GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática Ano LXIII | Janeiro 2002 nº142

4 Euros

vista lançou-se neste país um programa intitulado "Pesquisa de Talentos Matemáticos" (Mathematical Talent Search). Começa cerca de um ano e meio antes das Olimpíadas Internacionais e é, fundamentalmente, realizado por correspondência. Primeiro procuram-se os interessados, depois enviam-se-lhes problemas cuja solução devem devolver. As soluções são pontuadas e comentadas e devolvidas aos participantes com as resoluções modelo. Os que assim se vão salientando são, mais tarde, reunidos numa Universidade e a partir deles forma-se a equipa olímpica.

Na Finlândia optou-se por outra solução. Em 1985 foi o país anfitrião das Olimpíadas Internacionais, mas o resultado conseguido pela equipa finlandesa foi catastrófico. Depois de vária tentativas para encontrar remédio, fundou-se a Escola de Päivölä. É desta Escola que hoje queremos dar notícia aos nossos leitores.

Um Projecto Finlandês para Ensinar Matemática a Estudantes Especialmente Dotados do Ensino Secundário

Jorma K. Merikoski, Esa Lappi e Janne Huovinen
Departamento de Matemática, Estatística e Filosofia - Universidade de Tampere, Finlândia

O prólogo e o epílogo são citações livres do escrito de Suvi Heikkilä "Totó? O quê? Serei de facto?", publicado em *O Segundo Poder*, jornal dos carochas (ver abaixo).

Prólogo

Há quem chame *totós* aos viciados do computador.

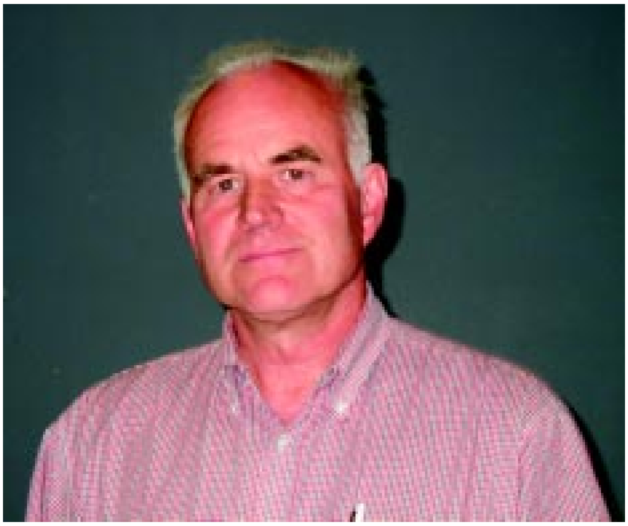
Como reconhecer um totó? Talvez pelo aspecto. O cabelo dum totó é sujo, as roupas estão enrugadas, os olhos cansados, é pálido e magro. Este aspecto pode ser surpreendente, mas tem uma explicação. Se se passa o tempo todo com computadores, esquecendo-se de se lavar, comer e dormir, o resultado ver-se-á. E isto é o que o totó faz. Sempre.

Mas o que será viver numa genuína casa de totós? Será possível levar uma vida normal sem se tornar um totó por completo? Em última análise, será possível sobreviver em tais circunstâncias? Ou, dito de outra maneira: que acontece a um ser humano comum se cai na Escola de Matemática de Päivölä? Será que a única resposta é que nascerá mais um totó?

Introdução e história

Nas últimas décadas a educação desenvolveu-se de maneira notável na Finlândia. O número de estudantes no ensino secundário aumentou para cerca de metade da população com a idade correspondente, mas a qualidade não aumentou ao mesmo ritmo ao ponto de poder dizer-se que, em média, a capacidade matemática decresceu. No sistema escolar finlandês, deu-se muita atenção aos alunos com menor rendimento e muito pouca aos que mostravam ter talento. Em 1985 as Olimpíadas Internacionais da Matemática foram organizadas na Finlândia e o resultado obtido pela equipa finlandesa foi catastrófico. A Finlândia obteve o pior resultado de entre as equipas que se apresentaram completas, ficando mesmo abaixo de uma equipa, a do Irão, que trouxe um só estudante.

Este mau resultado e, de um modo geral, o facto de as escolas normais não apresentarem desafios nem motivação aos estudantes talentosos atraiu as atenções. Para melhorar a situação, em algumas escolas fundaram-se clubes de Matemática, mas não tiveram grande êxito. Kullervo



Kullervo Nieminen (fotografado por Lasse Rasinen).

Nieminen notou que, de facto, a escola não é o melhor lugar para as actividades que os clubes propunham. Com efeito, os alunos que passam muitas horas por dia na escola não estão necessariamente interessados em permanecer lá para as sessões do clube ou em voltar ao fim da tarde ou princípio da noite.

Nieminen iniciou em 1993 um projecto de dois anos para os alunos talentosos do ensino secundário. Organizou sessões, não na escola à tarde ou à noite, mas na Universidade Tecnológica de Tampere nos fins de semana. Organizou também reuniões no Centro de Educação de Adultos de Päivölä em Valkeakoski, localizado a dez quilómetros de Toijala, a cidade mais próxima. Muitos participantes obtiveram empregos de verão na indústria, negócios ou investigação.

Dado o êxito destas reuniões, Nieminen pensou se não seria melhor manter os estudantes a trabalhar em conjunto em tempo integral. Assim iniciou uma escola de Matemática em pensão completa com um programa de um ano em Päivölä no outono de 1994. O trabalho nesta escola era intenso e nela deram entrada dez estudantes, provenientes de várias regiões da Finlândia com o objectivo de completarem os seus exames de acesso à Universidade e estudarem cursos de Matemática de nível universitário. Incluía-se também treino para as Olimpíadas da Matemática.

Em 1996 um grupo de estudantes veio para Päivölä para estudar Matemática por um ano. Acabaram por ficar dois anos e terminaram os estudos secundários durante esse tempo. Desde 1997, o Programa de Matemática de Päivölä tem sido um programa de dois anos, cobrindo não só a Matemática mas também o *curriculum* completo da Escola Secundária. Em cada Outono tem início uma nova classe e aos alunos de cada classe atribui-se uma designação:

Seniores (1994-95, 10 estudantes)
Crianças (1996-98, 10 estudantes)
Larvas (1997-99, 21 estudantes)
Partículas (1998-2000, 18 estudantes)
Pedacitos (1999-2001, 19 estudantes)
Carochas (2000-2002, 21 estudantes)

O Programa de Matemática de Päivölä, hoje

Os estudantes podem requerer admissão a Päivölä depois de terem completado os nove anos de ensino básico. No exame de admissão, aceitam-se vinte novos estudantes. O número de requerentes tem sido cerca de sessenta. Os estudantes completam o programa do secundário em dois anos, apesar de o tempo normal em escolas secundárias finlandesas ser de três anos. Quase todos os que entram na escola de Päivölä prosseguem estudos universitários em Matemática, Ciências da Computação ou Engenharia.

O *Curriculum* incide principalmente em Matemática, Física, Química e Ciências da Computação, mas também se estudam todas as outras matérias do *curriculum* do ensino secundário, em particular em Matemática estudam-se alguns cursos de nível universitário, tratando questões básicas de Álgebra Linear, Cálculo, Lógica, Teoria dos Conjuntos e Combinatória.

O ensino é baseado em aulas e discussões informais onde os estudantes se podem auxiliar uns aos outros. Viver e aprender em conjunto é uma parte importante dos estudos bem sucedidos em Päivölä. Os estudantes discutem problemas de Matemática (ou quaisquer outros) tanto nas aulas como fora delas, uns com os outros e com os professores. Estes estão presentes na maior parte das noites e podem contactar-se a qualquer hora. Dois professores, Merikki e Esa Lappi, vivem no mesmo edifício. Lições espontâneas podem ter lugar às mais estranhas horas, dadas por colegas estudantes, ex-estudantes e professores. Pratica-se um método de ensino chamado "aprendizagem logarítmica". Significa que se um estudante consegue resolver um problema, explica-o a outro e, depois, estes dois a dois outros, estes quatro a outros quatro, etc. Assim *n* estudantes aprendem a resolver o problema em $\lceil \log_2 n \rceil$ etapas.

Alguns "pedacitos" com os seus bonés de estudante. Merikki Lappi encontra-se à esquerda.

Como Päivölä fica num lugar remoto, o ambiente é sossegado e proporciona boas condições para a concentração e estudo. A atmosfera social desempenha um papel chave na aprendizagem. Consegue-se uma atmosfera excelente quando os estudantes formam pequenos grupos de modo que quem esteja interessado num mesmo assunto se integre no mesmo grupo.

Hoje torna-se preocupante para muitos que os jovens passem demasiado tempo sentados a trabalhar com computadores, fazendo pouco exercício físico. O estudante médio de Päivölä gasta, certamente, muito tempo com os computadores, o que não significa que não mostre o mesmo interesse por exercícios físicos que um estudante médio do ensino secundário finlandês. De modo a manterem os contactos fora de Päivölä, os estudantes têm um fim de semana livre outro não. A *IRC (Internet Relayed Chat)* tornou-se uma maneira normal para comunicar com o mundo exterior.

O Programa de Matemática de Päivölä deveria ter propinas relativamente elevadas, contrariamente ao que acontece, em geral, em Escolas Secundárias finlandesas. Desde 1997 a Companhia Nokia é o principal patrocinador de tal modo que os estudos e a pensão ficam de graça. O Centro de Investigação da Nokia dá até oportunidade aos estudantes para efectuarem algum treino prático em tempo parcial. A maior parte dos estudantes utilizam esta oportunidade para aprenderem a aplicar teorias. A cooperação entre a Nokia e a escola tem sido muito bem sucedida. Em 1999, o Prémio da Fundação Nokia foi atribuído a Kullervo Nieminen.

O futuro da escola parece ser promissor. Nos dias de hoje, dá-se grande atenção aos estudantes com habilidade para a Matemática que se encontram no sistema escolar finlandês. E o desempenho da equipa finlandesa nas Olimpíadas Internacionais da Matemática tem sido, nos anos recentes, muito melhor do que em 1985. Päivölä é um ponto de encontro para outros estudantes da Finlândia com jeito e inclinação para a Matemática. De seis em seis semanas eles encontram-se a fim de se prepararem para as Olimpíadas Internacionais de Matemática. A Sociedade Finlandesa de Matemática organiza cursos muito intensivos. Os estudantes que visitam Päivölä com regularidade são chamados "Satélites". A oportunidade de conhecerem outros jovens que gostam de Matemática encoraja e incita os estudantes a desenvolverem os seus conhecimentos de Matemática. E, no fim de contas, todos gostam de perceber que não são os únicos a gostarem de Matemática. Aulas especiais de Matemática foram estabelecidas numas tantas escolas secundárias, todavia ninguém pode negar que o estatuto de Päivölä é o de *paraíso dos totós*.

Kullervo Nieminen completou o seu trabalho e aposentou-se. O Programa de Matemática de Päivölä é agora dirigido por Merikki Lappi.

Epílogo

No princípio do verão, contemplei as pessoas à minha volta de um ponto de vista mais amplo do que antes e, durante o Verão, o ponto de vista alargou-se ainda mais. Percebi que todos são seres humanos como eu, e fiz amigos entre eles. É, na verdade, possível encontrar aqui pessoas saudáveis, alegres e vigorosas. Portanto não se está necessariamente destinado à ruína em Päivölä. É possível manter-se vivo e não se tornar um totó. E a meu respeito? Não sou um totó. Eu repito, não sou um totó. E nunca o serei. Nunca, nunca, nunca!

Quatro "carochas" depois de terminarem o seu primeiro ano, em frente ao edifício principal de Päivölä.

Prémio Bento de Jesus Caraça (Matemática)
Prémio Mário Silva (Física)
2ª Edição
Prazo: 28 de Fevereiro de 2002

O Jornal PÚBLICO, as Publicações "Gradiva", a BP, a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) e a Sociedade Portuguesa de Física (SPF) estabelecem dois prémios anuais destinados a distinguir o melhor aluno de Matemática e o melhor aluno de Física em todo o País, no final dos estudos secundários.

Os prémios têm as seguintes designações
- Prémio Bento de Jesus Caraça (Matemática)
- Premio Mário Silva (Física)

O objectivo destes dois prémios consiste em promover, em Portugal, o ensino e a aprendizagem de duas importantes ciências básicas - Matemática e Física - e, ao mesmo tempo, desenvolver nos jovens o gosto pela prática, cultura e espírito científicos. Consideram as entidades organizadoras que um processo de salutar emulação pode trazer estímulos adicionais à população estudantil portuguesa no Ensino Secundário, cujos méritos não têm sido suficientemente divulgados, e que a distinção dos melhores estudantes ajudará a projectar na sociedade portuguesa uma imagem melhor não só das ciências mas também das escolas e dos professores que as transmitem em Portugal.

Acima de tudo, e ao divulgar protagonistas de excelência do nosso sistema de ensino e aprendizagem, pretendem as entidades organizadoras contribuir para a melhoria do ensino das ciências, que tem conhecido algumas dificuldades no nosso país, mas que se reconhece ser essencial para o nosso desenvolvimento.

