nem a função co-seno é racional. Com um pequeno esforço adicional, poder-se-ia deduzir do corolário que nem a função tangente nem a função co-tangente são racionais, mas é mais simples observar que, uma vez que $\tan' = \sec^2$, se a função tangente fosse racional então $\cos^2$ também o seria, pois seria o recíproco de uma função racional. Mas

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$$

e, portanto, a função $x \to \cos(2x)$ seria racional. Que isto é impossível pode ser deduzido do corolário (com $k=-4$ e $n=2$) ou do facto de o co-seno não ser racional.

Bibliografia

[1] N. Bourbaki, *Algèbre, chapitres 4 à 7*, Masson, Paris, 1981. Tradução inglesa: *Algebra II*, Springer-Verlag, Berlim, 1980.



Retrato de Max Dehn

Estamos no semestre de Verão
do ano sereno de 1899
em Göttingen.
Por trás há um rio
ou um cenário que o cria.

Só nós ainda
sabemos que o jovem Max Dehn[1]
terá à pressa
de abandonar a fotografia
e ir-se desfazendo do casaco
colarinhos altos camisa e vida
para tentar chegar e descobrir-se
na margem estranha.

(*F. J. Craveiro de Carvalho*)

[1] Como outros, M. D. Foi forçado a abandonar a Alemanha em 1939. No seu caso, ao encontro de uma vida que o seu talento matemático não merecia.

Em defesa da leitura Matemática

Nos estudos literários, sabe-se que os estudantes devem ler textos clássicos, usar gramáticas, dicionários e outras referências. Em matemática e ciências, é também imprescindível que o estudante se habitue a consultar manuais. Faz parte da sua preparação universitária aprender a lê-los e a usá-los para resolver dúvidas e para procurar novos desenvolvimentos.

Parece estar a chover-se no molhado, e a maioria dos docentes dirá que utiliza manuais para as suas aulas. Mas basta levantar algumas questões, para se ver que o alerta não é vão. Pense-se, por exemplo, em quantos estudantes terminam o curso habituados a ler textos matemáticos. Na maioria, estudaram a partir de apontamentos e de fotocópias de exercícios. Muitos não abriram nenhum livro sério — ou abriram-no e logo o fecharam. Pergunte-se quantos deles terminaram o curso guardando um livro a que possam recorrer, 10 anos depois, para esclarecer se existem funções contínuas não diferenciáveis.

Em matemática, talvez o problema seja ainda mais grave do que noutras disciplinas, pois sem ter estudado por obras de referência é difícil perceber o valor da definição, o rigor da prova e o poder da construção matemática.

Imagine-se, por exemplo, que se pede a alguém para demonstrar que a função logaritmo é monótona crescente. Numa determinada cadeira, a pergunta poderá ser razoável. Mas uma das coisas essenciais que os estudantes devem aprender é que esta pergunta, colocada em abstracto, pode não ter sentido, pois é necessário saber qual a definição adoptada para logaritmo. Se se definir logaritmo a partir da área delimitada pela hipérbole $1/x$, a demonstração é uma. Se se definir como função inversa da exponencial, a demonstração é outra. Se se usar a definição axiomática «função crescente tal que $f(xy) = f(x) + f(x)$», a tese está contida na definição. O exemplo pode multiplicar-se, sobretudo em matemáticas mais avançadas.

O que é um livro?

Os elementos de estudo mais frequentes nas nossas universidades e politécnicos continuam a ser os apontamentos das aulas. São péssimas fontes de estudo, pois contêm imprecisões incontroláveis. São o produto de um processo sujeito a muito ruído, em que todos os intervenientes se enganam. O professor, mais frequentemente do que gostaria, anuncia x e escreve y quando estava a pensar em z. O aluno escreve w quando ouviu x. Mais tarde, quando vai ler as suas notas apressadas, lê v onde julgava ter escrito w. Quem alguma vez tenha folheado os apontamentos dos seus alunos sabe as surpresas desagradáveis que o esperam.

Com sebentas ou folhas, não se passa exactamente o mesmo. Mas subsistem deficiências graves. Continua a haver muitos erros e omissões. Mais grave ainda, a sabedoria que nelas se inclui vem do céu — é assim porque é assim. Quem queira explorar melhor alguma matéria ou confirmar alguma afirmação não tem nenhuma indicação de onde poderá recorrer. Não há referências. Não há bibliografia.

Mesmo quando as folhas juntam fotocópias de bons livros, não existem índices correctamente organizados, nem referências bibliográficas nem um encadeamento de ideias. Com esses materiais o aluno habitua-se a estudar tópicos dispersos e a decorar técnicas, sem perceber a sua unidade.

Um bom manual tem características que fazem dele mais do que uma lista de conhecimentos. É tão auto-suficiente quanto possível — as definições essenciais estão nele contidas. As referências que permitem aprofundar os temas estão presentes na bibliografia. Os créditos estão devidamente atribuídos. A sequência das matérias é clara e as numerações ou outras referências estão bem estabelecidas. Além disso, existe habitualmente um bom índice remissivo, que permite procurar rapidamente tópicos essenciais. E existem bons exercícios, que permitem verificar a assimilação das matérias, treiná-la e aprofundá-la. Finalmente, existe uma revisão cuidada, pois o livro é habitualmente examinado por várias pessoas, passa por milhares de leitores e sofre emendas ao longo de sucessivas edições. São estes os bons manuais. Se olharmos para grande número de «livros» presentes no mercado nacional verificamos que eles não são realmente livros, são folhas encadernadas.

A complacência com o analfabetismo matemático

O estudante de matemática, engenharia, economia ou outras áreas técnicas sai da universidade semianalfabeto se passar todos os seus estudos superiores sem nunca ter lido um manual de referência. Não terá adquirido a experiência de ler autonomamente matemática, que é uma destreza que apenas se adquire com treino. Ler não é tão fácil como ouvir ou ver. Sobretudo matemática.

Sai semianalfabeto também porque nunca passou pela experiência de procurar um resultado, de seguir sozinho um argumento em diálogo com o livro, de procurar referências e clarificações, de esclarecer o significado das notações, de caminhar para referências complementares. Por estranho que pareça, há alunos que não sabem usar os índices remissivos nem procurar uma referência bibliográfica. Por vezes, não sabem distinguir a citação de um livro da de um artigo de revista científica.

Uma das objecções mais frequentes ao uso de um manual universitário é a alegação de não se encontrar nenhum que corresponda exactamente à cadeira em causa. E isso deve ser sempre verdade, tal como em tudo na vida. Mas tal como em tudo na vida, é preciso não tirar conclusões apressadas.

Num almoço fora de casa, temos de escolher entre os pratos da lista do restaurante. Se reparamos bem, não existe exactamente o que gostaríamos de comer. Há filetes, mas o arroz de tomate não tem pimentos, como gostaríamos. Ou o bife, que também nos atrai, não tem molho de pimenta, nem no restaurante o sabem fazer. E nos vinhos da lista não está exactamente o que nos apeteceria. Habitualmente acomodamo-nos, sabendo que a alternativa é não comer e que, afinal de contas, há várias maneiras de matar a fome. E, por vezes, ao escolher um prato diferente do que tínhamos na ideia, temos uma agradável surpresa.

Assim se passa na escolha de um manual universitário. Se tentamos escolher um que tenha exactamente o que pretendemos, da forma que pretendemos e com a sequência que pretendemos, é provável que não o encontremos. O que é menos provável, contudo, é que não exista nenhum que nos sirva. E se tal acontecer numa cadeira universitária que não seja muito avançada, talvez seja de duvidar de nós próprios e da ideia que temos da cadeira...

Há quem objecte, dizendo que a abundância de manuais é verdadeira para a língua inglesa, mas não para a portuguesa. É uma objecção que não se percebe, num momento em que o inglês é uma língua incluída nos cursos do básico e secundário e, muitas vezes, constitui disciplina obrigatória no secundário. A leitura de um manual em inglês tem, na realidade, a vantagem de praticar a leitura desse idioma e de alargar horizontes culturais, dadas as referências serem habitualmente anglo-americanas.

Outros professores argumentam, dizendo que os manuais que conhecem são demasiadamente avançados ou demasiadamente elementares. Outros ainda escolhem mais do que um manual e apontam na bibliografia quatro ou cinco, quando não 10 ou 20, que é o caminho directo para os alunos não lerem nenhum livro.

Os manuais não servem para contentar os professores quanto ao rigor ou profundidade de tratamento dos temas, nem para mostrar aos colegas docentes como a nossa cadeira está avançada. Servem para ajudar os alunos no estudo, para situar a matéria, para disponibilizar definições e referências, para apontar exercícios. Podem ser superficiais para nosso gosto, mas prestarem uma grande ajuda aos nossos estudantes e encaminhá-los na leitura autónoma da matemática.

Como em tudo na vida, há que fazer escolhas. A complacência com um ensino sem referências é um vício pior que uma escolha imperfeita. A experiência de leitura de um texto matemático é insubstituível. Estaremos todos a fazer o melhor que podemos?

Optimização Matemática

João Luis Soares
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Resumo:
A optimização (matemática), também conhecida por programação matemática, é uma área da matemática que tem tido crescimento explosivo apesar de possuir uma história relativamente recente. Basicamente, diz respeito a esta área a caracterização e procura de minimizantes, ou maximizantes, de uma certa função num certo conjunto, geralmente definido por equações e inequações algébricas. Neste artigo procuramos suscitar a curiosidade do leitor para o mundo da optimização. Aproveitamos para recordar um pouco da história da optimização e apresentamos, para quem não conhece, a sociedade portuguesa de investigação operacional que celebrou 25 anos de existência no ano de 2004.

1. Introdução

Imagine duas pessoas, o Alexandre e o João, jogando o jogo que passamos a descrever. O Alexandre escolhe um número i (entre 1 e m) e o João escolhe um número j (entre 1 e n) sem saber que número escolheu o Alexandre. Revelam, então, os números que escolheram e o Alexandre paga ao João um montante definido pela componente na posição (i, j) de uma matriz m x n fixada antecipadamente por aqueles dois amigos. Por exemplo, se essa matriz A=[a_{ij}] fosse

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

então, se o Alexandre tivesse escolhido 2 e o João 1, o Alexandre deveria pagar ao João €1. Por outro lado, se o Alexandre tivesse escolhido 1 e o João 2 então o Alexandre deveria pagar ao João -€4, que é o mesmo que receber €4.

Suponha que os intervenientes pretendem repetir o jogo várias vezes. Do seu ponto de vista, o João pretende definir uma estratégia que, no final, lhe dê um saldo positivo apreciável. Quando o João escolhe 1 ganha, pelo menos, €1 enquanto que quando escolhe 2 corre o risco de ganhar -€4. Depois de pensar um pouco, o João decide definir uma estratégia com base na Teoria das Probabilidades. Por exemplo, escolher 1 com probabilidade 3/4 e 2 com probabilidade 1/4. O valor esperado do seu ganho será (3/4)x(€4)+(1/4)x(-€4) =€2 se o Alexandre escolhe 1 ou (3/4)x(€1)+(1/4)x(€2)=€(1.25) se o Alexandre escolhe 2. Com esta estratégia, diremos que o *ganho esperado* do João é €(1.25) (o menor daqueles dois valores).

O que deve o João fazer em geral? Se ele opta por uma estratégia do tipo descrito, na qual ele escolhe j com probabilidade p_j então o seu *ganho esperado* é

$$\min_{i=1,2,\ldots,m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \right\}, \qquad (1)$$

e, por isso, o seu problema é o de identificar as probabilidades p_j que tornam máximo o valor desta função de $p_1, p_2,\ldots,p_n$. Por outras palavras, o João deve resolver o seguinte problema de optimização

$$\begin{cases} \text{maximizar} & \min\limits_{i=1,2,\ldots,m} \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \right\} \\ \text{sujeito a} & \sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1, \\ & p_j \geq 0 \ (j = 1,2,\ldots,n). \end{cases} \tag{2}$$

O problema (2) é um 'problema de optimização': pretende-se maximizar (ou minimizar) uma função de várias variáveis (os p_j's) que devem satisfazer um conjunto de restrições. O primeiro passo para resolver um problema de optimização é encontrar condições que qualquer solução procurada deve satisfazer – as **condições de optimalidade**.

A função $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j$ que aparece nas restrições do problema (2) é uma função linear de $p \equiv (p_1, p_2,\ldots, p_n)$ porque o resultado de multiplicar todas as variáveis p_j por um mesmo escalar real e avaliar a função produz o mesmo resultado que multiplicar a função por esse escalar real.

A função 'objectivo' (1) é, claramente, não linear. Contudo, podemos fazer com que o problema (2) fique definido totalmente através de funções lineares recorrendo a um truque muito simples. Introduz-se uma nova variável, v por exemplo, e reformulamos o problema (2) para

$$\begin{cases} \text{maximizar} & v \\ \text{sujeito a} & v \leq \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \quad (i = 1,2,\ldots,m) \\ & \sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1, \\ & p_j \geq 0, \quad (j = 1,2,\ldots,n). \end{cases} \tag{3}$$

Se conseguirmos resolver este problema então, no final, v deverá assumir o valor

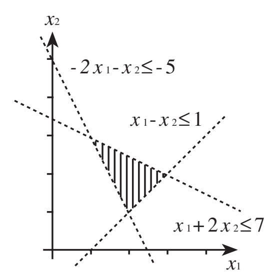
$$v = \min_{i=1,2,\ldots,m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \right\}.$$

Por isso, o novo problema (3) é equivalente ao problema original (2).

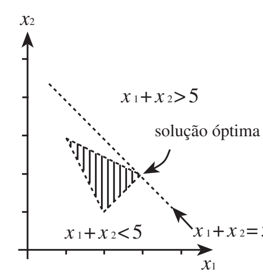
Muitas das ideias transmitidas em optimização podem ser ilustradas de forma geométrica. Consideremos, por exemplo, o seguinte problema linear:

$$\begin{cases} \text{maximizar} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 - x_2 \leq 1, \\ & -2x_1 - x_2 \leq -5, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 7. \end{cases} \tag{4}$$

Podemos esboçar o conjunto dos pontos 'admissíveis' (x_1, x_2) – os pontos que satisfazem as três restrições – assim obtendo uma representação no plano da 'região admissível'. Veja-se a Figura 1(a).



(a) Esboço da região admissível.



(b) Resolução geométrica.

Figura 1: O problema linear (4).

Agora desenhamos diversas 'curvas de nível' da função objectivo – veja-se a Figura 1(b) – que, pelo facto de a função objectivo ser linear, são paralelas entre si. A solução óptima é o ponto da região admissível com valor na função objectivo mais elevado. Esse ponto que, neste caso, possui coordenadas $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$, pode ser encontrado fazendo deslizar paralelamente uma das curvas de nível no sentido crescente (o sentido do gradiente da função objectivo) até ao limiar da região admissível.

Este pequeno exemplo ilustra duas ideias que são fundamentais em optimização linear. A primeira ideia é a de que existe uma solução óptima que é um 'vértice' da região admissível, o que motivou o desenvolvimento de um método de resolução de problemas lineares denominado por **método simplex**.

A segunda ideia é a de que o **gradiente** da função objectivo é 'combinação linear não negativa' dos gradientes das restrições que estão activas (isto é, são satisfeitas como igualdade) na solução óptima. De facto,

$$(1,1) = \frac{1}{3}(1,-1) + \frac{2}{3}(1,2)\,. \qquad (5)$$

Esta observação motivou um desenvolvimento teórico poderoso, denominado *dualidade*, que permite o reconhecimento pontual de soluções óptimas e a sua extensão permite a análise de problemas não lineares.

Em vez de pensarmos no jogo do ponto de vista do João, podemos abordá—lo do ponto de vista do Alexandre. Se ele opta também por uma estratégia aleatória semelhante, na qual ele escolhe i com probabilidade q_i então o seu *pagamento esperado* ao João é

$$\max_{j=1,2,\dots,n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} q_i \right\}.$$

O problema do Alexandre é o de identificar as probabilidades q_i que tornam mínimo o seu pagamento esperado. Usando o mesmo truque anterior, introduzimos uma nova variável w, e o problema do Alexandre fica o seguinte problema de optimização

$$\begin{cases} \text{minimizar } w & & \\ \text{sujeito a } w & \geq \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} q_i & (j = 1,2,\dots,n) \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} q_i = 1, & \\ & q_i \geq 0 & (i = 1,2,\dots,m) \end{cases}.$$

O valor óptimo deste problema é o *pagamento esperado mínimo* do Alexandre ao João, tal como (3) era o *ganho esperado máximo* do João ao Alexandre.

É notável, e de modo algum óbvio, que estes dois valores óptimos são iguais. Para qualquer que seja a matriz A, o pagamento esperado mínimo do Alexandre é igual ao ganho esperado máximo do João. Este facto é um caso especial do Teorema da Dualidade para optimização linear. Este teorema estabelece que os programas lineares existem aos pares (um é um problema de maximização e o outro é um problema de minimização) e cujos valores óptimos coincidem. O Teorema da Dualidade está, também, intimamente ligado à observação que fizemos antes: na solução óptima, a função objectivo é uma combinação linear não negativa das restrições que são satisfeitas como igualdade.

