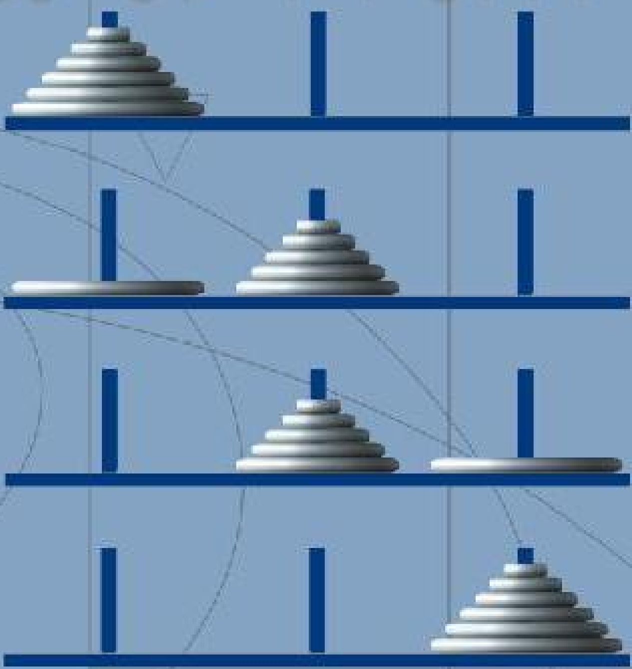
GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática **Ano LXIV** | Janeiro 2003 **nº 144**



4 Euros

Torres de Hanoi
por A. Pereira e Rosália Rodrigues
e
por G. Ribeiro Alves

Entrevista com Madalena Garcia

A Seriação das Escolas Secundárias
por Dinis Pestana

Entrevista com Madalena Garcia

Madalena Garcia tornou-se bem conhecida pelo seu trabalho em prol do ensino da Matemática e como colaboradora do Professor Sebastião e Silva.

Ensinou gerações de alunos, participou na formação de novos professores e foi co-autora de diversos livros didácticos.

A Gazeta de Matemática foi ouvi-la na convicção de que a sua experiência deve ser conhecida e partilhada.

Madalena Garcia licenciou-se em Matemática pela Universidade do Porto em 1956, com elevada classificação, e optou pelo ensino secundário por gosto e vocação. Presentemente aposentada, mantém vivo o seu interesse pela Matemática.

Em 1990 foi louvada pelo Secretário de Estado Adjunto do Ministro da Educação como reconhecimento da sua "qualidade científica e profissional e de elevado sentido pedagógico e humano".

No Ano Mundial da Matemática, foi agraciada pelo Presidente da República com a Comenda da Ordem da Instrução Pública.

Ouçamo-la e meditemos nas suas opiniões.

Gazeta de Matemática *- A Senhora Dra dedicou-se, durante anos, ao ensino tendo desenvolvido uma importante actividade que é hoje bem conhecida e reconhecida. Pode falar-nos da sua experiência como professora de Matemática?*

Madalena Garcia - Por opção, escolhi como vida profissional o ensino secundário da Matemática, recusando propostas aliciantes recebidas ao findar estudos universitários.

A minha experiência no ensino foi multifacetada e muito rica, desenrolada em três campos fundamentais: regência de turmas de alunos, formação inicial e contínua de professores e elaboração de livros didácticos, como co-autora de manuais para os anos terminais do ensino secundário. A qualquer destes três campos dediquei largos anos de trabalho profundo.

Foram mais de 36 anos de reflexão e continuado estudo, na procura de um saber acrescido que permitisse fazer melhor.

Foi uma vida profissional rica de desafios aliciantes e sempre renovados, sempre vivida com verdadeira alegria e motivação permanente.

GM *- A Senhora Dra trabalhou em tempos com o Professor Sebastião e Silva. Pode dar-nos uma ideia desse trabalho? Em que consistiu, que resultados teve e que continuidade lhe foi dada?*

MG - Tive o privilégio de frequentar em Oeiras, em 1966, um curso para professores orientado pelo Professor Sebastião e Silva, com o objectivo de preparar docentes para as turmas piloto da experiência de Modernização do Ensino da Matemática, por ele concebida e presidida, a decorrer em Portugal.

No ano lectivo imediato leccionei uma turma piloto e, logo a seguir, orientei vários cursos de férias para professores, visando a ampliação do número de turmas experimentais.

O acompanhamento feito pelo Professor Sebastião e Silva à experiência em desenvolvimento, o estudo reflectido dos seus "Compêndios" e "Guias de Matemática" e o estímulo recebido fizeram-me ficar sua discípula.

O grupo de professores envolvidos na experiência, tendo captado a necessidade de reformular o ensino da Matemática desde as suas bases não só quanto a programas mas também quanto a métodos, formava uma equipa dinâmica e verdadeiramente empenhada, capaz de transmitir enorme entusiasmo aos alunos. Enunciados de exercícios, alguns até imaginados por estes, eram incluídos pelo Professor Sebastião e Silva nos seus "Guias". A docência nas várias turmas experimentais no país era acompanhada no terreno por um inspector orientador e o próprio Professor Sebastião e Silva reunia periodicamente com os professores e, algumas vezes, assistia a aulas, pedindo dúvidas e sugestões para ir ajustando a experiência.

Sentindo também a necessidade de rever a formação universitária dos futuros professores de Matemática, pediu-me, já em fase de doença, que elaborasse um programa para uma cadeira de Metodologia do Ensino da Matemática. Cumprida a tarefa sob a sua orientação, vim também a reger a cadeira durante alguns anos na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Ainda a pedido do Professor Sebastião e Silva regi, no Brasil, um curso de férias para professores brasileiros, interessados na experiência a decorrer em Portugal.

Para tomar conhecimento de experiências a decorrer no estrangeiro, fiz um breve estágio no Centro Belga de Pedagogia da Matemática e contactei pessoalmente em Itália a Professora Emma Castelnuovo.

A doença e morte prematura do Professor Sebastião e Silva, em 1972, fizeram interromper a continuidade da experiência, embora continuasse a perdurar o seu espírito.

O aumento enorme da população escolar na época tornava cada vez mais premente a formação de grande número de professores, tarefa a que foi necessário dar prioridade absoluta.

Suponho nunca ter sido feita avaliação imediata e concreta comparada da experiência mas, à distância no tempo, o êxito é visível no grande número de alunos das turmas piloto hoje profissionais de sucesso nos mais variados domínios.

GM *- Discute-se muito a dificuldade dos estudantes de hoje com a Matemática. Qual a sua visão da situação actual?*

MG - Creio que a dificuldade dos estudantes de hoje no que respeita à Matemática tem causas variadas, mas gostaria de indicar como importantes

- motivação insuficiente, não se apercebendo os alunos muitas vezes que a Matemática está em tudo e ficando sem uma base concreta que permita chegar a um patamar de abstracção;

- falta de solidificação de bases, sentindo os alunos dificuldades acrescidas de ano para ano;

- programas sobrecarregados;

- falta de condições para que o trabalho e o esforço contínuo e sistemático, necessário à aprendizagem, seja realizado com agrado e aceite como desejável.

GM *- Porquê tantos problemas com a Matemática? Não se terá generalizado a ideia, tanto entre os estudantes como entre os pais, de que a Matemática é um obstáculo quase intransponível ou só transponível por um pequeno número* *de especialmente vocacionados? Portanto nem vale a pena tentar, é uma batalha perdida de antemão. Parece que muitos pensam assim. Não é uma ideia errada?*

MG - Na sociedade actual, com a rapidez do mundo tecnológico onde tudo se processa a ritmo acelerado, o "sucesso" é apresentado como obtido de forma rápida, não sendo valorizado o esforço e a persistência.

Não é de estranhar que, neste contexto, a Matemática surja como obstáculo quase intransponível ou apenas ao alcance de número muito reduzido de indivíduos.

Esta ideia, completamente errada, deve ser combatida. A Matemática deverá surgir entre estudantes e pais como ciência ligada à vida, necessária e útil. A sua aprendizagem, acessível a quase todos, longe de ter como objectivo apenas automatismos e terias abstractas, tem um papel fundamental na formação de cidadãos conscientes, capazes da desejável e cada vez mais indispensável educação permanente e co-responsáveis na construção do mundo novo em que terão de viver.

***GM** - Temos grandes diferenças em relação a outros países. Nas Olimpíadas Internacionais de Matemática a equipa portuguesa não consegue grandes resultados. Mesmo nas Olimpíadas Ibero Americanas o comportamento não é famoso. Não é estranho? Quer comentar?*

MG - É, de facto, estranho o facto de os estudantes portugueses não conseguirem grandes resultados nas Olimpíadas de Matemática.

Não é, naturalmente, por falta de inteligência dos alunos portugueses. Os programas escolares sobrecarregados e horários fragmentados nem sempre permitem tempo suficiente para actividades de reflexão. Acresce ainda que em Portugal faltam, por vezes, estruturas estimulantes e motivadoras de acompanhamento a pequenos problemas e temas desafiadores da imaginação.

***GM** - Que pensa dos manuais escolares? Que diferença há entre os actuais e os de há umas décadas?*

MG - Os manuais escolares actuais, embora atraentes, parecem-me extensos, por vezes com exercícios em demasia e mesmo alguns com artifícios desnecessários.

A repetição exagerada de exercícios, sem escolha criteriosa, pode levar a uma aprendizagem puramente mecânica.

Pelo contrário, não desprezando embora as rotinas indispensáveis à aprendizagem, a reflexão sobre alguns bons exercícios, imaginando novos problemas, generalizando, variando dados, prevendo e criticando resultados, estimula o gosto do aluno, desenvolve a imaginação e a intuição, o ensino ganha nova vida e conduz, com interesse, à aprendizagem esquemática, aquela que poderá perdurar e ser transferida aos mais variados campos do saber.

***GM** - Hoje o papel do esforço e da memória é muito desvalorizado. Que pensa disto?*

MG - Parece-me, realmente, desvalorizado o papel da memória e do esforço regular e contínuo.

Nos primeiros anos da escolaridade o aluno dispõe de uma memória especialmente viva que deve ser aproveitada. É nessa idade que devem ser memorizados, sem exagero, elementos e factos que vão constituir suporte do ensino lógico-racional das fases seguintes, conseguido à custa da actividade, reflexão e esforço continuado e persistente do próprio aluno, construtor do seu próprio desenvolvimento intelectual.

Não se trata de visar apenas uma aprendizagem mecânica, obtida à custa de sobreposição de memorizações mas conseguir, mercê de elementos disponíveis na memória, formas superiores de aprendizagens.

***GM** O papel da memória é importante ou não? Há histórias de matemáticos notáveis que tinham uma memória extraordinária e essa faculdade parece ter sido importante para conseguirem o que conseguiram.*

MG Como decorre da resposta anterior, creio que o papel da memória é realmente importante na aquisição de competências e aprendizagens.

A imaginação criadora, por exemplo, será tanto mais rica quantos mais elementos tiver disponíveis.

A imaginação é igualmente importante ao longo de raciocínios, nomeadamente dedutivos. Basta pensar, por exemplo, que o ensino tradicional da Geometria dedutiva não resultava porque na idade em que era iniciado (cerca dos 13 anos) a capacidade da memória da maioria dos alunos não permitia reter os axiomas e ir "buscá-los" quando necessário.

A aprendizagem esquemática obtida sobre elementos disponíveis na memória permite obter "esquemas" que, não a sobrecarregando, persistem ao longo do tempo constituindo importantes ferramentas intelectuais.

***GM** - E quanto à formação de futuros professores de Matemática. Qual a sua opinião sobre o que se está a fazer?*

MG - Julgo que a formação de professores de qualidade é uma tarefa a realizar por aproximações sucessivas, no sentido de conseguir docentes com gosto pela profissão e capazes de contextualizar a formação recebida à realidade escolar.

É de apostar numa boa formação inicial, com visão integrada dos vários graus de ensino e consciente do papel da aprendizagem matemática no sentido da abertura de perspectivas e horizontes variados.

Parece-me ainda importante uma formação contínua consistente, de modo que cada professor sinta apoiada a sua actividade docente, com a actualização e informação necessárias ao seu sucesso profissional, factor condicionante do sucesso dos alunos.

***GM** - A Senhora Dra foi condecorada pelo Presidente da República no decurso do Ano Mundial da Matemática. Que significou para si essa condecoração?*

MG - A condecoração recebida pelo Presidente da República no decurso do Ano Mundial da Matemática, apesar de completamente inesperada, representou para mim motivo de grande alegria e satisfação pelo reconhecimento do trabalho realizado.

Continuo a ser como sempre fui simples, exigente comigo própria, e bem consciente de que aquilo que consegui fazer no campo do ensino ficou a dever-se aos muitos estímulos recebidos de alunos e colegas e ao empenhamento das equipas de trabalho em que participei.

***GM** - Não lhe parece que a Matemática, bem como a Ciência em geral, é socialmente pouco valorizada em Portugal?*

MG - Sem dúvida.

É pena que tal aconteça e que seja fora do país que acabam por fixar-se muitos dos cientistas portugueses de reconhecido mérito.

Penso que é premente a revisão deste problema, sobretudo no momento actual em que se torna imperioso o desenvolvimento científico e tecnológico do país.

***GM** - Que acha que se pode fazer para melhorar a situação da Matemática em Portugal?*

MG - Sinto que é necessário fazer algo. É tema que exige ponderação e para o qual não há certezas de actuação.

Como medidas a apontar, indicaria

- revisão de programas, com reforço de exigência em alguns temas e simplificação de outros, de modo que o aluno se sinta motivado e com tempo bastante para uma aprendizagem eficaz;

- coordenação vertical dos programas ao longo da escolaridade, devidamente ajustados às fases do desenvolvimento do aluno e dando especial ênfase à solidificação das primeiras aprendizagens;

- intensificação da formação e criação de estruturas de apoio e acompanhamento dos professores;

- esclarecimento possível da opinião pública de modo a desfazer o medo da Matemática e apresentá-la como um produto humano intimamente ligado à natureza e à técnica e cuja aprendizagem poderá conferir, além de desenvolvimento intelectual, o nível de conhecimentos e competências necessário a uma educação capaz de ser factor condicionante de desenvolvimento.

O problema das Torres de Hanoi: a lenda, algoritmos e generalizações.

António Pereira e Rosália Rodrigues
Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

1. Origem, lendas e mitos

Em 1883, o matemático francês Édouard Lucas inventou o famoso puzzle das *Torres de Hanoi* [6] [7], também conhecido pelas *Torres de Brahma* e contado em forma de lenda [5]:

> *"No grande templo de Brahma em Benares, numa bandeja de metal sob a cúpula que marca o centro do mundo, três agulhas de diamante servem de pilar a sessenta e quatro discos de ouro puro. Incansavelmente, os sacerdotes transferem os discos, um de cada vez, de agulha para agulha, obedecendo sempre à lei imutável de Brahma: Nenhum disco se poderá sobrepor a um menor.*
>
> *No início do mundo todos os sessenta e quatro discos de ouro, foram dispostos na primeira das três agulhas, constituindo a Torre de Brahma. No momento em que o menor dos discos for colocado de tal modo que se forme uma vez mais a Torre de Brahma numa agulha diferente da inicial, tanto a torre como o templo serão transformados em pó e o ribombar de um trovão assinalará o fim do mundo."*

2. O Algoritmo Recorrente

A versão original das *Torres de Hanoi* consiste em três postes e oito discos de diâmetro 1,2,...,8, inicialmente dispostos no primeiro poste por ordem decrescente do diâmetro formando uma estrutura cónica semelhante à da figura 1. O objectivo do puzzle consiste em formar a torre no terceiro poste, movendo um disco de cada vez, não sendo permitido colocar um disco maior sobre um menor.

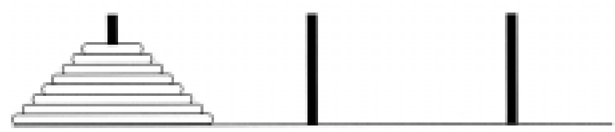


Figura 1: A configuração inicial das Torres de Hanoi com 8 discos.

Problema 2.1 *Torres de Hanoi*

São dados n discos de diâmetro 1,2,...,*n dispostos por ordem decrescente de diâmetro num de 3 postes. Pretende-se transferir todos os discos para um dos outros postes, utilizando o menor número de movimentos, de tal modo que as seguintes restrições sejam satisfeitas:*

1. apenas um disco pode ser movido de cada vez,

2. apenas se podem mover os discos do topo (isto é, apenas discos que não têm um outro disco colocado em cima),

3. nenhum disco pode ser colocado sobre outro menor.

A solução para o problema 2.1 pode ser descrita da seguinte forma:

Designem-se por *poste inicial* aquele onde inicialmente se encontram os *n* discos, por *poste final* o poste para onde serão transferidos os discos e por *poste auxiliar* o poste restante.

Para transferir *n* discos de um poste para outro é necessário, em alguma iteração, mover o disco *n* pelo menos uma vez. Este só pode ser transferido se for o único no poste e existir um poste vazio onde o colocar. Assim o poste auxiliar tem que conter os *n-1* discos.

Conclui-se pois que a primeira etapa da resolução do problema 2.1 consiste em transferir n-1 discos (de forma recorrente) do poste inicial para o poste auxiliar utilizando o poste final como poste auxiliar.

É agora possível mover directamente o disco n do poste inicial para o poste final.

Finalmente é necessário transferir (de forma recorrente) os *n-1* discos do poste auxiliar para o poste final, utilizando o poste inicial como auxiliar.

As considerações anteriores podem ser resumidas no algoritmo seguinte:

Algoritmo 2.1 *Torres de Hanoi (Problema 2.1)*

Hanoi(n, posteInicial, posteAuxiliar, posteFinal)
Se n = 1
Então MoveDisco(1, posteInicial, posteFinal)
senão Hanoi(n-1, posteInicial, posteFinal, posteAuxiliar)
MoveDisco(n, posteInicial, posteFinal)
Hanoi(n-1, posteAuxiliar, posteInicial, posteFinal).

Seja *T(n)* o número de movimentos necessários para resolver o puzzle de n discos. Pelo algoritmo anterior, *T(n)* é dado pela seguinte fórmula recorrente:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & se \;\; n = 1, \\ 2T(n-1) + 1 & se \;\; n > 1. \end{cases}$$

Explicitando a fórmula anterior, conclui-se que o número de movimentos necessários para resolver o problema das Torres de Hanoi com n discos é $T(n)=2^n-1$, para $n \geq 1$.

Podemos agora verificar que na lenda das Torres de Brahma, por mais rápidos que sejam os sacerdotes a movimentar os discos, digamos ao ritmo de um disco por segundo, ainda teremos que aguardar algum(!) tempo para que o mundo se desvaneça em pó (2^{64}-1 segundos, ou seja, cerca de 584942417 milénios).

3. Uma solução Prática

O algoritmo apresentado, apesar da sua simplicidade, não é prático. De facto, qualquer pessoa sentiria dificuldade em resolver o puzzle seguindo o algoritmo recorrente. Vamos explicar como é que este se resolve na prática, começando por analisar quantas vezes se move cada um dos discos:

O disco n move-se apenas 1 vez (do poste inicial para o poste final). O disco $n-1$ tem de se mover o dobro das vezes que o disco n se move, isto é 2 vezes (uma para sair de cima do disco n e outra para voltar para cima do disco n). Analogamente, o disco $n-2$ tem de se mover o dobro das vezes que o disco $n-1$ se move, ou seja, 4 (uma para sair de cima do disco $n-1$ e outra para voltar para cima do disco $n-1$, isto repetido tantas vezes quantas o disco $n-1$ se tem que mover).