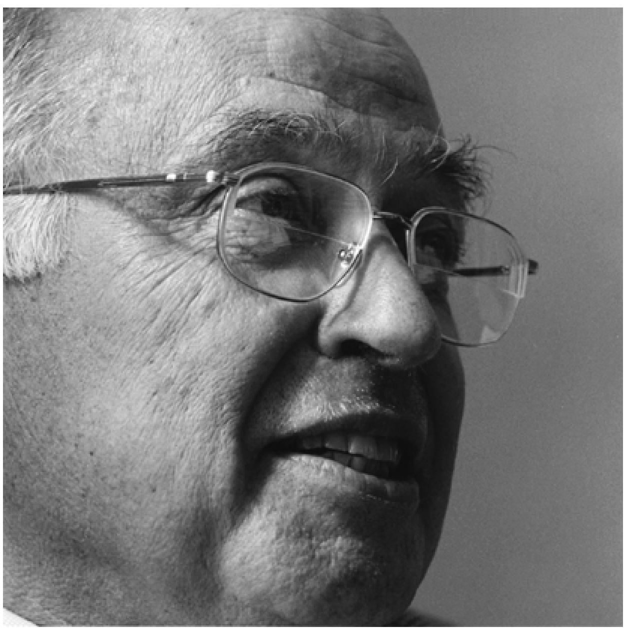
Consideram-se candidatos potenciais aos prémios todos os alunos que nos exames nacionais do 12º ano de Matemática e Física de 2001, organizados pelo Ministério da Educação, tenham obtido classificação igual ou superior a 18,0 valores, considerando para isso qualquer uma das chamadas. Esses alunos são convidados a escrever um pequeno trabalho sobre um tema livre da disciplina de Matemática ou Física, trabalho esse original a nível da divulgação científico-pedagógica.

Os prémios consistem, além de um diploma, de uma importância pecuniária, estabelecida pelas Publicações "Gradiva" e pelo jornal PÚBLICO, cujo valor é passível de actualização mas que, na segunda edição dos Prémios, tem o valor de 3.000 Euros cada um. Os professores de Física e Matemática do 12º ano dos alunos premiados receberão, assim como a biblioteca da respectiva escola, uma colecção de livros de ciência da "Gradiva". As Escolas Secundárias de onde são provenientes os alunos premiados receberão ainda material didáctico no valor de 2.500 Euros cada uma, oferecidos pela BP.

O regulamento (que deve ser consultado) pode ser obtido da Sede da SPM.

A Matemática no Século XX

Sir Michael Francis Atiyah



Sir Michael Atiyah (fotografado por Mark Atkins)

A matemática interessa-me; falo, aprendo, discuto e, depois, questões interessantes simplesmente emergem. Nunca comecei com um objectivo específico, a não ser o de compreender a matemática.[1]

Palavras de Michael Francis Atiyah, um dos grandes senhores da matemática do século XX. Com contribuições notáveis e fundamentais em áreas que envolvem a geometria, a topologia e a análise, muitas foram as honras que recebeu. Ganhou, por exemplo, a *Fields Medal* em 1966 e o *King Faizal Prize* em 1987.

I. M. Singer, Raoul Bott, F. Hirzebruch, Nigel J. Hitchin, outros grandes matemáticos, são alguns dos seus colaboradores e, entre os seus descendentes matemáticos, contam-se Simon Donaldson, *Fields Medal* em 1986, Frances Kirwan[2], G. Lusztig e G. B. Segal. São deste último as palavras:

...deixava-nos sempre com um sentimento de que havia alguma coisa importante que podíamos fazer; por mais erradas que fossem as ideias que tínhamos, nunca nos destruía mas fazia com que a nossa confusão parecesse ser um passo na direcção correcta. Tenho pensado muitas vezes sobre esta maravilhosa capacidade de encorajar, e em como é difícil de imitar, quando me vejo a ter o efeito exactamente oposto nos meus próprios estudantes.

ou, num registo mais divertido,

Entre os conselhos menos ortodoxos que dava aos seus estudantes, nos meus tempos, estava "Nunca leiam nada. Só vos vai deprimir. Se precisarem de saber alguma coisa perguntem-me."[3]

---

[1] *"An Interview with Michael Atiyah",* Roberto Minio, The Mathematical Intelligencer, vol. 6, #1, 1984.

[2] cuja contribuição, "*Mathematics: The Right Choice?*", em "*Mathematics: Frontiers and Perspectives*", V. Arnold e outros, American Mathematical Society, 2000, refere, significativamente, a sua experiência como estudante de Atiyah.

[3] *"Being a Graduate Student of Michael Atiyah",* G. B. Segal, Asian J. Math, vol. 3, #1, 1999.

O artigo abaixo foi primeiramente publicado na revista *Mathematics TODAY*, Vol. 37, # 2, de Abril de 2001, e é aqui reproduzido com a generosa permissão de Sir Michael Atiyah e daquela revista.

Este artigo baseia-se na transcrição de uma conferência em Toronto, em Junho de 2000.

Obrigado por me terem convidado a tomar parte neste programa. Claro que, se se fala no final de um século e no princípio do seguinte, se têm duas escolhas, ambas de igual dificuldade. Uma é passar em revista a matemática dos últimos cem anos, a outra é prever a matemática dos cem seguintes. Escolhi a tarefa mais difícil. Toda a gente pode fazer previsões e não vamos cá estar para saber se estávamos errados. Mas dar uma ideia do passado é uma coisa de que todos podem discordar.

Tudo o que posso fazer é dar uma opinião pessoal. É impossível cobrir tudo e, em particular, omitirei partes relevantes da história, em parte por não ser um especialista, em parte porque são tratadas noutro sítio. Por exemplo, não direi nada sobre os grandes acontecimentos na área entre a lógica e a computação, associados aos nomes de pessoas como Hilbert, Gödel e Turing. Nem falarei muito sobre as aplicações da matemática, com excepção da física fundamental, pois são muito numerosas e requerem tratamento especial. Cada uma exigiria, para si, uma conferência. Talvez venham a ouvir mais sobre elas nalgumas das conferências no decorrer deste encontro. Mais, não vale a pena dar apenas uma lista de teoremas ou mesmo uma lista de matemáticos famosos nos últimos cem anos. Seria um exercício monótono. Assim vou tentar seleccionar alguns tópicos que acho representativos em muitos aspectos e sublinhar o que aconteceu.

Primeiro uma observação geral. Os séculos são números grosseiros. Não acreditamos realmente que, após cem anos, uma coisa pára e recomeça. Assim, ao descrever a matemática do século XX, não me vou preocupar com datas. Se uma coisa começou na década de 1890 e continuou na de 1900, ignorarei esse detalhe. Comportar-me-ei como um astrónomo e trabalharei com números bastante aproximados. Na realidade muitas coisas começaram no século XIX e só foram conseguidas no século XX.

Uma das dificuldades deste exercício é que é muito árduo colocarmo-nos na posição do que era ser matemático em 1900, pois muita da matemática do último século foi absorvida pela nossa cultura, por nós. É muito difícil imaginar um tempo em que as pessoas não pensavam nos nossos termos. De facto, se se faz uma descoberta em matemática realmente importante, acaba-se por ser completamente omitido. É-se simplesmente absorvido pelo conhecimento anterior. Voltando atrás, tem de se tentar imaginar a situação numa era diferente em que as pessoas não pensavam do mesmo modo.

> Foi Poincaré quem deu os passos pioneiros e quem previu que a topologia seria um ingrediente importante na matemática do século XX. A propósito, Hilbert, que elaborou a sua famosa lista de problemas, não. A topologia mal aparecia na sua lista.

Do local ao global

Vou começar por listar alguns temas e falar sobre eles. O primeiro cabe, de uma forma lata, no que se pode chamar a passagem do local ao global. No período clássico as pessoas, em geral, estudariam coisas numa escala pequena, coordenadas locais, etc. Neste século a ênfase mudou para a tentativa de compreensão do comportamento global, em grande escala. E, porque o comportamento global é mais difícil, muita dessa compreensão é feita qualitativamente e as ideias topológicas tornaram-se muito importantes. Foi Poincaré quem deu os passos pioneiros e quem previu que a topologia seria um ingrediente importante na matemática do século XX. A propósito, Hilbert, que elaborou a sua famosa lista de problemas, não. A topologia mal aparecia na sua lista. Mas para Poincaré era muito claro que seria um factor importante.

Deixem-me listar algumas áreas e podem ver o que tenho em mente. Consideremos, por exemplo, a análise complexa ("teoria das funções" como se chamava), que estava no centro da matemática no século XIX, trabalho de grandes figuras como Weierstrass. Para elas, uma função era uma função de uma variável complexa e para Weierstrass uma função era uma série de potências. Qualquer coisa em que se podiam pôr as mãos, escrever e descrever explicitamente, ou uma fórmula. As funções eram fórmulas, eram coisas explícitas. Mas depois o trabalho de Abel, Riemann e subsequentes afasta-nos desse ponto de vista e as funções passaram a ser definidas não apenas por fórmulas explícitas mas mais pelas suas propriedades globais, onde estavam as suas singularidades, onde estavam os domínios, onde tomavam os seus valores. Estas propriedades globais eram a característica da função que a distinguia. O desenvolvimento local era só um modo de a considerar.

> No início as curvas e as superfícies eram coisas que se podiam realmente ver no espaço. Dimensões mais altas eram ligeiramente fictícias, coisas que se podiam imaginar matematicamente mas que talvez se não levassem a sério.

Uma história semelhante ocorre com as equações diferenciais. Originalmente para resolver uma equação diferencial as pessoas teriam procurado uma solução local explícita, qualquer coisa que se podia escrever e que se podia agarrar. Com a evolução das coisas as soluções tornaram-se implícitas. Não era necessariamente possível descrevê-las usando fórmulas elegantes. As singularidades da solução eram as coisas que, na verdade, determinavam as suas propriedades globais. Muito semelhante no espírito, mas diferente no pormenor, ao que aconteceu na análise complexa.

Em geometria diferencial o trabalho clássico de Gauss e outros descreveria pequenas porções de espaço, bocados pequenos de curvatura e as equações locais que descrevem a geometria local. A mudança para a grande escala é bastante natural ao querer-se compreender o retrato global das superfícies curvas e a topologia que as acompanha. Quando se vai do pequeno ao grande as características topológicas passam a ser as mais significativas.

Embora à primeira vista não caiba no mesmo quadro, a teoria de números teve um desenvolvimento semelhante. Os especialistas distinguem entre aquilo a que chamam a "teoria local", onde se referem apenas a um primo, um primo de cada vez, ou a um conjunto finito de primos, e a "teoria global", onde se consideram todos os primos simultaneamente. Esta analogia entre primos e pontos, o local e o global, teve um efeito importante no desenvolvimento da teoria de números e as ideias da topologia tiveram o seu impacto.

Em física, claro, a física clássica tem a ver com a história local, em que se escreve a equação diferencial que rege o comportamento em pequena escala, e depois tem de se estudar o comportamento em grande escala de um sistema físico. Toda a física, na verdade, tem a ver com a previsão do que acontecerá quando se vai da escala pequena, onde se compreende o que está a acontecer, para uma escala grande e tirar as conclusões.

Aumento das dimensões

O meu segundo tema é diferente. É aquilo a que chamo aumento das dimensões. De novo, começando com a teoria clássica das variáveis complexas, a teoria da variável complexa clássica era, principalmente, a teoria de uma variável complexa estudada em pormenor, com grande preciosismo. A mudança para duas ou mais variáveis teve lugar, fundamentalmente, neste século e nessa área surgem fenómenos novos. Há características completamente novas e a teoria de *n* variáveis tornou-se cada vez mais dominante, um dos maiores sucessos deste século.

De novo, no passado, os geómetras diferenciais estudariam principalmente curvas e superfícies. Hoje estudamos a geometria de variedades de dimensão *n* e tem de se ser cuidadoso para compreender que esta foi uma passagem maior. No início as curvas e as superfícies eram coisas que se podiam realmente ver no espaço. Dimensões mais altas eram ligeiramente fictícias, coisas que se podiam imaginar matematicamente mas que talvez se não levassem a sério. A ideia de levar estas coisas a sério e de as estudar em pé de igualdade é, na verdade, um produto do século XX. Mais, para os nossos predecessores do século XIX, estaria longe de ser tão óbvio pensar em aumentar o número de funções, estudar não só uma mas várias funções ou funções vectoriais. Assim testemunhámos um aumento tanto no número de variáveis independentes como dependentes.

O trabalho de Hamilton sobre os quaterniões foi, provavelmente, a surpresa maior e teve um impacto enorme, causado, de facto, por ideias relacionadas com a física.