2. Um pouco de história

Tal como em muitos outros ramos da matemática, a optimização teve a sua origem nas aplicações. Embora, no seu caso, não seja preciso recuar muitos anos para identificar as aplicações que impulsionaram o seu desenvolvimento. De facto, a história dos principais resultados de optimização é surpreendentemente curta.

É surpreendente porque a optimização aparenta ser uma questão tão natural num contexto real como num contexto abstracto, como é o da matemática. Ao longo de milhares de anos, matemáticos procuraram resolver sistemas de equações para ajustar observações astronómicas na Babilónia, para determinar preços no mercado de comida chinês, para calcular a posição e velocidade de objectos, etc. A resposta para este tipo de questões contribuiu para o crescimento de algumas áreas da matemática, como é o caso da álgebra, da teoria de números e da matemática numérica.

Mas, enquanto que a resolução de equações, nas mais variadas formas, permaneceu central para a matemática, a resolução de inequações parece ter suscitado um interesse meramente marginal. Pouca relevância foi dada à resolução de inequações e à procura de soluções "óptimas", pelo menos de uma maneira sistemática.

Existem alguns, poucos, casos isolados, como o de Fourier (1768-1830) que introduziu inequações em mecânica e que relacionou equilíbrio mecânico com um tipo de multiplicadores introduzido por Lagrange (1736-1813) para equações. Fourier também descreveu um processo de eliminação de variáveis para a resolução de inequações que funciona de um modo semelhante, mas mais complicado, ao bem conhecido método de eliminação de Gauss (1777-1855). Entre outros, também Farkas (1847-1930) aplicou inequações à mecânica, e Minkowski (1864-1909) também as usou no seu *Geometria de Números*.

Mas, só no final da década de 30 e início da década de 40 do século XX é que apareceram os resultados que se podem considerar hoje como inspiradores do franco desenvolvimento deste ramo da matemática. Pode até perceber-se porque é que esses desenvolvimentos ocorreram por essa altura. Aparentemente, a situação de guerra e competição que se vivia, às quais se associou um forte desenvolvimento industrial, criou condições para que se procurasse desempenhar tarefas melhor e mais rápido. A gestão dos recursos impunha que se utilizassem técnicas sofisticadas de optimização que acabaram por, de uma forma ou de outra, cair no âmbito da matemática.

Os cientistas que se destacaram nessa altura, com contribuições decisivas, foram George Dantzig, em 1947, nos E.U.A. com o seu método simplex para resolver problemas de transportes/distribuição no Pentágono e Leonid Kantorovich na extinta União Soviética com desenvolvimentos teóricos na resolução de problemas de equilíbrio económico.

No final da década de 50, este ramo da matemática — na altura mais conhecido por programação matemática — era já uma disciplina sólida, começando a ser leccionada em universidades, quer em cursos de matemática, quer em cursos de ciências de gestão.

Do ponto de vista da matemática, este movimento suscitou o aparecimento de uma grande variedade de teoremas e até mesmo teorias. Conduziu a uma reapreciação de resultados antigos como o Lema de Farkas e o processo de eliminação de Fourier. Surgiram estudos mais aprofundados de conceitos como os de sistemas de inequações, poliedros e dualidade. Ao mesmo tempo, muitos outros resultados de teoria de convexidade foram desenvolvidos ou especializados de forma tal que a convexidade é, hoje, uma parte fundamental da optimização. Note-se, no entanto, que apesar desta área da matemática recorrer tanto a outros ramos, mais antigos, da matemática, não deixa de ser surpreendente como é que a área atingiu um nível tão elevado de sofisticação em tão pouco tempo.

Do ponto de vista prático, o método simplex possibilitou a resolução de problemas de optimização de grande dimensão (*i.e.*, com um número elevado de variáveis e inequações) de diversos tipos e origens. As origens mais frequentes para esses problemas eram, então, as de planeamento de transportes, de planeamento de produção e distribuição, de afectação de recursos (matérias-primas, mão-de-obra ou disponibilidades temporais em máquinas) e de calendarização de tarefas.

Para além disso, a programação matemática estimulou o estudo de fenómenos económicos, como os de equilíbrio e os preços-sombra (ou valores marginais). E, claramente, também havia a interacção com as ciências de computação. Os computadores possibilitaram a execução do método simplex em problemas grandes. Por outro lado, o método simplex e outros métodos revelaram fragilidades numéricas na computação automática e suscitaram questões de complexidade computacional.

O crescimento da área conduziu a um inevitável aumento da especialização e da diversificação. Assim, observamos as especializações em: optimização não linear, mais ligada à matemática numérica, optimização discreta e optimização combinatória, algo distintas e mais ligadas à matemática finita, e (mais recentemente) a optimização estocástica, mais ligada às probabilidades. Observamos diversificações no sentido da matemática, no sentido da investigação operacional e no sentido das ciências de computação. Observamos também diversificações no sentido da teoria, no sentido da computação e no sentido da aplicação.

3. Contextualização com a investigação operacional

A investigação operacional é a ciência que envolve a análise de sistemas complexos, a construção de modelos que descrevam as relações entre as variáveis do sistema, e a sua resolução, que se traduz na procura das soluções mais eficientes. Os resultados fornecidos pelos modelos permitem compreender e prever o comportamento dos sistemas, e servem para apoiar os gestores no processo de tomada e execução de decisões. Por essa razão, é uma ciência que tem um papel fundamental na gestão racional de recursos usados em operações e processos e na melhoria da produtividade, tendo um campo privilegiado de aplicação em diversas áreas científicas, como a engenharia, a gestão, a economia, a matemática, e muitas outras.

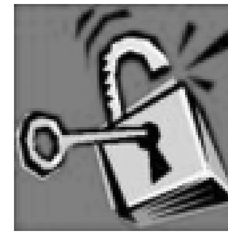
Por isso, não é de espantar que o ensino e a investigação em optimização estejam tradicionalmente ligados à investigação operacional. A investigação operacional é, no nosso país, promovida pela sociedade científica *Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional* (APDIO). Em 2004, esta sociedade completou 25 anos sobre a sua fundação. Actualmente, a APDIO é uma sociedade activa e participada, com cerca de 550 associados, um número muito substancial quando comparado com o de outras associações que também integram a EURO (*The Association of European Operational Research Societies*) ou a IFORS (*International Federation of Operational Research Societies*). A qualidade do trabalho que tem vindo a ser desenvolvido pela comunidade portuguesa de Investigação Operacional é reconhecida a nível internacional.

Ela traduz-se em elevados índices de publicação de artigos em revistas internacionais. Para esse reconhecimento muito tem contribuído o sucesso de organização de múltiplos eventos internacionais que têm decorrido no nosso País que, no ano de 2004, foram o Optimization'2004, em Lisboa, e o IO'2004, no Porto. O leitor poderá obter mais informações sobre a APDIO na *caixa* e em http://www.apdio.pt.

Termino o artigo com um desafio para o leitor. Resolva o problema do Alexandre de modo geométrico. Verifique que o seu pagamento esperado mínimo é igual ao ganho esperado máximo do João.

E-mail: jsoares@mat.uc.pt.
Este texto está disponível online em http://www.mat.uc.pt/~jsoares/.

Cofres



1. O criativo professor Manuel apareceu na aula com cinco cofres, numerados de 1 a 5, naturalmente. Um deles contém 30 bilhetes para um concerto Rock (há 30 alunos na sala), os outros quatro estão vazios. Mas, para descobrir o número do cofre premiado, o prof. propõe um exercício: "Vocês escrevem onze perguntas a que eu possa responder Sim ou Não. Após eu responder podem escolher um cofre para abrir. Mas", enfatizou, "eu posso mentir uma vez nas minhas respostas. Não garanto que o faça, mas posso mentir, no máximo, uma vez".
"Temos de escolher bem as perguntas, mas não sei se 11 chegam", disse a Francisca. "Claro que chegam, vamos ao concerto!", disse a Laura.
A Laura tem razão? Quais são as perguntas a fazer? E se fossem menos de 11?

2. Dez alunos do prof. Manuel vão ter um teste de recurso, visto que as notas não têm sido boas. O prof. aparece na sala com um cofre que abre com uma combinação de cinco algarismos. "O enunciado está dentro do cofre, e aqui estão os vossos códigos para o abrirem", e distribui as combinações 07344, 14098, 27356, 36429, 45374, 52207, 63822, 70558, 85237 e 97665. Os alunos tentaram, mas nenhum conseguiu abrir o cofre.
"Ah, já me esquecia, cada um dos vossos códigos tem exactamente um dígito no local certo, têm de deduzir o código para abrir o cofre", diz o prof.
Os alunos podem aceder ao enunciado? Qual é o código certo?

3. A comissão de turma é constituída por cinco elementos, a Laura, a Francisca, o Rui, a Ana e o Diogo. O prof. Manuel confia muito nestes alunos, mas não infinitamente. Para guardar o livro de ponto utiliza um cofre com várias fechaduras diferentes, de forma a que quaisquer três destes alunos juntos podem abri-lo, mas dois nunca o conseguem. Ao prof. basta a presença de um dos alunos para o abrir.
Quantas fechaduras tem o cofre? Quantas chaves tem cada pessoa?

4. Diz o prof. na última aula: "Agora, para irmos de férias contentes, tenho um problema de cofres mais difícil. Vou começar com um exemplo. Se tivermos dez cofres, numerados de 1 a 10, colocados lado a lado:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Jorge Nuno Silva
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

eu começo por alterar (neste caso, abrir) todos (representemos por negrito os cofres abertos):

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

agora vou alterar (neste caso, fechar) os de numeração par, obtendo:

1 2 **3** 4 **5** 6 **7** 8 **9** 10

seguidamente altero (fecho ou abro) os que usem múltiplos de 3:

1 2 3 4 **5 6 7** 8 9 10

e o mesmo para os múltiplos de 4:

1 2 3 **4 5 6 7 8** 9 10

Agora os múltiplos de 5:

1 2 3 **4** 5 **6 7 8** 9 **10**

depois, sucessivamente, os múltiplos de de 6, 7, 8, 9 e 10, obtendo:

1 2 3 **4** 5 6 7 8 **9** 10

Os cofres abertos, após estes dez passos, são os correspondentes aos números 1, 4 e 9. A minha pergunta é: e se tivessemos 100 cofres e procedessemos da mesma forma, alterando o estado deles por um processo semelhante, englobando cem passos, quais estariam abertos no fim?" Ouviu-se uma voz do fundo da sala: "Chou... é fácil, eu sei!", afinal o Diogo não dormia sempre nas aulas...

GAZETA DE MATEMÁTICA
Julho 2005 - nº 149

Para a História da Álgebra em Portugal: II

José Morgado
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Um dos interesses do Professor José Morgado (1921-2003) foi a História da Matemática, particularmente a História da Matemática em Portugal.
No Volume 137 da Gazeta de Matemática, José Morgado publicou o artigo *Para a História da Álgebra em Portugal: I*[1] que deveria ter tido continuidade. No entanto, como é sabido, aquele volume saiu em 1990 e só no ano 2000 foi possível retomar a publicação da Gazeta de Matemática. Recentemente conseguimos localizar a segunda parte do artigo em causa. Temos todo o gosto em publicá-la agora.

Em 1777 morria o rei D. José e, pouco depois, a rainha D. Maria I demitia e desterrava o Marquês de Pombal.

José Anastácio da Cunha foi preso em 1 de Julho de 1778 pelo familiar do Santo Ofício, Inácio José da Mota e, em 11 de Outubro de 1778, foi condenado a três anos de reclusão seguidos de quatro anos de degredo para Évora.


PRINCIPIOS MATHEMATICOS
SAÕ LUCAS.
SAÕ JORGE
D. JOAÕ,
PRINCIPE DO BRAZIL;
LISBOA

Como era costume da Inquisição, confiscaram-lhe ainda todos os bens. Mais tarde perdoaram-lhe parte da pena, mas a Inquisição nunca lhe restituiu os bens de que se apossou e nunca lhe foi consentido voltar à sua cátedra na Universidade de Coimbra.

Posto em liberdade em 1781, foi ocupar os cargos de professor substituto e director da Casa Pia de Lisboa, a convite de Pina Manique.

Morreu em Lisboa em 1 de Janeiro de 1787, três anos antes da publicação do seu livro *Principios Mathematicos*.

A prisão da Anastácio da Cunha pela Inquisição foi um profundo golpe contra a Universidade e contra o trabalho científico no nosso país.

No entanto, nem tudo foi perdido. Apesar de vários contratempos, a reforma dos estudos prosseguiu e foi complementada com a criação de escolas técnicas e com a fundação da Academia das Ciências de Lisboa, em 24 de Dezembro de 1779.

Antes da reforma pombalina, no reinado de D. João V, houve já alguma preocupação em elevar o nível de ensino da Matemática. O rei mandou vir três professores jesuítas italianos para ensinarem Matemática nos Colégios jesuítas, mas, com o tipo de ensino praticado, não conseguiram ultrapassar o elementar.

Houve, nesse período, alguns professores de Matemática que se distinguiram pelo seu interesse em certas aplicações da Matemática, à astronomia, à cosmografia, à hidrostática,

[1] José Morgado, *Para a História da Álgebra em Portugal: I*, Gazeta de Matemática, Vol. 137, pp. 3-21, 1990.

à navegação, à engenharia e a outras actividades, e publicaram algumas obras didácticas de feição elementar.

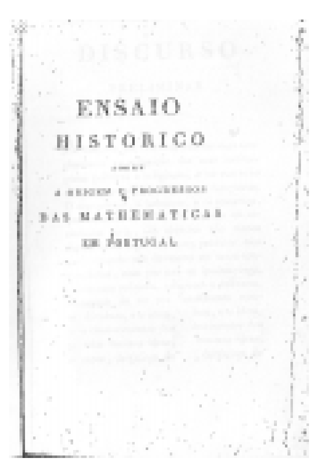
Mas, na Universidade, a cadeira de Matemática esteve sem professor desde 1612 até 1653 e, desde este ano até 1772, data da reforma pombalina, teve três professores, que a regeram em períodos diferentes, separados por longos intervalos em que ninguém a regeu.

Depois da reforma pombalina, foi possível encontrar quem estudasse Astronomia, sem o objectivo exclusivo de a aplicar à Navegação, e quem estudasse Matemática sem o objectivo exclusivo de a aplicar à Astronomia.

Quer dizer, surgiram, enfim, alguns estudiosos (embora ainda poucos) que estudavam Matemática *pelos seus próprios méritos*.

É transparente a alegria de Gomes Teixeira ao escrever ([39], pp. 234-235):

> "Os efeitos benéficos da reforma da Universidade e da criação desta Academia [a Academia das Ciências de Lisboa] fizeram-se sentir depressa. Pouco tempo depois, já em Portugal se ensinava doutrinas de Newton, MacLaurin, D'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, etc., e sobre elas se escreviam memórias. Ia-se nas Matemáticas atrás dos outros países, porque se chegara mais tarde, mas não se ia tão atrazado como era de esperar em quem chegara tão tarde".



Na verdade, por falta de uma tradição nacional de trabalho matemático, por falta de meios de informação decorrente do isolamento há séculos imposto ao país pelas classes dominantes, por falta de outras condições políticas, económicas e sociais, não foi possível chegar muito longe em nenhum ramo da Matemática.

Entre os matemáticos desse tempo, limitamo-nos a mencionar alguns daqueles que procuraram resolver alguns problemas de Álgebra, nos trabalhos que publicaram nas *Memórias da Academia Real das Sciências de Lisboa*.

1 – Garção Stockler: Como historiador, publicou o *Ensaio Histórico sobre a origem e Progresso das Matemáticas em Portugal* a que já fizemos referência. Publicou, além disso, vários trabalhos matemáticos nas *Memórias da Academia Real das Sciencias de Lisboa*, onde também publicou o *Elogio Histórico de João Le Rond D'Alembert* (tomo I das *Memórias*).

Um dos trabalhos intitula-se *Demons-tração do teorema de Newton sobre a relação que têm os coeficientes de qualquer equação algébrica com as somas das potências das suas raízes e aplicação do mesmo teorema ao desenvolvimento em série dos produtos compostos de infinitos factores*.

A demonstração dada utiliza séries e possivelmente o autor não tinha informação da demonstração, semelhante e mais simples, dada anteriormente por Lagrange, no seu tratado da resolução de equações numéricas.

A utilização das séries nem sempre foi feita com os devidos cuidados, o que, de resto, era frequente naquele tempo.