Continuando este processo, facilmente se conclui que o menor dos discos, o disco 1, se move o dobro das vezes do disco 2 ou seja 2^{n-1} vezes.

Note-se que estes valores são todos potências de 2, que a soma do número de movimentos dos discos n, $n-1$, ..., 2 é $2+2^2+\ldots+2^{n-2}=2^{n-1}-1$, precisamente menos uma unidade que o número de movimentos do disco mais pequeno e a soma total de movimentos é $2^{n-1}-1+2^{n-1}=2^n-1$ (ver a figura 2).

$$\begin{array}{rll}
1 & = 2^0 & \text{(disco } n\text{)} \\
10 & = 2^1 & \text{(disco } n\text{-}1\text{)} \\
100 & = 2^2 & \text{(disco } n\text{-}2\text{)} \\
1000 & = 2^3 & \text{(disco } n\text{-}3\text{)} \\
\ldots & & \\
\underline{+1000\ldots00000} & = 2^{n-1} & \text{(disco 1)} \\
1111\ldots11111 & = 2^n-1 & \\
\underline{\qquad\qquad +1} & & \\
10000\ldots00000 & = 2^n &
\end{array}$$

Figura 2: O número de movimentos da Torre de Hanoi com n discos, em binário.

Inicialmente temos que mover o disco 1 para a torre destino (no caso *n* ímpar) ou para a torre auxiliar (no caso *n* par). Em seguida temos que mover alternadamente um dos outros e o disco 1.

De facto, em cada passo da resolução do puzzle das Torres de Hanoi estaremos em uma das duas situações seguintes:

> Se no passo anterior o disco movido foi o disco mais pequeno (o disco 1), então não devemos movê-lo novamente porque senão estaríamos a voltar ao passo anterior ou poderíamos ter alcançado o mesmo resultado com um só movimento. Assim, só podemos mover um dos outros discos (o mais pequeno dos que estão no topo dos outros postes) para o poste em que não se encontra o disco 1.

> Se no passo anterior o disco movido não foi o mais pequeno, então agora teremos que o mover. Neste caso existem dois postes onde é possível colocar o disco 1. Denominem-se os três postes por *A*, *B*, *C* e considere-se que $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ é sentido dos ponteiros do relógio. No caso de o número total de discos ser par, o disco 1 desloca-se para o poste seguinte no sentido dos ponteiros do relógio. No caso de *n* ser ímpar, o disco 1 desloca-se para o poste seguinte no sentido contrário aos ponteiros do relógio.

4. O Algoritmo Iterativo

Qualquer algoritmo recorrente pode ser escrito numa forma não recorrente utilizando o método geral de eliminação de recorrência descrito em vários livros de Algoritmos e Estruturas de Dados [12], [4].

No entanto é preferível tentar tirar partido das propriedades específicas do problema em causa, por forma a obter um algoritmo não recorrente tão eficiente quanto possível.

De entre os inúmeros autores que têm abordado este problema, como Dijkstra, Hayes ou Walsh, consideramos a solução devida a M. C. Er [3] que utiliza uma curiosa relação entre os movimentos dos discos nas Torres de Hanoi e os números binários (e que resulta directamente da solução apresentada anteriormente):

Um problema que surge de imediato quando se tenta resolver o puzzle das Torres de Hanoi é decidir, em cada iteração, qual dos discos mover. Nesse sentido, designe-se por H(n) a sequência de movimentos de discos realizada para transferir uma torre de *n* discos do poste inicial para o poste final. Tem-se

$$\mathrm{H}(n)=\mathrm{H}(n-1)n\mathrm{H}(n-1)$$

e

$$\mathrm{H}(1)=1.$$

Explicitamente, para mover uma torre de *n* discos, movem-se os primeiros *n*-1 discos (para o poste auxiliar), em seguida move-se o disco *n* (do poste inicial para o final) e finalmente movem-se os *n*-1 discos (para o poste final).

Seja agora *B(n)* a sequência de 2^n -1 elementos cuja *i*-ésima componente é a representação binária, em *n* bits, do número *i*. Seja ainda *R(B(n))* a sequência de 2^n-1 elementos cujo *i*-ésimo elemento é o índice do dígito 1 mais à direita na representação binária de *i*. Denotem-se por 0*B*(*n*-1) e 1*B*(*n*-1) as sequências de 2^{n-1}-1 elementos em que a *i*-ésima componente é a *i*-ésima componente de *B*(*n*-1) precedida por 0, respectivamente, 1. Finalmente, seja *Z*(*n*-1) a sequência binária constituída por *n*-1 zeros.

É fácil verificar que (ver figura 3)

$$B(n)= 0B(n-1),1Z(n-1),1B(n-1)$$

e que

$$B(1)=1.$$

$$B(n)\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\mathbf{0}\ \ 001\\ \mathbf{0}\ \ 010\\ \mathbf{0}\ \ 011\\ \mathbf{0}\ \ 100\\ \mathbf{0}\ \ 101\\ \mathbf{0}\ \ 110\\ \mathbf{0}\ \ 111\end{array}\right\} B(n-1)\\ \left.\mathbf{1}\ \ \mathbf{000}\right\} Z(n-1)\\ \left.\begin{array}{l}\mathbf{1}\ \ 001\\ \mathbf{1}\ \ 010\\ \mathbf{1}\ \ 011\\ \mathbf{1}\ \ 100\\ \mathbf{1}\ \ 101\\ \mathbf{1}\ \ 111\end{array}\right\} B(n-1)\end{array}\right.$$

Figura 3: A sequência $B(n) = (1, 2, \ldots, 2^n\text{-}1)$, em binário, para n=4.

A relação entre estas sequências binárias e os movimentos das Torres de Hanoi é estabelecida pelo seguinte teorema:

Teorema 4.1 (Er)
$H(n)=R(B(n))$.

O teorema anterior permite concluir que na *i*-ésima iteração o número do disco a mover é dado pela posição do dígito 1 mais à direita na representação binária de *i*.

Resta decidir ainda para que poste é que se move o disco em cada iteração. Considere-se que $A \to C \to B \to A$ é o sentido dos ponteiros do relógio e que $A \to B \to C \to A$ é o sentido oposto, onde *A*, *B*, *C* designam os três postes do puzzle. Er [3] demonstrou que todos os discos ímpares se movimentam num sentido, enquanto os discos pares se movimentam em sentido contrário. O sentido do movimento depende apenas do número total de discos e do poste inicial e final, segundo a regra:

Se o número de discos n é ímpar o poste destino é o seguinte ao poste de partida no sentido dos ponteiros do relógio, caso contrário o poste destino é o seguinte ao poste de partida no sentido contrário aos ponteiros do relógio.

Como síntese, apresentamos uma implementação das ideias anteriores na linguagem *C*:

Algoritmo 4.1 *Torres de Hanoi (versão iterativa binária)*

```
HanoiBinario(int n, char inicial, char final)
{ int limite, i, x, dir;
  for (i=1;i<=n;i++)
   P[i]=inicial;
   dir=(n&1)!=(final-inicial ==1 || final-ini-
         cial==-2);
    limite=(1<<n)-1;
    for(x=1;x<=limite;x++){
      i=0;
      while(!(x>>i&1)) i++;
        printf(“mover o disco %d “, ++i);
        printf(“de %c “, P[i]);
        printf(“para %c\n”,
             P[i]=’A’+(P[i]-’A’+1+(i&1?dir:1-
                    dir))%3);
    }
}
```

5. Curiosidades, Variações e Generalizações

5.1 Hanoi e Sierpinski

Uma propriedade interessante das Torres de Hanoi surge quando se representam graficamente as configurações possíveis do problema.

Dados *n* discos, consideram-se as sequências ordenadas, denominadas configurações, $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ em que $d_i \in \{A, B, C\}$ indica o poste no qual se encontra o disco *i*. A cada uma dessas sequências associa-se o vértice de um grafo. Existe uma aresta entre dois vértices se e só se for possível passar de uma configuração a outra, sem violar as regras referidas no problema 2.1.

As figuras 4 e 5 ilustram os grafos que se obtêm com 1, 2 e 3 discos, respectivamente.

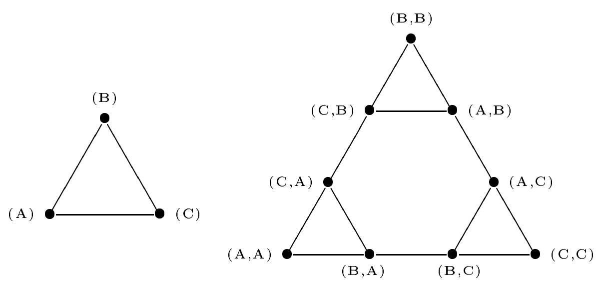


Figura 4: Representação do problema das Torres de Hanoi com 1 e 2 discos.

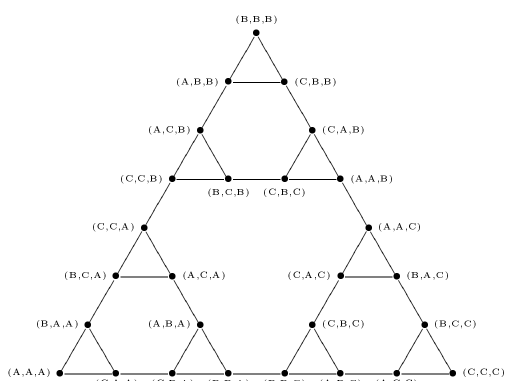


Figura 5: Representação do problema das Torres de Hanoi com 3 discos.

Para um único disco, existem apenas três configurações possíveis: (A), (B) e (C), correspondentes ao poste onde o (único) disco 1 pode estar colocado. Para 2 discos já existem 9 configurações possíveis em que, por exemplo, (B,C) significa que o disco 1 está no poste B e o disco 2 está no poste C. Note-se que o grafo contém apenas configurações possíveis, ou seja, (C,C) corresponde à configuração em que os dois discos estão colocados no poste C e com o disco 1 sobre o disco 2.

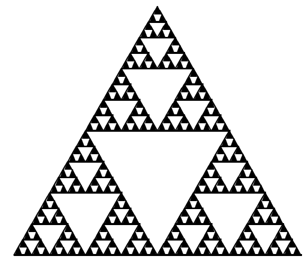


Figura 6: Representação gráfica da curva de Sierpinski.

Como se pode observar nas figuras existe uma semelhança entre os grafos da Torre de Hanoi e a famosa curva de Sierpinski (figura 6). No contexto dos espaços métricos, com a distância de Hausdorff, é possível mostrar que, mantendo constante o tamanho do lado do triângulo exterior, a sequência de grafos de configurações tende para a curva de Sierpinski à medida que n aumenta.

5.2 As Torres de Hanoi Cíclicas

Esta variação do problema das Torres de Hanoi foi inventada em 1981 por Atkison [1] numa tentativa de elaborar um problema que não apresentasse uma solução iterativa simples.

No entanto não demorou muito para que surgissem publicadas soluções iterativas eficientes, o que não diminui a beleza do problema como se pode constatar pela simplicidade da solução recorrente que passamos a analisar.

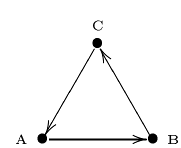


Figura 7: O sentido do movimento dos discos no problema das Torres de Hanoi Cíclica.

Neste puzzle consideram-se os três postes dispostos num triângulo de vértices A, B, C (ver figura 7). Os discos apenas podem ser movidos no sentido contrário aos ponteiros do relógio: de A para B, de B para C ou de C para A.

A solução apresentada por Atkinson é constituída por dois procedimentos recorrentes, denominados "longo" e "curto" que resolvem, respectivamente, os problemas de deslocar *n* discos no sentido dos ponteiros do relógio e deslocar *n* discos no sentido inverso:

Algoritmo 5.1 *Torres de Hanoi Cíclicas*

curto(n);	*longo(n);*
Se n > 0	*Se n > 0*
então longo(n-1);	*então longo(n-1);*
moveDisco(n);	*moveDisco(n);*
longo(n-1).	*curto(n-1);*
	moveDisco(n);
	longo(n-1);

Se denotarmos por $C(n)$ e $L(n)$ o número de movimentos realizados, respectivamente, pelos procedimentos *curto* e *longo*, concluímos que

$$\begin{cases} C(n) = 2L(n-1)+1 & \text{se } n \geq 1 \\ C(0) = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} L(n) = 2L(n-1)+C(n-1)+2 & se\ n \geq 1 \\ L(0) = 0. \end{cases}$$

Demonstra-se que a solução do sistema de equações lineares anteriores é

$$C(n) = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n - 1, \ \ n \geq 0 \ (1)$$

$$L(n) = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n - 1, \ n \geq 0. \ (2)$$

Segundo Stockmeyer [11], a prova de que estes procedimentos produzem o número mínimo de movimentos não foi apresentada por Atkinson, talvez pensando que tal seria evidente. Stockmeyer demonstra que para além do número mínimo de movimentos, a sequência originada por aqueles procedimentos é única, no sentido de que qualquer algoritmo que resolva o problema no número mínimo de movimentos, gera a mesma sequência de movimentos.

5.3 Torres de Hanoi em grafos

O puzzle das Torres de Hanoi cíclicas abordado na secção anterior pode ser generalizado para um qualquer grafo fortemente conexo, $G=(V,E)$, com $|V|=3$ vértices.

Os vértices do grafo correspondem aos postes que denotaremos por *A*, *B* e *C*. Vamos considerar que inicialmente os *n* discos se encontram no poste *A* e que se pretende transportá-los para o poste *B*.

Para além das restrições do problema clássico das Torres de Hanoi, só é possível mover um disco do poste *i* para o poste *j*, se $(i,j) \in E$.

Deixamos ao cuidado do leitor verificar (por indução) que o algoritmo *puzzle*3 a seguir apresentado resolve o problema para qualquer grafo nas condições acima enunciadas. Nesse algoritmo a função *auxiliar* serve apenas para seleccionar o poste *k*, diferente dos postes *i* e *j*, por exemplo, o poste *C* se os postes *i* e *j* são *A* e *B*.

Algoritmo 5.2 *Torres de Hanoi em grafos conexos com 3 vértices*

```
puzzle3(i,j,n);

Se n > 0
então  k ← auxiliar(i,j)
       se (i,j) ∈ E
       então puzzle3(i,k,n-1);
             moveDisco(n,i,j);
             puzzle3(k,j,n-1)

       senão puzzle3(i,j,n-1);
             moveDisco(n,i,k);
             puzzle3(j,i,n-1);
             moveDisco(n,k,j);
             puzzle3(i,j,n-1).
```

Seja $N(i, j, n)$ o número de movimentos realizados pelo algoritmo *puzzle3* ao transferir n discos dos poste i para o poste j. Se k é o poste auxiliar então é fácil verificar que

$$N(i,j,n) = \begin{cases} N(i,k,n-1) + N(k,j,n-1) + 1 & se (i,j) \in E \\ 2N(i,j,n-1) + N(j,i,n-1) + 2 & se (i,j) \notin E \end{cases}$$

Pode demonstrar-se que $N(i, j, n)$ é o número mínimo de movimentos suficientes para transferir a pilha de n discos do poste i para o poste j. Assim o algoritmo *puzzle3* constitui uma solução óptima para o problema em causa.

Vamos passar agora a descrever de forma abreviada como se podem obter explicitamente os valores $N(i, j, n)$ como função de n:

Considere-se $\alpha_{i,j}(n)= N(i,j,n)$, para $i, j \in \{A, B, C\}$, $i \neq j$ e k o poste auxiliar. O problema resume-se a determinar a solução de um sistema de 6 fórmulas recorrentes do tipo

$$\alpha_{i,j}(n) = \begin{cases} \alpha_{i,k}(n-1) + \alpha_{k,j}(n-1) + 1 & se\ \ (i,j) \in E \\ 2\alpha_{i,j}(n-1) + \alpha_{j,i}(n-1) + 2 & se\ \ (i,j) \notin E. \end{cases}$$

Multiplicando as equações do sistema por x^n, considerando a soma para todos os valores de n, definindo as funções geradoras

$$f_{i,j}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,j}(n) x^n ,$$

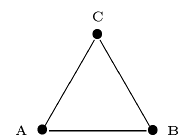
e notando que $\alpha_{i,j}(0)= 0$, obtém-se um sistema equivalente de 6 equações da forma:

$$\begin{cases} f_{i,j}(x) - x f_{i,k}(x) - x f_{k,j}(x) = \dfrac{x}{1-x} & se(i,j) \in E \\ (1-2x) f_{i,j}(x) - x f_{j,i}(x) = \dfrac{2x}{1-x} & se(i,j) \notin E \end{cases}$$

Resolvendo o sistema em relação às incógnitas $f_{i,j}(x)$, $i, j \in \{A, B, C\}$, $i \neq j$, obtêm-se, de forma explícita, as funções geradoras $f_{i,j}$. Finalmente, os valores $N(i, j, n)$ não são mais que os coeficientes da série de Laurent para $f_{i,j}$.

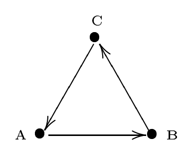
É claro que o processo que descrevemos, é moroso e envolve manipulações algébricas bastante complexas. No entanto utilizando software que permita o cálculo simbólico, p. ex., o sistema Mathematica [8], é possível obter as seguintes conclusões sobre os grafos fortemente conexos de três vértices, não isomorfos:

Grafo 1



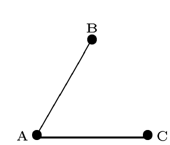
Este é o problema original das Torres de Hanoi e facilmente se conclui que o número de movimentos é, em qualquer caso, 2^n-1.

Grafo 2



Este é o grafo do problema das Torres de Hanoi Cíclicas, referido anteriormente. Como seria de esperar, os valores para $N(i,j,n)$ são dados por (1) e (2), para os dois tipos de movimentos distintos.

Grafo 3

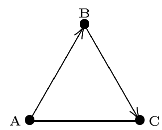


Para este grafo conclui-se que existem dois tipos de movimentos:

$$N(A, B, n)=N(B, A, n)=N(A, C, n)=N(C, A, n) = \frac{3^n - 1}{2};$$

$$N(B, C, n)=N(C, B, n)= 3^n -1.$$

Grafo 4



Neste caso temos

$N(A, B, n) = N(B, C, n) =$

$$= \frac{-3}{4} - \frac{11-3\sqrt{17}}{8\sqrt{17}}\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^{n} + \frac{11+3\sqrt{17}}{8\sqrt{17}}\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^{n};$$

$N(C, A, n) =$

$$= \frac{-3}{2} - \frac{4-\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^{n} + \frac{4+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^{n} \text{para } n\geq 1;$$

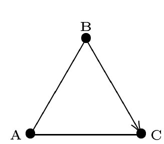
$N(C, B, n) = N(B, A, n) =$

$$= \frac{-5}{4} - \frac{21-5\sqrt{17}}{8\sqrt{17}}\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^{n} + \frac{21+5\sqrt{17}}{8\sqrt{17}}\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^{n};$$

$N(A, C, n) =$

$$= \frac{-1}{2} - \frac{5-\sqrt{17}}{4\sqrt{17}}\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^{n} + \frac{5+\sqrt{17}}{4\sqrt{17}}\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^{n}.$$

Grafo 5



Aqui as funções geradoras de $f_{i,j}(x)$ são funções racionais de denominador $2x^3-4x^2-x+1$. Os coeficientes $\alpha_{i,j}(n)$ são expressões complexas, para as quais não se conhece uma representação simples. Aqui existem quatro tipos de movimentos distintos, sendo $N(A, B, n) = N(C, A, n)$ e $N(A, C, n) = N(B, A, n)$. Simulações efectuadas, sugerem que a ordem de complexidade da solução é, em qualquer caso, aproximadamente $(2.14)^n$.