A álgebra linear teve sempre a ver com mais variáveis mas aí o aumento de dimensões ia ser mais drástico. De dimensões finitas para infinitas, do espaço vectorial para o espaço de Hilbert com um número infinito de variáveis. A análise esteve envolvida claro. Depois de funções de muitas variáveis podem ter-se funções de funções, funcionais. Estes são funções no espaço das funções. Têm todas, essencialmente, variáveis em número infinito e a isto chamamos cálculo das variações. Uma história análoga passar-se-ia com as funções gerais (não lineares). Assunto antigo mas que adquiriu proeminência no século XX. Este é portanto o meu segundo tema.

Do comutativo ao não comutativo

Um terceiro tema é a passagem do comutativo para o não comutativo. É talvez uma das características mais distintivas da matemática no século XX, da álgebra em particular. O lado não comutativo da álgebra tem sido extremamente proeminente e, claro, as suas raízes estão no século XIX. As raízes são várias. O trabalho de Hamilton sobre os quaterniões foi, provavelmente, a surpresa maior e teve um impacto enorme, causado, de facto, por ideias relacionadas com a física. Houve o trabalho de Grassmann sobre álgebras exteriores, outro sistema algébrico hoje em dia absorvido pela nossa teoria das formas diferenciais. Claro que o trabalho de Cayley em matrizes, com base na álgebra linear, e o de Galois em teoria de grupos são outros pontos altos.

Todos estes são caminhos ou componentes diferentes que formam a base da introdução da multiplicação não comutativa na álgebra que, como disse, é a base da maquinaria algébrica do século XX. Não lhes damos importância mas, no século XIX, os exemplos atrás foram descobertas tremendas. As aplicações destas ideias surgiram, muito surpreendentemente, em direcções diferentes. As aplicações em física das matrizes e da multiplicação não comutativa surgiram com a teoria quântica. As relações de comutatividade de Heisenberg são um exemplo importantíssimo de uma aplicação significante da álgebra não comutativa em física. Posteriormente von Neumann fez a extensão na sua teoria das álgebras de operadores.

A teoria de grupos foi também uma característica dominante do século XX e voltarei a este ponto mais tarde.

Do linear ao não linear

O meu tópico seguinte é a passagem do linear ao não linear. Grandes partes da matemática clássica são ou basicamente lineares ou, se não exactamente lineares, aproximadamente lineares, estudadas por algum tipo de desenvolvimento perturbativo. Os fenómenos realmente não lineares são muito mais difíceis e, em grande medida, só foram abordados seriamente neste século.

A história começa com a geometria, geometria Euclidiana, geometria do plano, do espaço, das rectas, tudo linear, e depois, em várias etapas de geometria não euclidiana, até à geometria mais geral de Riemann, onde as coisas são fundamentalmente não lineares. Nas equações diferenciais o estudo sério de fenómenos não lineares chamou a atenção para uma variedade de novos fenómenos que não surgem nos tratamentos clássicos. Podia só seleccionar dois aqui, solitões e caos, dois aspectos muito diferentes da teoria das equações diferenciais, que se tornaram extremamente proeminentes e populares neste século. Representam alternativas extremas. Os solitões representam comportamento de equações diferenciais inesperadamente organizado e o caos representa comportamento inesperadamente desorganizado. Ambos estão presentes em regimes diferentes, são interessantes e importantes mas, basicamente, são fenómenos não lineares. Uma vez mais, pode encontrar-se a história inicial de algum do trabalho sobre solitões na última parte do século XIX, mas muito ligeiramente apenas.

Em física, claro, as equações de Maxwell (as equações fundamentais do electromagnetismo) são equações diferenciais parciais lineares. Em contraste, as famosas equações de Yang-Mills, são equações não lineares que se supõe governarem as forças envolvidas na estrutura da matéria. As equações são não lineares porque as equações de Yang-Mills são, essencialmente, versões matriciais das equações de Maxwell e o facto de as matrizes não comutarem é a razão do termo não linear nas equações. Vemos aqui uma ligação interessante entre não linearidade e não comutatividade. A não comutatividade leva à não linearidade de um tipo particular, o que é especialmente interessante e importante.

Geometria versus Álgebra

Até agora escolhi alguns temas gerais. Quero falar agora sobre uma dicotomia em matemática, sempre connosco, oscilando de um para o outro lado, que me dá uma oportunidade para fazer algumas especulações ou observações filosóficas. Refiro-me à dicotomia entre geometria e álgebra. A geometria e a álgebra são os dois pilares formais da matemática, ambos muito antigos. A geometria é anterior aos Gregos, a álgebra existe desde os árabes e indianos, de modo que ambas têm sido fundamentais para a matemática, mas a sua relação tem sido difícil.

Deixem-me começar com a história do assunto. A geometria Euclidiana é o exemplo mais importante de uma teoria matemática e era firmemente geométrica até à introdução, por Descartes, das coordenadas algébricas naquilo a que hoje chamamos o plano Cartesiano. Foi uma tentativa de redução do pensamento geométrico à manipulação algébrica. Foi, claro, uma descoberta enorme ou um grande ataque à geometria por parte dos algebristas. Se analisarmos comparativamente os trabalhos de Newton e Leibniz, eles pertencem a tradições diferentes. Newton era fundamentalmente um geómetra, Leibniz era funda-

Se analisarmos comparativamente os trabalhos de Newton e Leibniz, eles pertencem a tradições diferentes. Newton era fundamentalmente um geómetra, Leibniz era fundamentalmente um algebrista e havia boas e profundas razões para isso.

mentalmente um algebrista e havia boas e profundas razões para isso. Para Newton a geometria, ou o cálculo como ele o desenvolveu, era a tentativa matemática para descrever as leis da natureza. Interessava-se pela física em sentido lato e a física tinha lugar no mundo da geometria. Se se queria perceber como as coisas funcionavam pensava-se em termos do mundo físico, pensava-se em termos de figuras geométricas. Quando desenvolveu o cálculo quilo tão próximo quanto possível do contexto físico que estava por trás. Usou pois argumentos geométricos porque assim se mantinha próximo do significado. Por seu lado, Leibniz tinha a intenção, a ambiciosa intenção, de formalizar toda a matemática, tornando-a uma grande máquina algébrica. Era uma abordagem totalmente oposta à de Newton e havia notações muito diferentes. Como sabemos, na grande controvérsia entre Newton e Leibniz, a notação de Leibniz acabou por ganhar. Seguimos o seu modo de escrever derivadas parciais. O espírito de Newton ainda lá está mas esteve enterrado durante muito tempo.

Até ao final do século XIX, há cem anos, as duas figuras mais importantes eram Poincaré e Hilbert. Já os mencionei e, grosso modo, são discípulos de Newton e Leibniz respectivamente. O pensamento de Poincaré era mais no espírito da geometria, topologia, usando essas ideias como ferramentas fundamentais. Hilbert era mais um formalista, queria axiomatizar, formalizar e dar tratamentos rigorosos e formais. Pertencem claramente a tradições diferentes embora qualquer grande matemático não possa ser facilmente classificado.

Ao preparar esta conferência pensei dever apresentar mais alguns nomes da nossa geração presente que representam a continuação daquelas tradições. É muito difícil falar sobre pessoas vivas, quem pôr na lista? Pensei então para mim, quem se importaria de ser posto num dos lados de uma lista tão famosa? Escolhi portanto dois nomes: Arnold, como o herdeiro da tradição de Poincaré-Newton, e Bourbaki, como, penso, o discípulo mais famoso de David Hilbert. Arnold não esconde o facto de a sua visão da mecânica, da física, ser basicamente geométrica, começando com Newton. Tudo o mais, com a excepção de algumas pessoas como Riemann, que foi um pouco um desvio, foi um equívoco. Bourbaki tentou continuar o programa formal de Hilbert de axiomatização e formalização da matemática, com algum sucesso em grande medida. Cada ponto de vista tem os seus méritos, mas há tensão entre eles.

Assim a intuição ou a percepção espaciais são ferramentas poderosíssimas e aí reside a razão de a geometria ser uma parte tão poderosa da matemática, não apenas para coisas que são claramente geométricas mas até para coisas que o não são.

Deixem-me explicar a minha própria visão da diferença entre geometria e álgebra. Que a geometria tem a ver com o espaço é indiscutível. Se olhar para a assistência nesta sala vejo imenso, num só segundo ou microsegundo absorvo uma quantidade vasta de informação e tal não é acidental. Os nossos cérebros foram construídos de tal modo que estão extremamente ligados à visão. A visão, segundo amigos que trabalham em neurofisiologia, usa completamente qualquer coisa como 80 ou 90% do córtex cerebral. Há cerca de 17 centros diferentes no cérebro, cada um deles especializado numa parte diferente do processo da visão. Algumas partes estão relacionadas com a horizontalidade, outras com a verticalidade, outras com a cor, a perspectiva e, finalmente, algumas com o significado e a interpretação. Compreender, e interpretar, o mundo que nós vemos é uma parte muito importante da nossa evolução. Assim a intuição ou a percepção espaciais são ferramentas poderosíssimas e aí reside a razão de a geometria ser uma parte tão poderosa da matemática, não apenas para coisas que são claramente geométricas mas até para coisas que o não são. Tentamos dar-lhe forma geométrica porque isso nos permite usar a nossa intuição.

Isso é bastante claro se tentarmos explicar uma questão de matemática a um estudante ou a um colega. Tem-se um argumento longo e difícil e finalmente o estudante compreende. O que é que o estudante diz? "Estou a ver!" Ver é sinónimo de compreender e usamos a palavra "percepção" querendo dizer ambas. Pelo menos na língua inglesa isto é verdade. Seria interessante compará-lo com outras línguas. Acho que é muito importante que a mente humana tenha evoluído com esta capacidade enorme de absorver uma quantidade vasta de informação, por acção visual instantânea, e a matemática apodera-se disso e aperfeiçoa-o.

A álgebra, por outro lado (e podem não ter pensado nisso deste modo), tem a ver basicamente com o tempo. Qualquer que seja o tipo de álgebra que se faça, uma sequência de operações é realizada uma após a outra e "uma após a outra" significa que se tem de ter tempo. Não se pode imaginar a álgebra num universo estático, contudo a geometria é essencialmente estática. Posso apenas sentar-me aqui e ver, pode nada mudar, mas posso ver ainda. A álgebra, contudo, tem a ver com o tempo porque se têm operações que são executadas sequencialmente e, quando digo "álgebra", não me refiro apenas à álgebra moderna. Qualquer algoritmo, qualquer processo de cálculo, é uma sequência de passos executados um após outro. O computador torna isso muito claro. O computador moderno recebe a sua informação numa carreira de zeros e uns e dá a resposta.

A álgebra tem a ver com a manipulação no **tempo** e a geometria com o **espaço**. São dois aspectos ortogonais do mundo e representam dois pontos de vista diferentes em matemática. Portanto a discussão ou diálogo, no passado, entre matemáticos sobre a importância relativa da geometria e da álgebra representa qualquer coisa de muito, muito fundamental.

> Sou aqui um pouco duro com os algebristas, mas fundamentalmente o objectivo da álgebra foi sempre produzir uma fórmula que se pudesse introduzir numa máquina, rodar uma manivela e obter a resposta.

Claro que não adianta pensar nisto como uma discussão em que um lado perde e o outro ganha. Gosto de pensar nisto sob a forma de uma analogia. "Deve-se ser apenas algebrista ou geómetra?" é como dizer "Prefere ser surdo ou cego?" Se se é cego não se vê o espaço, se se é surdo não se ouve e ouvir tem lugar no tempo. Tudo considerado, é preferível ter ambas as faculdades.

Em física há uma divisão análoga, aproximadamente paralela, entre os conceitos e as experiências. Há duas partes na física: teoria - conceitos, ideias, palavras, leis - e o equipamento experimental. Acho que os conceitos, num sentido lato, são geométricos pois referem-se a coisas que ocorrem no mundo real. Uma experiência, por outro lado, é mais como um cálculo algébrico. Faz-se qualquer coisa no tempo, medem-se números, inserem-se em fórmulas, contudo os conceitos por trás das experiências são parte da tradição geométrica.

Uma maneira de enquadrar a dicotomia num contexto mais filosófico ou literário é dizer que, para o geómetra, a álgebra é aquilo a que se pode chamar a "Oferta Faustiana". Como é conhecido, na história de Goethe, o diabo ofereceu a Fausto o que ele quisesse (no caso, o amor de uma linda mulher) em troca da venda da sua alma. A álgebra é a oferta feita ao matemático pelo diabo. Diz o diabo: "Dou-te esta máquina poderosa, responderá a qualquer pergunta que queiras. Tudo o que tens de fazer é dar-me a tua alma. Desiste da geometria e terás esta máquina maravilhosa". [Hoje em dia pode pensar-se nela como sendo um computador!] Claro que nós gostamos de ter ambas as coisas, provavelmente enganaríamos o diabo, fingiríamos a venda da nossa alma sem o revelar. Apesar de tudo o perigo para a nossa alma está lá, pois, ao passar-se para o cálculo algébrico, basicamente deixa-se de pensar, deixa-se de pensar geometricamente, deixa-se de pensar no significado.