2 – João Evangelista Torriani: Melhorou a demonstração dada por Stockler, estabelecendo as fórmulas de Newton, sem recorrer à utilização de séries, no artigo intitulado *Dedução de uma fórmula geral que compreende todos os teoremas de Newton sobre as somas de potências das raízes das Equações* (tomo III (1812) das *Memórias*).

Num outro artigo *Dar a demonstração das Fórmulas propostas por Wronski para a Resolução Geral das Equações*, publicado no tomo VI (1819) das *Memórias*, Torriani mostra que as tais fórmulas de Wronski são completamente erradas.

3 – Francisco Simões Margiochi: No tomo VII das *Memórias* (1821), publicou um trabalho com o fim de provar que *não podiam ter forma de raízes, as equações literais e completas de grau superior ao quarto*.

Na Introdução a este trabalho, Margiochi diz, entre outras coisas, o seguinte:

"Na tradução francesa da Trigonometria de Cagnoli, impressa em Paris em 1808, diz-se que Ruffini publicara uma obra com o título *Theoria de l'equazioni* em que, usando de uma profunda análise, demonstrava a impossibilidade de resolução geral, com o fim útil de poupar tempo e evitar fadigas aos Geómetras".

E Margiochi acrescenta:

"Não pudemos alcançar esta obra nem vimos dela outra menção [...] Assim, por falta de conhecimento próprio, e de testemunho alheio, nenhum juízo podemos formar da composição de Ruffini".

A conclusão de Margiochi no sentido de que a equação geral de grau maior que 4 não é solúvel por radicais é válida, mas a demonstração não é correcta.

A verdade é que também a prova de Ruffini de que a equação geral de 5º grau não é solúvel por radicais não foi, de facto, conclusiva, porque assentava na hipótese de que os radicais que intervinham podiam ser todos expressos como funções racionais das raízes, o que Ruffini não provou.

Mais tarde, em 1826, Abel completou a demonstração de Ruffini, mostrando que, de facto, os radicais de que se necessitava para resolver uma equação podiam ser escolhidos como funções racionais das raízes de equações e de certas raízes da unidade ([44], p. 84).

4 – José Maria Dantas Pereira: Publicou no tomo II das *Memórias* (1799) o trabalho intitulado *Reflexões sobre certas somações sucessivas dos termos das séries aritméticas, aplicadas às soluções de diversas questões algébricas*, que foi lido em sessão da Academia do ano de 1794 e fornece um método de resolução das equações numéricas muito semelhante ao que foi publicado, bastante mais tarde, em 1819, pelo matemático inglês William George Horner (conhecido como *método de Horner* para o cálculo aproximado de raízes de equações numéricas).

O problema da resolução de equações não era o objectivo de Dantas Pereira. Obteve o seu método, incidentalmente, como aplicação de fórmulas que obteve para simplificar o cálculo dos valores de uma função polinomial, quando há necessidade de atribuir à variável, sucessivamente, muitos valores inteiros.

Prof. Dr. Luis Inácio Woodhouse
(1858-1927)

A semelhança entre esta aplicação de Dantas e o método de Horner, com prioridade para o matemático português, foi posta em relevo pelo antigo professor de Álgebra da Universidade do Porto, Luis Woodhouse, numa comunicação apresentada num congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências.

A comunicação está essencialmente contida no artigo *O método de Horner e um trabalho português esquecido (1794)*, que Luis Woodhouse publicou, em 1927, no *Jornal de Sciencias Matemáticas, Físicas e Naturais*, tomo XXIV, pp. 53-68.

No entanto, a comunicação de Woodhouse não encerra este assunto.

De facto, E. T. Bell, no seu livro *The Development of Mathematics*, diz que o método de Horner para a resolução numérica de equações pode ter sido já conhecido dos Chineses do século XIII, mas certamente Horner não estava ciente disso. E Bell acrescenta que, como matéria de facto, a Matemática não ficaria muito mais pobre, se nem os Chineses nem Horner tivessem encontrado tal método! ([6], p. 17).

Howard Eves, em *An Introduction to the History of Mathematics*, informa que o matemático chinês Ch'in Chiu-shao, que viveu em meados do século XIII, foi um dos matemáticos que generalizaram o método de extrair raízes quadradas (como vem nos *Nove Capítulos da Arte Matemática*) a equações de grau superior, conduzindo ao método numérico de resolver equações algébricas, conhecido actualmente como método de Horner ([19], p. 174).

Florian Cajori, em *A History of Mathematics*, diz que Ch'in Chiu-shao resolveu a equação

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0,$$

por um processo quase idêntico ao chamado método de Horner ([10], p. 75). D. J. Struik em *Concise History of Mathematics* ([38], p. 79) refere também que Ch'in resolveu esta equação generalizando o método de aproximações sucessivas, já usado nos *Nove Capítulos* para extrair raízes quadradas e raízes cúbicas.

Carl Boyer, no seu livro *A History of Mathematics* ([9], p. 226), diz que o chamado método de Horner era, na China do século XIII, um lugar comum e cita vários matemáticos chineses dessa época que o usaram amplamente.

Assim, já muito antes de Dantas Pereira, era conhecido um resultado muito semelhante ao que ele obtém para cálculo aproximado das raízes duma equação numérica.

Os trabalhos citados e outros que não citamos têm um real interesse para a história da Matemática *no nosso país*, em particular, para a história da Álgebra *no nosso país*, por não serem trabalhos meramente expositórios, são trabalhos que pretendem, de algum modo, contribuir para a resolução de algum problema ou do que se julgava ser um problema. É um facto que apresentam algumas deficiências, maiores ou menores, resultantes, sobretudo, do isolamento científico imposto ao país, mas tais trabalhos visam a investigação.

Referimo-nos, há pouco, à falta de condições políticas, económicas e sociais, favoráveis ao trabalho científico.

Basta ter presente que, logo no início do século XIX, sofremos três invasões pelos exércitos de Napoleão – em 1807, em 1809 e 1810. Todas estas invasões, e outras invasões espanholas de menor porte, foram escorraçadas, mas roubaram-nos muitas vidas e bens, além de terem provocado uma longa ocupação inglesa do nosso país.

Nesse período bem negro da nossa História, Portugal esteve a saque: pesados impostos de guerra lançados pelos generais invasores, sequestros de bens, roubos e assassinatos, tudo isso sofremos, tanto dos invasores como dos que eram *oficialmente* nossos aliados.

Em 29 de Janeiro de 1801, a Espanha assina um tratado com a França, segundo o qual Portugal só teria paz se fechasse os seus portos à Grã-Bretanha. Caso Portugal não cumprisse estas condições, a França poria uma divisão à disposição da Espanha para invadir Portugal. Neste momento difícil para Portugal, a Grã-Bretanha retira uma divisão que tinha mandado para nos auxiliar e ocupou a Madeira e Goa! Entretanto, o exército espanhol invadiu o Alentejo, sofremos nova guerra para explusar o invasor – a célebre *guerra das laranjas* – que, embora de curta duração, nos custou a entrega, à França, de algumas terras do norte do Brasil e a entrega, à Espanha, da cidade de Olivença e ainda a imposição de fechar os portos do continente aos navios ingleses ([4] vol. I, pp. 519-520 e [34], pp. 244-245).

Portugal não fechou os portos. Tomando isso como pretexto, Napoleão resolveu apreender os navios portugueses, o que aconteceu nos mares da América. Portugal não se definiu claramente: ora cedia à França, ora cedia à Grã-Bretanha – perdendo sempre.

Napoleão decidiu invadir Portugal e a Grã-Bretanha, antes que se consumasse a invasão, decidiu ocupar Portugal e as colónias. Por uma combinação entre a França e a Espanha, a que alguns chamaram *Tratado de Fontainebleau*, Portugal seria dividido em três pequenos Estados: o Alentejo e o Algarve formariam um deles e seria entregue a Manuel Godoy, homem forte da Espanha; as terras a norte do Douro constituiriam o reino da Lusitânia Setentrional e o trono seria ocupado pelo rei da Etrúria; o restante, Estremadura e Beiras, seria ocupado pelos franceses até decisão ulterior [Nota 1].

O exército britânico, que desembarcou na Figueira, oficialmente para ajudar Portugal, mal desembarcou tratou de destruir as nossas fábricas, a pretexto de que a sua existência seria contrária ao *Tratado de Methuen* e aos interesses das lãs inglesas. A Inglaterra conseguia assim aquilo que, no tempo de Pombal, não conseguiu, quando tentou opôr-se ao começo da industrialização portuguesa.

O comportamento dos invasores franceses e o comportamento dos *aliados* ingleses eram, afinal, tão semelhantes, que despertavam a mesma indignação popular. Foi necessário, em 4 de Fevereiro de 1809, que João António Salter de Sousa, em nome dos governadores do reino, proibisse que os populares insultassem e maltratassem os militares e oficiais da marinha britânicos ([4], vol. I, pp. 528-529) [Nota 2].

Durante a última invasão francesa, em 1810, conforme conta Oliveira Martins ([29], vol. II, pp. 247-250), houve gente que foi esquartejada a machado. No Rego-da-Murta, penduraram um homem numa árvore e assaram-no vivo. Por toda a parte queimaram os celeiros, destruindo os grãos.

A gente de Coimbra e arredores, que se refugiara nas montanhas, foi cercada e condenada à morte, só conseguindo salvar-se dos fusilamentos a troco de jóias, ouro e dinheiro. Só no bispado de Coimbra, houve 3000 assassinatos, mais de 1000 casas e 20 lugares saqueados e queimados.

De 1807 a 1814, a população portuguesa baixou de meio milhão de habitantes!...

Além das invasões francesas e da ocupação inglesa, que não conseguiram destruir Portugal como nação, sofremos também uma longa e sangrenta guerra civil, para defendermos as liberdades arduamente conquistadas com a Revolução de 1820 e para tentarmos garanti-las, por uma Constituição política para a nação portuguesa.

No decurso das lutas liberais, quando o país esteve ocupado pelos miguelistas, as coisas não correram bem para a Instrução Pública.

Como descreve Rómulo de Carvalho ([14], pp. 541-543):

> "Sucederam-se as devassas à vida profissional e à vida privada de professores e mestres, para conhecimento das suas inclinações políticas. As devassas deviam repetir-se todos os anos para detectar qualquer mudança de comportamento que o alvejado tivesse tido. Só uma lista datada de 1828 aponta 218 nomes de mestres e professores, de primeiras línguas e de Latim, que tinham sido afastados do serviço. Também os estudantes eram motivo de mais preocupações para o Estado. Em 1828 e 1829 foram mandados riscar da Universidade de Coimbra 457 estudantes".

O pretexto para esta "depuração" foi a acção de um grupo de estudantes contra um carro que transportava uma delegação de professores que se dirigia a Lisboa para saudar D. Miguel, pela sua subida ao trono. Da acção estudantil resultou a morte de dois professores. Os que foram julgados culpados desta acção violenta foram condenados à morte e executados.

Em 1829, das 900 escolas primárias então existentes, foram encerradas 300 e, pouco depois, foram encerradas mais 50, alegando-se dificuldades económicas.

Em meados do século XIX, outro contratempo para a Instrução Pública – a ditadura de Costa Cabral. O Governo de Costa Cabral, em 1844, determinou que as escolas primárias (em 1840, havia 991) passariam a ensinar somente o chamado 1º grau "admitindo o governo a possibilidade de criar mais as que fossem necessárias para esse mesmo grau e, além disso, as que destinariam ao 2º grau" ([14], p. 578).

Mas era precisamente no 2º grau que figuravam as disciplinas de Aritmética e Geometria...

Pelo que respeita aos liceus, Costa Cabral suprimiu o ensino do Francês, do Inglês, da Física, da Química e da História Natural. Excepcionalmente, os liceus de Lisboa, Porto, Coimbra, Braga, Évora e Ilhas adjacentes podiam ensinar Francês e Inglês.

A educação científica ficou reduzida a um pouco de Aritmética e Geometria.

Outras reformas sucederam a esta. Sempre que algum governo, eventualmente menos reaccionário, tomava alguma medida que, sob algum aspecto, podia ser considerada de feição progressista no sector da Educação, logo as forças conservadoras tudo faziam para recuperar o sector da Educação e inutilizar ou reduzir o alcance de tal medida.

O nosso atraso matemático não diminuiu, antes cresceu, porque os países onde há muito existem tradições de trabalho científico e amparo oficial à investigação científica, avançam a um ritmo muito mais rápido.

Em 1900, numa carta enviada à revista *L'Enseignement Mathématique* ([41], pp. 218-219), Gomes Teixeira escreveu:

> "Em Portugal, não se passam acontecimentos que sejam de natureza a interessar os matemáticos dos outros países"

e, na sua *História das Matemáticas em Portugal*, publicada em 1934, pouco depois da sua morte, Gomes Teixeira lamentou:

> "No período que vai desde o começo do século XIX até ao nosso tempo, foram publicados em Portugal numerosos escritos sobre ciências matemáticas, mas são poucos os que merecem ficar assinalados na sua história. A maior parte deles só tem interesse didáctico e, entre os que não estão neste caso, há muitos que são erróneos ou simples imitações de trabalhos estrangeiros".

Ora, no século XX, sofremos uma feroz ditadura, durante quase 50 anos, caracterizada por uma violência selvagem contra todas as manifestações de liberdade, contra todas as manifestações de cultura, contra todas as reivindicações dos trabalhadores, quer manuais quer intelectuais, tudo isto agravado por longas guerras coloniais em África.

Só em 1910, apareceu em Portugal uma primeira exposição escrita sobre Teoria de Galois, publicada por um dos mais cultos matemáticos portugueses – Mira Fernandes.

O trabalho tinha por título *Teorias de Galois, I, Elementos da Teoria dos grupos de substituições e Resolubilidade Algébrica*. Em 1929, Mira Fernandes ampliou e reeditou este trabalho como 1ª parte de *Grupos de Substituições e Resolubilidade Algébrica*; a 2ª parte foi publicada em 1931. No prefácio à edição de 1929, o autor declara que este seu trabalho tem apenas *modestos intuitos de iniciação*.

Como Galois morreu em 31 de Maio de 1832, conclui-se que, só quase um século depois da sua morte, é que apareceu em Portugal o primeiro trabalho escrito por um matemático português sobre a resolubilidade algébrica de equações, e tal trabalho não é um trabalho de investigação mas apenas um trabalho didáctico de iniciação.

Em 1933, aparece uma segunda exposição sobre o mesmo tema. Com efeito, no seu *Curso de Álgebra Superior*, publicado nesse ano em Coimbra, Vicente Gonçalves incluiu um capítulo sobre *Grupos de Substituições e Resolubilidade Algébrica,* capítulo que, no entanto, foi omitido noutras edições do seu Curso, nomeadamente nas que foram feitas após a sua transferência de Coimbra para Lisboa.

Conta Vicente Gonçalves no prefácio que escreveu ao 1º volume das *Obras Completas* de Mira Fernandes, que Souto Rodrigues, catedrático de Álgebra em 1876, lhe havia dito que, nos seus primeiros cursos de Álgebra, tinha incluído algumas lições sobre Teoria de Galois, mas o exercício de outras funções tinha-o impedido de continuar a estudar Teoria de Galois.

Na verdade, basta passar em revista algumas das funções que Souto Rodrigues exerceu, para se compreender que certamente ficou sem tempo para trabalhar em Matemática. Assim, foi vice-presidente da Câmara Municipal de Coimbra (1876-1878), presidente da mesma Câmara (1886), procurador da Junta Geral do Distrito de Coimbra (1872-1874), presidente da mesma Junta (1879), vogal da Comissão Distrital de Coimbra nas legislaturas de 1884-1887, 1887-1889, 1890, 1890-1892, par do reino pelo distrito do Porto (1893) e pelos estabelecimentos científicos

(1894), governador civil do distrito de Coimbra (1898-1900), além de outras funções.

Certamente por isso os trabalhos que escreveu são, na sua quase totalidade, simplesmente didácticos, destinados ao ensino secundário ou primeiro ano universitário.

No Porto, Luis Woodhouse, catedrático de Álgebra em 1885, pretendeu incluir no seu curso de Álgebra uma introdução às modernas teorias algébricas. A cadeira de Álgebra incluía também Geometria Analítica e Trigonometria Esférica, de modo que se lhe tornava impossível acrescentar o que quer que fosse ao programa dado. Por isso, diligenciou no sentido de desdobrar a cadeira de Álgebra, de modo a que a nova cadeira resultante do desdobramento pudesse oferecer um programa mais actual. Mas não conseguiu o desdobramento. Resolveu então fazer um curso livre; mas este curso, que começou com grande entusiasmo, passado algum tempo teve de terminar, porque exigia naturalmente bastante trabalho para ser seguido e os que o frequentavam tinham outras cadeiras trabalhosas, que eram obrigatórias...

Luis Woodhouse, a quem todos os que o conheceram como professor reconheceram possuir excepcionais qualidades pedagógicas, não teve a produção científica que era natural esperar das suas reais qualidades de inteligência e dedicação à Matemática.