Na tabela 1 pode consultar os valores de $N(i, j, n)$ para diversos valores de n.

n	$N(A, B, n)$	$N(A,C,n)$	$N(B,C,n)$	$N(C,B,n)$
1	1	1	1	2
2	4	3	3	7
3	11	8	7	19
4	28	19	17	47
5	67	46	39	113
6	160	107	93	267
7	375	254	215	629
8	884	591	509	1475
9	2067	1394	1183	3461
10	4856	3251	2789	8107

Tabela 1: O número de movimentos realizados pelo algoritmo *puzzle3* com o grafo 5.

5.4 Torres de Hanoi com 4 postes

A primeira versão das Torres de Hanoi com 4 postes, surgiu no livro de Henry Dudeney, *The Canterbury Puzzles* [2], sob a forma de um desafio que consistia em mover uma pilha de queijos de vários tamanhos colocados na primeira de quatro mesas, para uma das outras, sem colocar um queijo maior sobre um menor.

O puzzle foi publicado posteriormente na Revista *American Mathematical Monthly* [9], em 1939, generalizado para um número arbitrário de postes, sob a designação de *Problema 3918*.

Várias propostas de resolução foram apresentadas, sem contudo ter sido demonstrada a sua optimalidade.

Um dos algoritmos mais conhecidos, baseia-se num parâmetro i, com $1\leq i \leq n$, e consiste nos seguintes passos:

1. Transferir a pilha dos n - i menores discos do primeiro poste para um poste auxiliar, usando os quatro postes no processo;
2. Transferir a pilha dos restantes i discos do primeiro pos-

te para o poste destino, utilizando o algoritmo original das Torres de Hanoi com 3 postes (ignorando o poste que contém os *n-i* discos mais pequenos);

3. Transferir os *n-i* discos mais pequenos do poste auxiliar para o poste final, utilizando novamente os quatro postes no processo.

Demonstra-se que se n é um número triangular[1] t_k, então a escolha óptima para i é i=k. Mais, se $t_{k-1} < n < t_k$ então tanto $k-1$ como k são valores óptimos para o parâmetro i.

Note-se que está demonstrado apenas que entre todos os valores possíveis para o parâmetro *i*, os referidos anteriormente são os que minimizam o número de movimentos para aquele algoritmo. Não se tem conhecimento se o algoritmo óptimo tem a forma apresentada, o que constitui a chamada conjectura de Frame-Stewart, em homenagem aos primeiros autores a apresentarem aquele algoritmo.

Quanto ao número de movimentos realizados por este algoritmo, Stockmeyer [10], provou que é da ordem de $\sqrt{n}.2^{\sqrt{2n}}$.

Por fim, têm aparecido várias propostas de resolução da versão cíclica do problema das Torres de Hanoi com 4 postes, mas todos os algoritmos apresentados falham a optimalidade, sendo este mais um problema em aberto.

Referências

[1] M. D. Atkison. The Cyclic Towers of Hanoi. *Information Processing Letters*, (13): 118-119,1981.

[2] H. E. Dudeney. *The Canterbury Puzzles*. Thomas Nelson & Sons, London, 1907.

[3] M. C. Er. Performance evaluations of recursive as iterative algorithms for the towers of Hanoi problem. *Computing*, (37): 93-102, 1986.

[4] Helman and R. Veroff, *Intermediate Problem Solving and Data Structures: Walls and Mirrors*, Benjamin-Cummings, 1986.

[5] R. D. Hofstadter. Metamagical themas. *Scientific American*, 2(248): 16-22, Março 1983.

[6] É. Lucas. Nouveaux jeux scientifiques. *La Nature*. 17:301-303, 1889.

[7] É. Lucas. Récréations mathemátiques, 1893. Reeditado diversas vezes por Albert Blanchard, Paris.

[8] Mathematica. WolFram Research, http://www.wolfram.com.

[9] B. M. Stewart. Advanced Problem 3918. *American Mathematical Monthly*, 1939.

[10] P. K. Stockmeyer. Variations on the four-post tower of Hanoi puzzle. *Congressus Numerantium*, pages 3-12, 1994.

[11] P. K. Stockmeyer. The average distance between nodes in the cyclic towers of Hanoi digraph. *Graph Theory, Combinatorics, Algorithms, and Applications*, 1996.

[12] N. Wirth. *Algorithms + Data Structures = Programs*. Prentice-Hall, 1976.

[1] $t_k = \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$

Gödel em Princeton

Alguma coisa pensa em
si própria em mim.
Em algum tempo ou em algum lugar
alguma coisa é real, pensando.

Às vezes quase lhe toco
quando não me perturbam os meus pensamentos.
E talvez quando faço
sem dar por isso os gestos de todos os dias
talvez então esteja muito perto sem o saber.

E alguém me leve pela mão por uma realidade
feita da minha vida e de coisas reais
a que pertencemos eu e o que pensa.

Manuel António Pina,
in "Poesia Reunida", Assírio & Alvim, 2001.
(publicação gentilmente autorizada pelo autor)

Resolução do Problema das Torres de Hanoi através de um Conjunto de Regras Simples

Gustavo Ribeiro Alves
Departamento de Engenharia Electrotécnica, Instituto Superior de Engenharia do Porto

Este artigo descreve um método de resolução do problema das Torres de Hanoi, não baseado na recursividade. O objectivo principal consiste em mostrar que, qualquer que seja a situação colocada a um jogador (no início do problema ou a meio), desde que este saiba qual foi a jogada anterior, poderá sempre acabar o jogo, seguindo um princípio de efectuar a única jogada que não viola um conjunto de regras a enunciar em seguida. Este método aproxima-se mais da forma de pensar humana (afastando-se assim do método de resolução computacional clássico que faz uso da recursividade[1]) que, para cada instante, empreende uma acção que resulta da aplicação de um conjunto limitado de regras simples:

1. Os números devem estar sempre em ordem crescente, quando lidos de cima para baixo, ou seja um determinado número não deverá estar colocado em cima de um outro qualquer número que lhe seja superior. Exemplo: o número 1 poderá estar em cima do 2 ou 3, e o número 2 poderá estar em cima do 3, ou 4, mas nunca em cima do 1. Esta regra faz parte do próprio jogo das Torres de Hanoi.
2. Não se deve desfazer a jogada anterior. Ou seja, se a jogada anterior for a transferência do 1 (que suponhamos estava colocado em cima do 2) para cima do 4, a jogada actual não poderá ser a transferência do 1 (agora colocado em cima do 4) para cima do 2, uma vez que isso corresponderia a desfazer a jogada anterior.
3. Os números deverão estar sempre colocados numa sequência do tipo PAR - ÍMPAR ou ÍMPAR - PAR, nunca do tipo PAR - PAR ou ÍMPAR - ÍMPAR. Exemplo: o 1 pode estar colocado sobre o 2, 4, ou outro qualquer número par (uma vez que 1 é ímpar), mas nunca sobre o 3, ou outro qualquer número ímpar.
4. As bases, ou pilares, deverão ser igualmente numeradas de forma crescente, a começar pela base onde está a pilha inicial, que deverá receber o número seguinte ao do último disco da pilha.

Para exemplificar a aplicação destas regras, vamos transferir uma torre com três discos (numerados de 1 a 3) colocada numa base (número 4), para uma outra base (número 6). A terceira base, que no nosso exemplo estará ao centro, recebe o número 5. Partindo assim da situação ilustrada na tabela 1.a) e utilizando as três primeiras regras, chegamos a uma única jogada, de duas possíveis:

- mover 1 para cima de 5 (viola a regra 3), ou
- mover 1 para cima de 6 (efectuada).

A situação resultante corresponde à tabela 1.b), onde mais uma vez podemos efectuar uma única jogada, agora de quatro possíveis:

- mover 1 para cima de 2 (viola a regra 2),
- mover 1 para cima de 5 (viola a regra 3),

[1] Ou seja, dada a forma de mover uma torre com dois discos, a resolução do problema de mover uma torre com três discos consiste em: a) mover uma torre com dois discos para cima de uma base vazia; b) mover o disco 3 para cima da outra base vazia; c) mover outra vez a torre com dois discos para cima do disco 3. A resolução do problema de mover uma torre com quatro discos recorre ao método de resolução anterior, pelo que se utiliza assim a expressão de método recursivo.

- mover 2 para cima de 1 (viola a regra 1), ou
- mover 2 para cima de 5 (efectuada).

A tabela 1.c) corresponde ao resultado da aplicação das regras enunciadas, à situação ilustrada na tabela 1.b). Analisando agora a situação descrita em 1.c), deparamo-nos com seis hipóteses (o máximo possível), das quais só uma não viola as regras enunciadas, ou seja:

- mover 3 para cima de 2 (viola a regra 1),
- mover 3 para cima de 1 (viola a regra 1),
- mover 2 para cima de 3 (viola a regra 2),
- mover 2 para cima de 1 (viola a regra 1),
- mover 1 para cima de 3 (viola a regra 3), ou
- mover 1 para cima de 2 (efectuada).

Assim a tabela 1.d) corresponde à execução da única jogada válida para a situação ilustrada em 1.c). Repetindo este mesmo raciocínio de execução da única jogada que não viola nenhuma regra, facilmente se chega à solução do problema inicial, ilustrada na tabela 1.h). Para o caso de uma torre com quatro discos apresenta-se a solução ilustrada pelas tabelas 2.a) a 2.r).

Tabela 1: Exemplo da resolução de uma Torre de Hanoi com três discos.

1		
2		
3		
4	5	6

a)

2		
3		1
4	5	6

b)

3	2	1
4	5	6

c)

	1	
3	2	
4	5	6

d)

	1	
	2	3
4	5	6

e)

1	2	3
4	5	6

f)

		2
1		3
4	5	6

g)

		1
		2
		3
4	5	6

h)

Tabela 2: Exemplo da resolução de uma Torre de Hanoi com quatro discos.

1		
2		
3		
4		
5	6	7

a)

2		
3		
4	1	
5	6	7

b)

3		
4	1	2
5	6	7

c)

3		1
4		2
5	6	7

d)

		1
4	3	2
5	6	7

e)

1		
4	3	2
6	7	5

f)

1	2	
4	3	
5	6	7

g)

	1	
	2	
4	3	
5	6	7

i)

	1	
	2	
	3	4
6	7	5

j)

	2	1
	3	4
5	6	7

l)

		1
2	3	4
5	6	7

m)

1		
2	3	4
6	7	5

n)

1		3
2		4
5	6	7

o)

		3
2	1	4
5	6	7

p)

		2
		3
	1	4
6	7	5

q)

		1
		2
		3
		4
5	6	7

r)

Apologia da Estatística
(A Pretexto da Seriação das Escolas Secundárias)

Dinis Duarte Pestana
Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa

> "Some people hate the very name of statistics, but I find them full of beauty and interest. Whenever they are not brutalized, but delicately handled by the higher methods, and are warily interpreted, their power of dealing with complicated phenomena is extraordinary. They are the only tools by which an opening can be cut through the formidable thicket of difficulties that bars the path of those who pursue the Science of man."
>
> F. Galton, *Natural Inheritance*

1. Qualidade do Ensino e Seriação das Escolas

> If an unfriendly foreign power had attempted to impose on America the mediocre educational performance that exists today, we might well have viewed it as an act of war.
>
> *The National Comission on Excellence in Education*

É hoje lugar comum considerar que a maior riqueza de um país é a sua população, e que o empreendimento humano de maior retorno é educação/investigação. Os países que escaparam ao subdesenvolvimento são os que nos fins do século XIX investiram na alfabetização e educação. Tal como o presente é um resultado de investimentos em fins do século XIX e princípios do século XX, é no presente que o futuro se joga, nomeadamente nos investimentos feitos em ciência e tecnologia (que, sabe-se também, são efémeros se não forem alicerçados por um investimento forte e consistente em ciência fundamental).

A qualidade do ensino é, naturalmente, uma das fundações sobre que se constrói o futuro. Há alguns anos atrás o Japão justificou as suas políticas de comércio internacional, e nomeadamente a baixa taxa de importação de bens dos EUA, referindo a sua deficiente qualidade, e invocando que a escolaridade dos alunos dos Estados Unidos é muito inferior à dos alunos do Japão, bem como os níveis de exigência em educação, do que decorre que a atitude dos profissionais japoneses face a políticas de controlo de qualidade global é mais consciente e responsável. Claro que o Japão nunca se deu ao trabalho de comentar publicamente o que pensa da educação em Portugal, mas podemos imaginar…

Os alunos - e os pais dos alunos - portugueses parecem estranhamente adormecidos para as realidades de um espaço europeu, em que há mobilidade e o preenchimento dos lugares não irá privilegiar o local do nascimento. Ocasionalmente os jornais exploram os aspectos mediáticos de situações tais como professores espanhóis serem docentes em escolas primárias portuguesas, apelando mais à rejeição (ilegal, face aos tratados que assinámos e ratificámos) do que ao despertar para a realidade que espera as gerações futuras: uma competição feroz com profissionais de uma União Europeia cada vez mais alargada, com sistemas educativos mais consolidados e controlados, e em que o desemprego é uma realidade persistente.

Saudamos por isso naturalmente todas as iniciativas tendentes a melhorar o estado das coisas. Recentemente o Ministério da Educação encomendou à Universidade Nova de Lisboa - Faculdade de Ciências Sociais e Humanas uma *Proposta de Seriação das Escolas do Ensino Secundário (Ano Lectivo de 2001/2002),* elaborada por Grácio *et al.* (2002), que se inscreve neste propósito, e que teve larga divulgação mediática. As conclusões do estudo dificilmente poderiam gerar consenso, e Grácio *et al.* (2002, p. 12-13) são os primeiros a anotar alguns aspectos controversos, decorrentes das limitações no acesso à informação, embora concluam afirmando (Grácio *et al.,* 2002, p. 13) que *"o método adoptado é mil vezes preferível a fornecer simplesmente ao público os dados em bruto, convidando à sua organização pelo seu valor facial, e à consequente imagem profundamente distorcida e injusta do trabalho das escolas e dos seus profissionais"*.

Alguns comentadores, distanciando-se naturalmente da metodologia adoptada e das conclusões, que consideraram provisórias, não deixaram de referir o salto qualitativo que é começar a estudar os problemas com metodologias científicas. Nuno Crato, identificado num telejornal como representante da Sociedade Portuguesa de Matemática, ao ser questionado sobre a oportunidade da divulgação das conclusões do estudo, voltou a pergunta ao contrário: "E porque não divulgar?", pondo a tónica na necessidade de conhecimento factual. Marcelo Rebelo de Sousa, na sua intervenção num telejornal de 2002/10/13, apontou também deficiências várias, nomeadamente modelar em bloco (isto é, calcular a mesma nota esperada para) todas as escolas de um concelho, quando por vezes - pense-se em Lisboa - a diversidade de condições sociais em sub-zonas do concelho é enorme, mas também ele referiu a necessidade de progredir de uma apreensão meramente qualitativa da realidade para uma investigação quantificada.

Posteriormente Nuno Crato, em artigo publicado no *Expresso* (2002-10-12), enunciou críticas severas ao trabalho da equipa da FCSH da UNL: inadequação e instabilidade dos modelos de *"baixos poderes explicativos, ainda por cima obtidos depois da discutível exclusão dos casos que mais se afastavam dos valores esperados pelo modelo"*, que exibem *"correlações espúrias"*, sendo o critério de seriação *"uma engenharia social paternalista* [… e] *tosca"*.

A seriação encomendada pelo Ministério da Educação baseia-se na diferença entre a classificação obtida em exame nacional e uma "classificação esperada" calculada como variável resposta a diversas variáveis sociológicas, usando regressão múltipla, uma das áreas mais usadas - e mais mal usadas - da Estatística, uma disciplina que, cada vez mais, faz parte do instrumental de qualquer trabalhador científico. Mas o deficiente uso da Estatística tem contribuído para o mau nome desta ciência, que de há muito é acusada de mentira superlativa (*"Lies, damned lies and Statistics",* uma frase que o humorista Mark Twain atribuíu a Disraeli, certamente para exemplificar o que são *damned lies:* ainda hoje muitos pensam que a frase se deve de facto a Disraeli).

Sendo um assunto de interesse geral, mas particularmente pertinente para todos os professores, procuramos repor o bom nome da Estatística referindo os cuidados com que deve ser usada.

Optamos por ir directos ao assunto, expondo na secção 2 como se procedeu à seriação das escolas, e as críticas inevitáveis ao trabalho de Grácio *et al.* (2002), deixando para a secção 3 uma exposição elementar do que é regressão e regressão múltipla, com uma discussão cuidadosa das razões pelas quais um valor $R^2 << 1$ nos deve levar a, prudentemente, abandonar um modelo tão pouco explicativo. Esta é, afinal, a mais severa crítica *estatística* que fazemos ao trabalho daqueles autores, juntamente com um reparo sobre confundimento. No plano do mero bom senso, criticamos também Grácio *et al.* (2002) por usarem como critério de seriação a diferença entre classificações nos exames nacionais e classificações estimadas pelos modelos, um critério disparatado mesmo no caso de os modelos serem excelentes, pois tenderia a penalizar os melhores e a beneficiar os piores.

2. Seriação das Escolas do Ensino Secundário (2001/2002)

A documentação divulgada por Grácio *et al*. (2002) é interessante, mas em alguns aspectos omissa, e noutros pouco crítica.

Comecemos pela descrição do que foi feito:

- Definiram-se variáveis principais
  - X_1 : indicador do poder de compra em cada concelho, com base em dados do INE em 2000;
  - X_2 : taxa de não escolarização no 12º ano, quociente entre a população de 17-18 anos não escolarizada no 12º ano e a população de 17-18 anos, por concelho;
  - X_3 : Número médio de anos de escolaridade da população em cada concelho, com base em dados do INE (recenseamento de 2001);
  - X_4 : uma variável muda classificando o estabelecimento de ensino como público ou privado.

Consideraram-se ainda variáveis de interacção entre os factores acima,

- X_{12} : interacção entre poder de compra e taxa de escolarização;
- X_{23} : interacção entre taxa de escolarização e taxa de não escolarização

e definiu-se o modelo geral de regressão múltipla

$$\hat{Y}=a+ b_1 X_1 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_{12} X_{12} + b_{23} X_{23}$$

onde a variável dependente *Y* é uma variável resposta que pretende ser a predição da nota esperada (num elenco de discipinas escolhidas, e que adiante se explicitam, e na média das disciplinas) de um aluno habitando naquele concelho.

Os coeficentes b_1, b_3, b_4, b_{12}, b_{23} traduzem a influência que as correspondentes variáveis independentes têm sobre a variável resposta.

Não é para nós claro por que razões a variável de primeiro nível X_2 não aparece no modelo. Porventura a metodologia de construção do modelo em cada caso, que adiante detalhamos, nunca levou à inclusão dessa variável, e no relatório final não foi incluída, por isso, no modelo geral.

- O cálculo do modelo em cada um dos casos considerados foi feito com recurso ao *package* estatístico *SPSS*. A inclusão das variáveis foi feita passo a passo (*forward*).