Sou aqui um pouco duro com os algebristas, mas fundamentalmente o objectivo da álgebra foi sempre produzir uma fórmula que se pudesse introduzir numa máquina, rodar uma manivela e obter a resposta. Pegava-se em qualquer coisa que tinha um significado, convertia-se numa fórmula e obtinha-se uma resposta. Nesse processo não é preciso pensar mais naquilo a que correspondem na geometria os diferentes passos na álgebra. Perde-se perspectiva que pode ser importante em etapas diferentes. Não se deve abandoná-la completamente. Pode-se querer voltar a ela mais tarde. É isto que eu quero dizer com a Oferta Faustiana. Tenho a certeza que é provocatória.

A escolha entre geometria e álgebra deu origem a híbridos que confundem ambas e a divisão entre álgebra e geometria não é tão simples e ingénua como acabei de dizer. Por exemplo, os algebristas usam diagramas frequentemente. O que é um diagrama se não uma concessão à intuição geométrica?

Técnicas em Comum

Deixem-me agora voltar a falar não tanto acerca de temas mas talvez em termos de técnicas e métodos comuns que foram usados. Quero descrever um certo número de métodos comuns que foram aplicados numa variedade de campos. O primeiro é:

Teoria da Homologia

Tradicionalmente a teoria da homologia começa como um ramo da topologia. Refere-se à situação seguinte. Tem-se um espaço topológico complicado e quer extrair-se alguma informação simples que envolva a contagem de buracos, alguns invariantes lineares aditivos que se possam associar a um espaço complicado. Se se quiser, é uma construção de invariantes lineares numa situação não linear. Geometricamente pensa-se em ciclos que se podem somar e subtrair e obtém-se então aquilo a que se chama o grupo de homologia de um espaço. A homologia é uma ferramenta algébrica fundamental, inventada na primeira metade do século como maneira de obter alguma informação acerca dos espaços topológicos. Extrai-se alguma álgebra da geometria.

A homologia aparece também noutros contextos. Uma outra fonte da teoria da homologia começa com Hilbert e o estudo de polinómios. Os polinómios são funções não lineares e podem multiplicar-se para se obterem graus mais altos. Hilbert teve grande visão ao considerar "ideais", combinações lineares de polinómios, com zeros comuns. Procurou geradores destes ideais. Esses geradores podiam ser redundantes. Considerou as relações e depois procurou relações entre relações. Obteve uma hierarquia de tais relações, chamadas "syzygies"[4] de Hilbert, e esta teoria era uma maneira sofisticada de reduzir uma situação não linear, o estudo dos polinómios, a uma situação linear. Hilbert produziu, essencialmente, um sistema complicado de relações lineares expressando alguma da informação sobre objectos não lineares, os polinómios.

Há grande paralelismo entre esta teoria algébrica e a teoria topológica, estando elas agora fundidas naquilo a que se chama "álgebra homológica". Um dos grandes triunfos dos anos 50 em geometria algébrica foi o desenvolvimento da teoria da cohomologia dos feixes e a sua extensão à geometria analítica pela escola francesa de Leray, Cartan, Serre e Grothendieck, na qual se tem uma combinação das ideias topológicas de Riemann-Poincaré, as ideias algébricas de Hilbert e ainda alguma análise.

Acontece que a teoria da homologia tem ainda aplicações mais amplas noutros ramos da álgebra. Podem introduzir-se grupos de homologia, que são objectos lineares associados a objectos não lineares. Podem tomar-se, por exemplo, grupos, grupos finitos, ou álgebras de Lie. Ambos têm grupos de homologia associados. Há, através do

[4] À falta de uma tradução adequada talvez se possa usar "relações polinomiais". Simplificando exageradamente, um exemplo, para $p(x) = x^2$, $q(y) = y^2$ e $r(x,y)=xy$, é $pq = r^2$. Devo esta informação ao meu colega Alexander Kovacec.

grupo de Galois, importantes aplicações da teoria da homologia na teoria de números. Assim a teoria da homologia provou ser uma das ferramentas poderosas para analisar uma variedade de situações, uma característica típica da matemática do século XX.

Pode também pensar-se na K-Teoria do modo seguinte, como uma tentativa de considerar a teoria de matrizes, onde o produto de matrizes não é comutativo, e procurar construir invariantes lineares ou abelianos de matrizes.

K-Teoria

Outra técnica, semelhante à teoria da homologia em muitos aspectos, que tem sido largamente aplicada e se estende por muitas partes da matemática, teve origem posterior. Não emergiu até meados do século XX embora seja algo com raízes muito lá para trás também. É a chamada "K-Teoria" e está, na verdade, fortemente relacionada com a teoria da representação. A teoria da representação de, digamos, grupos finitos começa no último século mas a sua forma moderna, a K-Teoria, tem origem mais recente. Pode também pensar-se na K-Teoria do modo seguinte, como uma tentativa de considerar a teoria de matrizes, onde o produto de matrizes não é comutativo, e procurar construir invariantes lineares ou abelianos de matrizes. Traços, dimensões e determinantes são invariantes abelianos da teoria das matrizes e a K-Teoria é uma maneira sistemática de tentar lidar com eles, chamando-se-lhe, por vezes, "álgebra linear estável". A ideia é a de que, se tivermos duas matrizes grandes, a matriz *A* e a matriz *B*, que não comutam, elas passarão a comutar se colocadas em posições ortogonais em blocos diferentes. Como num espaço grande as coisas podem mudar de posição então, de forma aproximada, pode pensar-se que isso vai ser suficientemente bom para nos dar alguma informação. É a base da K-Teoria como técnica. É semelhante à teoria da homologia na medida em que ambas tentam extrair informação linear de situações não lineares.

Em geometria algébrica estas ideias foram introduzidas, com grande êxito, por Grothendieck, em relação muito próxima com a história envolvendo a teoria dos feixes discutida há momentos e em ligação com o seu trabalho sobre o teorema de Riemann-Roch.

Em topologia Hirzebruch e eu copiámos estas ideias e aplicámo-las num contexto puramente topológico. Em certo sentido enquanto o trabalho de Grothendieck está relacionado com o trabalho de Hilbert sobre "syzygies" o nosso trabalho estava mais relacionado com o trabalho de Riemann e Poincaré sobre homologia, usando funções contínuas em vez de polinómios. Teve também um papel na teoria do índice dos operadores elípticos, em análise linear[5]. Numa direcção diferente, a vertente algébrica da história, com aplicação potencial à teoria dos números, foi depois desenvolvido por Milnor, Quillen e outros. Nessa direcção levou a muitas questões interessantes.

Na análise funcional o trabalho de muita gente, incluindo Kasparov, estendeu a K-Teoria contínua à situação das álgebras-C* não comutativas. As funções contínuas num espaço formam, relativamente à multiplicação, uma álgebra comutativa, mas álgebras não comutativas análogas surgem noutras situações e a análise funcional é um ambiente natural para questões deste tipo.

A K-Teoria é assim outra área onde uma variedade de partes diferentes da matemática se prestam a este formalismo bastante simples embora, em cada caso, haja questões técnicas muito difíceis específicas da área, que se ligam com outras partes do assunto. Não é uma ferramenta uniforme, é mais um quadro uniforme, com analogias e semelhanças entre uma parte e a outra.

Muito deste trabalho foi também estendido por Alain

[5] Um ponto alto na carreira de Atiyah. Ver *An Interview with Michael Atiyah*, Roberto Minio, The Mathematical Intelligencer, vol. 6, #1, 1984.

Connes à "geometria diferencial não comutativa".

É muito interessante que, muito recentemente, Witten trabalhando em teoria das cordas (as ideias mais modernas em física fundamental) tenha descoberto maneiras muito curiosas de como a K-Teoria parece fornecer um ambiente natural para as chamadas "quantidades conservadas". Enquanto que no passado se pensava que a teoria da homologia era o quadro natural para aquelas, parece agora que a K-Teoria fornece uma resposta melhor.

Grupos de Lie

Outro conceito unificador, que não é apenas uma técnica, é o de grupos de Lie. Ora os grupos de Lie, e refiro-me basicamente aos grupos ortogonal, unitário e simpléctico mais alguns grupos excepcionais, desempenharam um papel muito importante na história da matemática do século XX. De novo, vêm do século XIX. Sophus Lie era, claro, um matemático norueguês do século XIX e ele, Felix Klein e outros "deram um empurrão" à "teoria dos grupos contínuos", como era chamada. Originalmente, para Klein, era uma maneira de tentar unificar os tipos diferentes de geometria, geometria euclidiana, geometria não euclidiana. Embora este assunto começasse no século XIX, "levantou voo" realmente no século XX. O século XX tem sido fortemente dominado pela teoria dos grupos de Lie como uma espécie de quadro unificador onde estudar muitas questões diferentes.

Mencionei o papel da geometria nas ideias de Klein. Para Klein, as geometrias eram espaços homogéneos, onde as coisas se podiam mover sem distorção, e eram portanto determinadas por um grupo de isometrias associado. O grupo Euclidiano dava a geometria Euclidiana, a geometria hiperbólica vinha de outro grupo de Lie. Assim cada geometria homogénea correspondia a um grupo de Lie diferente. Mas mais tarde, na sequência do trabalho de Riemann em geometria, as pessoas estavam mais preocupadas com geometrias que não eram homogéneas, onde a curvatura variava de lugar para lugar e não havia simetrias globais do espaço.

Contudo os grupos de Lie tiveram ainda um papel importante dado surgirem a nível infinitesimal já que no espaço tangente temos coordenadas euclidianas. Assim no espaço tangente, infinitesimamente, a teoria dos grupos de Lie reaparece mas, porque se têm de comparar pontos diferentes em lugares diferentes, temos de deslocar as coisas de alguma maneira de forma a lidar com os diferentes grupos de Lie. Foi esta a teoria desenvolvida, realmente, por Elie Cartan, a base da geometria diferencial moderna, e foi também ela o quadro essencial à teoria da relatividade de Einstein. A teoria de Einstein deu, claro, um impulso enorme a todo o desenvolvimento da geometria diferencial.

O século XX tem sido fortemente dominado pela teoria dos grupos de Lie como uma espécie de quadro unificador onde estudar muitas questões diferentes.

Continuando ao longo do século XX, o aspecto global, que já mencionei atrás, envolveu grupos de Lie e geometria diferencial ao nível global. Um desenvolvimento importante, caracterizado pelo trabalho de Borel e Hirzebruch, veio trazer informação sobre as chamadas "classes características". Estas são invariantes topológicos combinando três componentes chave, os grupos de Lie, a geometria diferencial e a topologia, e, claro, a álgebra associada com o próprio grupo.

Numa direcção mais analítica obtemos aquilo a que agora se chama análise harmónica não comutativa. É a generalização da teoria de Fourier onde as séries ou integrais de Fourier correspondem, basicamente, aos grupos de Lie comutativos S^1 e R. Quando se substituem estes por grupos de Lie mais complicados obtém-se uma teoria muito bonita e elaborada que combina a teoria da representação dos grupos de Lie e a análise. Essencialmente este é o trabalho da vida de Harish-Chandra.

Na teoria de números todo o "programa de Langlands", como é conhecido, que está intimamente relacionado também com a teoria de Harish-Chandra, decorre no âmbito da teoria dos grupos de Lie. Para cada grupo de Lie tem-se a teoria de números e o programa de Langlands associados, que foi levado a cabo até certo ponto. Influenciou uma grande parte do trabalho em teoria de números algébrica na segunda metade deste século. O estudo das formas modulares enquadra-se nesta parte da história, incluindo o trabalho de Andrew Wiles sobre o último Teorema de Fermat.

Podia pensar-se que os grupos de Lie são particularmente relevantes apenas em contextos geométricos, dada a necessidade de variação contínua, mas os grupos análogos sobre corpos finitos originam grupos finitos e a maior parte dos grupos finitos surge deste modo. Portanto as técnicas de algumas partes da teoria de Lie aplicam-se mesmo numa situação discreta para corpos finitos ou corpos locais. Há imenso trabalho que é álgebra pura, trabalho a que, por exemplo, está associado o nome de George Lusztig, onde se estuda a teoria da representação de tais grupos finitos e onde muitas das técnicas que mencionei antes têm correspondentes.

Acho que a descoberta, apenas, deste Monstro é o resultado mais sensacional da classificação. Sucede que o Monstro é um animal muito interessante que está ainda agora a ser compreendido. Tem ligações inesperadas com grandes partes de outras partes da matemática, com formas modulares elípticas, e até com a física teórica e a teoria quântica dos campos.

Grupos Finitos

Chegamos assim aos grupos finitos, o que me faz lembrar que a classificação dos grupos simples finitos é algo onde tenho de admitir uma coisa. Há alguns anos fui entrevistado, quando a história dos grupos simples finitos estava quase concluída, e perguntaram-me o que é que eu achava. Fui algo precipitado ao dizer que não achava que fosse muito importante. A razão era que a classificação dos grupos simples finitos nos dizia que a maior parte dos grupos simples era formada pelos que conhecíamos e que havia uma lista de algumas excepções. Num certo sentido fechou a área, não abriu as coisas. Não fico muito entusiasmado quando as coisas fecham em vez de abrir mas, claro, muitos amigos meus que trabalham nesta área ficaram muito, muito zangados. Depois disso tive de usar uma espécie de colete à prova de bala!