Além do artigo a que já nos referimos, sobre o método de Horner, publicou *Princípio fundamental da teoria das equações algébricas*, no *Jornal de Ciências Matemáticas e Astronómicas* ([46], pp. 177-182), em que dá uma demonstração interessante desse princípio e publicou mais cerca de uma dezena de trabalhos, uns de História das Matemáticas, outros sobre temas vários de Matemática, mas de carácter essencialmente expositório.

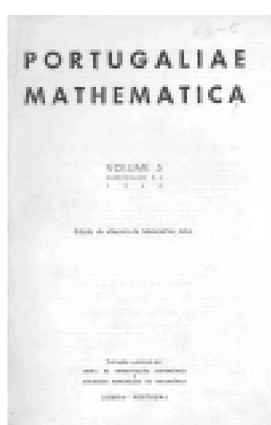
Morreu em Março de 1927.

Três anos depois, foi finalmente introduzida na Licenciatura em Ciências Matemáticas uma cadeira semestral de *Complementos de Álgebra e Geometria Analítica*, para cujo programa foi afinal aproveitado, pelo menos, em parte, o que Luis Woodhouse projectou dar no desdobramento da cadeira de Álgebra e, depois, no curso livre, programa que, como dissemos, não teve condições para realizar.

Dos cursos de Complementos de Álgebra que conheci, o melhor foi o curso feito por Sebastião e Silva, intitulado *Introdução às Modernas Teorias Algébricas*, editado em 1948 pela Associação Académica da Faculdade de Ciências de Lisboa.

O estudo sistemático de Álgebra Abstracta só se iniciou, no nosso país, após a criação dos Centros de Estudos Matemáticos.

Devido essencialmente à lucidez e persistência de António Aniceto Monteiro, em Lisboa, e de Ruy Luís Gomes, no Porto, foi possível criar Centros de Estudos Matemáticos em Lisboa e no Porto, reunir nesses Centros grupos de estudiosos e assistir-se, no começo dos anos 40, a um ressurgimento dos estudos matemáticos em Portugal.



A fundação dos *Centros*, a criação das revistas *Portugaliae Mathematica* e *Gazeta de Matemática*, a criação da *Junta de Investigação Matemática* por Mira Fernandes, António Monteiro e Ruy Luís Gomes, a criação da *Tipografia Matemática*, a fundação, embora efémera, de vários *Clubes de Matemática*, tudo isto conseguido num regime político fortemente hostil, representa uma realização extraordinariamente audaciosa dos matemáticos portugueses de então.

Pelo que respeita à Álgebra, deverá ser referida a actividade dos seminários e cursos superiores realizados, sobretudo, em Lisboa e Porto; a actividade desenvolvida por Almeida Costa, primeiro no Centro de Estudos Matemáticos do Porto e, mais tarde, em Lisboa; a tese de doutoramento de Hugo Ribeiro, em Zurique, *Lattices des* *groupes Abéliens finis*; a tradução, para a língua portuguesa, da 2ª edição alemã da *Álgebra Moderna* (1º vol.), de Van der Waerden, por Hugo Ribeiro; os vários cursos e trabalhos publicados por Almeida Costa; os artigos de divulgação publicados por Sebastião e Silva; as publicações dos Centros de Estudos Matemáticos e da Junta de Investigação Matemática, etc.

Em fins de 1946 e durante o ano de 1947, o regime salazarista desencadeou, contra o movimento de actualização científica do país e contra as Universidades portuguesas, uma das mais violentas ofensivas de sempre: dezenas de professores e assistentes expulsos do ensino universitário; jovens especialmente preparados para a docência universitária impedidos de nela prosseguirem; jovens licenciados impedidos de ingressar mesmo no ensino particular, por lhes ser negado o diploma do ensino particular, em consequência de informação da PIDE; invasão da Faculdade de Medicina, pela Polícia de Segurança Pública e pela PIDE, incluindo invasão de salas de aulas, de gabinetes e de laboratórios, agressão a estudantes, funcionários, professores e agressão ao próprio Director da Faculdade.

O regime salazarista perseguiu, agrediu, prendeu e fez condenar vários professores a pesadas penas de prisão, forçou muitos professores a mudar de profissão e forçou outros ao exílio, para poderem continuar a exercer a profissão.

Matemáticos como António Monteiro e Hugo Ribeiro sempre foram impedidos, pelo regime salazarista, de ensinar em Universidades portuguesas; matemáticos como Ruy Luís Gomes e Alfredo Pereira Gomes foram impedidos, pelo regime salazarista, de continuar a ensinar em Universidades portuguesas. Uns e outros viram-se forçados a aceitar convites de Universidades estrangeiras para poderem continuar a trabalhar em Matemática e exercer a sua profissão de professores.

Da esquerda para a direita: A. Quintanilha, Vicente Gonçalves (?), Ruy Luís Gomes e Mira Fernandes. (Congresso Luso-espanhol para o Progresso das Ciências, Porto, Abril de 1942)

Mas, apesar de todas as perseguições, o movimento matemático português, que, em certa altura quase se extinguiu, não desapareceu.

Hoje, não só existe, como se está recuperando, ainda que lentamente, do atraso secular com que chegou à década de 40.

Em Lisboa, no Porto, em Coimbra e noutros centros do país, há jovens inteligentes, imaginativos, profundamente interessados em Matemática e, particularmente, em Álgebra.

Se não deixarmos perder as liberdades fundamentais, tão duramente conquistadas, podemos encarar o futuro com confiança.

Notas

1) Manuel Godoy, nascido em 1767, de origem humilde, entrou aos 17 anos para a guarda pessoal do príncipe das Astúrias, que veio a ser o rei Carlos IV. Tornou-se amante da rainha Maria Luísa de Parma e, a partir de então, sua carreira foi brilhante: ajudante de ordens em 1791, tenente-general em 1792 e neste mesmo ano primeiro-ministro. Aliou-se a Portugal em 1793, contra a França revolucionária (Guerra de Rossilhão).

Assinou, sem ouvir os portugueses, a *Paz de Basileia* em 1795, ficando a ser conhecido como *Príncipe da Paz*. Afastado do poder em 1798, volta a conquistá-lo em 1800, junta-se a Napoleão contra Portugal.

Seguiu-se a "guerra das laranjas", assim chamada pela chacota popular, porque Godoy colheu junto das muralhas de Elvas uns ramos carregados de laranjas e enviou-as à sua amante, a raínha Maria Luísa (mãe de Carlota Joaquina), como apaixonada lembrança de guerra.

Pelo Tratado de Fontainebleau, permitiu que as tropas francesas atravessassem a Espanha para invadirem Portugal (27 de Outubro de 1807). A entrada dos franceses em Espanha e a crise económica e financeira que então se vivia em Espanha provocaram um levantamento contra Godoy (em Março de 1808) e Godoy foi preso. Posto em liberdade, redigiu o acto de abdicação de Carlos IV a favor de Napoleão.

Em 1819 retirou-se para Paris, onde publicou as suas memórias (*Cuenta dada de su vida*, 6 volumes, Madrid, 1836-1842). Morreu em Paris, em 1851. (Dados colhidos em *Grande Enciclopédia Delta Larousse*, *Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura*, e *História Concisa de Portugal* [34]).

Tão convencido estava Godoy de que ia ser senhor do Alentejo e Algarve portugueses, que mandou cunhar moeda em Madrid "com a sua descarada efígie: *Dux Algabiorum*" (Oliveira Martins, [29], vol. II, pp. 244-245).

Segundo informa Oliveira Martins, "O Cardeal Mendonça, patriarca de Lisboa, chamava a Napoleão o Prodígio, o grande imperador eleito por Deus para fortuna dos povos!".

O cardeal dava assim o seu apoio à invasão da nossa Pátria pelos exércitos de Napoleão.

2) A propósito do comportamento dos nosso *aliados* britânicos, José d'Arriaga ([4], vol. I, pp. 535 e seguintes) escreveu:

> "São bem conhecidas as cartas de Wellesley, nas quais este general confessa que os ingleses nesta segunda invasão *saquearam o país do modo mais terrível* e que os ultrages e violências por eles feitos às povoações foram tais que as não pode descrever.
>
> O que é verdade é que o povo português, cansado de tantas lutas, não tinha que defender-se só do inimigo declarado como tal e como tal entrado no reino: mas sobretudo, dos maus tratos e roubos dos seus *fiéis aliados*.
>
> A bravura do povo português conseguiu que as tropas aliadas derrotassem pela segunda vez os franceses.
>
> A nossa independência foi salva ainda nesta tentativa da França e, pode-se dizer, da Grã-Bretanha. E enquanto todas as classes do país faziam sacrifícios dolorosos para salvar a pátria e o prestígio da nossa bandeira, a coroa, que fugira e nos abandonara, reduzia vergonhosamente Portugal a província da Inglaterra, que a expulsara dele à força e que tão maus tratos infligira ao povo português! Por decreto de 21 de Novembro de 1809, ordena que Lord Wellington assista às sessões do governo e tenha voto em todas as questões relativas à governação pública! Por esse mesmo decreto foi reduzido o número de governadores. Ordens terminantes foram dadas para se avigorarem as medidas de rigor e de vigilância contra os liberais e revolucionários, e por isso o príncipe regente nomeou governador do reino o bispo do Porto, em recompensa dos assassinatos por ele mandados praticar naquela cidade, por ocasião do levantamento nacional contra os franceses.
>
> Aquele indigno decreto causou indignação geral no país e assombro em toda a Europa, porque na história das nações não consta um facto igual, uma abjecção tamanha. Tudo quanto os portugueses fizeram em favor da sua pátria, e para salvarem o nosso nome, outrora respeitado, foi completamente anulado por aquele passo servil e indecoroso da coroa portuguesa. E no entretanto os liberais e patriotas eram metidos em cárceres e perseguidos pelo *Santo Ofício*!
>
> [...] A Inglaterra já por este tempo exercia a maior preponderância e até prepotência sobre a coroa de Portugal, que não teve pejo em se tornar sua vassala. Por isso, quando Massena invadiu o reino, eram os ingleses que nos governavam. Eles apoderaram-se de quase todos os cargos públicos, e administraram-nos como se fôssemos uma colónia britânica.
>
> [...] É uma história brilhante para um povo esta terceira campanha de Portugal em defesa do seu território e da sua independência cara. Com semelhante auxílio, os ingleses não fizeram milagre algum em derrotar pela terceira vez o seu terrível inimigo. Deve-se aos portugueses, e só aos portugueses, essa glória.

[...] O ignorante e fraco D. João VI nomeia ditador e senhor absoluto deste país o mais arrogante e insolente dos britânicos: Beresford. Foi este homem, de sinistra memória, a sombra negra de Portugal, e aquele a quem a coroa incumbiu de nos humilhar, perseguir e de nos arrastar ao abismo. Depois de ter chamado sobre a pátria os desastres das campanhas de 1793, e de 1801, e das três invasões sucessivas, onde Portugal consumiu os seus últimos recursos, e derramou tanto sangue precioso, a corôa portuguesa, disfrutando os regalos de uma paz longínqua e os da côrte faustosa, entregava os portugueses a um estrangeiro, para os reinar como se governam cães ou animais bravios.
Mas não ficam por aqui as nossas humilhações perante a Europa e o mundo inteiro. A mesma Inglaterra, para legitimar o arrasamento e incêndio das nossas fábricas pelos seus soldados, impõe-nos o tratado de comércio de 1810, cópia fiel do de Methuen em que fomos tratados como povo conquistado".

Bibliografia

[1] LUIS DE ALBUQUERQUE, *O Primeiro Livro de Aritmética Impresso em Portugal*, incluído em "Para a História da Ciência em Portugal", Livros Horizonte, Lisboa, 1973.

[2] LUIS DE ALBUQUERQUE, *O Ensino da Matemática na Reforma Pombalina*, Gazeta de Matemática, nº 34 (1947), pp. 3-6.

[3] LUIS DE ALBUQUERQUE, *Sobre a História da Ciência em Portugal*, incluído em "Crónicas de História de Portugal", Lisboa, 1987.

[4] JOSÉ D'ARRIAGA, *História da Revolução de 1820*, 4 vol., Livraria Portuense, Porto, 1886.

[5] ANTÓNIO BAIÃO, *Episódios Dramáticos da Inquisição Portuguesa*, vol. I e II, 3ª ed., Colecção Seara Nova, 1972 e 1973.

[6] E. T. BELL, *Development of Mathematics*, 2nd ed., 3rd impression, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1945.

[7] RAFAEL BOMBELLI, *L'Algebra*, prima edizione integrale, Introduzione di U. Forti, Prefazione di E. Bortolotti, Fetrinelli Editore, Milano, 1929.

[8] H. BOSMANS, S. J., *L'Algebre de Pedro Nuñez*, Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto, vol. III (1908), pp. 222-271.

[9] CARL BOYER, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968.

[10] FLORIAN CAJORI, *A History of Mathematics*, 3rd ed., Chelsea Publishing Company, New York,1980.

[11] JOAQUIM DE CARVALHO, *Anotações Histórico-Bibliográficas* ao vol. VI das Obras de Pedro Nunes, "Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria", Academia das Ciências de Lisboa, MCML; incluído também no vol. V da "Obra Completa" de Joaquim de Carvalho,

História e Críticas Literárias, História da Ciência (1925-1975), pp. 589-659, Fundação Calouste Gulbenkian, Braga, 1987.

[12] JOAQUIM DE CARVALHO, *Instituições de Cultura—Século XVI*, incluído em Obra Completa, vol. III, História da Cultura (1922-1948), pp. 308-328, Fundação Calouste Gulbenkian, Braga, 1982.

[13] JOAQUIM DE CARVALHO, *Livros de D. Manuel II*, incluído em Obra Completa, vol. IV, História da Cultura (1948-1955), pp. 425-532, Fundação Calouste Gulbenkian, Braga, 1983.

[14] RÓMULO DE CARVALHO, *História do Ensino em Portugal desde a fundação da Nacionalidade até ao fim do regime de Salazar--Caetano*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1986.

[15] ARMANDO CASTRO, *Lições de História de Portugal*, vol. I e II, Biblioteca Universidade Popular, Editorial Caminho, Lisboa, 1982 e 1983.

[16] HERNÂNI CIDADE, *Portugal Histórico-Cultural*, Editorial Presença, Lisboa, 1985.

[17] JAIME CORTESÃO, *Alexandre Gusmão e o Tratado de Madrid*, 2 vol., primeiramente publicados no Rio de Janeiro, em 1952 e 1956; reedição Livros Horizonte, Lisboa, 1984.

[18] PEDRO JOSÉ DA CUNHA, *Bosquejo Histórico das Matemáticas em Portugal*, Exposição Portuguesa em Sevilha, Lisboa, 1929.

[19] HOWARD EVES, *An Introduction to the History of Mathematics*, 4rd ed., Holt., Rinehart and Winston, New York, 1976.

[20] JOHN FAUVEL and JEREMY GRAY (editors), *The History of Mathematics: A Reader*, MacMillan Education in association with The Open University, 1987.

[21] AURELIANO DE MIRA FERNANDES, *Grupos de substituições e Resolubilidade Algébrica*, I e II, Lisboa, 1929 e 1931.

[22] VITORINO MAGALHÃES GODINHO, *Estrutura da Antiga Sociedade Portuguesa*, 3ª ed., Colecção Temas Portugueses, Editora Arcádia, 1977.

[23] VICENTE GONÇALVES, *Aureliano de Mira Fernandes, Investigador e Ensaista*, Prefácio às Obras Completas de Aureliano Mira Fernandes, vol. I, edição publicada pelo Centro de Estudos de Estatística Económica do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, Lisboa, 1971.

[24] VICENTE GONÇALVES, *Curso de Álgebra Superior*, "Atlântida" Livraria Editora,Coimbra, 1933.

[25] RODOLFO GUIMARÃES, *Sur la vie et l'oeuvre de Pedro Nunes*, Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto, vol. IX (1914), pp. 54-64, 96-117, 152-167, 210-227; vol. X (1915), pp. 20-36.

[26] RODOLFO GUIMARÃES, *Les Mathématiques en Portugal*, deuxième ed., Coimbra, 1909.

[27] ALEXANDRE HERCULANO, *Da Eschola Polytechnica e do Collegio dos Nobres*, incluído em *Opúsculos*, tomo VIII, 3ª ed., pp. 27-94, Livraria Bertrand, Lisboa.

[28] A. H. OLIVEIRA MARQUES, *História de Portugal*, vol. I (12ª ed., 1985), vol. II (10ª ed., 1984), vol. III (2ª ed. 1981), Palas Editores, Lisboa.

[29] J. P. OLIVEIRA MARTINS, *História de Portugal*, vol. I e II, 11ª ed., Parceria António Maria Pereira, Lisboa, 1927.

[30] PEDRO NUNES, *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*, vol. VI das *Obras*, nova edição revista e anotada por uma comissão de sócios da Academia das Ciências, Academia das Ciências de Lisboa, 1950.