O relatório é naturalmente omisso nos detalhes técnicos, mas certamente houve uma inclusão hierarquizada variável a variável - isto é, em cada passo incluiu-se a variável com maior capacidade de melhorar o modelo, avaliando-se o incremento do poder explicativo que essa inclusão trazia ao modelo. Deixou de haver inclusão de variáveis quando a última inclusão tentada não produziu melhoria significativa, eliminando-se do modelo esta última variável.

Os resultados obtidos constam da tabela abaixo. Certamente a ordem em que as diversas variáveis de regressão aparecem tem que ver com a ,ordem em que foram incluídas no modelo.

São também indicados, em cada caso, os valores de R^2.

	Modelo seleccionado	R^2
Média das disciplinas	$\hat{Y}$=88.710+0.002 X_{12} +7.326 X_4	0.213
Biologia	$\hat{Y}_B$ =76.250+0.002 X_{12}+5.324 X_4 +1.637 X_3	0.216
Matemática	$\hat{Y}_M$=36.255+3.606 X_3 +4.208 X_4 +0.001 X_{12}	0.192
Sociologia	$\hat{Y}_S$ =107.400 + 0.003 X_{12}	0.133
Des. e Geom. Desc. A	$\hat{Y}_D$= 45.828+8.731 X_3	0.089
Química	$\hat{Y}_Q$=67.983+3.837 X_3 + 4.382 X_4	0.086
Português A	$\hat{Y}_P$ =97.660+0.002 X_{12}	0.055
História	$\hat{Y}_H$ =77.806+3.241 X_3	0.044
Inglês 6	$\hat{Y}_I$ =60.603+0.002 X_{12} +12.261 X_4+0.033 X_{23}	0.048
Filosofia	$\hat{Y}_F$ =107.491+0.001 X_{12}	0.018

A tabela acima foi transcrita da p. 15-16 de Grácio *et al.* (2002) [1]

[1] Fornecem também aqueles autores (p. 11) coeficientes estandardizados, que alguns preferem para efeitos de comparabilidade:

	Modelo seleccionado	R^2
Média das disciplinas	$\hat{Y}$=88.7+0.358 $\tilde{X}_{12}$ +0.240 $\tilde{X}_4$	0.213
Biologia	$\hat{Y}_B$ =76.3 +0.302 $\tilde{X}_{12}$+0.138 $\tilde{X}_4$ +0.140 $\tilde{X}_3$	0.216
Matemática	$\hat{Y}_M$ =36.3 +0.279 $\tilde{X}_3$ +0.098 $\tilde{X}_4$ +0.153 $\tilde{X}_{12}$	0.192
Sociologia	$\hat{Y}_S$ =107.4 + 0.365 $\tilde{X}_{12}$	0.133
Des. e Geom. Desc. A	$\hat{Y}_D$= 45.8+0.299 $\tilde{X}_3$	0.089
Química	$\hat{Y}_Q$ =68 + 0.263 $\tilde{X}_3$ + 0.091 $\tilde{X}_4$	0.086
Português A	$\hat{Y}_P$ =97.7+ 0.234 $\tilde{X}_{12}$	0.055
História	$\hat{Y}_H$ =77.8 +0.210 $\tilde{X}_3$	0.044
Inglês 6	$\hat{Y}_I$ =60.6 +0.126 $\tilde{X}_{12}$ +0.127 $\tilde{X}_4$+0.104 $\tilde{X}_{23}$	0.048
Filosofia	$\hat{Y}_F$ =107.5 +0.136 $\tilde{X}_{12}$	0.018

• Calcula-se então a nota média Y_i (onde $i \in \{ B, M, S, \ldots \}$) obtida pelos alunos da escola, no exame nacional, em cada uma das disciplinas, e determina-se a diferença $d_i = Y_i - \hat{Y}_i$ entre a classificação média observada e a classificação esperada (isto é, postulada pelo modelo). Estas diferenças são ordenadas decrescentemente, e disso resulta a seriação das escolas no que refere cada uma das nove disciplinas consideradas.

Procede-se analogamente para calcular a diferença no que refere médias das disciplinas das escolas, $Y - \hat{Y}$, sendo

$$Y = \frac{\sum_{j=1}^{N_d} Y_j}{N_d},$$

onde N_d representa o número de disciplinas de 12º leccionadas na escola, e Y_j é a classificação média nos exames na *j*-ésima dessas disciplinas (não há indicação de que se use depois uma ponderação nas fórmulas que tenha em conta o número muito desigual de alunos que se apresentam a exame nas diversas disciplinas), e $\hat{Y}$ é definida de forma análoga, usando as notas esperadas $\hat{Y}_i$ calculadas pelos modelos de regressão ajustados a cada uma delas.

Não conseguimos explicar aos leitores a que ponto as variáveis independentes são importantes, em absoluto, na composição desta "nota esperada", porque não é explícito que valores podem assumir, qual a escala em que cada variável independente foi registada. Não há, consequentemente, informação que nos permita ter uma ideia de como comparam com a ordenada na origem, a que ponto a podem alterar.

Para ser mais concreto: se cada uma das variáveis independentes (com excepção da *dummy* X_4 , de que consideramos o estado X_4=0) variar de -10 a 10, a nota esperada de Biologia pode ir de 76.25-0.02-16.37= 59.86 a 76.25+0.02+16.37=92.64; se variar de -5 a +5, pode ir de 76.25-(0.02+16.37)/2=68.06 a 76.25+(0.02+16.37)/2=84.455; se variar de -80 a 80, a nota esperada pode ir de 76.25-8(0.02+16.37)=-54.87 a 76.25+8(0.02 +16.37)=207.37. (Claro que nada obriga as diversas variáveis a tomarem valores nos mesmos intervalos.)

Recomendamos, naturalmente, a verificação das fontes— neste caso Grácio *et al.* (2002) - podendo assim o leitor fazer a sua própria leitura e interpretação. Até os autores manifestam algum desconforto com o estudo a que procederam, nomeadamente devido à falta de "*informação sobre o estado dos conhecimentos académicos dos alunos no âmbito de cada disciplina à entrada do 12º ano*", com o facto de calcularem a mesma nota esperada (por disciplina e média) para todas as escolas do mesmo concelho, o que "*não repercute portanto a própria variedade socio-cultural existente no interior do mesmo concelho*", ou haver "*escolas privadas em contrato de associação com o Ministério da Educação*". Esta descrição detalhada foi feita no intuito de facilitar a compreensão das críticas (que não insistem nestes pontos fracos que os autores já reconheceram) que seguem:

1. O critério de seriação é inadequado

Logo à cabeça, não podemos deixar de sublinhar um ponto que nos parece contestável à luz do senso comum, crítica que ainda por cima persistirá mesmo que os modelos adoptados para atribuição de uma nota esperada venham a tornar-se muito mais sofisticados: o critério de seriação adoptado pode ser traduzido por um aforismo apropriado para um inferno mais moderno do que o de Dante: *Aqui, os bons nada podem esperar, os maus nada têm a temer!*, em vez do dantesco "*Vós que entrais, abandonai toda a Esperança*".

Com o critério usado - desvio entre a nota média obtida pelos alunos da escola e a nota "esperada" calculada por um modelo - é obviamente mais provável que uma escola com má nota esperada seja seriada no topo (e dificilmente será seriada no fundo) do que uma escola que tenha uma nota esperada elevada, a qual provavelmente obterá um *rank* muito pouco agradável. Tomando as notas valores de 0 a 20, dificilmente uma escola em que a nota esperada é 19 poderá subir, dificilmente uma escola em que a nota esperada é 1 poderá descer.

Uma caricatura expressiva dos erros em que se incorre com a utilização de desvios deste tipo como base de seriação é a seguinte:

- Usa-se no papel de $\hat{Y}$ a nota de ingresso do último candidato admitido num curso universitário no concurso nacional, 1ª fase, há seis anos. Suponha-se, só a título de exemplo, que
  - Na Licenciatura em Matemática da Universidade A… foi 15.9.
  - Na Licenciatura em Matemática da Universidade B… foi 5.4.
- Usa-se no papel de Y a nota média de conclusão da licenciatura dos licenciados no ano passado. Continuando o exemplo,
  - Na Licenciatura em Matemática da Universidade A…, 13.7.
  - Na Licenciatura em Matemática da Universidade B…, 12.9.
- Atribuem-se pontuações Y- $\hat{Y}$, isto é, no caso destes cursos,
  - Na Licenciatura em Matemática da Universidade A..., —2.2.
  - Na Licenciatura em Matemática da Universidade B..., +7.5.

É óbvio que a Licenciatura em Matemática da Universidade B deve ser seriada muito acima da Licenciatura em Matemática na Universidade A, não é? A Licenciatura em Matemática da Universidade B atrai alunos menos qualificados, os que terminam a licenciatura fazem-no com médias mais baixas, mas que importam esses pormenores?

2. Os modelos usados são inadequados.

Cito, do clássico de Mendenhall and Sincich (1996, 5th ed., p. 191):

> *"R^2 is a sample statistic that represents the fraction of the sample variation of the y values (measured by SS_{yy}) that is attributable to the regression model. Thus, R^2=0 implies a complete lack of fit of the model to the data, and R^2 =1 implies a perfect fit, with the model passing through every data point. In general, the closer the value of R^2 is to 1, the better the model fits the data.*
>
> *To illustrate, the value R^2 =0.9377 in the immunoglobulin example […] implies that 93.8 % of the sample variation in IgG (y) is attributable to, or explained by, the independent variable maximal oxigen uptake (x). Thus R^2 is a sample statistic that tells how well the model fits the data, and thereby represents a measure of the utility of the entire model."*

Creio que não deixa dúvidas: qualquer dos modelos propostos por Grácio *et al.* (2002) é inadequado, grosseiramente inadequado, e não sei que interpretação dar à afirmação " *No caso da média de todas as disciplinas por escola compreende-se o poder explicativo elevado do modelo*" (Grácio *et al.,* 2002, p.11) quando o valor de R^2 é apenas 0.213.

A verdade é que os valores da estatística R^2 são todos excessivamente baixos (no melhor dos casos, Biologia, o modelo não consegue explicar mais do que 22 % da variância de Y — o que quer que isto queira dizer nesta situação tão bizarra - e, em 6 dos 10 casos estudados, menos de 10 %, baixando até aos 2 %), e qualquer utilizador de Estatística, face a estes valores, deveria procurar modelos alternativos.

Nestas condições, a eliminação dos casos que mais directamente questionavam o ajustamento (os *outliers*) torna-se suspeita. Consulte-se o clássico de Barnett e Lewis (1994), e a sua discussão do que é um *outlier.*

Aliás, simples reflexão leva-nos a questionar os modelos propostos. Por exemplo, sabendo-se que os encarregados de educação de alunos do 12º ano recorrem frequentemente à contratação de explicadores de Matemática, fará sentido um modelo em que a variável X_1 - *poder de compra em cada concelho* não aparece senão através da interacção X_{12}, que apenas é incluída na terceira iteração e com uma carga 0.001?

E que pensar do modelo $\hat{Y}_S$=107.400+0.003 X_{12} para a Sociologia? A Sociologia será uma área de estudo quase imune a variáveis sociais? (Como atrás comentámos, não sabemos qual a escala de variação de X_{12}, mas a sua influência no cálculo da nota esperada parece irrelevante). Comentários idênticos, naturalmente, para os modelos $\hat{Y}_P$ =97.660+0.002 X_{12} para Português A, e $\hat{Y}_F$ =107.491+0.001 X_{12} para Filosofia.

Em alguns modelos a variável muda X_4 tem uma preponderância que leva a reflexões hamletianas: *ser ou não ser privado, eis a questão….* Que estranho noutros casos nem sequer aparecer!

3. Justifica-se um modelo de regressão múltipla?

Não é uma questão académica. A regressão múltipla é uma área sofisticada da Estatística, com um desenvolvimento matemático rigoroso, que se apoia em pressupostos tais como gaussianidade (normalidade) dos dados, que dificilmente se aplicam quer a algumas das variáveis sociológicas usadas como regressores quer às notas dos exames nacionais (e neste caso não temos dúvidas, basta fazer um histograma). É uma questão demasiado técnica para poder ser abordada sucintamente, recomendamos aos interessados o Capítulo 6 *(Some Regression Pitfalls)* de Mendenhall and Sincich (1996).

Claro que há "Modelos Lineares Generalizados"; também neste caso há que começar por verificar se são usáveis com os dados disponíveis.

4. A seriação padece de confusão.

A meu ver, a inadequação dos modelos deveria ter levado ao seu abandono, como referido no ponto 2. Preferem Grácio *et al.* (2002, p. 4) concluir que a diferença entre a nota média obtida pelos alunos da escola e a nota calculada pelo modelo que propugnam "*é uma* aproximação *ao contributo das escolas para a aprendizagem dos alunos*.

Apesar do cuidadoso frasear (nomeadamente do termo *aproximação*, em itálico), que parece indicar que os autores têm algumas preocupações sobre *confundimento* (apesar de tal não ser arrolado nas interessantes notas críticas da Nota Final, pp.12-13), esta variável é usada para proceder à seriação das escolas.

Mas "*O alívio é irmão gémeo do desapontamento. Ambos se dizem do mesmo modo: pelo suspiro*"[2] Por isso, um suspiro não pode ser automaticamente interpretado como alívio.

Um exemplo menos poético: Se treinarmos 30 cães de um *grupo experimental* na ilha do Corvo a atravessarem a rua apenas quando um humano o faz, e não treinarmos 30 cães de um *grupo de controlo* em Lisboa, e ao fim de seis meses tiverem morrido atropelados 16 dos cães não treinados e apenas um dos cães treinados, a diferença altamente significativa não pode ser atribuída ao treino, porque a diferente localização (e concomitante tráfego rodoviário) dos dois grupos é um factor de confundimento.

Na questão da seriação das escolas, numa investigação meramente observacional como a que foi feita, não terão ficado de fora tantos factores de confundimento? Por exemplo, número de professores licenciados habitando no concelho, número de professores efectivos residindo no concelho, realização de acções de formação no concelho, variedade e abundância de locais de jogo no concelho, riqueza dos programas culturais das autarquias locais, existência de bibliotecas com ambiente agradável, locais de reunião e estudo como a *Ágora* de Lisboa.

Além disso, só planeamentos experimentais cuidadosos permitem concluir causalidade da correlação (veja-se por exemplo Schweigert, 1994, tão cuidadosa porventura por saber que o seu público alvo é de utilizadores de Estatística das áreas de Ciências Humanas). Em estudos meramente observacionais, como este, é um salto no desconhecido - autores há que lhe chamam "o pecado mortal dos maus utilizadores da Estatística" - inferir que a diferença entre notas obtidas e notas esperadas (ainda que os modelos fossem adequados, o que nem é o caso) é "causada" pela intervenção da escola e dos profissionais que nela trabalham.

Grácio *et al.* (2002) reconhecem algumas limitações do modelo que propõem. Parece-me essencial que reconheçam que o modelo que propõem, longe de *ser " mil vezes preferível a fornecer simplesmente ao público os*

[2] Mia Couto (2002). *Um Rio Chamado Tempo, Uma Casa Chamada Terra*, Caminho, Lisboa, p 137.

dados em bruto" é apenas um excelente exemplo de mau uso da Estatística (ou, mais propriamente, mau uso de um *package* estatístico).

3. Regressão - modo de usar

Usando um *package* estatístico para exprimir uma *variável resposta* como função *de variáveis controladas*, há sempre uma resposta. É aliás usual dizer que o problema reside em que quando se mete lixo no computador, dele só sai lixo.

Muitos programas - e nomeadamente o *SPSS* - são vendidos com excelente documentação, e têm informação *online*; mas em última análise, é o utilizador que tem a responsabilidade de ter uma visão crítica do que está a fazer. Áreas como regressão e análise da variância são naturalmente muito apelativas para os utilizadores, e por isso é frequente deparar com exemplos de mau uso da Estatística (alguns autores falam mesmo de *abuse of Statistics*).

Descrevemos por isso de forma rudimentar o que é a regressão linear (se o padrão não for linear, a situação é muito mais complexa, usando-se em muitos casos transformações capazes de linearizar os dados). Aconselhamos sempre uma representação prévia dos dados num diagrama de dispersão, por forma a avaliar visualmente se um padrão linear é adequado. Discutimos também o sentido do coeficiente de determinação r^2, para se perceber por que razão só se deve usar um modelo linear se $r^2 \approx 1$ (e, mesmo assim, há sempre que ser crítico, veja-se Pestana e Velosa, 2002, p. 149, onde se alerta para situações em que valores elevados de r^2 não correspondem a padrões lineares de associação, e valores de r^2 próximos de zero surgem com dependência - não linear, claro - estrita).

A regressão múltipla é uma extensão que nada tem de revolucionário, do ponto de vista conceptual, apenas já não há uma avaliação visual que nos guie - temos por isso que usar R^2 como critério da qualidade do ajustamento, devendo valores baixos serem um sinal de sentido proibido no que refere o modelo que ensaiámos.

Mas entremos na questão do porquê usar regressão, exemplificando o uso da regressão linear, a fim de simplificar a exposição:

Por vezes temos facilmente acesso a uma variável x, e gostaríamos de a usar para conhecer uma variável y que julgamos estar fortemente correlacionada com a primeira. Por exemplo, há boas razões para acreditar que há evasão fiscal, que há contribuintes que mentem sobre o montante y dos seus rendimentos, e seria interessante usar uma avaliação x dos sinais exteriores de riqueza para estimar y. Pretende-se por isso um *modelo de regressão* $y = \hat{y} + \varepsilon$, onde $\hat{y}_i = f(x_i)$ é a estimativa de y_i correspondente ao valor observado x_i e ε_i é o *resíduo* nesse ponto; por vezes, também se chama a $\hat{y}_i$ "sinal", e a ε "ruído".

A variável y é em geral denominada variável dependente ou variável resposta, e a variável x é a variável independente, ou variável controlada, ou preditor; não têm, obviamente, o mesmo estatuto, há uma hierarquização importante, não faz sentido inverter a função f para exprimir x como função de y (seria ignorar os resíduos, mas sobretudo não entender o âmago do problema, em que a referida hierarquização variável resposta/variável controlada é essencial).

Um exemplo ajuda a esclarecer: predizer o perímetro da cabeça à nascença é decerto importante, pode determinar se se deve antecipar um parto normal ou necessidade de recorrer a uma cesariana. Podemos por isso recorrer a uma amostra para estudar o problema.

Suponha-se que uma equipa de obstetras recolhe os seguintes dados, relativos ao comprimento (em cm) do biparietal, medido recorrendo a uma ecografia do feto na 34ª semana da gravidez, e ao perímetro da cabeça na altura do nascimento, também em centímetros,

x - biparietal (34ª semana)	y - perímetro cefálico (à nascença)	x - biparietal (34ª semana)	y - perímetro cefálico (à nascença)
8.09	33.13	7.81	31.99
9.02	36.45	8.23	34.22
8.66	35.76	9.24	37.63
9.03	35.59	9.07	36.97
8.03	32.66	7.49	30.36
8.61	34.57	8.21	33.66
8.98	36.23	9.04	35.30
8.55	35.10	8.97	36.44
8.82	35.59	8.30	35.26
8.25	33.94	8.66	35.51
8.31	33.83	8.76	34.86

sendo o objectivo exprimir a variável dependente *y* (perímetro cefálico) em função da variável independente *x* (comprimento do biparietal), $y=f(x)$.