Há um ponto importante. Chamei realmente a atenção para que na lista dos chamados "grupos esporádicos" ao maior era dado o nome de "Monstro". Acho que a descoberta, apenas, deste Monstro é o resultado mais sensacional da classificação. Sucede que o Monstro é um animal muito interessante que está ainda agora a ser compreendido. Tem ligações inesperadas com grandes partes de outras partes da matemática, com formas modulares elípticas, e até com a física teórica e a teoria quântica dos campos. Este foi um produto interessante da classificação. As classificações, só por si, como digo, fecham a porta, mas o Monstro abriu uma porta.

Impacto da Física

Deixem-me passar agora para um tema diferente, o impacto da física. Ao longo da história a física tem tido uma longa associação com a matemática e largas partes da matemática, o cálculo por exemplo, foram desenvolvidas para resolver problemas em física. Isto tinha-se tornado talvez menos evidente em meados do século XX, com a maior parte da matemática pura a progredir muito bem independentemente da física, mas no último quartel deste século as coisas mudaram drasticamente. Deixem-me tentar, brevemente, passar em revista a interacção da física com a matemática e com a geometria em particular.

No século XIX Hamilton desenvolveu a mecânica clássica, introduzindo aquilo a que hoje se chama formalismo Hamiltoniano. A mecânica clássica levou ao que chamamos "geometria simpléctica". É um ramo da geometria que podia ter sido estudado muito mais cedo mas, na verdade, não foi estudado seriamente até às duas últimas décadas. Acontece que é uma parte da geometria muito rica. A geometria, no sentido em que estou a usar aqui a palavra, tem três ramos, geometria riemanniana, geometria complexa e geometria simpléctica, correspondentes aos três tipos de grupos de Lie. Destas a geometria simpléctica é a mais recente, de alguns modos, possivelmente a mais interessante e, certamente, uma com relações extremamente próximas da física por causa das suas origens históricas em ligação com a mecânica hamiltoniana e, mais recentemente, com a mecânica quântica. Ora, as equações de Maxwell, que mencionei antes, as equações lineares fundamentais do electromagnetismo, foram a motivação para o trabalho de Hodge sobre formas harmónicas e a aplicação à geometria algébrica. Veio a ser uma teoria extremamente frutífera que tem sustentado muito do trabalho em geometria desde os anos 30.

Já mencionei a relatividade geral e o trabalho de Einstein. A mecânica quântica, claro, forneceu uma contribuição enorme. Não só nas relações de comutatividade mas, mais significativamente, na ênfase no espaço de Hilbert e na teoria espectral.

De um modo mais concreto e óbvio, a cristalografia na sua forma clássica tratava das simetrias das estruturas cristalinas. Os grupos de simetria finitos que podem ocorrer em torno dos pontos começaram por ser estudados pelas suas aplicações à cristalografia. Neste século as aplicações mais profundas da teoria de grupos vieram a ter relações com a física. As partículas elementares que se supõe constituírem a matéria parecem ter simetrias escondidas ao nível mais pequeno, onde há alguns grupos de Lie à espreita, que não se podem ver mas cujas simetrias se manifestam quando se estuda o comportamento real das partículas. Postula-se pois um modelo do qual a simetria é um ingrediente essencial e as diferentes teorias que agora prevalecem têm incorporados como grupos de simetria primordiais certos grupos de Lie básicos, como *SU(2)* e *SU(3)*. Assim estes grupos de Lie aparecem como blocos constitutivos da matéria.

> Com isto quero dizer que os físicos, baseados na sua compreensão da teoria física, foram capazes de prever que certas coisas seriam verdadeiras na matemática. Não se trata, claro, de uma demonstração rigorosa mas é apoiada por uma intuição poderosa, casos especiais e analogias.

Nem são os grupos de Lie compactos os únicos a aparecer. Alguns grupos de Lie não compactos aparecem em física, como o grupo de Lorentz. Foram os físicos os primeiros a começar o estudo da teoria da representação dos grupos de Lie não compactos. São representações que têm de ter lugar no espaço de Hilbert pois, para grupos compactos, as representações irredutíveis têm dimensão finita mas os grupos não compactos exigem dimensões infinitas. Foram os físicos quem compreendeu isto primeiro.

No último quartel do século XX, aquele que acabou, houve uma incursão enorme de novas ideias da física na matemática. É talvez uma das histórias mais notáveis de todo o século. Precisa de uma conferência só para si mas, basicamente, a teoria quântica dos campos e a teoria das cordas foram aplicadas de maneiras notáveis para obter novos resultados, ideias e técnicas em muitas partes da matemática. Com isto quero dizer que os físicos, baseados na sua compreensão da teoria física, foram capazes de prever que certas coisas seriam verdadeiras na matemática. Não se trata, claro, de uma demonstração rigorosa mas é apoiada por uma intuição poderosa, casos especiais e analogias. Estes resultados previstos pelos físicos têm sido, repetidamente, verificados pelos matemáticos e tem-se visto que estão, fundamentalmente, correctos embora seja muito difícil apresentar demonstrações e muitos deles não tenham ainda sido completamente demonstrados.

Tem havido portanto uma contribuição tremenda nesta direcção nos últimos 25 anos. Os resultados são extremamente detalhados. Não se trata dos físicos dizerem apenas "este é o tipo de coisa que deve ser verdade". Eles dizem "aqui está a fórmula precisa e eis os primeiros dez casos (envolvendo números com mais de 12 dígitos)". Dão respostas exactas a problemas complicados, não o tipo de coisas que se possam adivinhar, coisas para cujo cálculo se precisa de maquinaria. A teoria quântica dos campos forneceu um instrumento notável, muito difícil de compreender matematicamente mas que tem tido um bónus inesperado em termos de aplicações. Tem sido esta verdadeiramente a história emocionante dos últimos 25 anos.

Eis alguns dos ingredientes: o trabalho de Simon Donaldson em variedades de dimensão 4, o trabalho de Vaughan Jones sobre invariantes dos nós, a simetria por reflexão, os grupos quânticos e mencionei o Monstro apenas como um extra.

Sobre o que é este assunto? Como mencionei antes, o século XX viu uma mudança no número de dimensões acabando com um número infinito. Os físicos foram para além disso. Na teoria quântica dos campos estão realmente a tentar fazer um estudo, muito detalhado e em profundidade, do espaço de dimensão infinita. Os espaços de dimensão infinita com que eles trabalham são, tipicamente, espaços de funções de vários tipos. São muito complicados não só por a dimensão ser infinita mas porque têm álgebra, geometria e topologia complicadas também e há grandes grupos de Lie aqui e ali, grupos de Lie de dimensão infinita. Assim, como grandes partes da matemática do século XX tiveram a ver com o desenvolvimento da geometria, topologia, álgebra e análise em grupos de Lie e variedades de dimensão finita, esta parte da física diz respeito a tratamentos análogos em dimensões infinitas e, claro, é uma história muito diferente mas com compensações enormes.

Deixem-me explicar isto um pouco mais em detalhe. As teorias quânticas dos campos ocorrem no espaço e no tempo e o espaço supõe-se ser, realmente, tridimensional mas há modelos simplificados onde se considera uma dimensão. Nos espaço e tempo unidimensionais as coisas tipicamente encontradas pelos físicos são, em termos matemáticos, grupos como o grupo dos difeomorfismos de S^1 ou o grupo das aplicações diferenciáveis de S^1 num grupo de Lie compacto. Estes são dois exemplos, muito fundamentais, de grupos de Lie de dimensão infinita que surgem nas teorias quânticas dos campos nestas dimensões e são objectos matemáticos muito razoáveis que têm sido estudados pelos matemáticos desde há algum tempo.

Em tais teorias de dimensão *1+1* pode tomar-se uma superfície de Riemann para espaço-tempo e tal leva a novos resultados. Por exemplo, o espaço de moduli das superfícies de Riemann com um certo género é um objecto clássico que data do último século. A teoria quântica dos campos levou a resultados novos sobre a cohomologia destes espaços de moduli. Outro espaço de moduli bastante

Os chamados "grupos quânticos" vêm daqui também. Ora a coisa melhor acerca deles é o nome. Claramente não são grupos! Se me pedissem a definição de grupo quântico precisaria de mais meia hora. São objectos complicados mas não há dúvidas de que têm uma relação profunda com a teoria quântica.

semelhante é o espaço de moduli dos fibrados com grupo *G*, com curvatura zero, sobre uma superfície Riemanniana de género *g*. Estes espaços são muito interessantes e a teoria quântica dos campos fornece resultados precisos sobre eles. Em particular, há bonitas fórmulas para os volumes envolvendo valores das funções zeta.

Outra aplicação está relacionada com a contagem de curvas. Se considerarmos as curvas algébricas, com um grau dado, no plano e quisermos saber quantas, por exemplo, passam por uns tantos pontos caímos em problemas enumerativos da geometria algébrica, problemas que teriam sido clássicos no século passado. São muito difíceis. Foram resolvidos com maquinaria moderna chamada "cohomologia quântica", parte da história vinda da teoria quântica dos campos. Ou podem considerar-se questões mais difíceis sobre curvas não no plano mas em variedades curvas. Obtém-se outra história bonita com resultados explícitos com o nome de simetria por reflexão. Tudo isto vem da teoria quântica dos campos nas dimensões *1+1*.

> A segunda metade do século vinte foi muito mais aquilo a que chamo "era da unificação", onde se atravessam fronteiras, se levam as técnicas de uma área para a outra e, em grande medida, as coisas se tornaram híbridas.

Subindo uma dimensão, onde temos o espaço bidimensional e o tempo unidimensional, é aí que surge a teoria de Vaughan Jones de invariantes dos nós. Teve uma interpretação ou explicação elegante em termos da teoria quântica dos campos.

Os chamados "grupos quânticos" vêm daqui também. Ora a coisa melhor acerca deles é o nome. Claramente não são grupos! Se me pedissem a definição de grupo quântico precisaria de mais meia hora. São objectos complicados mas não há dúvidas de que têm uma relação profunda com a teoria quântica. Emergiram da física e estão a ser aplicados por algebristas "intransigentes" que, na verdade, os usam para cálculos precisos.

Dando mais um passo em frente, para a teoria de dimensão *4* (dimensão *3+1*), estamos onde a teoria de Donaldson se enquadra e onde a teoria quântica dos campos tem tido impacto maior. Em particular, levou Seiberg e Witten a criarem a sua teoria alternativa, que é baseada na intuição física e dá, matematicamente, resultados maravilhosos também. Tudo isto são exemplos particulares. Há muitos mais.

Há depois a teoria das cordas e já está ultrapassada! É sobre a M-Teoria que devemos falar agora, uma teoria rica, mais uma vez com um largo número de aspectos matemáticos. Os resultados que estão a emergir estão ainda a ser digeridos e vão manter os matemáticos ocupados por muito tempo.

Resumo Histórico

Deixem-me tentar fazer um breve sumário e considerar a história em poucas palavras: o que aconteceu à matemática? Com alguma ligeireza vou pôr os séculos XVIII e XIX juntos, a era daquilo a que se pode chamar a matemática clássica, a era que associamos com Euler e Gauss, onde toda a grande matemática clássica foi criada e desenvolvida. Podia pensar-se que seria quase o fim da matemática mas o século XX, pelo contrário, foi na verdade muito produtivo e é sobre isso que eu tenho estado a falar.

Grosso modo, o século vinte pode ser dividido em duas metades. Diria que a primeira foi dominada por aquilo a que chamo a "era da especialização", a era em que a abordagem de Hilbert, de tentar formalizar as coisas, defini-las cuidadosamente e depois levar a cabo o que se pode fazer em cada área, foi muito influente. Como disse, o nome de Bourbaki está associado a esta tendência, em que as pessoas focavam a sua atenção naquilo que se podia obter num certo sistema, algébrico ou não, numa dada altura. A segunda metade do século vinte foi muito mais aquilo a que chamo "era da unificação", onde se atravessam fronteiras, se levam as técnicas de uma área para a outra e, em grande medida, as coisas se tornaram híbridas. Penso que é uma simplificação exagerada mas que resume, de forma breve, alguns dos aspectos que se podem ver na matemática do século XX.

E quanto ao século XXI? Disse que o século XXI podia ser a era da matemática quântica ou, se preferirem, da matemática de dimensão infinita. O que quer isto dizer? A matemática quântica pode querer dizer, se lá chegarmos, compreender adequadamente a análise, geometria, topologia e álgebra de vários espaços de funções não lineares e por "compreender adequadamente" refiro-me à compreensão numa forma tal que permita demonstrações muito rigorosas de todas as coisas maravilhosas sobre as quais os físicos têm andado a especular.

Ao lado de todo o sofisticado material de dimensão infinita a geometria das baixas dimensões é um embaraço. De muitas maneiras as dimensões onde começámos, onde os nossos antepassados começaram, permanecem um mistério.