[31] HUGO RIBEIRO, *Actuação de António Aniceto Monteiro em Lisboa, entre 1939 e 1942*, Portugaliae Mathematica, vol. 39 (1980), pp. V-VII.

[32] ANTÓNIO JOSÉ SARAIVA, *Inquisição e Cristãos-Novos*, Colecção Civilização Portuguesa, Editorial Inova, Porto, 1969.

[33] ANTÓNIO JOSÉ SARAIVA e ÓSCAR LOPES, *História da Literatura Portuguesa*, 6ª ed., corrigida e actualizada, Porto Editora, Porto.

[34] JOSÉ HERMANO SARAIVA, *História Concisa de Portugal*, Colecção Saber, Publicações Europa-América, Mira Sintra-Mem Martins, 1978.

[35] JOSÉ SERRÃO, *Cronologia Geral da História de Portugal*, 3ª ed., Iniciativas Editoriais, Lisboa, 1977.

[36] JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA, Introdução às Modernas Teorias Algébricas, Curso de Complementos de Álgebra, Edição da Associação Académica da Faculdade de Ciências de Lisboa, 1948.

[37] FRANCISCO DE BORJA GARÇÃO-STOCKLER, *Ensaio Histórico sobre a Origem e Progressos das Mathematicas em Portugal*, Officina de P. N. Rougeron, Paris, 1819.

[38] DIRK J. STRUIK, *A Concise History of Mathematics*, 3rd revised edition, Dover Publications, New York, 1967.

[39] FRANCISCO GOMES TEIXEIRA, *História das Matemáticas em Portugal*, Academia das Ciências de Lisboa, Biblioteca de Altos Estudos, Lisboa, 1934.

[40] FRANCISCO GOMES TEIXEIRA, *Elogio Histórico de Pedro Nunes*, incluído em *Panegíricos e* Conferências, pp. 1-83, Academia das Sciencias de Lisboa, Coimbra, 1925.

[41] FRANCISCO GOMES TEIXEIRA, *Carta publicada em l'Enseignement Mathématique*, 2 (1900), pp. 218-219.

[42] JOSÉ RAMOS TINHORÃO, *Os Negros em Portugal, Uma Presença Silenciosa*, Editorial Caminho, Colecção Universitária, Lisboa, 1988.

[43] MANUEL SOUSA VENTURA, *Vida e Obra de Pedro Nunes*, Biblioteca Breve, Instituto de Cultura e Língua Portuguesa, Ministério da Educação, Lisboa, 1985.

[44] B. L. VAN DER WAERDEN, *A History of Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[45] LUIS WOODHOUSE, *O método de Horner e um trabalho Português esquecido (1794)*, Jornal das Sciencias Mathemáticas, Físicas e Naturais, tomo XXIV (tomo V da 3ª série) (1927), pp. 53-68.

[46] LUIS WOODHOUSE, *Princípio Fundamental da Theoria das Equações Algébricas*, (Fragmentos d'umas lições), Jornal das Sciencias Mathematicas e Astronomicas, vol. 6 (1885), pp. 177-182.

[47] *Memórias da Academia Real das Sciencias de Lisboa*, tomos I-VII.

[48] *Grande Enciclopédia Delta Larousse*, revista e actualizada, Editora Delta, S. A., Rio de Janeiro, 1972.

[49] *Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura*, Editorial Verbo, Lisboa.

O que vem à rede...

António Machiavelo
Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

A Lógica da Física e a Física da Lógica

Em 1638 foi publicado em Leyden, na Holanda, o último trabalho de Galileu Galilei, os seus *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*, uma obra cuja importância na história da Física e do pensamento científico é difícil sobrevalorizar. A sua leitura é ainda hoje um autêntico prazer, estando uma versão electrónica do original disponível em http://www.liberliber.it/biblioteca/g/galilei/index.htm/ e uma tradução para o inglês disponível em http://oll.libertyfund.org/ToC/0416.php.

Logo na *giornata prima*, Galileu apresenta um argumento simples mas engenhoso, uma "experiência mental" que muita tinta tem feito correr, e que mostra haver sérias dificuldades, de um ponto de vista estritamente lógico, em assumir que corpos com massas diferentes caiem em direcção à superfície terrestre de modo diferente, quando não há nenhuma influência de algo exterior. O argumento pode ser resumido assim (ver figura 1):

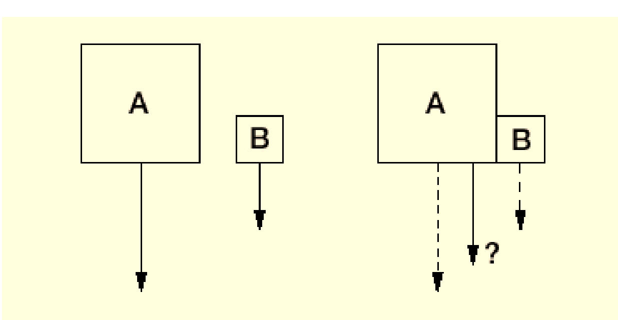


Figura 1: A experiência "mental" de Galileu

suponhamos que quanto mais massa um corpo tem, mais "depressa" ele cai[1], e sejam *A* e *B* dois corpos, tendo *A* mais massa que *B*; se unirmos *A* a *B*, obtemos então um corpo com uma massa superior à de *A*, que portanto devia cair "mais depressa" que *A*; mas, por outro lado, não deveria *B*, agora ligado a *A*, retardá-lo?

A conclusão parece inevitável: os corpos têm de cair todos do mesmo modo! Ou seja, dois corpos quaisquer largados da mesma altura, e quando não há influência de factores exteriores (como o ar, por exemplo), chegam ao solo em simultâneo.

São também bem conhecidas as "experiências mentais" de Albert Einstein e o seu papel na descoberta da teoria da relatividade. Um ensaio interessante sobre este assunto pode ser consultado em http://www.aip.org/history/einstein/essay-einstein-relativity.htm

Estas e outras "experiências mentais" levantam uma importante questão filosófica: como é possível que se consigam deduzir princípios físicos pelo uso exclusivo da razão, aparentemente *a priori*? Basta pesquisar no *Google*: <<"thought experiments" philosophy>> para se ver quanto o assunto tem sido motivo de reflexão e discussão!

Não é obviamente nada fácil perceber todos os detalhes dos mecanismos que tornam tais "experiências mentais" efectivas no estudo de fenómenos naturais. E não querendo aqui parecer trivializar, é no entanto espantoso que haja tanta surpresa, espanto e perplexidade sobre o assunto, em especial após 1859, data da publicação de um outro marco fundamental do pensamento científico: *The Origins of Species* de Charles Darwin. Decorridos quase século e meio, e apesar de toda a evidência acumulada que não deixa hoje qualquer margem de dúvida, numa altura em que lemos o nosso próprio genoma, é chocante o número de pessoas que ainda se recusam a perceber que somos produto de uma muito longa história de adaptação ao mundo que nos rodeia, neste aspecto em nada diferentes dos outros seres vivos com que temos o privilégio de compartilhar este belíssimo e muito precioso planeta, e que não entendem o poder explicativo de dois conceitos muito simples, mas (aparentemente!) subtis: *descendência com modificação* e *selecção natural*.

Deste ponto de vista biológico, é bastante menos misterioso que conclusões de raciocínios lógicos, formulados nas nossas mentes, correspondam a fenómenos reais no universo do qual somos produto, tendo as nossas mentes sido moldadas justamente pela necessidade de entender esse universo! Assim, o aparente *a priori* atrás mencionado é afinal um gigantesco *a posteriori* de milhões de anos de adaptações evolutivas!

Neste contexto, é interessante especular sobre as possíveis implicações físicas de certas "experiências mentais" para as quais parece difícil dizer qual é o "resultado", ou que conduzem a aparentes paradoxos aos quais parece não ser fácil dar solução. Talvez os exemplos mais conhecidos sejam os quatro *paradoxos de Zenão* conhecidos por: *Dicotomia*, *Aquiles e a Tartaruga*, *A Seta*, e *O Estádio*, que pretendiam ser argumentos, na forma de "experiências mentais", estabelecendo a impossibilidade do movimento, que não passaria de uma ilusão dos sentidos. Para mais detalhes, e para perceber até que ponto os paradoxos de Zenão continuam a dar muito que pensar, ver a página http://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/ da *Stanford Encyclopedia of Philosophy.*

Dois dos paradoxos de Zenão relativos ao movimento são exemplos daquilo que se designa por *Supertarefas*. Um outro exemplo bem conhecido de uma supertarefa é o da *lâmpada de Thomson*, que usa o facto de se ter $1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \ldots + 1/2^n < 1$, para todo o $n \in IN$ (o que é geometricamente óbvio — ver figura 2).

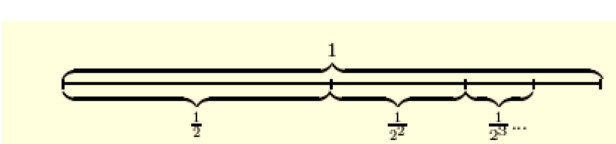


Figura 2: $1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \ldots + 1/2^n < 1$

Considere-se uma lâmpada que é acesa num certo instante, t_0, apagada 1/2 minuto depois, novamente acesa $1/2+1/2^2$ após t_0, novamente apagada $1/2+1/2^2+1/2^3$ após t_0, etc... Ao fim de 1 minuto após t_0, qual o estado da lâmpada, está acesa ou apagada? Responder que a lâmpada está fundida, pode ser ligeiramente jocoso, mas é obviamente ignorar as subtilezas filosóficas desta "experiência mental". Será que a lâmpada de Thomson mostra haver dificuldades lógicas em supôr que o tempo é uma entidade contínua? Ou será que não?

Sobre esta e outras supertarefas, e algumas das suas possíveis implicações filosóficas, tanto para a Filosofia da Física como para a Filosofia da Matemática, ver http://plato.stanford.edu/entries/spacetime-supertasks/

Finalmente, não deixa também de ser curioso que alguns paradoxos da teoria dos conjuntos pareçam ter de algum modo a ver com a noção de tempo. O mais famoso de todos, o *paradoxo de Russel*, que motivou a axiomatização da teoria dos conjuntos por Ernest Zermelo (ver o excelente artigo http://plato.stanford.edu/entries/set-theory/), consiste em considerar o conjunto, *S*, de todos os conjuntos que não são elementos de si próprios, e perguntar se *S* é ou não um elemento de si próprio. Ambas as possibilidades conduzem a uma contradição pois, por construção, $S \in S \Leftrightarrow S \notin S$! As axiomatizações da teoria dos conjuntos evitam este paradoxo proibindo, de algum modo, que um conjunto pertença a ele próprio, e fazem-no introduzindo uma hierarquia, uma estratificação, em que, essencialmente, uma entidade só pode pertencer a entidades construídas posteriormente. De um ponto de vista temporal, não faz de facto muito sentido ser um conjunto elemento de si próprio, pois os elementos têm de ter uma "existência" anterior à do próprio conjunto. É irresistível especular: será o tempo uma componente essencial da "estrutura lógica" do Universo?

[1] O argumento funciona igualmente bem no caso contrário!

Entrevista com Ian N. Stewart*

conduzida por Jorge Buescu
Instituto Superior Técnico, Lisboa

Ian Stewart nasceu em 1945, licenciou-se em Matemática (BA e MA) em Cambridge e doutorou-se (PhD) em Warwick. Em 1998, foi-lhe atribuído um doutoramento honorário (honorary DSc) pela Universidade de Westminster, em 2000 recebeu outro doutoramento honorário (ho-norary DSc) pela Universidade de Lovaina e, em 2003, ainda outro (honorary DSc) pela Universidade de Kingston. Ian Stewart é Professor de Matemática na Universidade de Warwick e director do *Mathematics Awareness Centre* (MAC@W). Detém o estatuto de professor convidado (visiting professor) na Alemanha, Nova Zelândia, e EUA, e é um investigador habitual na Universidade de Houston, no *Institute of Mathematics and its Applications* em Minneapolis, e no *Santa Fé Institute*. É ainda professor adjunto em Houston.

As suas publicações de divulgação científica sobre temas da matemática são o que o torna mais conhecido entre o grande público. Em 1995, foi-lhe atribuída a medalha da *Michael Faraday's Royal Society* por ter contribuído para o aprofundamento do conhecimento científico do grande público. Em 1996, o seu livro *Os Números da Natureza* foi um entre os poucos nomeados para o prémio *Rhone-Poulenc* para livros científicos. No ano seguinte, Stewart apresentou o programa *1997 Royal Institution Christmas Lectures* no canal televisivo da BBC e em 1998 repetiu as mesmas conferências para a NHK no Japão. Em 1999, foi vencedor do prémio *Communications* da *Joint Policy Board of Mathematics* e foi galardoado em 2000 com a medalha de ouro do *Institute for Mathematics and its Applications* do Reino Unido. O livro *The Science of Discworld*, de que foi co-autor, foi nomeado para o prémio *Hugo* na *Convenção Mundial de Ficção Científica* de 2000. Em conjunto com M. Golubitsky, foi galardoado com o prémio *Balaguer* de 2001, pela monografia matemática baseada na sua própria investigação, atribuído pelo *Institut d'Estudis Catalans,* de Barcelona. Foi eleito *Fellow of the Royal Society* em 2001, e no ano seguinte ganhou o prémio de *Public Understanding of Science and Technology* da *American Association for the Advancement of Science*.

JB: *Começou por estudar Teoria de Grupos no princípio dos anos 70, prosseguindo consecutivamente com trabalhos em Teoria das Catástrofes, Teoria da Bifurcação, Sistemas Dinâmicos e Caos. Presentemente, está a voltar-se para a biologia matemática. É um percurso deveras notável. Como é que se proporcionou este percurso?*

INS: Na altura pareceu-me perfeitamente natural. Enquanto aluno universitário, sempre preferi a matemática 'pura' à 'aplicada', e gostava especialmente da lógica cristalina da Álgebra. Estava em Cambridge na altura e frequentei algumas cadeiras de Philip Hall, um dos principais especialistas em Teoria de Grupos a nível mundial. Foi então que decidi que o meu doutoramento devia ser nesta área. Na verdade, era uma área muito próxima das álgebras de Lie, pois o meu orientador, Brian Hartley, estava interessado

* Esta entrevista foi originalmente publicada em inglês no Boletim do CIM, nº 16 (2004), pp. 17-21, a quem se agradece a gentil autorização para tradução e publicação.

numa possível ligação entre as álgebras de Lie e os grupos abstractos.

Então, em 1970, Christopher Zeeman deu o primeiro curso de sempre sobre Teoria das Catástrofes. Frequentei o curso, que me agradou muito. A matemática subjacente é bastante algébrica. Para além disso tinha aplicações, tais como a cáusticas ópticas. Comecei então a orientar-me para áreas mais aplicadas. Foi então natural alargar-me para a Teoria de Singularidades e a Teoria da Bifurcação. Em 1983/4 passei um ano em Houston a trabalhar com Marty Golubitsky, o que me influenciou enormemente na minha escolha de área de investigação. Fazia todo o sentido prosseguir para os Sistemas Dinâmicos... Limitei-me a seguir o caminho para onde apontava a própria matemática. O meu interesse mais recente pela biologia matemática surgiu, em muito, devido ao facto de haver boas aplicações de dinâmica com simetria à biologia.

JB: *Um dos aspectos da sua carreira enquanto investigador da área da matemática que mais me impressiona é o facto de andar sempre na crista da onda, num campo da matemática onde passa a verdadeira acção, deixando, inevitavelmente, o seu cunho indelével. Gostaria de comentar?*

INS: Eu não faço por acompanhar a moda. Existem imensas áreas que estão na moda e nas quais nunca quis trabalhar! O que acontece é que o tipo de coisas que me atrai é o mesmo que atrai muitas outras pessoas. A onda vai-se formando sozinha e eu acabo por me deixar levar. Para além disso, gosto mesmo muito de trabalhar em áreas NOVAS, nas quais não é necessário ter muitos conhecimentos básicos para se levar a cabo uma investigação útil.

JB: *Em 1976, na altura da demonstração do Teorema das Quatro Cores por Appel e Haken, o Ian já se dedicava à investigação matemática. Pode contar-nos em primeira-mão quais foram as reacções da comunidade matemática à primeira demonstração de sempre assistida por computador?*

INS: A reacção geral, por mais estranho que pareça, foi de desilusão. "Ah, então é ESSE tipo de teorema?" É um teorema que exige grandes cálculos, mas que na verdade não revelam grande informação. A maioria de nós não se preocupou muito com o facto de ter sido utilizado computador, foram os filósofos que pensaram que isso iria alterar a natureza da prova. A nós, parecia-nos que tinha apenas alterado ligeiramente a técnica.