Por outras palavras, consideramos que os valores observados y_i são flutuações amostrais em torno de um modelo $\hat{y}_i = f(x_i)$, ou seja que os valores observados podem ser escritos

$$y_i = \hat{y}_i + \varepsilon_i ,$$

sendo os ε_i resíduos desprezáveis. Claro que gostaríamos que os resíduos fossem, idealmente, nulos, um ajustamento perfeito do modelo à realidade. Mas isso é pedir demais; por isso vamos ser mais modestos, e esperar que sejam "perturbações amostrais" de 0, isto é que flutuem (moderadamente) em torno de 0, sem padrão definido.

Caso nada se diga sobre a forma analítica de *f*, o problema é naturalmente indeterminado. Em muitas circunstâncias os dados (ou transformações simples dos dados) exibem um padrão linear. Neste caso, há boas razões para esperar um padrão linear, uma vez que o perímetro cefálico à nascença *y* não deve afastar-se muito de $\pi \times$ biparietal à nascença, sendo decerto o biparietal à nascença um pouco maior do que a avaliação obtida por ecografia na 34ª semana. Um representação gráfica dos dados não suscita dúvidas sobre a adequação deste padrão linear (Figura 1).

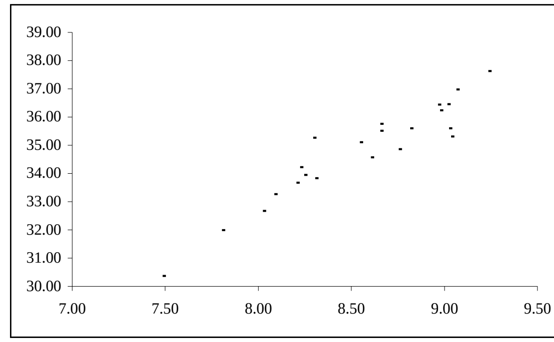


Figura 1: Gráfico de dispersão dos dados (biparietal, perímetro cefálico).

Vamos por isso usar um ajustamento linear aos dados, $\hat{y}=f(x)=ax+b$, usando um critério de aproximação adequado. O mais usual é adoptarmos o *critério dos mínimos quadrados*: vamos determinar os parâmetros (coeficientes) da função por tal forma que a soma dos quadrados dos desvios (isto é, resíduos) entre os valores observados y_i e os valores estimados $\hat{y}_i = f(x_i)$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

seja mínima.

Note-se que neste exemplo o coeficiente de correlação é $r_{x,y}=0.95$ (o coeficiente de determinação é $r^2 \approx 0.90$) pelo que esperamos que haja uma associação linear forte entre as variáveis.

Vamos então determinar os coeficientes *a* e *b* tais que o desvio quadrático global

$$Q(a,b)=\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

seja mínimo[3].

[3] Estamos a minimizar a soma dos quadrados dos desvios *medidos na vertical* entre cada ordenada observada e a correspondente ordenada estimada pela recta. Isto complementa a observação anterior sobre a hierarquização das variáveis e a observação de que não faz sentido inverter a função *f* - para exprimir *x* como função de *y* há que resolver outro problema, que é minimizar a soma dos quadrados dos desvios *medidos na horizontal*, entre cada abcissa observada e o valor postulado como função da correspondente ordenada (Figura 2).

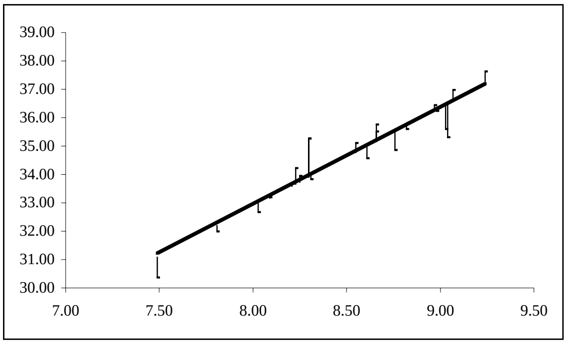


Figura 2: Desvios "verticais" dos pontos à recta.

Tomando então o sistema de estacionaridade (isto é, igualando a zero as derivadas parciais em relação às incógnitas *a* e *b*, respectivamente), obtém-se

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a} Q(a,b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial b} Q(a,b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0 \end{cases}$$

(a segunda daquelas equações exprime que a soma dos resíduos é nula, como tínhamos requerido).

Ficamos assim com o sistema de duas equações lineares nas duas incógnitas *a* e *b*,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 a + \sum_{i=1}^{n} x_i b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} a = \dfrac{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ \\ b = \overline{y} - a\overline{x} \end{cases}$$

No exemplo, *a*= 3.49, *b*= 4.92, donde o modelo de regressão *y*=3.49 *x*+4.92+ ε, um resultado que não é inesperado: devido à forma da cabeça, estamos a calcular algo que está muito próximo do perímetro de uma circunferência com diâmetro ≈ biparietal. Assim, o coeficiente 3.49 é uma perturbação de π =3.14 (note-se que o biparietal cresce entre a trigésima quarta semana e a altura do parto, o que também explica uma ordenada na origem positiva, e que o perímetro máximo da cabeça não é exactamente o perímetro de uma circunferência).

Vejamos agora qual o sentido da recta de regressão:

Como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x}$, segue-se que

$$a = \frac{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}.$$

Notando que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2 = (n-1)s_x^2$, e que

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)y_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = (n-1)\,\mathrm{cov}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

(a primeira igualdade é consequência imediata de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right) = 0$) deduz-se então

$$a = \frac{\mathrm{cov}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{s_x^2} = \frac{\mathrm{cov}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{s_x s_y}\frac{s_y}{s_x} = r\frac{s_y}{s_x},$$

onde *r* denota o coeficiente de correlação empírico entre ***x*** e ***y***.

Por conseguinte a recta de regressão pode ser reescrita

$$\hat{y} = ax + b = ax + \overline{y} - a\overline{x} \Leftrightarrow y - \overline{y} = r\frac{s_y}{s_x}(x - \overline{x}),$$

e padronizando ***x*** e ***y***

$$\frac{\hat{y} - \overline{y}}{s_y} = r\frac{x - \overline{x}}{s_x},$$

ou seja a ordenada padronizada é proporcional à abcissa padronizada, sendo $r = r_{xy}$ o coeficiente de proporcionalidade.

Em consequência, a variância da versão padronizada de $\hat{\mathbf{y}}$ é, pelo que sabemos sobre a variância de uma transformação linear, $r^2 \times$ variância da versão padronizada de $\boldsymbol{x}$, ou seja

$$\frac{\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{y}})}{s_y^2} = r_{x,y}^2 \frac{\mathrm{var}(\boldsymbol{x})}{s_x^2} = r_{x,y}^2 \Rightarrow \mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{y}}) = r_{x,y}^2\,\mathrm{var}(\boldsymbol{y})$$

e consequentemente[4], de $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \varepsilon$ segue-se que

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{y}}) + \mathrm{var}(\varepsilon)$$

Quer isto dizer que

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{y}) = r_{x,y}^2\,\mathrm{var}(\boldsymbol{y}) + \mathrm{var}(\varepsilon)$$

Por isso $r^2 = r_{x,y}^2$ é interpretado como a fracção da variância de $\boldsymbol{y}$ que é explicada pela relação linear entre $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x}$, e denominado *coeficiente de determinação*. E, como subproduto, conclui-se que a fracção da variância de $\boldsymbol{y}$ que fica por explicar pela referida relação é $1-r^2$. Ou ainda, $\mathrm{var}(\varepsilon) = (1 - r_{x,y}^2)\,\mathrm{var}(\boldsymbol{y})$. De facto, desenvolvendo $\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i)^2$, e recordando que $b = \bar{y} - a\bar{x}$, vem

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[(y_i - \bar{y}) - a(x_i - \bar{x})\right]^2.$$

Como $a = \dfrac{\mathrm{cov}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{s_x^2}$, e $\bar{\varepsilon} = 0$, segue-se que

$$(n-1)s_\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 - (n-1)\left[\frac{\mathrm{cov}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{s_x}\right]^2 =$$

$$= (n-1)s_y^2 - (n-1)\left[\frac{\mathrm{cov}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{s_x}\right]^2 =$$

$$= (n-1)s_y^2\left[1 - \left(\frac{\mathrm{cov}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{s_x s_y}\right)^2\right],$$

concluindo-se então que

$$s_\varepsilon^2 = \left(1 - r^2\right)s_y^2.$$

Naturalmente, se $r^2 << 1$ consideramos que o modelo de regressão não é adequado. Consulte-se Pestana e Velosa (2002, Capítulo 2), de que o exemplo acima é extraído, onde muitos gráficos expressivos ilustram os cuidados que há a ter na interpretação de correlações.

Da expressão $\dfrac{\hat{\mathbf{y}} - \bar{y}}{s_y} = r_{x,y}\left(\dfrac{\boldsymbol{x} - \bar{x}}{s_x}\right)$ tira-se

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \bar{y} + r_{x,y}\frac{s_y}{s_x}(\boldsymbol{x} - \bar{x}).$$

Por outras palavras, para predizer y fazemos uma correcção ao seu valor médio $\bar{y}$, correcção essa que é proporcional ao desvio estandardizado do valor observado do preditor x relativamente à sua média $\bar{x}$ - directamente proporcional em termos da correlação entre as variáveis e do desvio padrão de y. (Esta expressão paraleliza um importante resultado sobre valores médios condicionais em pares aleatórios gaussianos; a fundamentação teórica da adaptação de uma *recta* de regressão é a admissão implícita de que o modelo populacional é "multinormal"[5]).

Por exemplo, suponha-se que a correlação entre peso e altura de jovens portugueses na classe etária dos 18-25 anos (uma classe bem conhecida no que respeita muitas características físicas, por causa da inspecção militar) é 0.95, que sabemos que a altura média é 1.72 m, que o desvio padrão é 0.07 m, que o peso médio é 68 kg, e o desvio padrão é 4 kg.

A melhor ideia que podemos ter sobre o peso de um indivíduo escolhido ao acaso é o peso médio, 68 kg.

---

[4] Aqui permitimo-nos alguma falta de rigor: estamos a admitir que resíduos e modelo são "independentes", e que por isso a variância da soma é a soma das variâncias. Mas é irresistível tentar mostrar que há ideias simples e interessantes motivadoras do que estamos a fazer, e que não é apenas uma colecção de fórmulas complicadas e sem sentido. Por outro lado, deduzimos já de seguida que $s_\varepsilon^2 = \left(1 - r^2\right)s_y^2$.

[5] Lukacs (1956) caracterizou os modelos populacionais em que a regressão é linear.

Porém, se quiserem ter uma ideia melhor do peso, e conseguirem avaliar que a altura é 1.86 m - um desvio de 0.14 em relação à altura média, ou seja um desvio padronizado 0.14/0.07=2, parece sensato fazer uma correcção à estimativa inicial peso, correcção essa que é $0.95 \times 4 \times 2=7.6$ kg, avaliando-se agora o peso em 75.6 kg.

Claro que procurar relações que já se conhecem à partida, como no exemplo perímetro cefálico à nascença = 3.49 x biparietal na 34ª semana +4.92, só tem interesse na exposição inicial do método. Obter dados como os descritos nem é fácil (muito antes da 34ª semana de gravidez já a maioria dos bebés tem a cabeça voltada para baixo, numa posição que não permite boa medição do biparietal numa ecografia). O que em geral vem registado numa ecografia é o comprimento do fémur (Hadlock *et al.*, 1983). A correlação entre o comprimento do fémur e o perímetro da cabeça não é com certeza tão forte quanto a correlação entre o biparietal e o perímetro da cabeça - mas é suficientemente elevada para permitir predizer linearmente usando o método dos mínimos quadrados, obtendo intervalos de predição com um grau de confiança elevado.

Detemo-nos um pouco mais neste ponto. Queremos predizer o perímetro cefálico à nascença, e seria natural, em termos geométricos, usar a medição ecográfica do biparietal na 34ª semana. Mas por razões biológicas que todos entendemos, nem sempre esta medição está acessível. Mas podemos aceder facilmente a outras medições - batimento cardíaco, comprimento do fémur, comprimento do polegar, *pH* do líquido amniótico, perímetro do pescoço, comprimento da coluna. O natural é, de entre as várias candidatas, escolher a que tem a melhor relação custo/benefício, sendo naturalmente o custo a dificuldade em medir essa variável, e o benefício um coeficiente de correlação entre preditor e variável resposta com valor absoluto próximo de 1. Teremos assim um coeficiente de determinação elevado, por outras palavras a dispersão da variável resposta fica quase totalmente explicada pela variabilidade da variável controlada.

A capacidade preditiva do biparietal é excelente (Kurtz *et al.*, 1980), decerto melhor do que a do fémur. Mas na prática é o comprimento do fémur esquerdo que se usa, porque é fácil de medir, e o coeficiente de determinação é suficientemente elevado para nos permitir predizer de forma útil (Hadlock *et al.*, 1983). Os outros candidatos a regressor referidos levam a coeficientes de determinação mais baixos, e por isso são preteridos.

Convém também anotar que maior comprimento do fémur não "causa" maior perímetro craniano. Trata-se de uma associação estatística, e não de causalidade. Estudos observacionais como o descrito não permitem aceder a causalidades, apenas estudos experimentais, em que deliberadamente se altera o "tratamento" de um grupo experimental para comparar a diferença de efeitos médios face a um grupo "de controlo" que não foi alterado, permitem estabelecer relações de causa a efeito.

Note ainda que num sentido estrito os dados acima deveriam ser analisados numa perspectiva de correlação, e não numa perspectiva de regressão. No referido estudo, nunca poderíamos considerar o biparietal x uma "variável controlada", e o perímetro cefálico y uma "variável resposta". Mas pareceu-nos didacticamente interessante tratá-los deste modo[6], pela interpretação intuitiva que fornecem para os coeficientes da recta de regressão. E na perspectiva em que nos colocámos, embora x não seja de facto uma variável controlada, é anterior (34ª semana) a y, e serve decerto como preditor.

Tudo o que foi exposto faz sentido, insistimos, se houver, de facto, um padrão linear; $r^2 \approx 1$ não garante a existência desse padrão (veja-se Pestana e Velosa, 2002, p.149),

[6] Apesar de haver diferenças conceptuais importantes entre estudos em que se usa a regressão e estudos em que se usa a correlação, na prática muitas vezes os dados são usados "como se" servissem para uma e outra abordagem.

Para além dos aspectos meramente técnicos, é importante para os utilizadores de Estatística saberem se estão a fazer um estudo experimental ou um estudo observacional, se podem supor que uma das variáveis é controlada, e que condicionalmente a cada valor dessa variável é possível calcular uma resposta média (mesmo que seja apenas de uma observação!) que possa ser encarada como valor observado do valor médio condicional, que é o conceito teórico de regressão.

mas $r^2 << 1$ garante que não existe. É um ponto importante em que os utilizadores da Estatística devem atentar: o valor da Estatística está na sua capacidade de arredar ideias erradas, preconceitos, e é nesse papel que é um garante da Ciência. Já no século XIX Carlyle (*Chartism*) observou argutamente:

> *A witty statesman said you might prove anything by figures, but a judicious man looks at statistics, not to get knowledge, but to save himself from having ignorance foisted on him.*

A Estatística é um instrumento que nos ajuda a transformar informação em conhecimento. Se houver mais informação disponível, por exemplo diversas variáveis controladas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ disponíveis, podemos decerto estimar melhor a variável resposta y - desde que, evidentemente, haja uma correlação apreciável entre x_k e y. Podem os interessados ver em Shepard *et al.* (1982), por exemplo, a excelente predição que se pode fazer do peso de um bebé à nascença, usando como variáveis regressoras o comprimento e o perímetro abdominal do feto, medidos em ecografias.

Não há assim novidades conceptuais em considerar um modelo de *regressão múltipla*

$$y=b_0+ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n.$$

Neste caso, obviamente, perde-se a capacidade de avaliação visual da (in)existência de padrão linear. Os cálculos são obviamente mais complexos, e raramente alguém os faz sem recurso a um *package* adequado. Claro que pode haver informação redundante, e nessa altura a utilização de algumas das variáveis controladas pode não trazer mais-valias. Por isso os algoritmos são em geral *stepwise,* ou vão incluindo as variáveis uma a uma, escolhendo em cada passo a que pode trazer mais poder explicativo ao modelo, parando quando não há melhoria significativa (*forward*), ou partem de um modelo considerando todas as variáveis controladas disponíveis, e em cada passo elimina-se a que é menos explicativa, enquanto essa eliminação não causa uma degradação qualitativa significativa *(backwards*).

A avaliação da qualidade do modelo é feita em termos da estatística R^2, uma extensão do r^2 que usámos em regressão linear simples: $R^2 \approx 1$ não garante que o modelo de regressão linear múltipla seja adequado - há correlações espúrias[7] -, mas permite-nos ter esperança de que não seja grosseiramente inadequado. Mas $R^2 << 1$ denuncia a inadequação do modelo.

O leitor decerto não estranhará que consideremos indefensáveis os modelos propostos por Grácio *et al.* (2002) para a seriação das escolas.

4. Uso e Mau Uso da Estatística, Informação e Conhecimento

Não é raro aparecerem trabalhos científicos fazendo mau uso da Estatística, uma situação que decorre de os próprios avaliadores de revistas de outras áreas do conhecimento não dominarem apropriadamente as metodologias estatísticas. Em particular em Ciências Humanas, a tentação de propor modelos simples para fenómenos complexos tem levado a polémicas como as que envolveram a publicação de Herrnstein and Murray (1994). Quiseram estes autores usar o Quociente de Inteligência como preditor do sucesso do indivíduo na sociedade - com corolários perversos como a irrelevância de gastos públicos em educação.

A comunidade científica (Devlin *et al.*, 1997) cerrou fileiras a condenar o mau uso da Estatística feito por aqueles autores[8] e S. Jay Gould (1997) publicou um livro com o sa-

[7] 100% das pessoas que morrem de cancro praticaram relações sexuais ou são filhas de pessoas que praticaram relações sexuais, mas daí não se deve inferir que a prática de relações sexuais explica a preocupante prevalência da doença, uma das principais causas de morte.
Este exemplo é inspirado num conto de *Empresta-nos o Seu Marido ? - e Outras Comédias da Vida Sexual*, de Graham Greene.

[8] Não deixa de ser curioso anotar que em geral é o número de citações que seria os investigadores, para as agências financiadoras. Herrnstein e Murray estão no topo, de tão citados que são pelas exemplares asneiras que cometeram no mau uso da Estatística!
Mais um exemplo de como a utilização acrítica de bases de dados, modelos e algoritmos de cálculo é um itinerário para o disparate, e pertinente o conselho "antes de ligar o computador ligue o cérebro".

boroso título *The Mismeasure of Man*, em que a "má medida" é o QI, que ele arrola, justificadamente, como um instrumento sofisticado de exploração do homem pelo homem.

As Ciências Exactas têm tendência a ser mais prudentes, e a incorrer menos no fascínio que as Ciências Humanas parecem ter pelos números, esquecendo por vezes o necessário recuo na crítica e avaliação dos modelos.

As estações meteorológicas registam diariamente os valores de centenas de variáveis. No entanto, até hoje não foi adoptado nenhum modelo de previsão do estado do tempo a médio ou a longo prazo, apesar da relevância que essa descoberta teria para áreas tão diversas como aviação, protecção civil, agricultura e turismo. Porventura porque neste caso os erros do modelo seriam imediatamente detectados, e poderiam sair muito caros à Sociedade e, por reflexo, aos autores. Um excelente exemplo de contenção, que recomendamos a todas as áreas do saber.