Deve dizer-se que se se aborda a dimensão infinita de modo ingénuo e se formulam questões ingénuas, em geral, se obtêm as respostas erradas ou as respostas são pouco interessantes. A aplicação física, a perspectiva e a motivação permitiram, aos físicos, colocar questões inteligentes sobre dimensões infinitas, fazer coisas de grande subtileza onde surgem respostas razoáveis. Fazer análise de dimensão infinita deste modo não é, de forma alguma, uma tarefa simples. A abordagem tem de ser correcta. Temos imensas pistas. O mapa está estendido: é isto que deve ser feito mas é ainda um caminho longo a percorrer.

Que mais pode acontecer no século XXI? Gostaria de realçar a geometria diferencial não comutativa de Connes. Alain Connes tem esta teoria unificada magnífica. Mais uma vez combina tudo. Combina análise, álgebra, geometria, topologia, física, teoria de números, contribuindo todas para certas partes. É um quadro que nos permite fazer aquilo que os geómetras diferenciais normalmente fazem, incluindo a sua relação com a topologia, no contexto da análise não comutativa. Há boas razões para querer fazer isto, aplicações (potenciais ou outras) em teoria de números, geometria, grupos discretos etc. e em física. Está precisamente a ser desenvolvida uma ligação interessante com a física. Até onde se irá, o que se conseguirá, está para se ver. É, com certeza, qualquer coisa que eu espero venha a ter desenvolvimentos significativos na primeira década, pelo menos, do próximo século e é possível que possa ter ligação com a ainda-por-desenvolver teoria quântica dos campos (rigorosa).

Numa outra direcção há a chamada "geometria aritmética" ou geometria de Arakelov que tenta unificar a geometria algébrica e partes da teoria dos números tanto quanto possível. É uma teoria com grande sucesso. Começou bem mas tem ainda um longo caminho a percorrer. Quem sabe?

Claro que há elementos comuns em tudo isto. Espero que a física tenha o seu impacto disseminado por todo o lado, até na teoria de números. Andrew Wiles não concorda e só o tempo dirá.

São estes os elementos que vejo como emergindo na próxima década mas há aquilo a que chamo um "joker" no baralho[6]: a descida para a geometria das dimensões mais baixas. Ao lado de todo o sofisticado material de dimensão infinita a geometria das baixas dimensões é um embaraço. De muitas maneiras as dimensões onde começámos, onde os nossos antepassados começaram, permanecem um mistério. Chamo "baixas" às dimensões 2, 3 e 4. O trabalho

[6] Tradução literal da expressão inglesa *joker in the pack* que significa uma coisa cuja influência não é previsível.

de, por exemplo, Thurston em geometria tridimensional procura uma classificação das geometrias que se podem pôr em variedades de dimensão três. É muito mais profundo que a teoria bidimensional. O programa de Thurston não está ainda de forma alguma completo e completá-lo será certamente um desafio enorme.

A outra história notável em três dimensões é o trabalho de Vaughan Jones com ideias vindas essencialmente da física. Dá-nos mais informação sobre as três dimensões, quase ortogonal à informação contida no programa de Thurston. Como ligar estes dois lados da história permanece um desafio enorme mas há sugestões recentes para uma possível ponte. Portanto toda esta área, ainda em dimensões baixas, tem as suas ligações com a física mas permanece, na verdade, muito misteriosa.

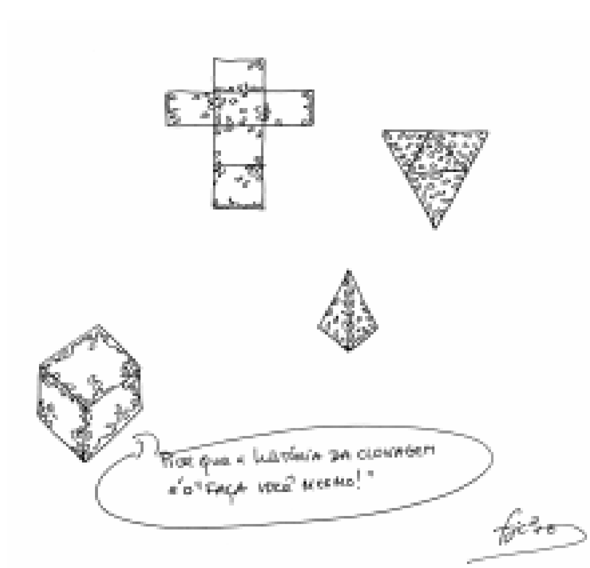
Gostaria finalmente de mencionar que o que surge com muita proeminência na física são "dualidades". Estas dualidades, em termos gerais, surgem quando uma teoria quântica tem duas realizações diferentes como uma teoria clássica. Um exemplo simples é a dualidade entre posição e momento em mecânica clássica. Substitui um espaço pelo seu espaço dual e, nas teorias lineares, essa dualidade é apenas a transformada de Fourier. Mas, nas teorias não lineares, como substituir a transformada de Fourier é um dos desafios maiores. Largas partes da matemática têm a ver com a generalização de dualidades em situações não lineares. Os físicos parecem ser capazes de o fazer de modo notável nas suas teoria das cordas e M-Teoria. Dão, uns após outros, exemplos de dualidades maravilhosas que, em sentido lato, são versões não lineares e de dimensão infinita de transformadas de Fourier e que parecem funcionar. Mas compreender essas dualidades não lineares parece ser também um dos maiores desafios do próximo século.

Acho que vou ficar por aqui. Há muito trabalho e é muito agradável para um velho como eu falar para muitos jovens como vocês, poder dizer-vos: há imenso trabalho para vocês no próximo século!

Nota do Tradutor: Os meus agradecimentos vão para Maria do Rosário Pinto, Gudlaugur Thorbergsson, Onésimo Teotónio Almeida e David R. J. Chillingworth, que me ajudaram em várias dificuldades relacionadas com esta tradução.

(Introdução, tradução e notas de F. J. Craveiro de Carvalho)

Cartoon



A Matemática na Revisão Curricular: uma Reforma Adiada...

GEEPU (Gabinete de Estudos para o Ensino Pré-Universitário da SPM)

Em 13 de Dezembro de 1999 o então Director do Ensino Secundário, Professor Doutor Domingos Fernandes, apresentou às Associações Profissionais e Sociedades Científicas uma Proposta de Revisão Curricular do Ensino Secundário.

Essa proposta tinha um carácter apenas esboçado, mas a sua filosofia parecia revelar clareza na separação das duas vias de ensino, cursos gerais e via profissionalizante, sem excluir a possibilidade de uma mudança de percurso. Parecia também assumir claramente o aparecimento de níveis diferentes de Matemática (e de outras disciplinas). No caso da Matemática foi então referido que as alterações no programa A se limitariam a pequenos ajustes, mas no caso da matemática B parecia estar tudo em aberto.

Num parecer sobre esta proposta enviado à Direcção do Ensino Secundário, a Sociedade Portuguesa de Matemática congratulou-se com a filosofia desta proposta mas manifestou as suas preocupações quanto à calendarização de todo o processo Referiu que o calendário proposto era muito precipitado, sobretudo tendo em conta que o documento apresentado, apesar de estar em desenvolvimento há dois anos, apresentava ainda muitas indefinições, em especial no que dizia respeito aos novos conteúdos das cadeiras B.

Relativamente à Matemática B, a Sociedade Portuguesa de Matemática sugeriu que se atribuisse às escolas a responsabilidade de definir os seus programas, tendo em atenção o curso a que se destinam e a realidade dos respectivos alunos. As escolas seriam também as únicas responsáveis pela avaliação final.

Foi pois com surpresa que a Sociedade Portuguesa de Matemática foi constatando com as sucessivas propostas de programas Matemática B para os 10º, 11º e 12º anos, feitos à pressa de forma a permitir o cumprimento do calendário, que afinal não se estavam a construir novos programas, mas apenas a fazer cortes nos programas de Matemática A, de forma que o programa fosse exequível em 3 horas semanais. A intervenção que a Sociedade Portuguesa de Matemática procurou ter com os sucessivos pareceres que elaborou sobre estes programas foi inglória, porque na realidade, no que respeita à matemática, não se estava na disposição de mudar praticamente nada.

Ocorre perguntar:

Qual o sentido de fazer uma Reforma Curricular, cuja filosofia parece ser clareza na separação de duas vias de ensino, mas cuja preocupação fundamental é apenas assegurar que todos os alunos se possam candidatar à universidade ao fim de três anos, independentemente das suas opções?

Há que reconhecer que actualmente muitos alunos terminam o Ensino Básico sem estarem minimamente preparados para prosseguir estudos no âmbito dos Cursos Gerais. A oferta, por parte da escola, de cursos de índole mais prática e profissionalizante pode não só evitar o abandono escolar por parte de muitos alunos mas também proporcionar-lhes a conclusão do Ensino Secundário com uma formação profissional certificada.

Tendo em conta que a Matemática B se destina a alunos orientados para essa via profissionalizante, é incompreensível que não sejam claras as relações entre a matemática que é ensinada e os cursos a que se destina. Parece que, por mais que os alunos mostrem a sua preferência por uma via que os conduza à vida activa, não conseguem livrar-se dos estudos mais académicos para preservar a possibilidade de se poderem candidatar à universidade. Na prática, e como vinha acontecendo com os cursos tecnológicos em vigor, estes alunos têm que fazer em simultâneo os estudos profissionais e académicos, com uma carga superior à dos seus colegas que optam pelo prosseguimento de estudos. Se considerarmos que muitos destes jovens estão pouco motivados para a escola, parece que se lhes está a prestar um péssimo serviço.

O que fazer então com a matemática na reforma curricular, nomeadamente com a matemática para os cursos com vertente tecnológica?

Mais uma vez a bola é passada para o lado dos professores. Cabe a estes gerir conteúdos inadequados para os cursos a que se destinam e certamente desinteressantes para o público alvo, para que a matemática na reforma curricular não seja um total desastre.

Comissão Directiva:
Suzana Metello de Nápoles (directora)
Carlos Albuquerque
Maria Manuela Ferreira
Conceição Antunes

5º MatViseu

Vai realizar-se no próximo dia 25 de Janeiro de 2002, na Escola Superior de Tecnologia, o 5º MatViseu, sob a organização conjunta da Delegação Regional do Centro da SPM e do Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia do Instituto Superior Politécnico de Viseu. O público alvo deste encontro são Professores de Matemática dos Ensinos Básico, Secundário e Superior e alunos do ensino Superior. Pretende-se com este encontro promover o intercâmbio de ideias e de experiências entre docentes dos vários níveis de ensino.

Programa:

09.00 Entrega de documentação

09.30 Sessão de abertura

10.00 Sessão plenária

"Figuras Fractais na Matemática, na Física e na Arte"
Professor Doutor Carlos Fiolhais
Universidade de Coimbra

11.00 Pausa para café

11.30 Sessões em paralelo

1. "Resolução de Equações Algébricas de Grau Superior a Dois"
Professora Doutora Helena Albuquerque
Universidade de Coimbra

2. "Propriedades que Caracterizam as Circunferências"
Professora Doutora Fátima Carvalho
Universidade do Porto

12.30 Almoço

14.30 Sessão plenária
"Matemática e Arte"
Professora Doutora Ana Breda
Universidade de Aveiro

15.30 Sessões em paralelo

3. "Tarefas com o Modellus para a Aula de Matemática"
Drª Ana Rosendo

4. "As Probabilidades num Problema de Escolha Entre Trocar e não Trocar"
Drª Carla Henriques
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

5. "Ti- Interactive – Aplicações no ensino Secundário"
Drª Isabel Duarte
Escola Superior de Tecnologia de Viseu
Dr. João Cavaleiro
Escola Secundária de Tondela

17.00 Pausa para café.

17.30 Representação da Peça de Teatro
" A Noite dos MorteMáticos-Vivos"
Pelos alunos da Escola EB 2,3 Josefa de Óbidos - Óbidos

19.00 Jantar

Para mais informações sobre o Mat Viseu consulte o site `http://www.dmat.espv.ipv.pt/dep/dmat/default/ htm`

A Publicação das Notas dos Exames do 12º Ano

João Filipe Queiró
Departamento de Matemática – Universidade de Coimbra

Convida-me o Director da Gazeta de Matemática a escrever um pequeno texto sobre a recente publicação dos resultados dos exames do 12º ano por escolas e as ordenações das escolas produzidas com base nesses resultados.

Essa publicação foi feita neste Verão em vários jornais, a partir de dados fornecidos pelo Ministério da Educação, e na sequência de um movimento que, já algum tempo, reclamava a divulgação dos dados na posse do Ministério.

A publicação dos resultados dos exames nacionais e as ordenações das escolas já foram objecto de inúmeros comentários e análises, com alguma divisão de opiniões. Neste curto artigo, sem nenhuma pretensão de originalidade, vou concentrar-me nas seguintes interrogações: Deve ou não ser publicada a referida informação? Devem ou não, com base nessa informação, ser elaboradas ordenações (os famosos *rankings*) das escolas? Qual é o valor de tal informação e de tais ordenações?

Publicar ou não publicar?