JB: *Voltando à Teoria das Catástrofes, depois do Teorema da Classificação de René Thom e do trabalho inovador de Christopher Zeeman, havia em alguns círculos a ideia de que, finalmente, se chegara a uma teoria matemática para tudo. É claro que nenhuma teoria pode corresponder a estas expectativas. Terá sido a Teoria das Catástrofes uma vítima do seu próprio êxito?*

INS: Parece-me que a popularização do tema se misturou com os aspectos técnicos, e as pessoas ficaram confusas. Na verdade, ninguém reclamou essa teoria como sendo a teoria de todas as coisas. O que foi dito é que ela tinha aplicações bastante abrangentes (o que era e ainda é um facto). Então outras questões prioritárias criaram ainda mais confusão. As críticas eram deveras de fraca qualidade – muito barulho, mas, na verdade, muito pouco conteúdo e muita confusão. Naquela altura, as referências à matemática nos meios de comunicação eram raras, e os universitários não conseguiram verdadeiramente perceber como é que as coisas funcionavam. O assunto era eminentemente interessante e os media pegaram nisso. Não se tratou de uma "moda", ou de uma tentativa deliberada de exagerar. Aliás, não se pode fazer da matemática uma moda, porque as pessoas não lhe prestam qualquer atenção.

JB: *Enquanto protagonista do desenvolvimento explosivo dos Sistemas Dinâmicos nos últimos 30 anos, como é que vê o seu papel em relação ao resto da matemática, bem como em relação às outras ciências?*

INS: Ocupam uma posição central na ligação entre a matemática abstracta e a ciência aplicada. O mundo não é linear, mas até que houvesse Sistemas Dinâmicos (graças a Steve Smale e vários outros), praticamente toda a matemática aplicada era linear. As pessoas estavam a tentar resolver os problemas do séc. XX com os métodos do séc. XVIII. Agora temos caos, fractais, autómatos celulares... e computadores suficientemente potentes para fazer os cálculos para os sistemas reais. Há ainda matemáticos que lamentam que o caos e os fractais nunca tenham alcançado nada de útil... Se eles se dessem ao trabalho de ler a *Nature* e a *Science* iriam perceber como na realidade essa posição é insustentável.

***JB**: Alguns matemáticos pensam (e dizem) que o futuro da matemática reside na biologia. Qual é o seu ponto de vista nesta matéria?*

INS: Eu penso que uma das perspectivas mais interessantes para o próximo século é a interacção da matemática com a biologia REAL, pura e dura. O tipo de questões que a biologia levanta requer novas maneiras de pensar, e elas irão estimular uma matemática genuinamente nova. Conhecer a sequência do ADN de um animal é muito bom, mas isso não nos diz muito acerca desse animal, a não ser que se conheça os processos que o ADN controla. Bem, poderíamos dizer que é da mesma forma que um maestro conduz uma orquestra, isto é, não de forma muito directa. O ADN faz isso mesmo, 'orquestrar'. Considero estimulante o recente trabalho de pessoas como Enrico Coen e Hans Meinhardt, que estão a estabelecer ligações muito fortes entre a matemática geral da formação de padrões e o papel essencial dos genes.

***JB**: O Ian está ligado ao* Clay Institute*, que criou os maiores prémios de sempre na área da matemática - os "Problemas do Milénio", por vezes intitulados "os problemas milionários". Qual lhe parece que irá ser o primeiro a ser resolvido? E o último? E por mais quanto tempo continuarão a resistir?*

INS: A resposta óbvia é a Conjectura de Poincaré, que até já pode ter sido resolvido, graças a Grisha Perelman. Sinto-me tentado a dizer que o problema P=NP poderá ser o último. Data prevista: pode, até, demorar uns cem anos. O problema da existência de soluções para as equações de Navier-Stokes poderá ser igualmente difícil (e parece-me que a resposta é 'não').

***JB**: Concorda com aqueles que dizem que a Hipótese de Riemann prevalecerá por mais um século? E o que sente agora em relação ao mais recente trabalho de G. Perelman, que, segundo se diz, poderá ter solucionado o Programa de Geometrização de Thurston, arrastando consigo a Conjectura de Poincaré?*

INS: Poderia ter dito o mesmo acerca do Último Teorema de Fermat, há 20 anos. Tenho um estranho pressentimento que a Hipótese de Riemann não durará mais 20 anos. Há uma convicção cada vez maior de que as ideias de Perelman podem ter realmente provado a Conjectura de Geometrização, o que, consequentemente, prova a Conjectura de Poincaré. Vários matemáticos de renome têm vindo a dizer o mesmo no papel, especialmente nas *Notices of the AMS*. Com certeza, todos pensam que ele fez grandes progressos.

***JB**: Tem tido muitos alunos portugueses de doutoramento. Na verdade, nós aqui, meio a brincar, chamamos-lhes "a ligação Portugal-Ian", e alguns de nós organizaram, em 2000, uma conferência em honra do Ian e do Marty Golubitsky. Como é que se desenvolveu esta "ligação com Portugal"?*

INS: Através de Isabel Labouriau. Ela veio do Brasil para Warwick, com a intenção de obter um doutoramento em biologia matemática. Eu era praticamente o único membro do corpo docente naquela altura, e concordei em ser orientador dela. Ela estava a estudar um artigo de Rinzel e Miller, sobre a bifurcação de Hopf na discretização da equação de Hodgkin-Huxley para o impulso nervoso. Nesse momento, Marty G. fez-nos uma visita e falou-nos do seu mais recente trabalho com Bill Langford sobre a Bifurcação de Hopf degenerada, e os resultados de Rinzel e Miller pareciam tal e qual uma das suas imagens. A Isabel ficou, então, incumbida de descobrir porquê.

Entretanto, ela foi viver para o Porto e passados alguns anos começou a encaminhar os seus alunos para Warwick.

Acho que partiu daí. Agora, estou a orientar "bisnetas" matemáticas, sendo a Isabel a primeira filha.

JB: *Quantos alunos portugueses já teve? E como é que os compara, em termos científicos, com o universo dos estudantes britânicos nas pós-graduações e mestrados?*

INS: Já são 6, sem contar com a Isabel, mais uns brasileiros, que tenho como portugueses honorários. No total, cerca de um terço dos meus doutorandos. Estão ao mesmo nível dos alunos britânicos (e já tive a sorte de ter alguns alunos extremamente bons). É, aliás, bom sinal que em Portugal haja tantas investigadoras mulheres de alto gabarito na área da matemática.

JB: *Enquanto investigador na área da matemática, qual considera ter sido o momento mais estimulante da sua carreira? Pode contar-nos? E o momento mais engraçado (não tem necessariamente de se ter passado consigo)?*

INS: O mais estimulante, penso que foi quando um comentário perfeitamente casual numa recensão crítica de um livro levou a uma colaboração prolongada sobre a locomoção animal. Estava a fazer a recensão crítica de um livro sobre as ligações entre a biologia e a engenharia, e este incluía um artigo sobre padrões do movimento animal. Lembravam-me os padrões de Bifurcação simétrica de Hopf, e eu disse algo como "alguém está interessado em financiar um gato electrónico?". No dia seguinte, Jim Collins ligou de Oxford e disse: "Eu não posso financiar um gato electrónico, mas conheço quem possa". Foi aí que começou uma grande colaboração, e que comecei a orientar a minha atenção mais no sentido da biologia.

A outra experiência curiosa foi o ano em que estive em Houston com o Marty Golubitsky, em 1983/4. Tornámo-nos nessa altura grandes amigos e temos trabalhado juntos desde então. É extraordinário ter alguém que compreenda a matemática da mesma forma, mas que consiga completar as nossas próprias ideias.

O momento mais engraçado? Foi por volta de 1990. Eu tinha ido a uma conferência em Abisko, na Lapónia, perto de um lago gelado enorme, sólido o suficiente para suportar o peso de um carro, e convenceram-nos, a mim e à minha mulher, a percorrer a zona em esquis. Nunca tínhamos esquiado antes, por isso, quando os organizadores suecos nos deixaram a 10 km do posto de investigação para fazermos o caminho de volta a esquiar, decidimos fazê-lo sobre o lago. Encontrámos um pescador lapão, a pescar para o seu jantar através de um buraco no gelo. Passámos a manhã a praticar esqui no lago gelado, e a cair cada vez que esbarrávamos sobre o mais pequeno obstáculo. Por volta da hora do almoço estavam lá cerca de doze pescadores lapões a olhar para nós como se fossemos completamente loucos. Olhando agora em retrospectiva, esta situação foi engraçadíssima.

JB: *Para além de ser um excelente matemático, o Ian foi também um brilhante pioneiro da divulgação da matemática. Divulgar a matemática é muito difícil e exige muito trabalho. Porque é que considera isso tão importante para lhe dedicar uma parte significativa do seu tempo e esforço?*

INS: Bom, hoje sou muito bem pago para o fazer, o que é uma mais valia. Mas no início, e durante anos, não o fui, e isso nunca me incomodou. Sempre gostei muito de escrever, e gosto de escrever sobre coisas que compreendo, e na altura parecia-me perfeitamente natural.

JB: *Alguns matemáticos mais intransigentes vêem a divulgação da matemática, na melhor das hipóteses, como um desperdício de tempo precioso, tempo esse que poderia e deveria ser aplicado em assuntos mais sérios, como a investigação, insinuando particularmente que a divulgação da ciência não é uma actividade séria. Qual o seu comentário?*

INS: Nunca me preocupei muito se os outros o aprovam ou não. Era como um passatempo e parecia-me que valia a pena. Nos dias que correm, a maioria dos cientistas já percebeu que é necessário interagir com o público. Recebi muito apoio dos meus colegas e poucas críticas. Ajuda, no entanto, o facto de continuar a dedicar-me a tempo inteiro à investigação. As minhas actividades de divulgação científica não afectam a minha investigação.

JB: *Qual seria a sua resposta se um outro matemático lhe dissesse, como me disseram a mim, que a "divulgação científica não vale nada"?*

INS: Santa ignorância!

***JB**: É autor de quantos livros de divulgação (se é que ainda os conta), para que línguas foram traduzidos, na sua opinião qual é o melhor, e este coincide com o mais vendido?*

INS: Já escrevi cerca de 70/80 livros diferentes, dos quais cerca de 25 a 30 são de divulgação. Entre si foram traduzidos para, no mínimo, 19 línguas: português, espanhol, francês, alemão, italiano, neerlandês, japonês, chinês, sueco, norueguês, dinamarquês, indonésio, russo, romeno, polaco, coreano, persa, húngaro, estónio, grego, croata, checo...

O melhor? Acho que são bons todos! Em alguns aspectos o meu preferido é *Fearful Symmetry* (escrito juntamente com o Marty). Há ainda o *Flatterland*, uma sequela moderna do *Flatland* de Edwin Abbott, mas este é o tipo de livro que ou se ama ou se odeia. Os mais vendidos são *The Science of Discworld I e II*, escrito em conjunto com o meu amigo Jack Cohen e com Terry Pratchett, o escritor de literatura fantástica mais vendido na Grã-Bretanha. Ambos os livros estiveram várias semanas na lista dos **10 mais** para literatura não ficcional do *Sunday Times*. Sobretudo, graças ao Terry. O livro matemático mais vendido é *Deus joga aos dados*?.

***JB**: Com que jornais não matemáticos já colaborou? E qual foi a colaboração que mais o satisfez?*

INS: Ai meu Deus... para qual é que eu NÃO escrevi? Eu já escrevi para a *Scientific American*, *New Scientist*, *Pour La Science*, *Times Literary Supplement*, *Analog Science Fiction Magazine*, *The Guardian*, *The Scientist*, *Prometeo*, *The Economist*, *The Times*, *Daily Telegraph*, *The New York Review of Books*, *London Review of Books*, *Discover*, *Brand Strategy*, *The Lancet*, *Prospect*, *El Pais*, *Newton*…

O mais divertido foi provavelmente para o *Pour La Science*. Phillippe Boulanger, o editor, pediu-me para escrever mensalmente uma coluna com jogos matemáticos, sucessora da coluna de Martin Gardner na *Scientific American*. Por fim, acabei por escrever para a *Scientific American*, também.

***JB**: O Ian até tem tempo para ter outras vidas. Lembro-me de quando era seu aluno, de estar muito orgulhoso por ter recebido um prémio por um livro de ficção científica (se não me engano, o Ian tinha sido nomeado "Embaixador do planeta Terra para outras galáxias"). E ainda escreve, por exemplo, sobre* The Science of Discworld *de Terry Pratchett. A sua imaginação não tem limites?*

INS: Simplesmente, interesso-me por muitas coisas, e escrevo depressa. Eu e o Jack Cohen escrevemos um romance de ficção científica, *Wheelers*, há alguns anos atrás. Será publicada a sequela, *Heaven*, em Maio e já planeámos um terceiro livro para esta série.

***JB**: Como é que consegue fazer tudo isto? Presumo que o seu dia tenha 24 horas, mas corrija-me se estiver errado (como já fez no passado).*

INS: (a) Escrevo depressa. (b) A minha posição em Warwick é agora de investigador a meio tempo e de P*ublic Understanding of Science* a meio tempo. Assim, não tendo muitas aulas para dar acabo por ter muito tempo livre.

***JB**: Muito obrigado pelo seu tempo tão valioso!*

Obras de Ian Stewart publicadas em Portugal:

A Mente do Universo, (com Jack Cohen)
Editorial Presença, (publicação prevista para Julho 2005)

Deus Joga aos Dados?
Colecção Ciência Aberta, Gradiva

Jogos, Conjuntos e Matemática
Colecção O Prazer da Matemática, Gradiva

Os Números da Natureza
Colecção Mestres da Ciência, Temas e Debates

Os Problemas da Matemática
Colecção Ciência Aberta, Gradiva

Inquérito

A coluna dorsal e a carteira: o peso e a reutilização dos livros

Entre a última Gazeta e a presente, a vida política portuguesa foi conturbada. Mudou-se de governo e a composição da Assembleia da República foi profundamente alterada. No sector da Educação anunciaram-se medidas, algumas anuladas mais tarde, outras, como o ensino do inglês, mantidas.

O peso dos livros a distorcer as colunas dos nossos adolescentes, muito provavelmente, continuará. É caso para perguntar: os livros devem ser utilizados para mexer com as vértebras ou para mexer com a mente e o espírito? Se usássemos ainda a tecnologia da escrita cuneiforme seria dramático! A vantagem de evitar a poluição das celuloses não compensaria.

A Gazeta de Matemática procurou opiniões de alguns professores.

Questão 1. *Ainda no tempo da Ministra Maria do Carmo Seabra foi anunciado que se iria promover a reutilização dos manuais escolares. Os alunos que entregassem os manuais em boas condições teriam direito a receber gratuitamente os do ano seguinte, mesmo que fossem em número muito superior. Porém, recentemente, o novo Governo anulou a medida a pretexto de ser inexequível por duas razões: os alunos escrevem nos livros em resposta a exercícios que neles vêm e necessitam deles no início do ano para recordar matéria. Que pensa de tudo isto?*

Questão 2. *Tem-se dito, com muita frequência, que os alunos são obrigados a adquirir muitos livros. Isso implica uma despesa demasiado elevada para os pais e há quem diga que o peso que têm de carregar nas mochilas, sobretudo os de mais tenra idade, é prejudicial para a saúde. Qual é a sua opinião sobre este assunto?*

Questão 3. *E que dizer das sucessivas reformas com alterações de currículos? Isso tem também implicações no que respeita à necessidade de adquirir novos livros. Que pensa disto, sobretudo na disciplina de Matemática? O conteúdo não pode manter-se sem alteração por muitos e bons anos ou a Matemática evolui assim tão rapidamente que necessite de adaptações frequentes ao nível do ensino básico e secundário?*

Questão 4. *Outra novidade é a introdução do inglês no ensino básico. E o francês? Será votado ao esquecimento? Não será isso estranho num país de língua latina e tão influenciado pela cultura francesa? Qual é a sua opinião?*

Questão 5. *O actual governo tornou público que pretende manter os estudantes ocupados durante os chamados furos, recorrendo a aulas de substituição. Que acha desta medida? Onde ir buscar professores para as aulas de substituição? Não se correrá o risco de desgastar ainda mais os professores?*

Eugénia Felgueiras,
Escola Secundária de Santa Maria Maior, Viana do Castelo

1. Concordo plenamente com a anulação desta medida e com as razões apresentadas pelo novo Governo.

2. Sou da mesma opinião. Aproveito esta oportunidade para sugerir que diminuam o número de disciplinas dos currículos dos alunos. Esta medida, seguramente, implicará uma diminuição significativa do número de manuais a adquirir, da despesa anual para os adquirir e consequentemente do peso das mochilas.

3. Penso que os conteúdos programáticos não têm sofrido alterações substanciais que justifiquem as mudanças sucessivas de manuais. Acho que existe um leque muito variado de manuais escolares, de várias editoras, o que dificulta bastante a escolha dos manuais. Por que não existe um único manual, por exemplo para o 10º ano de Matemática A, a nível nacional, da Editora do Ministério da Educação que respeite o programa de Matemática A?