A utilização da Estatística é indispensável na investigação em qualquer área. Não foi por acaso que o governo britânico, preocupado com a estreiteza de vistas que os novos doutorados revelavam, escreveu o Livro Branco *Realizing our Potential*, em que pedia às universidades que atendessem à necessidade de uma formação pósgraduada prévia em metodologias da investigação científica, em que a Estatística tem papel protagonista (Greenfield, 2002; Graziano and Raulin, 1997). Mas a Estatística é uma disciplina em que confluem raciocínio indutivo (nomeadamente nas aplicações) e dedutivo (na criação matemática dos modelos, sua caracterização e condições de aplicabilidade), os resultados são válidos sob hipóteses que por vezes não admitem relaxação, e por isso é um instrumento que tem que ser usado com cuidado. A citação de Galton que usámos na abertura não poderia ser mais eloquente. E basta consultar Milliken and Johnson (1989, 1997, 2001) para nos darmos conta dos desenvolvimentos conceptuais que a análise de dados "problemáticos" trouxe recentemente à Estatística.

A Estatística, infelizmente, tem mau nome pelo mau uso que dela ocasionalmente se faz. É uma questão que preocupa muitos profissionais - é de facto tão injusto quanto vilipendiar a Medicina pelas desgraças que acontecem a quem recorre a curandeiros.

Não queremos dizer com isto que os estudiosos de outras áreas não devem usar a Estatística, longe disso. Mas com bom senso (quando está em risco a nossa saúde, é bom alguma clarividência: tomarmos por iniciativa nossa uma aspirina, ou ir ao médico?).

É muito citada uma frase de Laplace, afirmando que a Teoria da Probabilidade não é mais do que bom senso sob forma matematizada. Com a sua enorme autoridade, que pena não ter deixado também para reflexão dos vindouros uma frase sobre o bom senso que deve presidir ao uso de qualquer instrumento de transformação da informação em conhecimento, de que a Estatística é porventura o exemplo mais saliente.

Agradecimentos

Agradeço à Drª Ivone Dias Ferreira, assessora de imprensa do Sr. Ministro da Educação, que me enviou prontamente toda a documentação necessária.

Bibliografia

Barnett, V. and Lewis, T. (1994). *Outliers in Statistical Data,* 3rd ed., Wiley, New York.

Crato, N. (2002). As limitações da Estatística. *Expresso,* 2002—10—12, p. 15.

Devlin, B., Fienberg, S. E., Resnick, D. P. and Roeder, K. (eds.) (1997). *Intelligence, Genes and Success — Scientists Respond to The Bell Curve*, Springer, New York.

Gigerenzer, G. (2002). *Calculated Risks. How To Know When Numbers Deceive You,* Simon and Schusteer, New York.

Gould, S. J. (1997). *The Mismeasure of Man,* Penguin, London.

Grácio, S., Franco, L., Velho, S., Sanches, E. e Rijo, S. (2002). *Proposta de Seriação das Escolas Secundárias Segundo os Resultados Obtidos nos Exames Nacionais de 12º Ano em 2001/2002,* FCSH, Universidade Nova de Lisboa.

Graziano, A. M. and Raulin, M. L. (1997). *Research Methods. A Procedure of Enquiry*, Longman, New York.

Greenfield, T. (2002). *Research Methods. Guidance for Postgraduates,* Arnold, London.

Hadlock, F. P., Deter, R. L., Harrist, R. B., Roecker, E., Park, S. K. (1983). A date independent predictor of intrauterine growth retardation: femur length/abdominal circunference ratio, *Appl. J. Radiology* **141**, 979—984.

Herrnstein, R. J. and Murray, C. (1994). *The Bell Curve: Intelligence and Class Structure in American Life,* The Free Press, New York.

Huff, D. (1991). *How to Lie With Statistics*, Penguin, London.

Kurtz, A. B., Wapner, R. J., and Kurtz, R. J. (1980). Analysis of biparietal diameter as an indicator of gestational age, *J. Clin. Ultrasound* **8**, 319—326.

Lukacs, E.(1956). Characterizations of populations by properties of suitable statistics. *Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. Probab.*, vol. 2, 195—214.

Mendenhall, W. and Sincich, T. (1996). *A Second Course in Statistics — Regression Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River.

Milliken, G. A. and Johnson, D. E. (1989). *Analysis of Messy Data. Nonreplicated Experiments.* Chapmann and Hall, London.

Milliken, G. A. and Johnson, D. E. (1997). *Analysis of Messy Data. Designed Experiments*. Chapmann and Hall, London.

Milliken, G. A. and Johnson, D. E. (2001). *Analysis of Messy Data. Analysis of Covariance*. Chapmann and Hall, London.

Pestana, D. D. e Velosa, S. F. (2002). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

Shepard, M. U., Richards, V. A., and Berkowitz, R. L. (1982). An evaluation of two equations for predicting fetal weight by ultrasound, *Am. J. Obstet. Gynecol.* **142**, 48.

Schweigert, W. A. (1994). *Research Methods and Statistics for Psychology*, Brooks/Cole Publ. Co., Pacific Grove, Cal.

Bartoon

Luís Afonso, *Público, 28-05*-2002
(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)

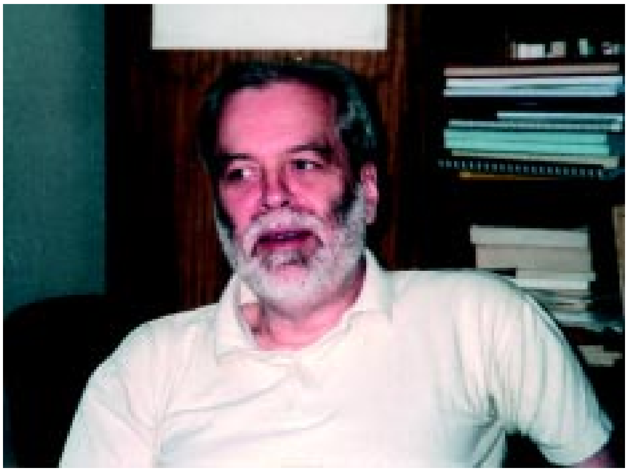
Conversa com Gudlaugur Thorbergsson

Entrevista por F. J. Craveiro de Carvalho
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Gudlaugur Thorbergsson nasceu em Melgraseyri, Islândia, tendo-se licenciado pela Universidade da Islândia. Os seus estudos de pós-graduação foram feitos na Universidade de Bonn, tendo a sua dissertação de doutoramento sido orientada por Wilhelm Klingenberg. Trabalhou em Bonn, no IMPA - R. J. e na University of Notre Dame - U. S. A..Ensina actualmente na Universidade de Colónia.

Uma parte importante do trabalho de investigação do Professor Thorbergsson é na área da Geometria das Subvariedades. Um artigo seu, uma síntese sobre hipersuperfícies isoparamétricas e generalizações, apareceu recentemente no *Handbook of Differential Geometry, Vol. I*, publicado pela North-Holland.

Gudlaugur Thorbergsson esteve em Coimbra, em Setembro de 2001, para leccionar sobre a geometria das subvariedades dos espaços euclidianos[*] e esta entrevista foi concluída nessa altura.



F. J. Craveiro de Carvalho- *Suponho que não erro se disser que esta não é a sua primeira visita a Portugal...*

Gudlaugur Thorbergsson- Tenho sempre a sensação de ter estado frequentemente em Portugal mas, na verdade, esta é a minha terceira visita e houve um espaço de catorze anos entre esta e a última.

A primeira vez que vim a Portugal foi em 1982 ou talvez em 1981. Tinha começado a estudar português e o objectivo da minha visita era estudar intensivamente a língua durante algumas semanas numa escola de línguas no Porto. O curso foi muito útil e fiz viagens curtas aos fins de semana, uma delas trouxe-me a Coimbra.

A segunda vez que visitei Portugal foi em 1987. Vivia então no Brasil e uma vez, num voo de volta ao Rio, aproveitei a oportunidade para parar em Lisboa, onde passei alguns dias muito agradáveis.

A razão de ter esta sensação de conhecer o país é, claro, Portugal estar muito presente no Brasil. Mas, pensando melhor, noto que o meu conhecimento de Portugal não vai longe. Por exemplo, tenho um conhecimento muito superficial da geografia do país.

FJCC- *Nasceu na Islândia e está agora em Colónia, na Alemanha. Tem sido uma viagem longa com paragens em Bonn, IMPA e na Universidade de Notre Dame.*

[*] um curso publicado como o nº 31 da colecção *Textos de Matemática* do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

Quer falar sobre isso? Em particular, quando e como compreendeu que se queria tornar um matemático?

GT- Decidi estudar matemática ao preparar-me para os exames finais da escola secundária. Não tinha trabalhado muito nos últimos anos na escola de modo que tinha muito a fazer para me preparar. Notei que a matemática era mais fácil que os outros assuntos e, assim, decidi aprendê-la na universidade. Não sabia então, claro, o que significava ser um matemático, trabalhar na universidade, mas acho que já então queria ser uma espécie de professor, ou um intelectual pelo menos, mas não me lembro muito bem.

Comecei na Universidade da Islândia no Outono de 1970, tendo a matemática por assunto principal e a física por assunto secundário, e acabei na Primavera de 1973. Nesse tempo, na Islândia, não havia cursos em matemática que fossem além da licenciatura. Decidi continuar em França ou na Alemanha. Não queria, nessa altura, ir para os Estados Unidos – eram tempos de grande anti-americanismo - e, realmente, não considerei a Grã-Bretanha. Obtive uma bolsa para ir para Bonn o que tornou tudo muito fácil.

Comecei em Bonn no Outono de 1973 e tudo decorreu de forma calma. Klingenberg deu um curso sobre geometria diferencial elementar durante o meu primeiro semestre. Frequentei esse curso e fiquei com Klingenberg que orientou a minha dissertação de mestrado (1975) e também a minha dissertação de doutoramento (1977). Ofereceu-me depois um lugar como assistente que mantive até 1985.

Klingenberg tinha ligações no Brasil, especialmente com Manfredo do Carmo que ele considerava ser seu estudante (embora este fosse, pelo menos formal e provavelmente mais do que formalmente, um estudante de Chern). Foi, de forma bastante indirecta, através destas ligações, e de um modo demasiadamente complicado para explicar aqui, que visitei o IMPA, no Rio de Janeiro, por três meses, em 1980. Fiquei fascinado. Desde os meus tempos de escola que tinha curiosidade sobre a América Latina e sobre o Brasil em particular. Na altura por razões políticas mas também porque, na escola e na universidade, tinha visto filmes de Glauber Rocha, de quem hoje ninguém se lembra, e os tinha achado excelentes. Durante essa visita ao IMPA reparei que não saber português era um contra. Decidi portanto começar a aprender português e visitar o Brasil por um período maior se possível. Passei o ano de 1983/84 no IMPA e foi-me sugerido que concorresse a um lugar permanente. Fiz isso pois o meu lugar de assistente em Bonn era apenas temporário, não via hipótese de obter um lugar permanente na Alemanha, e de qualquer modo estava mais interessado em tentar a minha sorte no Brasil. Obtive o lugar e fui para o Brasil em Outubro de 1985. Apesar de um salário muito baixo gostei muito de lá viver mas, após dois anos, achei que a situação económica era muito má e que um professor do IMPA podia acabar na miséria se as coisas continuassem do modo que estavam. O IMPA era uma instituição excelente para trabalhar, em especial por causa da biblioteca, mas nunca estive muito próximo da matemática feita no Brasil. Não foi, contudo, por essa razão que decidi mudar mas pela situação económica.

Concorri a lugares nos Estados Unidos e tive uma oferta da Universidade de Notre Dame em Indiana que aceitei. Não estava muito interessado em ir para os Estados Unidos e estava muito triste ao deixar o Brasil. Aconteceu, porém, que gostei dos Estados Unidos e a mudança foi muito boa para a minha matemática. Comecei a trabalhar muito mais arduamente, apesar de ter uma carga horária de aulas mais pesada, e foi logo no meu primeiro ano que iniciei o artigo que é hoje o meu trabalho mais conhecido. Como disse, gostei muito dos Estados Unidos mas achei a cidade onde vivia (South Bend, Indiana) muito morta e essa foi uma das razões pelas quais decidi concorrer a um lugar em Colónia, Alemanha. Outra razão foi a dificuldade em encontrar bons estudantes com quem trabalhar, a nível de doutoramento. Tive sorte e tive bons estudantes mas sabia que era improvável que continuasse a ser dessa forma. Tinha razão ao supor que, em ambos os aspectos, estaria muito melhor em Colónia.

É uma história longa e talvez a parte interessante seja que não foi tanto por causa dos meus interesses na investigação matemática que me desloquei de um continente para outro ou no mesmo continente.

FJCC- *Se não for demasiado técnico pode dar-nos uma ideia do trabalho a que acabou de se referir como "o meu trabalho mais conhecido"?*

GT- Notei que havia uma relação entre duas teorias que, à primeira vista, não parecem estar relacionadas. Uma é a teoria das subvariedades e a outra a geometria axiomática ou, mais precisamente, a geometria combinatória. Comecemos com a segunda. Pode definir-se um espaço projectivo de dimensão n de forma axiomática (ou combinatória) e também como o espaço das rectas vectoriais num espaço vectorial de dimensão $n+1$. Se $n > 2$ a equivalência das duas definições é um resultado clássico. Se $n = 2$ as definições não são equivalentes e a definição combinatória leva a terem-se mais exemplos. Uma consequência é a homogeneidade das geometrias projectivas se a dimensão é 3, pelo menos, mas não na dimensão 2. Tudo isto foi objecto de generalização por Tits com o conceito de "edifício" (ou "edifício" de Tits[1]).

Estava, e ainda estou, interessado em subvariedades isoparamétricas. Seria complicado defini-las aqui, mas podem ser vistas como sendo as subvariedades mais simples já que os seus invariantes locais, como as curvaturas principais, são constantes. Reparei que se pode associar um "edifício" (no sentido combinatório) a uma subvariedade isoparamétrica. A dimensão do "edifício" é a codimensão da subvariedade. Se esta for 3, pelo menos, então o "edifício" é homogéneo o que, por sua vez, pode ser usado para demonstrar que a subvariedade isoparamétrica é homogénea. O meu teorema era este e, na altura, foi surpreendente pois havia subvariedades isoparamétricas, não homogéneas, com codimensão 2.

Há, hoje em dia, três novas demonstrações, todas mais simples e, portanto, preferíveis, mas que, conceptualmente, não explicam tão bem como a minha a diferença entre a codimensão 2 e as codimensões mais elevadas.

A propósito, enquanto estudante em Bonn tive a sorte de frequentar um curso anual de Topologia Algébrica dado por Tits. Foi o seu último curso em Bonn antes de ir para o Collège de France, em Paris.

FJCC- *Houve ou há alguns matemáticos que tenham sido para si uma fonte de inspiração como você agora é para outros?*

No começo da minha carreira Klingenberg teve, claro, uma influência muito forte e, provavelmente, alguma dessa influência ainda resta, mas não muito forte. Comecei a estudar grupos de Lie muito tarde porque Klingenberg tinha grandes polémicas contra eles. Hoje em dia são uma parte muito central no meu trabalho. Muito do que tenho feito, nos últimos dez, quinze anos, está relacionado com trabalhos antigos de Bott dos anos 50. Penso contudo que Bott não foi realmente uma fonte de inspiração para mim embora sempre tivesse gostado das suas inúmeras conferências em Bonn.

Talvez a coisa mais importante no meu desenvolvimento como matemático tenha sido passar os meus anos formativos em Bonn onde havia, e há ainda, um grupo largo e activo de matemáticos excelentes e onde iam muitos dos melhores matemáticos mundiais como visitantes e conferencistas.

FJCC- *Klingenberg era um grande matemático...*

GT- Wilhelm Klingenberg era, na altura e de longe, o geómetra diferencial mais influente na Alemanha. Pode dizer-se que foi ele o modernizador da área no país e a maioria dos geómetras diferenciais nas universidades é formada por estudantes seus ou estudantes de estudantes seus.

[1] *Edifício* surge aqui como tradução de *building*. Esta terminologia é divertida. Existiam a noção clássica de *câmara de Weyl* e, posterior, a noção de *alcova*. Ao apresentar a sua teoria, Tits continuou com este tipo de terminologia e introduziu *apartamentos* e *edifícios*, onde aqueles objectos existem.

Começou a estudar matemática logo a seguir à guerra, numa altura em que as universidades alemãs eram ainda muito provincianas como consequência da emigração nos anos 30. Depois de trabalhar em geometria diferencial bastante clássica, e até nos fundamentos da geometria, mudou para a geometria riemanniana no fim dos anos 50. Fez, então, o seu melhor trabalho que culminou com contribuições para o chamado *teorema da esfera*[2].

Klingenberg trabalhava na existência de geodésicas fechadas quando fui estudante dele. Trata-se de uma área para a qual contribuíram muitos bons matemáticos mas que, infelizmente, está também cheia de erros. Muitos especialistas não levavam, e nem levam ainda, muito a sério o seu trabalho nesta área.

Depois de se reformar Klingenberg escreveu dois livros sobre as suas viagens ao Tibete. Possui ainda uma colecção de arte chinesa muito considerada.

FJCC- *Tem talvez um teorema, um livro de matemática favorito cuja preferência queira partilhar connosco...*

GT- Há tantos teoremas bonitos que é difícil escolher um.

Enquanto estudante gostei sempre dos livros de Milnor, particularmente do livro sobre Teoria de Morse, mas também do livro sobre topologia do ponto de vista diferencial. Mais tarde li *Variationsrechnung im Grossen* de Seifert e Threlfall e tornou-se um dos meus favoritos. Com este livro aprendi um método que tem sido muito importante para a minha investigação.

FJCC- *Que método foi esse?*

GT- Eles calculam a homologia dos espaços dos caminhos das esferas. Constroem ciclos concretos nos espaços dos caminhos e, com a ajuda da Teoria de Morse, mostram que eles constituem um sistema de geradores dos seus grupos de homologia.

No meu primeiro artigo sobre subvariedades, aparecido em 1983, eu construí ciclos análogos em hipersuperfícies de Dupin. Soube, mais tarde, que existe uma construção semelhante num artigo de Bott e Samelson, só que eles estão a trabalhar com órbitas enquanto eu não. Sabendo isto, interessei-me por grupos de Lie, subvariedades homogéneas e a questão de quão longe ou quão perto certas classes de subvariedades, como as subvariedades de Dupin ou as isoparamétricas, estão de ser homogéneas.

Voltando ao livro, Seifert e Threlfall começam o livro com a citação da introdução da *Astronomia Nova* de Kepler. Diz, mais ou menos, que é muito difícil, hoje, escrever matemática. Vou citar de memória, uma razão é que se não é preciso então o que se escreve não é matemática, se se dão muitos detalhes então ninguém perceberá o que se está a escrever.

É interessante como mudaram pouco, ao longo dos séculos, os problemas da escrita de um bom texto matemático.

Se pensar nos últimos vinte anos não me lembro de um livro de matemática que tenha realmente lido do princípio ao fim. Li capítulos e algumas páginas aqui e ali, mas raramente o suficiente para poder dizer que o livro é uma pérola.