Quanto à primeira pergunta, creio que a resposta é inequívoca: a informação sobre os resultados dos exames nacionais do Secundário por escola deve ser publicada. Essa informação existe, e não se vê razão de interesse nacional para a esconder, ou para a reservar às estruturas do Ministério. O sistema educativo precisa de mais informação pública, e não menos. É por exemplo da maior relevância política – e deveria ter consequências – o conhecimento das diferenças entre as notas obtidas pelos estudantes em exames nacionais e as classificações "internas" atribuídas pelas escolas. Essas diferenças, que nalguns casos se têm de qualificar como escandalosas (em particular pela chocante injustiça que introduzem no sistema de acesso ao ensino superior), não se pode dizer que constituam surpresas, mas estão agora oficialmente documentadas.

No caso do Secundário teria interesse complementar a informação divulgada com outras. Por exemplo, a evolução dos resultados dos exames ao longo de vários anos. Tais dados existem no Ministério da Educação, e não daria especial trabalho criar séries temporais para cada escola e disciplina; estas séries proporcionariam um retrato mais fiel da realidade das escolas secundárias, ajudando a perceber melhor o que contribui para os resultados dos estudantes e, por outro lado, a não valorizar eventuais fenómenos de ocasião. Seria também do maior interesse correlacionar os resultados das escolas com aspectos como a formação profissional dos respectivos professores, as instalações (laboratórios, bibliotecas, museus, ginásios), etc.

Adiante mencionarei outras informações que seria bom conhecer, ou precisar, no mesmo contexto.

Creio portanto que é positivo que a informação sobre os resultados dos exames tenha sido publicada, e que deve ser complementada e melhorada com muitas outras. A divulgação do maior número possível de indicadores objectivos é de grande interesse no plano da regulação interna e externa do sistema educativo. Numa época em que, em tantos domínios, em particular no da Educação, o Estado se apresenta cada vez menos como portador de qualquer racionalidade e espírito de interesse nacional, a informação e a liberdade são bons algoritmos de intervenção para a melhoria das coisas. Terá que haver menos regulamentação central *a priori* – um conceito que já mostrou claramente os seus limites e perversões – e mais regulação *a posteriori*, seja pelo próprio Estado (por exemplo na organização de exames e avaliações nacionais) seja pela sociedade em geral, que para isso terá de estar de posse da necessária informação.

Ordenar ou não ordenar?

Questão diferente é a de saber se, com base nos resultados dos exames, devem ser elaboradas ordenações das escolas: a "melhor", a "segunda melhor", etc., até à "pior". Uma coisa é a publicação dos resultados, outra é a ordenação das escolas a partir da organização e tratamento desses dados segundo um qualquer critério.

Aproveitando o facto de estar a escrever para leitores com formação matemática, observo que, logo à partida, está aqui presente a dificuldade de definir de forma razoável ordens totais (isto é, em que todos os elementos são comparáveis) em conjuntos com dimensão maior do que um. Isto porque para cada escola há resultados de exames em mais do que uma disciplina. Se se olhar para cada disciplina separadamente, claro que só há uma ordenação possível das escolas, de resto com interesse.

A palavra-chave é "razoável". Tudo depende do que se pretende. De facto, pode até argumentar-se que qualquer critério que se proponha contém previamente uma visão dos resultados que ele vai produzir.

Seja como for, esta segunda questão é muito diferente da primeira. Podemos exprimir uma preferência por dados "puros", não tratados. Mas é evidente que é impossível, depois de publicados os dados "em bruto", impedir a sua organização e apresentação de qualquer forma. Resta-nos assim educar os nossos olhos de leitores e observadores, e recusar as simplificações. Podemos, por exemplo, apreciar o facto de, com base nos mesmos resultados, terem sido publicadas este ano pelo menos duas ordenações diferentes das escolas.

Alguma argumentação que se tem visto contra as listas ordenadas de escolas parece insuficiente para recusar a divulgação dos resultados. Mas é importante que cada lista ordenada dê ao critério utilizado tanto relevo como à ordenação, para que todos entendam do que se está a falar em cada caso.

E a este propósito volto às informações adicionais que seria bom tornar públicas em conjunto com as listas de notas por escolas. São exemplos de tais informações as seguintes: as políticas de acesso eventualmente praticadas pelas escolas, a dimensão das escolas e áreas disciplinares por elas cobertas e, *last but not least*, o número de matrículas anuladas em cada escola, com a concomitante mudança de escola ou apresentação aos exames em regime externo. O mundo das escolas, mesmo sem considerar factores de natureza social (de cuja invocação convém não abusar), é muito variado, e as comparações serão tanto mais úteis quanto menos cegas forem.

A questão dos estudantes que entram em cada escola secundária é relevante. Se houvesse avaliações nacionais credíveis no Ensino Básico (o que, como se sabe, não acontece), poderiam ser realizados estudos muito interessantes dos resultados dos estudantes no fim do Secundário tomando em conta os resultados obtidos pelos mesmos estudantes à saída do Básico. Iria emergir então o conceito de "valor acrescentado" por uma escola, com grande interesse informativo.

Vale a pena, já que estamos a falar de ordenações de escolas, referir outra manifestação recente do mesmo tipo de ideias. Quem acha que os *rankings* das escolas secundárias com base nos exames têm muitos defeitos deveria concentrar a sua atenção na tentativa, também este ano, de elaborar um *ranking* das universidades públicas, com resultados publicados num diário lisboeta. Sobre esse exercício não direi muito, para além de comentar que elaborar *rankings* credíveis das universidades é uma arte difícil. Põe-se o problema da elaboração dos questionários e dos pesos a atribuir às respostas. E corre-se o risco de pouco mais medir do que a disponibilidade dos gabinetes de relações públicas (quando existem) para responder aos questionários dos candidatos a ordenadores.

Sobre isto dos gabinetes de relações públicas, há quem ache bem e há quem ache mal eles existirem. Para certo ponto de vista, que cada vez mais governa o mundo, é fundamental uma universidade ter um serviço de relações públicas, que bombardeie os jornais todos os dias com a excelência da actividade que lá se desenvolve. Alguma razão tem que se dar a este ponto de vista, pelos resultados que vai obtendo no campo mediático e político. Diversamente, há quem ache que o investimento nas relações públicas não deve ser excessivo, e deve ao menos manter alguma proporcionalidade com a real qualidade das instituições e do seu trabalho. Mas, enfim, em certas matérias ninguém dá conselhos a ninguém nos dias que correm.

O que valem os exames?

A terceira interrogação que aqui analiso, já um pouco sobreposta às anteriores, é a de saber que valor informativo real tem a publicação dos resultados dos exames nacionais e, por maioria de razão, das subsequentes ordenações das escolas.

A contestação maior ao valor e interesse da publicação vem, coerentemente, de quem contesta o valor dos próprios exames. Os argumentos principais são conhecidos: os exames não testam verdadeiramente as aprendizagens, os exames tendem a valorizar a memorização e as práticas rotineiras, um exame pretende avaliar os conhecimentos e as competências de um jovem em apenas duas ou três horas de grande ansiedade.

Alguma verdade tem que se reconhecer nestas observações, mas, salvo o devido respeito, esta argumentação é insuficiente para retirar valor aos exames.

Em primeiro lugar, os exames são uma necessidade social. Para vários efeitos, é necessário medir, de alguma forma objectiva, a qualidade do trabalho realizado pelos estudantes, pelos professores, pelas escolas. Contestar a existência de exames tem o problema de ignorar completamente a necessidade de avaliação sistémica por algum processo credível, que, repete-se, para vários efeitos tem que ser nacional.

Na discussão destes assuntos há por vezes confusão entre dois planos muito diferentes: o plano da "pedagogia de proximidade", com a importância da relação formativa individual entre professor e aluno, e o plano das necessidades públicas de regulação e avaliação do sistema educativo. Qualquer professor sabe como o essencial da sua actividade se passa numa relação próxima com os alunos, e não há maior sucesso para um professor do que ver os seus alunos progredir. O sistema educativo, por seu lado, tem necessidades de regulação por natureza impessoais. Ambos os planos são importantes, e influenciam-se mutuamente, mas não convém misturá-los.

Afirmar que os exames não testam verdadeiramente as aprendizagens levanta um problema muito sério: como é então que as aprendizagens, sejam elas quais forem, se podem testar de forma independente e objectiva? Como valorizar ou preferir esta ou aquela prática, este ou aquele método de trabalho (seja qual for o critério), sem ser pelo discurso dos próprios protagonistas? Creio que estas interrogações não podem ser ignoradas. Custa-me a crer que os críticos dos exames defendam que não haja nenhuma avaliação do sistema, nenhuma responsabilização dos seus agentes. Penso que tal defesa é insustentável, que o sistema tem de ser avaliado, com urgência e de forma sistemática. A crítica aos exames, acompanhada de uma ausência de alternativas sérias, tem, entretanto, contribuído largamente, como alibi, para a desvalorização global dos processos de avaliação. Neste quadro, o próprio sistema, o Estado e a sociedade em geral ficam indefesos perante as múltiplas alterações de estratégias que se sobrepõem a outras alterações sem nunca se medirem os efeitos das reformas que se fizeram e das que se fazem. E os agentes reformadores de ontem por lá vão ficando, na posição de reformar de novo, perpetuados pela ausência de avaliação do que fazem e fizeram.

Outra crítica recorrente é que os exames tendem a valorizar a memorização e as práticas rotineiras. Não vejo que isso seja um problema. Ambas as coisas são importantes, contrariamente ao que certo discurso fácil pretende fazer crer. Em primeiro lugar, não há conhecimento, nem elaboração sobre o conhecimento, sem memorização. Em segundo lugar, as chamadas "competências rotineiras", se verdadeiramente adquiridas, são a base sobre a qual se constroem as competências avançadas. As competências superiores adquirem-se depois e por cima das competências mais básicas: isto é assim na arte, na música, na literatura, no desporto, na ciência. Uma competência aprende-se, treina-se, e depois utiliza-se e demonstra-se. Quem despreza a memorização e as competências básicas acaba muitas vezes a defender competências etéreas e, claro, não testáveis de modo algum.

Os exames são sempre desagradáveis, nenhum de nós gostou ou gosta de ser submetido a provas e exames, mas trata-se de um mal necessário, por motivos de avaliação do sistema e até de indução do esforço de estudantes e professores. Sem dúvida que há pormenores de organização que poderiam ser melhorados, seja nos enunciados seja na logística. Por exemplo, cada estudante poderia fazer duas provas por disciplina e ficar com a melhor nota das duas. Outro aspecto que parece importante é que os estudantes não deveriam fazer os seus exames na escola que frequentaram: as escolas têm direito a que não se desconfie delas e da maneira como organizam e controlam as provas.

Temos de reconhecer que, num sistema educativo difícil e atravessado por tantas tensões como o português, os exames constituem um imprescindível elemento de regulação e controlo, que deveria ser estendido a outros ciclos, sobretudo e urgentemente ao 3º ciclo. O chamado 3º ciclo do Ensino Básico parece-me constituir um elo muito frágil da nossa cadeia escolar, sendo essencial repensar o seu posicionamento. A meu ver, o actual 3º ciclo deveria estar, em todos os planos (na rede de escolas, nos grupos de docência, na formação de professores, na avaliação), próximo do chamado Secundário. A tendência inversa, que tem informado a política educativa em nome de uma mítica "unidade do Ensino Básico" (por confusão com a escolaridade obrigatória), é um erro que conviria corrigir. Também aí temos alguma coisa a aprender com a maioria dos nossos parceiros da União Europeia.

De resto, o princípio da realização de exames nacionais está a surgir como necessário não só em níveis anteriores ao Secundário como em níveis posteriores. Um exemplo é a certificação para efeitos de contratação de professores do Ensino Básico e Secundário, com o colapso da credibilidade e justiça do actual modelo de contratação de professores pelo Estado.

Uma crítica de tipo diferente à publicação dos resultados dos exames é a de que ela vem apenas revelar, de forma mais acentuada, as diferenças sociais e económicas dos meios em que as escolas estão inseridas e dos estudantes que as frequentam. Isto tem uma parte de verdade, parecendo inequívoco que há correlação elevada entre os meios sociais e económicos dos estudantes e os seus resultados escolares. Mas, de novo, essa observação é insuficiente para que se escondam os resultados nas gavetas ministeriais. Os resultados, bem como a maior quantidade possível de informações complementares (incluindo a do "valor acrescentado", quando disponível), devem ser conhecidos, e devem ser lidos de olhos abertos. Sem prejuízo da diversidade das vias de estudo, os *standards* e as expectativas mínimas em cada disciplina devem ser os mesmos para todos. A nenhum jovem se deve, seja qual for o pretexto, transmitir a mensagem de que dele se espera menos do que dos outros. Dizer isso a um jovem é a maneira mais rápida de destruir o seu potencial.

Quando se constate, em certa região, um pior aproveitamento escolar dos jovens atribuível a condições de fragilidade económica e social, com muito mais razão o Estado poderá desencadear medidas tendentes à correcção desses factores. Isso será dificultado se se continuar a querer esconder os resultados escolares, contribuindo para a perpetuação de tais situações.