4. Concordo com a introdução do inglês no ensino básico desde que seja leccionado por professores com formação científica e pedagógica nessa área. Relativamente ao francês penso que deveria ser obrigatório a sua introdução no 2º ciclo. Considero a introdução dos dois idiomas no ensino básico demasiado pesada para os alunos.

5. Esta medida pode resultar ou não, depende de cada escola, isto é, dos alunos, dos docentes, dos recursos físicos e humanos de cada escola.

Maria Emília Bigotte,
Instituto Politécnico de Coimbra e Dirigente no Movimento Associativo de Pais

1. O manual tem de ser entendido como um dos muitos recursos a ser utilizado dentro e fora da sala de aula de forma a permitir uma efectiva diversificação das estratégias de aprendizagem. Assim sendo deveria ser aceite como um bem a preservar que, como qualquer livro, servirá para ser consultado e manuseado e difundir a língua portuguesa. Como tal, mais que adoptar uma política de reutilização dos manuais, há que apostar fortemente na qualidade dos manuais existentes e de uma vez por todas ter a coragem de adoptar um conjunto limitado que responda eficazmente às suas funções e que não onere os gastos que as famílias têm com a educação dos seus filhos. Aos alunos abrangidos pela acção social escolar deverão ser-lhes oferecidos todos os recursos básicos exigidos na escolaridade obrigatória que lhes proporcione o acesso à educação.

2. É notório o elevado número de manuais exigidos aos alunos! É relevante o número de tarefas, a realizar nos manuais, deixadas para as crianças fazerem em casa no fim do seu dia de trabalho o que não facilita a possibilidade de libertar os alunos de alguma carga adicional. Assim sendo, cada vez mais é exigido aos alunos que carreguem todo o material básico, e muitas vezes o complementar a outras tarefas, no seu dia a dia, no trajecto escola-casa. Torna-se assim urgente pensar qual o verdadeiro papel da escola de forma a não continuar a hipotecar o futuro da educação.

3. Como já referi, penso que hoje em dia o manual de Matemática é feito no sentido de o fazer ajustar-se, o mais possível, às orientações emergentes em tornar as crianças e os jovens matematicamente alfabetizados. Este tipo de manual demasiado orientado não cria no docente a necessidade de aproveitar o que é interessante para a criança e partir do seu mundo "real" para introduzir as actividades educativas, que assim se tornam significativas. Desta forma defendo um manual bem estruturado que seja complementado por actividades desenvolvidas com cada turma, dentro e fora da escola, que evidenciem a necessidade da resolução de problemas a partir do quotidiano, como forma significativa e real de abordagem, e que fomentem o gosto pela investigação no sentido de melhor compreender os conteúdos matemáticos.

4. A Língua Inglesa é integrada no currículo no 2º ciclo e 3º ciclo, estando, neste nível de ensino, prevista a introdução de uma segunda língua estrangeira. Relativamente ao 1º ciclo, nas orientações curriculares do decreto lei 268/89 a introdução da língua estrangeira surgia como uma oferta educativa da escola a desenvolver em contexto de complemento curricular. O decreto lei 6/2001, que estabelece a reorganização do currículo do ensino básico, continua a prever uma possível iniciação a uma língua estrangeira num contexto de actividades de enriquecimento curricular, com carácter facultativo. Esta produção legislativa não refere a língua inglesa como a adoptada. Assim sendo, no âmbito do Projecto Educativo de Agrupamento, cada turma, de acordo com o seu Projecto Curricular, deverá estabelecer as prioridades em função das características dos alunos e dos interesses dos pais, uma vez que a frequência da língua estrangeira não será, até legislação em contrário, integrada nos conteúdos curriculares.

5. Há nesta matéria duas situações a considerar relativamente ao conceito de "furo". A falta pontual de um professor cria, excepcionalmente, um tempo livre ao aluno, que não tem que ser necessariamente compensado com aulas de substituição. Estes momentos são necessários à formação da consciência moral das crianças, uma vez que, tal como os recreios, são espaços informais de aprendizagem onde, através de uma maior interacção e convívio, as crianças adquirem, com os seus pares, a sua personalidade, moldada pelo meio social em que vivem. Para estes furos, tem de haver uma resposta da escola na criação de condições para que os alunos possam passar o seu tempo, de acordo com as suas necessidades e respondendo às suas expectativas: bibliotecas, mediatecas, salas de estudo, salas de informática, salas polivalentes, campos de jogos,…. No entanto, os "furos" criados pela falta sistemática do professor têm de passar obrigatoriamente por uma avaliação criteriosa da situação para que a escola, no quadro da sua autonomia (desejável e verdadeiramente reconhecida), com a co-responsabilização de todos os intervenientes, encontre a forma ajustada à resolução do problema, que poderá passar pela substituição temporária, no seio dos próprios recursos existentes, ou efectiva, que conduzirá à contratação de novo docente.

Maria Teresa Viegas,
Escola Secundária de Fontes Pereira de Melo, Porto

1. Num país como o nosso, faz todo o sentido promover a reutilização dos manuais escolares. Manuais "mortos" num sótão, ou desfeitos no lixo, isso é que não! Pode muito bem acontecer que a medida anunciada não seja muito fácil de pôr em prática; não concordo, no entanto, com as razões apontadas. Um aluno que, por dificuldades económicas, se veja impossibilitado de adquirir os manuais do ano seguinte, sabendo que os poderá vir a conseguir por troca com aqueles que tem em mãos, será o primeiro a preservá-los! Terá todo o cuidado em conservá-los em boas condições e evitará escrever neles seja o que for (aliás, os livros não deviam "convidar" os alunos a isto!). Para rever a matéria, há sempre a possibilidade de recorrer a um empréstimo de curta duração, requisitando numa biblioteca ou pedindo a um colega.

2. Essas duas sobrecargas (despesas demasiadamente elevadas e peso excessivo) são, de facto prejudiciais. Qualquer delas diminuiria consideravelmente se os manuais fossem mais "simples", menos pretensiosos: o papel não precisava de ser de tanta qualidade, os espaços deviam ser mais bem aproveitados, as ilustrações menos folclóricas e exuberantes. Pelos vistos, perdeu-se o hábito de escrever "da esquerda para a direita e de cima para baixo". Talvez não se possa, nem deva, voltar atrás! Parece-me, no entanto, que se caiu no exagero contrário o que conduz ao desperdício (colunas onde quase nada aparece escrito ou onde há ilustrações que não estão ali senão a convidar à distracção!). Resultado: os alunos carregam com papel em branco (ou a cores suaves!) que o encarregado de educação pagou como se estivesse escrito.

3. Acho que, ultimamente, se tem exagerado na frequência com que se pretende mudar! Mudam-se pequenas coisas, os manuais deixam de servir, são postos de lado e logo as editoras se apressam a colocar novos manuais à venda. Ora, a pressa, como inimiga da perfeição que sempre foi, arrasta os seus efeitos: manuais com gralhas, erros, encadeamentos irreflectidos. E isso nem chega a ser convenientemente corrigido; para quê, se tudo vai mudar outra vez tão brevemente? Além disso, bem vistas as coisas, no que diz respeito a conteúdos, as mudanças não são assim tão grandes. A matemática evolui, mas o que temos que ensinar no básico e secundário permanece. Quanto a métodos de ensino, acho que isso está na mão dos professores.

4. Concordo inteiramente com a medida! Quanto mais cedo se dá a conhecer uma língua estrangeira, mais eficaz é a sua aprendizagem. Neste momento, é óbvio que tem de ser o inglês, pois, quer queiramos quer não, é esse o idioma através do qual o mundo se comunica.

5. Se não houver grande exagero no número de furos, não vejo razão para pensar em substituições. Mas, de qualquer modo, a haver substituições, elas têm que ser bem pensadas: interessantes, úteis, com qualidade. Nunca uma forma de tortura para professores e alunos só para que estes, aparentemente, não percam tempo.

Rogério Bacalhau Coelho,
Escola Secundária de Pinheiro e Rosa, Faro

1. Gasta-se tanto dinheiro em manuais, que os primeiros interessados em que não se faça nada neste assunto são as editoras. Haja quem tenha coragem de mexer neste assunto e a economia das pessoas vai melhorar e elas vão agradecer assim como as florestas deste mundo. Até hoje tenho visto muito pouca coragem e muitas intenções.
As razões da anulação da medida podem ter pertinência mas o que é certo é que já muitas escolas no País promoviam a troca de manuais com sucesso sem que estas razões fossem impeditivas. Os próprios alunos e as famílias passam a ter cuidado com a utilização dos manuais e para além disso os alunos podem sempre utilizar os manuais existentes nas bibliotecas escolares.

2. Neste assunto há uma evolução positiva pois com a reforma do Ensino Secundário (em 2004/2005) e também a do Ensino Básico em que as aulas passaram para 90 minutos os alunos passaram a ter menos disciplinas por dia o que significa menos livros e cadernos para carregar. No entanto nos dias com 5 disciplinas de aulas são no mínimo 5 cadernos mais 5 livros mais …. Façam as contas e vejam quanto é que isto pesa (peso médio de um livro escolar 0,5 Kg). Se pensarmos que no 5º ano há alunos que pesam 30Kg, são pelo menos mais 10% de peso para carregar.

3. Devia haver um consenso nacional sobre quais os conhecimentos e as competências matemáticas que um aluno do ensino básico e do ensino secundário deveria ter no final do ciclo de estudos. De cada vez que se faz uma reforma o que acontece é que os currículos e os programas são feitos com base nas sensibilidades das pessoas que estão à frente das comissões respectivas. Faça-se um bom programa e não necessitamos de o alterar provavelmente nos próximos 10, 15 ou 20 anos. Mesmo com a grande evolução da matemática nas últimas décadas, o básico/ essencial mantém-se actual.

4. E que dizer do espanhol? Quando temos tantos problemas de literacia e na matemática não seria de apostar primeiro nestas duas disciplinas do ensino básico? Será que a introdução do Inglês no 1º ciclo de escolaridade vai resolver os problemas do ensino ou será mais uma bandeira política?

5. É uma questão de difícil resposta. Para isso é necessário ter uma bolsa de professores disponível. As escolas e o trabalho/horário dos professores não estão preparados para isso pois são estruturas muito rígidas. No entanto já existem boas experiências nesta área em muitas escolas. Pessoalmente tenho algumas dúvidas pois muitas destas aulas de substituição servem apenas para empatar os alunos nesses tempos lectivos. Penso que seria mais proveitoso que se combatesse algum absentismo dos professores e, por outro lado, as escolas estivessem bem equipadas com estruturas de apoio como bibliotecas, salas multimédia, campos de jogos onde os alunos de forma livre ou acompanhada pudessem ocupar o tempo divertindo-se, pesquisando, socializando-se, … Com a carga horária dos alunos (muitos só com duas tardes livres por semana) os furos até podem ser bons.

Cientistas sem opinião?

Graciano de Oliveira
Universidade Lusófona, Lisboa

Escrevo em Março para a próxima Gazeta, no pressuposto de que o que agora escrevo terá ainda sentido em Julho. Caso contrário terei de fazer alterações de última da hora. Problemas causados por a Gazeta sair só 2 vezes por ano.

Há dias foi anunciada a constituição de um novo governo como resultado das eleições de 20 de Fevereiro e parece-me oportuno recordar as perguntas que fiz no Volume 147: "alguma vez houve alguma crise política com base na política para a Ciência?" e, mais adiante, "algum partido alguma vez olhou para a Ciência ou desta se ouviu falar nalguma campanha eleitoral?". Referi também nesse volume que a generalidade dos empresários portugueses mostrava muito pouco interesse pela Ciência. Esta ideia foi desde então corroborada por entrevistas e afirmações nos *media* de notáveis do mundo empresarial. Quando muito, darão alguma atenção à Tecnologia que dê lucro no muito curto prazo. Tudo isto adicionado à experiência que colhi na preparação e durante o Ano Mundial da Matemática, tem-me dado que pensar e a concluir, cada vez com mais força, que não temos razões para optimismo.

Antes e depois da formação do governo que refiro, houve muitas expectativas e muitas entidades se pronunciaram, algumas com análise detalhada do que previam para o respectivo sector em função dos nomes que foram anunciados para os diferentes Ministérios. Na data em que escrevo não se sabe o que vai acontecer, os Ministros indigitados ainda quase nada disseram e, muito menos, fizeram. Mas o que pretendo sublinhar não é isso, é o silêncio da Ciência (com letra maiúscula para lhe dar a importância que não tem em Portugal). Limitando-me ao que vi só no dia seguinte ao do anúncio dos nomes, pronunciaram-se o Bastonário da Ordem dos Advogados, o Secretário Geral do Sindicato Independente dos Médicos, o Coordenador do Observatório Português dos Sistemas de Saúde, o Sindicato dos Enfermeiros Portugueses, a Quercus, a Liga da Protecção da Natureza, o Presidente da Confederação dos Industriais Portugueses. Encontrei ainda avaliações de partidos, algumas observações de professores e análises a título individual.

Existe um Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior. Mas sobre esta área ... nada, tudo levando a crer que é politicamente inexistente. Não é estranho? O número de cientistas não é já de vulto? É certo que só cresceu de maneira assinalável muito recentemente. Apesar disso não era de esperar que tivesse maior peso político?

Do que tenho ouvido, penso que muitos cientistas (estou longe de saber se a maioria) vêem com bons olhos a recondução de Mariano Gago, mas não seria de esperar que alguém, que não se representasse só a si próprio, se pronunciasse? Não me refiro a Sindicatos. A estes cabe pronunciarem-se sobre questões de índole sindical, mas, pode perguntar-se, estas esgotam a matéria na área da política da Ciência? Seguramente, não. Estaremos perante uma manifestação da debilidade da sociedade civil? Quem, sem ser a título individual, se deveria pronunciar? Penso que deveriam ser as sociedades científicas. Dir-se-á que não foram procuradas pelos *media*. Bem, são elas que têm de mostrar que existem e não ficar a aguardar que as façam existir: a existência política conquista-se. Poderá também dizer-se que as sociedades científicas não têm, em geral, estruturas que lhes permitam ter opiniões representativas. É verdade, mas a culpa é delas. Aliás é comum uma concepção muito limitada da acção que compete às associações científicas: acredita-se que o seu papel é organizar workshops, seminários, olimpíadas, aguardando que o estado seja magnânimo e distribua benesses, não lhe competindo ter opiniões. E estruturam-se em conformidade.

Há também quem diga que o número de associações científicas é muito grande o que dispersa a sua influência. Aqui a resposta é simples: podem constituir-se federações. Estas podem agrupar muitas associações e assim ganhar peso e força. Os empresários comportam-se como se sabe. E os cientistas?

Livros contados

Paulo Ventura Araújo

Contar e fazer contas. Uma introdução à teoria dos números,

de J. Eurico Nogueira, Suzana Nápoles, António Monteiro, José A. Rodrigues, M. Adelaide Carreira (colecção Temas de Matemática, SPM/Gradiva, 2004)

recensão por Maria Pires de Carvalho, Universidade do Porto

Quando recebemos este livro, editado pela Gradiva em parceria com a SPM, surpreendeu-nos o uso de dois títulos de tão distinto grau de formalidade, como se os leitores devessem contar com um texto de divulgação matemática entremeado com um conteúdo de formato mais clássico. O prefácio do livro sugere isso mesmo e delimita o público a que o livro se destina: aquele que precisa de *aprofundar a sua cultura matemática*. Esta é uma excelente razão para avançarmos na leitura e conferirmos o que, nos nove capítulos do livro, há de promessa cumprida.

Os temas dos cinco primeiros capítulos correspondem a uma escolha primorosa de um vasto leque de assuntos possíveis em teoria de números; o capítulo seis é menos feliz, o sétimo é mesmo dispensável. Os autores optaram por incluir um Apêndice que, não sendo de leitura aprazível, contém informação útil. Segue-se uma Cronologia da história dos números, um pouco extensa e discutível. Globalmente trata-se de um livrinho de conteúdo essencialmente histórico, acessível a todos os que se interessam por matemática. Mas temos a fazer-lhe algumas críticas que julgamos pertinentes.

A divulgação da matemática, sobretudo a não especialistas, não é incompatível com uma apresentação cientificamente irrepreensível. Ora, se algumas opções dos autores são francamente meritórias, outras houve que diluíram a qualidade do livro e o remetem a um mais restrito nicho de leitores. Vejamos em detalhe as razões desta depreciação.