FJCC- *Não há muito tempo soube por si que essa citação tinha um duplo significado e que causou alguma reacção...*

GT- A parte da citação que eu sei de cor é o começo *Durissima est hodie condicio scribendi libros mathematicos*. O livro foi publicado em 1938 de modo que, para os autores, *hodie* (hoje) referia-se aos tempos negros do terror Nazi. Blaschke pediu-lhes, antes do livro estar impresso, para retirarem a citação pois era, naturalmente, provocatória. Eles não o fizeram e Blaschke escreveu uma carta furiosa a

[2] *Uma variedade riemanniana, compacta e simplesmente conexa, para a qual a razão entre o mínimo e o máximo da curvatura seccional é menor que 1/4 é homeomorfa a uma esfera*. Ver, por exemplo, *Geometria Riemanniana*, Manfredo Perdigão do Carmo, IMPA, 1979. Outros nomes ligados a este teorema são o do americano Harry E. Rauch e o do francês Marcel Berger.

[3] Há, em *History of Topology*, editor I. M. James, North-Holland, 1999, um artigo biográfico sobre Herbert Seifert, da autoria de Dieter Puppe, que, por reflexo, fornece alguma informação sobre William Threlfall.

Seifert, em que se queixava de não terem seguido o seu conselho. Talvez não seja, no contexto, muito importante mas não creio que Threlfall fosse alemão. O seu nome era William e Threlfall é um apelido inglês. Donde era natural não sei. Não consegui descobrir muita coisa sobre ele[3].

Já que falámos em bons livros de matemática vale a pena mencionar que Wilhelm Blaschke escreveu um livro muito importante. O primeiro volume do seu *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, publicado por volta de 1920, é, possivelmente, a primeira tentativa para escrever um livro de texto sobre geometria diferencial elementar do modo que hoje a entendemos. É muito claro que livros sobre o assunto, publicados nos dias de hoje, ainda devem imenso ao livro de Blaschke. Não diria que é um dos meus livros favoritos porque não gosto da sua falta de rigor. Os *Aufgaben und Lehrsätze* (exercícios e teoremas), no final de cada capítulo, são interessantes. São uma mistura de exercícios, no sentido habitual da palavra, teoremas com referências precisas à literatura, resultados não publicados e atribuídos a amigos e colegas e, ainda, outros enunciados sem quaisquer comentários. Destes últimos, alguns são problemas ainda em aberto enquanto outros estão incorrectos na forma apresentada (embora, em geral, haja alguma coisa verdadeira). Uma explicação é que Blaschke pretenderia ser ambíguo. Outra, como não era muito rigoroso, é que lhe bastariam respostas que a maioria de nós não aceitaria. Por exemplo, o *teorema da bola de ténis*[4] que Arnold publicou há alguns anos, é um caso especial de um desses enunciados.

Blaschke, originário da Áustria, foi, a grande distância, o geómetra diferencial mais influente, na Alemanha, na primeira metade do século XX.

[4] *Uma curva esférica, fechada e sem intersecções, dividindo a esfera em duas partes de área igual possui, pelo menos, 4 pontos de inflexão, isto é, 4 pontos onde a curvatura geodésica se anula.* Ver, por exemplo, *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics*, V. I. Arnold, American Mathematical Society, 1994.

FJCC- *Uma das maneiras possíveis de motivar jovens para a matemática é através do exemplo.*

Quer descrever-nos um dia típico do seu trabalho de investigação?

GT-Não acho que eu seja um bom exemplo pois não sou, ou pelo menos penso que não sou, muito sistemático. Não me levanto tão cedo quanto devia e posso começar o dia com a leitura de um policial. Contudo, habitualmente, o meu dia de trabalho é muito longo. Há, claro, muita rotina, preparar aulas, ensinar, ir a reuniões. Um professor universitário faz a maior parte das coisas automática e relativamente bem. A única coisa que requer um esforço especial é ter algum tempo livre para a investigação. Tento ter, pelo menos, um dia por semana totalmente livre para a investigação nos períodos de aulas. Nesse dia só vou de tarde, e tarde, para a universidade de modo a não ser perturbado. Aos fins de semana é frequente trabalhar. Quem quer ser um matemático deve esperar ter de passar longas, longas horas a trabalhar. É certamente verdade que ninguém se torna um bom matemático apenas por se levantar cedo. Só por si levantar tarde também não é suficiente.

FJCC- *Uma parte importante do seu trabalho de investigação é em geometria das subvariedades, uma área onde o uso do computador parece poder ser importante.*

Alguma vez usou o computador para testar ou formular uma conjectura? Conhece alguns exemplos no caso de outros matemáticos?

GT- Nunca usei o computador para obter imagens mas tentei usar o *Maple* como ajuda na demonstração de teoremas. É muito interessante para a matemática teórica a possibilidade de fazer cálculos simbólicos muito complicados com tal *software* mas aquilo de que não gosto é a dificuldade em expor tais demonstrações num artigo.

Conheço alguns colegas que usam o computador para fazer cálculos, coisa provavelmente mais generalizada do que nos apercebemos pois, frequentemente, o seu uso não é reconhecido na publicação final. Claro que o uso mais espectacular é na produção de imagens de superfícies. Muitas delas são muito bonitas, mas não me entusiasmam muito já que são pouco atraentes para o meu modo de pensar em matemática. O mesmo se passa com os velhinhos modelos de gesso, mas esses têm, pelo menos, a atracção da nostalgia...

FJCC- *Voltemos ao ensino.*

Que importância tem ele no quadro das suas actividades matemáticas? Dá grande importância à preparação das aulas?

GT- Gosto muito de ensinar. Os estudantes de doutoramento são, claro, muito importantes para a minha investigação já que, frequentemente, aprendo nas discussões com eles como eles aprendem comigo. A minha investigação não seria muito melhor com menos aulas pois não sou capaz de fazer a mesma coisa constantemente. Muitas vezes gasto muito tempo com a preparação das minhas aulas, às vezes uma tarde inteira para uma única aula, mas depende muito da matéria, se é avançada e se já a ensinei antes.

FJCC- *A um nível mais pessoal, sei que a cultura portuguesa lhe é familiar e que está interessado nalguns dos seus aspectos. Por exemplo, lê António Lobo Antunes em português.*

Como é que o conheceu? Que outras actividades ocupam, fora da matemática, o seu tempo?

GT- Tento ler livros em português bastante regularmente porque não quero esquecer a língua e não tenho muitas oportunidades para a praticar. Estou agora a aprender italiano e acho muito difícil, sem prática, manter as duas línguas separadas.

A primeira vez que vi um livro de António Lobo Antunes foi no quiosque da estação de comboios de Colónia. Costumavam ter uma mesa onde expunham livros interessantes e eu dava uma olhadela àquilo que tinham. Hoje em dia a estação está remodelada e bonita e o quiosque tem muito mais espaço, contudo os livros são menos interessantes. Mais tarde li, nos jornais, sobre ele. Dois, pelo menos, dos seus livros foram apresentados no programa televisivo literário, de grande influência, *Das literarische Quartett*. É verdade que estou a tentar lê-lo em português e que gosto muito mas tenho de admitir também que acho o seu português muito difícil.

Pergunta-me sobre actividades que, fora da matemática, tomam o meu tempo. Passo imenso tempo a ler todo o tipo de livros, principalmente romances, nem sempre muito bons. Há muitas outras coisas de que gosto, ouvir música, ir ao teatro etc., mas nenhuma delas toma muito tempo. Estou cada vez mais preguiçoso para sair de casa para actividades culturais, embora quando o faço isso me possa dar grande prazer.

O Ensino Médio da Matemática

Elon Lages Lima
IMPA, Brasil

O Ensino Médio se ocupa de jovens cujas idades se situam entre quinze e dezassete anos, com pequenas variações desses números. Trataremos aqui do Ensino Médio tradicional, ou usual, em contraste com o profissionalizante. Nos países onde há uma separação nítida entre diferentes opções escolares, o tipo de ensino que discutiremos se aproxima mais daquele que visa ao ingresso na Universidade (como o Gymnasium, na Alemanha). Noutros países, como o Brasil, o Ensino Médio ao qual nos referiremos serve a dois tipos de alunos: os que pretendem ingressar na Universidade e os que têm nesse ensino o ponto terminal dos seus estudos formais, entrando no mercado de trabalho logo após sua conclusão (ou mesmo enquanto estudantes).

O aluno do Ensino Médio oferece ao professor de Matemática uma boa oportunidade de exercer uma ação formadora marcante. Ele está na idade em que deve decidir sua opção de carreira, por isso tende a assumir atitudes mais responsáveis. Além disso, possui um desenvolvimento mental em muitos aspectos comparável ao de um adulto. Tem também um número ainda reduzido de deformações e maus hábitos de pensamento, que podem ser corrigidos. E, principalmente para o trabalho em sala de aula: já aprendeu (ainda que mecanicamente) as técnicas elementares de operações com números e letras e, pelo menos, a linguagem básica da Geometria. Esses conhecimentos, ou melhor dito, essa familiaridade com o jargão e com os resultados da Matemática estudada nos anos anteriores, por mais lacunas que apresente, implica, para o desenvolvimento do trabalho do professor, numa considerável economia de tempo e esforço, abrindo caminho para um programa mais objetivo de estudos.

O conteúdo matemático do Ensino Médio evoluiu, como é natural, através dos anos, sofrendo as influências das ênfases dominantes de cada época, refletindo, por um lado, os modismos matemáticos ou educacionais e, por outro lado, as próprias alterações pelas quais passou a sociedade. Em particular, essa evolução abrigou alguns excessos, inicialmente os incontáveis cálculos e manipulações fastidiosas que predominaram até quarenta anos atrás, depois do que veio a exagerada preocupação com o formal e o abstrato, tão própria da chamada Matemática Moderna e, atualmente o encanto pela tecnologia, o fascínio pelo computador e a obcessão imediatista, o pragmatismo dos dias em que vivemos.

Convém observar que cada um desses perniciosos extremos que acabamos de apontar é pernicioso por ser extremo, porém se origina de uma necessidade ou de uma proposta razoável, desde que adotada com moderação. Neste momento, quando já temos condições de encarar essas variações de tendências sob uma perspectiva histórica, podemos ter esperança de alcançar um equilíbrio aceitável quanto à adoção dos pontos de vista aparentemente antagônicos, cada um deles contendo elementos válidos.

Isto é o que pretendemos mostrar aqui.

As três componentes básicas do ensino da Matemática

É desejável, e certamente possível, fazer com que, ao final dos seus três anos, o aluno egresso da Escola Média, tenha adquirido uma idéia bastante clara, ainda que mediante o estudo de temas elementares, do que é a Matemática, seus métodos, seu alcance, sua utilidade, sua relevância social e sua beleza. Aqueles para os quais, seja por opção, seja por circunstâncias coercitivas, o nível médio é terminal, ficarão em condições de exercer sua cidadania com mais eficácia, tendo desenvolvido seu espírito crítico de forma objetiva, tendo adquirido hábitos de organização e ordem que os cálculos lhe obrigam a ter e tendo aprendido a utilizar, em situações diversas, conhecimentos matemáticos pertinentes para chegar a conclusões e obter respostas para problemas reais.

Para os que se destinam à Universidade, uma boa educação média é extremamente importante e não há necessidade de argumentar sobre este ponto tão óbvio.

A fim de dotar os alunos, pouco a pouco, da noção do que seja o método matemático, dar-lhes condições e habilidade para lidar desembaraçadamente com fórmulas e cálculos e preparar-lhes para mais tarde poderem utilizar com vantagem o conhecimento adquirido em situações da vida real, o ensino da Matemática deve basear-se em três componentes fundamentais, as quais chamaremos de Conceituação, Manipulação e Aplicações.

Cada tópico apresentado na sala de aula, cada novo assunto tratado no curso, cada novo tema estudado deve ser visto sob esses três aspectos: o conceitual, o manipulativo e o aplicativo. O professor deve submeter-se ao desafio de completar esse tripé a cada nova etapa do seu trabalho. Nem sempre vai ser fácil; por isso é um desafio. Às vezes até parece impossível: não há muitas fontes bibliográficas nas quais se apoiar. No começo, não se vai sempre poder apresentar cada assunto sob essa tríplice abordagem. Mas anote a dificuldade e busque, com diligência e determinação, superá-la mais tarde. Pesquise, indague, olhe em torno de si, procure exemplos, exerça sua autocrítica. No decorrer do processo terá muitas alegrias. Cada êxito é um nutriente para a auto-estima; cada lacuna é uma motivação para o estudo e pesquisas adicionais.

A dosagem adequada dessas três componentes é o fator de equilíbrio do processo de aprendizagem. Elas contribuirão para despertar o interesse dos alunos e aumentar a capacidade que terão no futuro de empregar, não apenas as técnicas aprendidas nas aulas, mas sobretudo o espírito crítico, agudo e bem fundamentado, a clareza das idéias, a disciplina mental que consiste em raciocinar e agir ordenadamente. É conveniente pensar nas três componentes como um tripé de sustentação: as três são suficientes para assegurar a harmonia do ensino e cada uma delas é necessária para seu bom êxito.

Convém observar que essas três componentes básicas refletem algumas das diferentes faces com que a Matemática pode apresentar-se.

Algumas vezes a Matemática é como uma arte: o enlace das proposições, as conexões entre suas diversas teorias, a elegância e a clareza dos seus raciocínios, a eloquência singela das suas proposições e a surpresa de algumas das suas conclusões enlevam o espírito e acariciam nosso senso estético.

Outras vezes, a Matemática se mostra como um eficaz instrumento, às vezes simples em suas aplicações cotidianas, às vezes elaborado e complexo, quando usado para resolver problemas tecnológicos ou desenvolver teorias científicas.

E, para tornar efetiva sua aplicabilidade, ou mesmo para dar destreza na obtenção de suas conclusões teóricas, a Matemática oferece seu lado operacional: a manipulação de seus símbolos, tanto numéricos quanto abstratos.

Vejamos algumas palavras sobre cada uma das três componentes básicas do ensino da Matemática.

Conceituação.

A conceituação compreende:

A) A formulação correta e objetiva das definições matemáticas.

Isto inclui a nítida compreensão de que definir significa meramente dar um nome a um conceito, a uma situação ou a uma condição, substituindo uma frase por uma palavra ou um pequeno número de palavras, contribuindo, portanto, para maior clareza do discurso, maior precisão das afirmações, maior concentração no pontos essenciais da argumentação e mais destreza nos raciocínios.

B) O emprego bem aplicado do raciocínio dedutivo, deixando clara a distinção entre a hipótese e a tese, diferenciando uma proposição de sua recíproca e enfatizando que toda conclusão necessariamente advém de uma premissa (ou então é uma concessão que se pede a quem nos escuta).

C) O entendimento e a percepção de que algumas idéias e proposições podem ser reformuladas ou re-interpretadas sob diferentes formas ou em diferentes termos, reconhecendo assim situações idênticas apresentadas de modos diferentes, aparentemente descrevendo casos diversos.

D) O estabelecimento de conexões entre conceitos variados.

<u>Exemplos:</u>

A) Nos "Elementos" de Euclides encontramos as seguintes definições: **(**a**)** Linha é um comprimento sem largura; **(**b**)** Ângulo é a figura formada por duas semi-retas que têm a mesma origem. Faz parte da componente "conceituação" deixar claro que **(**a**)** é apenas uma motivação intuitiva e **(**b**)** é uma verdadeira definição.

B) Aqui cabe distinguir, tão claramente quanto seja possível, argumentos heurísticos de argumentos dedutivos.

C) As fórmulas de cos(a+b) e sen(a+b) eqüivalem à regra operacional

$$e^{ia}.e^{ib} = e^{i(a+b)}.$$

D) A conexão entre progressão aritmética e função afim, ou entre progressão geométrica e função exponencial.

A conceituação, quando levada a extremos, pode colidir com os bons preceitos do ensino. Um exemplo disso se vê na definição de função como um conjunto de pares ordenados sujeito a certas condições. Esta prática, que surgiu com o advento da Matemática Moderna e sua fixação conjuntista, sem dúvida resulta da preocupação de reduzir todos os conceitos fundamentais da Matemática à noção única de conjunto, na crença de que isto daria uma organização da Matemática em bases estritamente rigorosas, isentas de apelar a noções vagas e/ou intuitivas. Mas não é bem assim. Em primeiro lugar porque se trata de uma definição que, embora logicamente correta, é bastante elaborada, incompatível com a prática e por isso rapidamente abandonada por aqueles que a usam. Em segundo lugar porque não corresponde à idéia que os matemáticos e os que utilizam a Matemática fazem de uma função: dados os conjuntos A e B, uma função de domínio A e contradomínio B é uma regra, um conjunto de instruções, uma correspondência, uma lei que permite associar, sem restrições nem ambigüidade, a cada elemento x do conjunto A um elemento f(x) do conjunto B. Entre os exemplos de funções acham-se as transformações geométricas e as funções trigonométricas. Será que existe alguém no mundo que pense numa rotação como um conjunto de pares ordenados? Ou o seno de um ângulo?

E finalmente, para rebater o argumento de que uma regra, (ou um conjunto de instruções ou uma lei) que permita obter f(x) a partir de x é uma noção vaga e não-matemática, observemos que, por sua vez, a fim de definir o conjunto de pares ordenados que determina (ou que é) uma função, é preciso ter uma regra (um conjunto de instruções ou uma lei) que diga quando é que um certo par ordenado pertence ou não ao tal conjunto.

Observemos ainda que, embora pareça paradoxal a conceituação é mais importante para as aplicações do que a manipulação. Isto porque, a fim de determinar qual o instrumento matemático que deve ser utilizado na solução de um problema real é necessário ter presente a definição desse instrumento ou de teoremas da caracterização da função a ser empregada. Pois as situações contextuais não vêm acompanhadas de fórmulas. A tarefa de encontrar o instrumento matemático adequado para traduzir a situação é o que se chama de modelagem matemática. Para esse fim, os teoremas de caracterização são indispensáveis.

Manipulação.

Para analisar corretamente o papel da manipulação, o crítico deve policiar-se atentamente para não incorrer no erro de menosprezá-la. Durante séculos e ainda hoje, a manipulação quase que monopolizou o ensino da Matemática. A tal ponto que, para a maioria das pessoas (e até mesmo de professores e autores de livros didáticos) a Matemática é essencialmente manipulação. Houve, nos anos 60, uma forte reação contra isso, a qual levou ao extremo de praticamente banir os cálculos e exacerbar o abstrato. Hoje prevalece uma posição mais sensata: a manipulação está para o ensino da Matemática assim como a prática de escalas musicais está para o aprendizado do piano ou como o treinamento dos chamados ”fundamentos” está para a prática de certos esportes como o tênis ou o voleibol.

A fluência no manuseio de equações, fórmulas e operações com símbolos e números, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas diante de cálculos algébricos ou construções geométricas, a criação de uma série de reflexos condicionados sadios em Matemática, os quais são adquiridos através da prática continuada de exercícios manipulativos bem escolhidos, permite que o aluno (mais tarde, o usuário da Matemática) concentre sua atenção consciente nos pontos realmente essenciais, salvando seu tempo e sua energia de serem desperdiçados com detalhes secundários.

A esse respeito, convém ressaltar o importante papel da calculadora eletrônica, não apenas como doadora de tempo, energia e atenção ao aluno, nem somente como anjo da guarda da proteção contra os erros de cálculo mas até mesmo como grande auxiliar da conceituação, permitindo que certos temas matemáticos, como logaritmo, por exemplo, sejam estudados pelo que realmente significam e não como mero instrumento de calculo aritmético. Ao destruir o emprego calculatório do logaritmo, a calculadora o colocou numa posição mais nobre.

Aplicações.