Todos os capítulos beneficiaram de incursões históricas minuciosas, que louvamos, mas cujo fluir no livro denota alguma descoordenação. Muitos aspectos são repetidos, deixando à mostra uma má costura entre os capítulos e alongando-os indevidamente (vejam-se, por exemplo, os vários retornos às fórmulas resolventes de equações polinomiais). Além disso, apresentam-se opiniões de enorme peso histórico sem justificação, como por exemplo, a afirmação, no capítulo 1, de que «*foram os Gregos quem mais importância atribuiu aos racionais e, o que é mais curioso, sem terem consciência disso*»; na Cronologia, a notícia de que o Último Teorema de Fermat foi provado por Andrew Wiles, quando se impõe incluir também o nome de Richard Taylor; ainda na Cronologia, a afirmação de que a Conjectura de Poincaré foi provada em 2004, quando na verdade os especialistas não estão ainda de acordo e hesitam em aprovar o argumento de Perelman.

Mas é no conteúdo matemático que esta obra mais se afasta de ser recomendável. Há muitos erros, imprecisões e omissões. Damos só alguns exemplos mais relevantes.

Capítulo 2:

(a) Além das repetidas provas de que certas recorrências estão bem definidas, o que poderia ter sido feito de uma vez por todas, o argumento das páginas 38 e 42 para mostrar a unicidade do resultado das operações em $\boldsymbol{N}$ não se percebe.

(b) A ordem por que se apresentam as propriedades das operações facilita a verificação delas mas introduz uma hierarquia que pode suscitar perguntas muito importantes que não são respondidas no texto: por exemplo, a unicidade do elemento neutro de uma operação só é válida se a operação for comutativa?

(c) A parte inteira de um número real, de que se fala na página 54, nem sempre é a característica do número; embora a secção 2.2 se refira sobretudo a fracções positivas, não é claro que seja este o único âmbito das afirmações que lá são feitas.

Capítulo 3: Depois de ser apresentada a prova de Euclides da infinidade dos primos, afirma-se que a de Kummer é «*ainda mais simples*»; ora, o argumento de Kummer recorre às mesmas ideias de Euclides (ou seja, que, se um natural divide outros dois, então divide a diferença ou a soma deles; e que, se um natural é maior que 1, então há um primo que o divide; e considera, como Euclides, o produto dos primeiros primos consecutivos), mas usa redução ao absurdo. Isso torna-o mais simples?!

Capítulo 4: A construção dos hiper-reais exige de facto um ultrafiltro para distinguir subconjuntos de naturais, que a família dos co-finitos não é.

Capítulo 5:

(a) Promete-se determinar «*por considerações geométricas simples, as raízes reais de uma equação quadrática*». De facto, só se usa este método em três exemplos, optando-se depois por uma dedução algébrica da fórmula resolvente. Além disso, nos exemplos há etapas de que não é dada qualquer justificação geométrica, como quando se procura «*uma raíz menor que* $9/2$ para $x^2+20=9x$ (página 136).

(b) No rodapé indexado por 51, exclui-se do argumento da página 145, as cúbicas em que $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$. Porquê? O que fazer neste caso?

Capítulo 6: Na prova da página 173 de que $\boldsymbol{R}$ não é numerável, afirma-se: «*para simplificar o problema, serão representados todos os números reais sob a forma de dízima infinita*». Zero tem dízima infinita? (Isso não é claro da definição que consta da página 54.) E é para *simplificar o problema* que se escrevem os reais de $]0,1[$ como dízimas infinitas, ou sem esta hipótese, que garante a unicidade da escrita em dízima, o argumento diagonal falha?

Apêndice:

(a) No rodapé 68 diz-se erradamente que o Último Teorema de Fermat afirma que «*Sendo n um natural maior que* 2*, não existem x, y, z inteiros que sejam solução da equação* $x^n+y^n=z^n$». Como é óbvio, o teorema só se refere a soluções inteiras positivas.

(b) O enunciado do Teorema de Wilson, que surge primeiro na página 80, é um critério de primalidade, logo traduz-se por uma equivalência; os autores reduziram-no, no Apêndice, a uma só implicação.

Nota-se em geral uma apresentação tímida dos assuntos mais difíceis, o que os autores podem justificar com o público alvo a que se dirigem, mas que ressoa ao velho preconceito de que só o que é trivial é apreciado e que há pouca capacidade nos leitores para entender componentes menos elementares da matemática. Por exemplo: (I) Por que funciona o argumento para extrair raízes quadradas que consta da página 67? (II) Na caixa que inicia a página 72 promete-se uma prova do Teorema Fundamental da Aritmética; o argumento utiliza, sem provar, que *se um primo divide um produto finito, então divide algum dos factores*. (III) Por que não é aceitável a fórmula de Gandi (aliás transcrita erradamente) como geradora de todos os primos (página 79)? (IV) Diz-se na página 91: «*o alemão Georg Bernhard Riemann (...) usou a fórmula de Euler* [que surge na linha seguinte, com explicação adicional em

rodapé envolvendo Riemann que é posterior a Euler], *mas também não logrou concretizar os seus intentos»*. Para que se falou então desta fórmula e do seu uso por Riemann? (V) Na página 100 menciona-se uma descoberta de Ulam e remete-se o leitor para uma página da Internet, sem ser sequer claro que se trate de um teorema. (VI) Por que se mencionou na página 111 que a quadratriz «*não é gráfico de uma função algébrica*» se nem sequer se explica o que isso significa? (VII) Diz-se na página 116 *que «um complexo é definido como sendo da forma $a+bi$, onde a e b são reais»*. Obteríamos a mesma estrutura se, em vez de *i*, juntássemos a uma raíz de outro polinómio sem zeros reais que não x^2+1? E como se justifica que as operações entre complexos sejam as apresentadas na página 117? (VIII) Na dedução da fórmula resolvente de equações cúbicas (página 144), começa-se por reduzir uma cúbica geral x^3+bx^2+cx+d à versão mais simples y^3+py+q, através da mudança de variável $x = y - \frac{b}{3}$. Como se justifica que alguém se tenha lembrado de usar esta mudança de variável? (O coeficiente do termo quadrático na cúbica geral, *b*, é o simétrico da soma das três raízes; juntando a cada uma $b/3$, a soma anula-se e o coeficiente do termo quadrático na variável *y* é zero.) (IX) Na caixa da página 177 diz-se: «*pode demonstrar-se que a cardinalidade* [dos números transcendentes] *coincide com a dos reais*». Por que não se tirou partido da igualdade da página 174, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, para deduzir esta afirmação tão interessante?

Impunha-se dos cinco autores uma revisão cuidada do texto para evitar as muitas gralhas que ele contém, algumas resultado de mera desatenção mas que adulteram o conteúdo (por exemplo, na página 66, a $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são atribuídas dízimas finitas). Se é verdade que a opção de colocar parte do conteúdo em caixas aproxima o aspecto do texto do dos manuais escolares, tem a desvantagem de sublinhar uma visão francamente questionável da história da matemática: por exemplo, por que mereceu Pedro Nunes uma caixa de destaque e Anastácio da Cunha não?

É frequente que os autores de textos de matemática, preocupados com o conteúdo científico, descuidem a linguagem e tornem as suas obras de leitura árdua. O português um pouco coxo que transpira deste livro é disso um exemplo lamentável, até por comprometer uma apresentação mais elegante da matemática. Por exemplo, na página 48, encontra-se: «*para estender a operação de multiplicação ao conjunto dos números inteiros põe-se, para quaisquer naturais (...)*»; na página 78 diz-se: «*(...) não havia, no máximo, mais do que uma expressão com esta propriedade*»; na página 106, lê-se: «*uma sucessão* $(a_n)_{n \in N}$ *de números reais diz-se fundamental se, dado um número* $\varepsilon > 0$ *arbitrário, se tiver* $|a_n - a_k| < \varepsilon$ *para todo o n e k tais que n, k > p, para algum p.*» A frase que segue a caixa da página 175, que lida com cardinais e potências finitos, sugere ao leitor que se prova analogamente que $2^{\aleph}$ é o cardinal das partes de um conjunto de cardinal $\aleph$ quando na verdade $2^{\aleph}$ não pode ser definido independentemente da noção de partes de um conjunto.

São muitos os reparos aqui feitos, dirão. É que são graves alguns dos defeitos que encontrámos e que minaram uma obra que tinha à partida larga margem para ser um sucesso. Esperemos que seja possível uma segunda edição corrigida que faça justiça à qualidade dos autores.

Esta secção propõe-se publicar recensões aprofundadas de livros de Matemática editados recentemente em português, dando preferência a livros que interessem a um público alargado. Agradecemos aos leitores da Gazeta de Matemática o envio de sugestões de livros que julguem merecedores da nossa atenção.
Contacto do editor da secção: Paulo Ventura Araújo (FCUP);
e-mail: paraujo@fc.up.pt

Final Nacional das XXIII Olimpíadas Portuguesas de Matemática

Ercília Sousa
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

As Olimpíadas Portuguesas de Matemática são organizadas anualmente pela Sociedade Portuguesa de Matemática, consistindo em três eliminatórias: a primeira a nível de escola, a segunda a nível regional e a terceira a nível nacional. Para além de desenvolver o gosto pela matemática, esta iniciativa proporciona aos alunos do segundo e terceiro ciclos desafios que exigem raciocínio, criatividade e imaginação.

A primeira edição destas olimpíadas decorreu há 23 anos, fomentada por um grupo de professores da Universidade de Coimbra que lançou o concurso na altura com um âmbito regional, onde participaram pouco mais de seis mil estudantes, de 151 escolas da zona centro.

Este ano lectivo a primeira eliminatória das olimpíadas decorreu em Novembro de 2004. Os 18 mil participantes de cerca de 600 escolas, fazem deste concurso um dos acontecimentos na área da ciência que actualmente mais jovens envolve em Portugal.

A **final das XXIII Olimpíadas Portuguesas de Matemática,** que teve lugar de 17 a 20 de Março, foi acolhida pela Escola Secundária de Francisco Franco, no Funchal, **Ilha da Madeira,** sendo o nome da escola uma homenagem ao escultor Francisco Franco. Algumas das suas esculturas encontram-se na Universidade de Coimbra, como por exemplo a Estátua D. Dinis, fundador da universidade, que se situa em frente ao Departamento de Matemática e a estátua D. João III, no pátio da mesma Universidade.

Os alunos, para além de terem resolvido problemas de matemática nas manhãs dos dias 18 e 19 de Março, nas tardes experimentaram a descida dos Cestos, visitaram o Centro de Vulcanologia e foram recebidos na Câmara Municipal do Funchal.

A entrega dos prémios decorreu na Escola Profissional de Hotelaria e Turismo da Madeira, e contou com a presença do Secretário Regional de Educação, Francisco Fernandes.

Foram medalhados 24 estudantes, doze em cada categoria. A categoria A inclui alunos do 8º e 9º ano, e a categoria B do 10º, 11º e 12º, havendo problemas diferentes para cada categoria.

Os medalhados deste ano foram os seguintes:

Categoria A

Medalha de Ouro

João Carlos Gomes Martins,
9º ano, Escola EB 2,3 Martim de Freitas, Coimbra
João Pedro Gaspar Simões,
9º ano, Escola Secundária Sebastião da Gama, Charneca da Caparica
Pavlo Zhygulin,
9º ano, Escola EB 2,3 Dr. António da Costa Contreiras, Armação de Pêra

Medalha de Prata

Filipe Manuel Figueira Valeriano,
9º ano, Escola EB 2,3 Dr. João de Brito Camacho, Almodôvar

Francisco José Pereira Martins,
9º ano, Escola E B 2,3 de Sobreira, Sobreira

Jorge Ricardo Landeira da Silva Miranda,
8º ano, Escola Secundária Anselmo de Andrade, Almada

Medalha de Bronze

Ana Raquel Martins Cunha,
8º ano, Escola EB 2,3 de S. Paio, Moreira de Cónegos

David Mauro Dias,
9ºano, Escola EB 2,3 Com Ensino Secundário da Guia, Guia

João Duarte Cardoso Texugo de Sousa,
9ºano, St Peter´s School, Volta da Pedra

José Pedro Namora Leitão Machado,
9ºano, Escola EB 2,3 Egas Moniz, Guimarães

Marta Oliveira Pires de Lima,
9ºano, Oficinas de S. José, Lisboa

Rui Miguel Água-Doce Alves,
9ºano, Escola EB 2,3 N.º1 de Elvas, Elvas

Categoria B

Medalha de Ouro

Afonso José Sousa Bandeira,
11º ano, Escola Secundária/3 S. Pedro do Sul, S. Pedro do Sul

Carlos Filipe Magalhães dos Santos,
12º ano, Escola Secundária da Maia, Maia

João Leitão Guerreiro,
10º ano, Colégio Valsassina, Lisboa

Medalha de Prata

Eduardo Manuel Dias,
12º ano, Escola Secundária de Domingos Sequeira, Leiria
João Manuel Gonçalves Caldeira,
11º ano, Escola Secundária Emídio Navarro, Almada
Joel Pedro de Oliveira Moreira,
11º ano, Escola Secundária José Saramago, Mafra

Medalha de Bronze

Carlos Miguel Silva Pinto da Costa,
12º ano, Externato Ribadouro, Porto
Daniel Filipe Martins Rodrigues,
12º ano, Escola Secundária Emídio Navarro, Viseu
Hugo Fidalgo Martins,
11º ano, Escola Secundária Filipa de Vilhena, Porto
Joana Filipa da Silva Gomes,
12º ano, Instituto de Odivelas, Odivelas
João Pedro Correia Matias,
10º ano, Escola Secundária José Gomes Ferreira, Lisboa
Paulo Alcino Machado Macedo,
11º ano, Escola Secundária do Castêlo da Maia, Maia

Os alunos medalhados da Categoria B juntamente com os medalhados das últimas três edições das Olimpíadas Nacionais de Matemática frequentarão uma série de aulas leccionadas pelo Projecto Delfos da Universidade de Coimbra, no sentido de serem preparados para fazer parte das equipas portuguesas que nos representarão nas Olimpíadas Internacionais de Matemática e nas Ibero-Americanas, este ano a decorrerem no México e na Colômbia respectivamente. Os alunos terão de continuar a competir pelo seu lugar na equipa, sendo avaliados por uma série de testes que decorrerão durante o estágio.

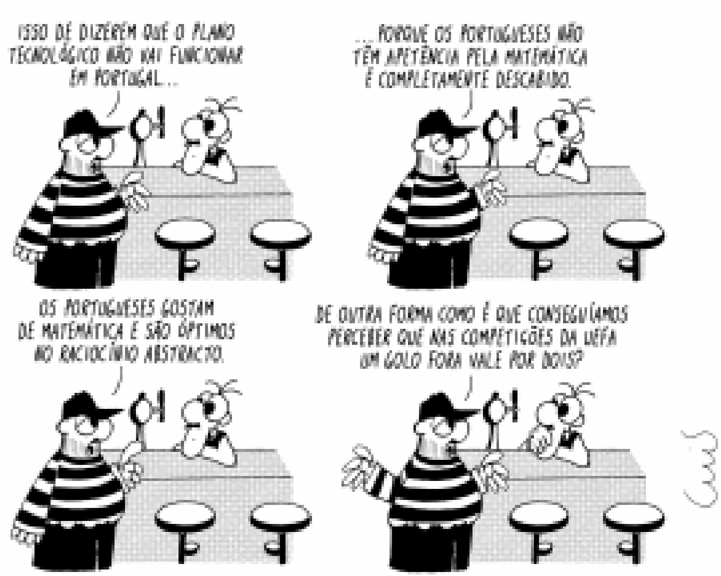
As Olimpíadas Nacionais de Matemática receberam o apoio financeiro das entidades nacionais, Ministério da Educação, Ciência Viva, Fundação Calouste Gulbenkian e Fundação Ilídio Pinho, e ainda o apoio das entidades da Madeira, Secretaria Regional de Educação, Secretaria Regional do Ambiente e Recursos Naturais, Secretaria Regional do Turismo e Câmara Municipal do Funchal. Outros apoiantes foram Aeroporto da Madeira, Centro de Juventude-Quinta da Ribeira, Centro de Estudos de História do Atlântico, Centro de Vulcanologia, CP, Escola Profissional de Hotelaria e Turismo da Madeira, Escola Profissional das Artes da Madeira, Quinta Berardo, TAP, Teleferícos da Madeira, S.A.

Qualquer informação sobre as Olimpíadas, como por exemplo, problemas propostos nas diferentes eliminatórias das olimpíadas, podem ser consultados na página www.spm.pt.

Problema das XXIII Olimpíadas Portuguesas de Matemática:

Numa fila para um concerto do Super Rock Pop estavam 2005 pessoas. Com o objectivo de oferecer 3 entradas para o «backstage», pediu-se à primeira pessoa da fila que gritasse «Super», à segunda «Rock», à terceira «Pop», à quarta «Super», à quinta «Rock», à sexta «Pop» e assim sucessivamente. Quem disse «Rock» ou «Pop» foi eliminado. Repetiu-se este processo, sempre a partir da primeira pessoa da nova fila, até restarem apenas 3 pessoas. Em que posições se encontravam no início essas pessoas?

Bartoon



Luís Afonso, Público, 30-04-2005

(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)