É verdade que a Matemática é bela; que seu cultivo é uma das mais elevadas expressões de intelectualidade humana; que os problemas por ela propostos constituem desafios cuja solução fortalece a auto-estima; sublima o espírito e recompensa nobremente o esforço. Tudo isto é verdade, mas não é somente por isso que a Matemática é estudada na escola, em toda a parte. Não á apenas por isso que a Matemática é considerada cada dia mais imprescindível para a formação cultural e técnica do homem moderno.

A Matemática é indispensável por tudo isso e, mais particularmente, porque serve ao homem. Porque tem aplicações. Porque permite responder, de modo claro, preciso e indiscutível perguntas que, sem o auxílio dela, continuariam sendo perguntas ou se transformariam em palpites, opiniões ou conjecturas.

As aplicações são a parte ancilar da Matemática. São a conexão entre a abstração e a realidade. Para um grande número de alunos, são o lado mais atraente das aulas, o despertador que os acorda, o estímulo que os incita a pensar.

O professor deve considerar como parte integrante e essencial da sua tarefa o desafio, a preocupação de encontrar aplicações interessantes para a matéria que está apresentando. Como dissemos acima, nem sempre isso é fácil. Mas vale a pena indagar, pesquisar, pensar, incomodar os colegas, vasculhar livros.

Um procedimento que certamente desperta a atenção dos alunos é abrir cada novo tema com um problema que necessita dos conhecimentos que vão ali ser estudados a fim de ser resolvido. De preferência (e isto ocorre naturalmente quando é proposto no início do capítulo) um problema cujo objeto principal não é o assunto a tratar naquele capítulo. Um exemplo evidente é dado por um problema cuja resolução requer trigonometria mas senos, cossenos ou tangentes não ocorrem no enunciado. Ou problemas que se resolvem com logaritmos mas a palavra "logaritmo" não é mencionada neles. A fim de resolver problemas desta natureza é muitas vezes necessário ter em mente a caracterização das funções matemáticas a serem utilizadas, as definições matemáticas dos conceitos aplicáveis (conceituação) e, depois de formuladas as equações ou inequações pertinentes, saber lidar operacionalmente com elas e efetuar com eficiência os cálculos necessários (manipulação). Isso ilustra a interdependência das três componentes básicas.

Mas é preciso ter presentes dois preceitos básicos:

O primeiro é: nem tudo aquilo que cujo uso excessivo condenamos deve ser banido. Por exemplo, a linguagem, a notação e as regras básicas para o manuseio de conjuntos são uma valiosa e permanente conquista matemática, indispensável para a clareza, a precisão e a generalidade do raciocínio. Não esqueçamos as palavras de Hilbert: "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor nos doou". Ao criticar a chamada "conjuntivite" que predominou na época da Matemática Moderna, não cometamos o erro de proibir em nossos textos e em nossas aulas a simples menção de conjuntos e o uso da conveniente linguagem que lhe corresponde.

O segundo preceito consiste em não privilegiar excessivamente os temas e a abordagem que consideramos (e que são) relevantes, em prejuízo do equilíbrio das três componentes básicas do ensino. Por exemplo, nota-se hoje em dia uma grande e, até certo ponto, muito justa preocupação com a chamada "contextualização", que significa prover o ensino da Matemática de situações reais, concernente a problemas que de fato ocorrem, ou podem vir a ocorrer, nos dias atuais; problemas onde as ferramentas matemáticas vêm a ser de utilidade decisiva. Este ponto de vista é válido; inclusive estamos defendendo-o aqui.

Mas não devemos perder de vista o verdadeiro significado da Matemática, cujo método consiste em formular conceitos e teorias gerais que se aplicam em inúmeras situações, às vezes aparentemente diversas. Não importa quantos problemas contextuais resolvamos mediante técnicas *ad hoc*, não estaremos utilizando toda a força da Matemática se não estivermos olhando para esses problemas como situações especiais de um conceito, de uma teoria matemática que nos permitirá resolvê-los e resolver muitos outros problemas, nem sempre obviamente análogos.

Um exemplo: funções do tipo exponencial.

As funções exponenciais, $f(x) = a^x$, ou do tipo exponencial, $f(x) = b.a^x$ são estudadas na Escola Média. Vejamos como deveria ser sua abordagem segundo o modelo aqui proposto.

O problema de abertura poderia ser o seguinte:

"A bula do antibiótico que meu médico prescreveu diz que 24 horas após a primeira dose, a concentração plasmática da substância ativa reduz-se a 10% da concentração máxima. (Por simplicidade, admitamos que se tratava de uma injeção, logo o nível máximo da droga no sangue foi atingido imediatamente.) A receita médica estipulava doses iguais a cada 12 horas. Que fração da dose inicial ainda permanecia em meu organismo na ocasião da segunda dose?"

É claro que, posto no início das aulas sobre funções do tipo exponencial, os alunos já sabem que função matemática vão usar para resolver o problema. Não há como evitar isso. O importante é que eles saibam justificar por que vai ser usada uma função do tipo $f(x) = b.a^x$. Deste modo, em outras situações saberão fazer uma opção consciente.

O ponto crucial em problemas de modelagem como este é o teorema da caracterização da função que vai ser utilizada.

É obvio que se temos uma função do tipo $f(x) = b.a^x$, o valor f(x) é proporcional a b (valor inicial: b=f(0)). Um pouquinho menos mas ainda óbvio é que, fixado t, o valor

$f(x+t) = b.a^{x+t} = (b.a^x).a^t = a^t.f(x)$ é proporcional a f(x).

Noutras palavras, para todo o $t \in IR$ o quociente $\frac{f(x+t)}{f(x)} = a^t$ não depende de x. Ou seja $f(x+t)=a(t).f(x)$ onde o coeficiente a(t) é o mesmo, seja qual for o x.

O importante é que vale a recíproca. Ela constitui o Teorema da Caracterização das funções de tipo exponencial:

Teorema: Seja f: $IR \to IR^+$ uma função monótona tal que, para x, $t \in IR$ quaisquer, o quociente $\frac{f(x+t)}{f(x)}$ não depende de x. Então $f(x)$ é do tipo exponencial $f(x) = b.a^x$.

Este teorema é um caso típico da componente conceitual. Vejamos se ele se aplica ao exemplo inicial sobre o antibiótico. Aqui se trata de verificar se uma determinada situação real cumpre certas condições. Num dado instante x, mede-se a concentração plasmática, acha-se o resultado $f(x)$. Após o tempo t, mede-se outra vez e constata-se que ela se reduziu a $\alpha\, f(x)$, com $0<\alpha<1$. É razoável admitir que, em qualquer outro instante x', no qual a concentração plasmática é f(x´), passado o mesmo tempo t, tenha-se $f(x'+t)= \alpha.\ f(x')$? A resposta afirmativa caracteriza uma certa permanência, ou estabilidade, do processo de eliminação da substância no organismo (via suor, urina, etc.) e, pelo Teorema acima, assegura que $f(x) = b.a^x$ para certos a e b.

Meçamos o tempo x em horas. Evidentemente, $b=f(0)$. Sabemos que $f(24) = \frac{b}{10}$, ou seja, $b.a^{24} = \frac{b}{10}$, donde $a^{24} = 1/10 = 0,1$. A pergunta é qual o valor de $f(12)/f(0)$. Temos:

$$\frac{f(12)}{f(0)} = \frac{b.a^{12}}{b} = a^{12} = \sqrt{a^{24}} = \sqrt{0,1} \cong 0,316.$$

A resposta é: após 12 horas, a concentração plasmática no organismo reduziu-se a 31,6% do nível máximo (inicial).

A parte final do problema é manipulativa. O problema, em si, é uma aplicação. As três componentes se complementam.

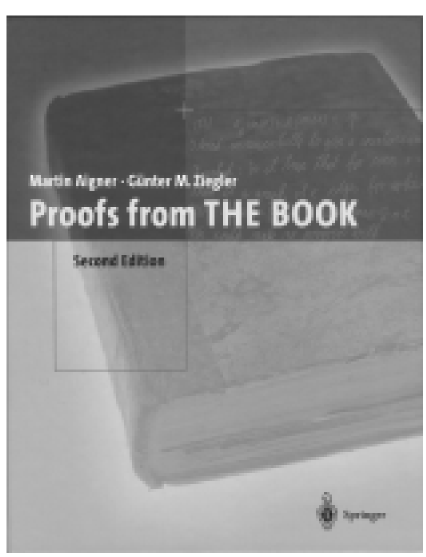
Proofs from THE BOOK

de M. Aigner e G. M. Ziegler, Springer, 2001

Recensão por Gareth A. Jones, Southampton University, U.K.

Até os mais entusiastas de nós, matemáticos, se sentem, de vez em quando, desiludidos com a Matemática. Talvez tenhamos exames de mais para corrigir, demasiados artigos para arbitrar; talvez os nossos estudantes (ou, pior até, os nossos colegas) estejam a ser ainda mais obtusos do que o normal. Quando tal acontece, um copo de vinho ou uns minutos de Mozart podem ser maravilhosos para levantar o ânimo, mas precisamos também de qualquer coisa que nos recorde que a Matemática é, realmente, um assunto muito bonito. Este livro fornece o tónico necessário, em dúzias de doses de digestão fácil.

Baseia-se numa ideia extravagante de Paul Erdös, que foi talvez o matemático mais produtivo e criativo do século XX. Como G. H. Hardy, acreditava que a matemática feia não perdura. Embora não fosse religioso, gostava de falar em *O Livro*, no qual um Ser Supremo, possivelmente não existente, guarda todas as demonstrações mais perfeitas e bonitas. Na maior parte do tempo o livro está fechado, mas, ocasionalmente, é permitido a um humano dar uma olhadela rápida a uma página, causando um daqueles momentos de génio que parecem vir de lado nenhum. Em dada altura dos anos 90, Martin Aigner e Günter Ziegler começaram a colaborar com Erdös na escrita de uma primeira aproximação a *O Livro*, baseada no seu "*entusiasmo por ideias brilhantes, compreensões inteligentes e observações maravilhosas*". Depois da morte de Erdös, em 1996, tornou-se no tributo deles à sua memória, sendo grande parte do conteúdo baseado nas sugestões, conjecturas e teoremas daquele.



Aigner e Ziegler dão-nos um A a Z das suas demonstrações favoritas em Teoria dos Números, Geometria, Análise, Combinatória e Teoria de Grafos, áreas muito caras a Paul e onde ele fez muitas contribuições profundas. Muitos dos resultados têm enunciado fácil, como, por exemplo, o teorema sobre a infinidade dos números primos, mas em todos os casos as demonstrações revelam elegância e engenho. Para este teorema em particular, o livro apresenta seis demonstrações diferentes: a demonstração clássica por contradição, devida a Euclides, duas demonstrações com base nas propriedades dos números de Mersenne e Fermat, a seguir uma analítica (com o produto de Euler da função zeta de Riemann à espreita, ao fundo e sem se fazer anunciar), depois uma demonstração surpreendentemente simples envolvendo uma topologia para os inteiros com base em progressões aritméticas e, finalmente, uma demonstração admiravelmente clara, de Erdös, do resultado de Euler de que $\Sigma_p\, p^{-1}$ diverge, onde p percorre os primos.

Analogamente, o capítulo sobre Combinatória inclui uma secção onde se dão quatro demonstrações completamente diferentes do teorema de Cayley (que este não provou!) sobre a existência de n^{n-2} árvores para n vértices: há a demonstração clássica de Prüfer, por meio de uma bijecção, outra usando o teorema de Kirchhoff sobre matrizes e árvores na contagem, pela álgebra Linear, das árvores geradoras do grafo completo K_n, uma terceira de Riordan e Rényi, baseada na recorrência, e, finalmente, uma demonstração recente de Pitman, baseada na dupla contagem de florestas enraízadas.

> Embora não fosse religioso, gostava de falar em *O Livro*, no qual um Ser Supremo, possivelmente não existente, guarda todas as demonstrações mais perfeitas e bonitas.

Como se esperaria, dado o seu tema, a apresentação e a escrita deste livro são excelentes. Cada secção tem uma introdução breve, mas clara, situando o problema em discussão e, em muitos casos, retratos dos matemáticos envolvidos. As demonstrações, acompanhadas de diagramas ilustrativos excelentes, são apresentadas com grande elegância e entusiasmo. Estão escritas com uma simplicidade digna de nota, acessível à maioria dos estudantes com a formação habitual da licenciatura em Matemática Pura. Cada secção fecha com algumas referências úteis para leitura posterior. Os *cartoons* com piada de Karl Hofmann são um prazer adicional: a secção sobre o Teorema de Cayley tem um com a legenda: *"Um processo inabitual para contar árvores: Ponha um gato em cada árvore, leve o seu cão a passear e conte o número de vezes que ele ladra."* Fica a cargo do leitor imaginar o desenho.

Quer o leitor seja um estudante ou um Medalha Fields, posso assegurar que este livro o vai estimular. Passe alguns minutos concentrando-se numa das demonstrações e perder-se-á na admiração pela beleza da Matemática e o talento de alguns daqueles que a cultivam. Frequentemente, a propósito de uma ideia brilhante, perguntamos *"De onde diabo veio aquilo?"*. A explicação de Erdös pode não ser muito científica, mas a leitura destas provas concretas dar-lhe-á enorme prazer.

(Tradução de F. J. Craveiro de Carvalho)

Delegação Regional do Centro da SPM

A Direcção desta Delegação recém eleita vai promover uma série de actividades na sua área. Dando continuidade a uma tradição com grandes pergaminhos, planeia-se um Encontro Regional para o início de 2004 e as Tardes de Matemática que, como é hábito, terão lugar nas Escolas interessadas. Esse interesse e outras sugestões podem ser comunicados à Direcção da Delegação Regional através de

http://www.dmat.estv.ipv.pt/dep/dmat/spmcentro/

Está também em estudo a organização de seminários e colóquios. Recorda-se que a SPM tem à disposição das Escolas a exposição "Movimento Matemático 1937/47" que consiste numa série de painéis com textos e fotos alusivos à fervilhante actividade matemática naquela década em Portugal. Pode ver-se a reprodução do primeiro painel no volume 140 da Gazeta de Matemática. As Escolas interessadas em mostrar essa exposição podem contactar para o efeito a Direcção da Delegação Regional.

Olimpíadas Internacionais e Ibero Americanas 2002

reportagem de Daniel Peralta Pinto

Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) 2002

As 43ª Olimpíadas Internacionais de Matemática que decorreram o ano passado em Glasgow (Escócia) foram as mais participadas de sempre. A primeira IMO realizou-se na Roménia em 1959 com a presença de apenas 6 equipas mas, desde então, a dimensão e importância da prova têm vindo a crescer a ponto de nesta última edição terem participado 84 países. A representar Portugal estiveram os alunos:

Andreia Gomes	Escola Sec. Frei Gonçalo de Azevedo (São Domingos de Rana)
Iat Fong Alias António	Colchester Royal Grammar School (UK)
João Lopes	Escola Secundária José Falcão (Coimbra)
Soraia Pimenta	Escola Secundária Filipa de Vilhena (Porto)
Tiago Fonseca	Escola Secundária de Marco de Canaveses
Luís Alexandre Pereira	Escola Sec. José Gomes Ferreira (Lisboa)

As provas decorreram nos dias 24 e 25 de Julho e cada estudante foi desafiado a resolver 6 problemas. O problema de geometria do segundo dia foi considerado o mais difícil e dos 479 participantes apenas 12 conseguiram resolvê-lo na totalidade ou com pequenas imperfeições. Três alunos, dois chineses e um russo, obtiveram a pontuação máxima possível em todos os problemas.

Na classificação por equipas os países mais pontuados foram a China, com 212 pontos, a Rússia, com 204 pontos, e os Estados Unidos da América, com 171 pontos, ficando a equipa portuguesa longe das medalhas. Espera-se que as várias recentes iniciativas no sentido de motivar, desenvolver e potenciar o gosto pela Matemática criem condições para que Portugal possa obter melhores resultados nas próximas edições. No entanto, a importância das Olimpíadas Internacionais de Matemática não se resume à competição. Este evento proporciona a troca de experiências e conhecimentos entre jovens que têm interesses comuns num ambiente descontraído e multicultural.

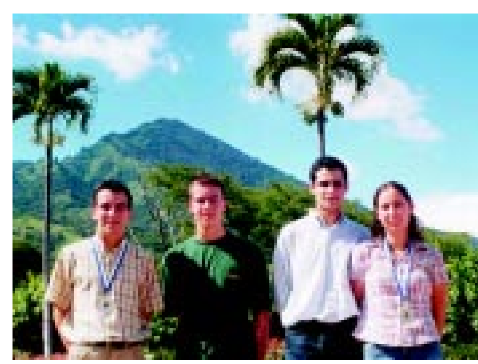
Em 2003, as IMO terão lugar em Tóquio (Japão) durante o mês de Julho.

Olimpíadas Ibero-Americanas 2002 - El Salvador

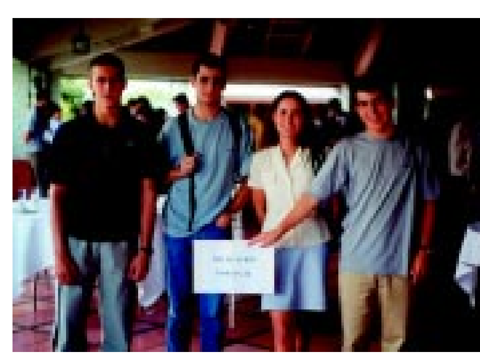
El Salvador é muitas vezes denominado o *Polegarzito* da América Latina devido à pequena área do seu território. Apesar dessa reduzida dimensão geográfica, o país enfrentou, na sua história recente, diversas convulsões políticas e catástrofes naturais. Um forte terramoto em Janeiro de 2001 impediu que El Salvador conseguisse organizar as Olimpíadas Ibero-Americanas desse ano (que se viriam a realizar no Uruguai). No entanto, superadas as principais dificuldades que se seguiram à catástofre, El Salvador tornou-se em Outubro de 2002 o país anfitrião do evento, recebendo as diversas equipas participantes.

Equipa portuguesa:

Andreia Gomes	Esola Secundária Frei Gonçalo de Azevedo (São Domingos de Rana)
João Diogo Ferreira	Escola Secundária Pedro Alexandrino (Póvoa de Sto. Adrião)
Domingos Lopes	Escola Secundária da Gafanha da Nazaré
Luís Alexandre Pereira	Escola Secundária José Gomes Ferreira (Lisboa)



As provas, como habitualmente, decorreram em duas manhãs distintas, desafiando a criatividade matemática dos alunos. Os problemas versaram áreas tão diversas como a geometria, a combinatória, a teoria dos números e a álgebra. Portugal obteve duas medalhas de bronze através dos alunos Domingos Lopes e Andreia Gomes, bem como uma menção honrosa que premiou Luís Alexandre Pereira pela resolução completa de um dos problemas. Destaque-se o facto de Andreia Gomes ter recebido pela segunda vez consecutiva, uma medalha de bronze uma vez que já em 2001 a sua prestação lhe valera esse prémio. Os países com melhor classificação global foram o Brasil e a Argentina que tiveram ainda, cada um deles, um aluno com a pontuação máxima possível. Em 2003 a Argentina será, aliás, a nação organizadora e espera agora que lhe sejam enviados problemas interessantes e originais para que as Olimpíadas possam continuar a estimular o engenho de quem nelas participa.



Portugal tem participado nestas provas desde 1989 mas é um dos poucos países ibero-americanos que nunca organizou nenhuma das edições anteriores. No entanto, o nosso país apresentou uma candidatura para 2007 e, se tudo correr como se espera, será a primeira vez que aqui se organiza uma competição internacional deste tipo e desta importância.