Com certeza que os *rankings* podem ser aproveitados para algum darwinismo social. Se elaborados de forma muito simplificada, não conterão surpresa nenhuma, e o seu valor informativo ficará parecido com o de uma frase que, noutro contexto, uma vez ouvi a um colega: "É melhor ser rico e saudável do que pobre e doente."

Conclusão

Em resumo, a publicação das classificações dos estudantes do Ensino Secundário é um facto positivo. Os exercícios de elaboração de *rankings* das escolas devem ser realizados com o maior cuidado, acompanhados do maior número possível de explicações e informações complementares, recusando as simplificações. E os exames nacionais são um instrumento indispensável de avaliação e regulação do sistema educativo, devendo ser estendidos a outros ciclos.

Números Irracionais no Ensino Secundário

António Pereira Rosa
Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho, Lisboa

Para quê estudar estes problemas, se os números irracionais não existem ?

L. Kronecker, sobre a demonstração da transcendência de π devida a F. Lindemann.

1. Introdução

O objectivo deste trabalho é apresentar demonstrações simples (no sentido de serem acessíveis a estudantes do Ensino Secundário Regular ou Recorrente) da irracionalidade de alguns números: duas demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$ (a primeira como consequência do Teorema Fundamental da Aritmética e a segunda pelo método da descida infinita) e uma da irracionalidade de $\log_{10}(2)$. Experimentei nas minhas aulas as actividades descritas (pelo menos em parte) e tive uma reacção encorajadora dos alunos: é curioso e gratificante ver alunos do 12º ano fascinados com consequências simples da divisibilidade. Espero assim contribuir para uma revitalização do interesse pelos números irracionais, praticamente esquecidos no último ajustamento dos programas do ensino secundário: o estudo dos radicais foi quase abandonado e, com o uso indiscriminado das calculadoras, os números reais "reduzem-se" cada vez mais a um conjunto finito de números racionais.

A organização do trabalho é a seguinte: para cada uma das demonstrações referidas, indico os pré-requisitos, a unidade do programa em que pode ser inserida, uma estratégia para a apresentação aos alunos e faço ainda algumas observações sobre aspectos históricos, possíveis generalizações e eventuais ligações com outros assuntos. Qualquer das actividades propostas pode ser realizada à vontade numa aula de 50 minutos, ficando alguns complementos para "trabalho para casa" (TPC) a corrigir posteriormente. Termino esta introdução justificando sumariamente os exemplos escolhidos:

a) a demonstração clássica da irracionalidade de $\sqrt{2}$ atribuída por Aristóteles aos pitagóricos é, por um lado, de difícil generalização e, por outro, considerada muito artificiosa pela maioria dos alunos (falo por experiência própria); tentei pois arranjar outros processos de demonstração e os dois que indico parecem-me interessantes, pela facilidade de generalização, pela ligação a importantes temas de Aritmética que são frequentemente esquecidos e pela possibilidade de interessantes referências históricas.
b) ao escolher provar a irracionalidade de $\log_{10}(2)$ procurei combater a ideia generalizada de que os números irracionais "só aparecem quando há raízes", erro algo compreensível, dado que o estudo das dízimas praticamente já não se faz no ensino secundário e a demonstração da irracionalidade de números como π ou *e* é demasiado complicada para ser feita no ensino não superior. Por outro lado, o contacto dos alunos com os

logaritmos reduz-se na maior parte dos casos à função logarítmica, que surge em geral como uma espécie de "parente pobre" da exponencial, ligada ao estudo de fenómenos físicos como os tremores de terra (escala de Richter) ou à cultura de bacilos. Penso que a apresentação de uma actividade como a que proponho contribui positivamente para uma melhor compreensão das propriedades dos logaritmos e para contrabalançar a tendência do ensino da Matemática apenas pelas suas aplicações a casos ditos "da vida real", que, na minha opinião, está demasiado em voga no Ensino Secundário.

2. Primeira demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$

A prova baseia-se no chamado Teorema Fundamental da Aritmética: qualquer número natural maior do que 1 pode ser decomposto num produto de factores primos de forma única (a menos da ordem dos factores). Este teorema não é dado no ensino secundário, embora seja implicitamente admitido na decomposição em factores primos, estudada logo no 2º ciclo do ensino básico e amplamente utilizada. Há aqui um curioso paralelo com a História: embora o resultado fosse conhecido e amplamente utilizado por muitos matemáticos (os resultados essenciais para a prova constam já dos *Elementos* de Euclides), o primeiro a apresentar uma demonstração foi Gauss nas *Disquisitiones Arithmeticae* (1801); para uma especulação curiosa sobre os motivos que terão feito com que o teorema "escapasse" a Euclides, pode ver-se [HW].

Prova (por redução ao absurdo)

Se $\sqrt{2}$ fosse racional, existiriam dois números naturais a e b (que podemos supor primos entre si e maiores que 1) tais que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, donde $a^2 = 2b^2$; segue-se que o expoente do primo 2 na decomposição em factores do primeiro membro é par e na do segundo membro é ímpar, o que contradiz o Teorema Fundamental da Aritmética.

Pré-requisitos

Noções elementares de divisibilidade; decomposição em factores primos; propriedades das potências.

Unidade do programa em que pode ser apresentada

Tema II do 11º ano, considerada como parte do tema geral "Lógica e Raciocínio Matemático", para o ensino regular; unidade A1 para o ensino recorrente.

Estratégia para a apresentação

a) rever a decomposição em factores primos, fazer alguns exemplos e enunciar o Teorema Fundamental da Aritmética.
b) mostrar que se a decomposição em factores primos de n é $p_1^{r_1}p_2^{r_2}......p_q^{r_q}$, a decomposição de n^2 será $p_1^{2r_1}p_2^{2r_2}......p_q^{2r_q}$, fazendo primeiro um exemplo numérico e depois o caso geral por aplicação das regras das potências.
c) explicar o que é uma prova por redução ao absurdo e proceder à demonstração como acima indicado.
d) dividir os alunos em grupos, encarregando cada um destes de provar a irracionalidade de um dos números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$.
e) comparar as demonstrações e chegar à generalização: *Se* N *é um número natural que não é um quadrado perfeito,então* $\sqrt{N}$ *é irracional.*

TPC

Provar que $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

Observações

a) o resultado acima pode ser generalizado de maneira óbvia, chegando-se à conclusão de que se o número natural N não é uma n-ésima potência perfeita, então $\sqrt[n]{N}$ é irracional.

b) nalguns manuais para o ensino secundário, como [Ne], aparece sem demonstração o seguinte teorema, atribuído a Gauss: *as eventuais raízes racionais do polinómio de coeficientes inteiros* $x_n+...+a_{n-1}x+a_n$ *são números inteiros e dividem* a_n. Este teorema cuja demonstração pode ser vista em [AM] permite uma prova imediata do resultado da observação anterior (considerar x_n-N) mas no livro referido surge apenas como um instrumento para a pesquisa de zeros. A este respeito, podem-se propor os seguintes exercícios, ambos a nível de 12º ano (ensino regular) e unidade A6 (ensino recorrente):

1. Provar que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional, considerando o polinómio x^4-10x^2+1.
2. Provar que o polinómio x^5-6x+3 tem raízes reais e que são todas irracionais.

3. Segunda demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$

Embora esta prova seja também por redução ao absurdo, baseia-se numa ideia completamente diferente: o chamado método da descida, devido a Fermat. Se pretendemos mostrar que uma propriedade ou relação não se verifica para nenhum número natural, basta provar que, se ela se verificasse para um dado número, seria também válida para um menor, obtendo-se assim uma sucessão estritamente decrescente de números naturais, o que é impossível (contradiz a boa ordenação de $\mathbb{N}$). Embora mais artificiosa que a anterior, é talvez mais atraente e elegante. Na verdade, o método da descida é o tipo de argumento que fascina os alunos.

Prova (por redução ao absurdo)

Se $\sqrt{2}$ fosse racional, existiriam dois números naturais a e b tais que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. Segue-se que $a^2=2b^2$ e então $\frac{2b-a}{a-b}$ é um número racional de denominador menor que b e cujo quadrado é 2. Com efeito:

1. como $a=b\sqrt{2}$, vem $a-b<b \Leftrightarrow a<2b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b\sqrt{2}<2b \Leftrightarrow \sqrt{2}<2$.
2. quadrando a expressão $\frac{2b-a}{a-b}$, simplificando tendo em conta que $a=b\sqrt{2}$, vem $\left(\frac{2b-a}{a-b}\right)^2=\frac{6b-4\sqrt{2}b}{3b-2\sqrt{2}b}=2$

Obtemos assim uma sucessão estritamente decrescente de denominadores naturais, o que é impossível.

Pré-requisitos

Noções de cálculo com radicais e expressões algébricas simples.

Unidade do programa em que pode ser apresentada

Tema II do 11º ano, considerada como parte da tema geral "Lógica e Raciocínio Matemático", para o ensino regular; unidade A1 para o ensino recorrente.

Estratégia para a apresentação

a) motivar os alunos para a prova, referindo a propriedade da boa ordenação de $\mathbb{N}$. Comparar com o que se passa em $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$.
b) explicar o que é uma demonstração por redução ao absurdo e proceder à demonstração como indicado (efectuando os cálculos com detalhe, como é natural).
c) concluir com uma breve referência à vida e obra de Fermat.

TPC

1. Justificar que na prova apresentada se tem $a>b$.
2. Provar a irracionalidade de $\sqrt{3}$ por um argumento de descida.
3. Mandar os alunos fazer um trabalho sobre a vida e os resultados obtidos por Fermat, em Teoria de Números ou

no problema das tangentes [trata-se, como é óbvio, de uma tarefa de muito maior escopo que as anteriores; exigirá tempo e apoio do professor. Será talvez de considerar nos trabalhos de projecto preconizados na actual proposta de revisão curricular de ensino secundário].

Observações

a) a prova apresentada pode ser adaptada por forma a mostrar que se o número natural N não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{N}$ é irracional.
b) pode-se ver em [De] uma versão de carácter geométrico da prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ pelo método da descida.
c) recentemente (Novembro de 2000), o conhecido matemático americano Tom Apostol apresentou uma nova prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ por um argumento de descida com carácter fortemente geométrico. O leitor interessado pode ver essa prova em [SN].
d) podem-se ver em [Ol] várias aplicações do método da descida à resolução de equações diofantinas, tópico muito importante na Teoria dos Números.
e) propriedades como a boa ordenação de N são consideradas pelos alunos absolutamente óbvias, o que, em minha opinião, é perfeitamente razoável a nível do ensino secundário. Creio que a maneira mais frutuosa de mostrar a sua importância é utilizá-las para provar resultados não-triviais, como o apresentado.

4. Logaritmos e números irracionais

Tal como a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ apresentada em 1., a prova da irracionalidade de $\log_{10}(2)$ baseia-se em propriedades simples da divisibilidade, pelo que são aplicáveis muitas das considerações aí feitas.

Prova (por redução ao absurdo)

Se $\log_{10}(2)$ fosse racional, existiriam dois números naturais a e b tais que $\log_{10}(2) = \frac{a}{b}$, donde se seguiria que $10^{\frac{a}{b}} = 2$; elevando ambos os membros ao expoente b, $10^a=2^b$, o que é absurdo, já que o primeiro membro é divisível por 5 e o segundo não.

Pré-requisitos

Noções elementares de divisibilidade; decomposição em factores primos; propriedades dos logaritmos e das potências.

Unidade do programa em que pode ser apresentada

Tema II do 12º ano para o ensino regular; unidade A7 para o ensino recorrente.

Estratégia para a apresentação

a) rever a decomposição em factores primos e enunciar o Teorema Fundamental da Aritmética.
b) explicar, se necessário, o que é uma prova por redução ao absurdo e proceder à prova como indicado.
c) dividir os alunos em grupos e mandar proceder à prova da irracionalidade de mais alguns números deste tipo, como $\log_7(6)$, $\log_9(4)$ e $\log_6(9)$.
d) comparar as várias provas e, se o nível da turma o permitir, chegar à seguinte generalização: "*Se a e b são números naturais maiores que* 1, *tais que a tem um factor primo que b não tem (em particular se a e b são primos entre si),* $\log_a(b)$ *é irracional*".

TPC

1. Justificar que na prova apresentada se pode supor que a e b são naturais e não inteiros quaisquer (o que é talvez menos óbvio do que na prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$....)
2. Provar que $\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)$ é irracional.

3. Sendo a e b números inteiros distintos e maiores que 1 com os mesmos factores primos, mostrar por meio de exemplos que $\log_a(b)$ pode ser racional ou irracional.

4. Provar que $\dfrac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(3)}$ é irracional.

Observação

Se se pretende fazer a generalização referida acima, é talvez preferível argumentar que 5 é factor primo do primeiro membro e não é do segundo.

5. Referências

[Ab] Abrantes, P. (1985) - *Planificação no Ensino da Matemática*, Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa.

[AM] Machado, A. (1997) - Consultório Matemático, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 36,* 61-64.

[Be] Bell, E. T. (1986) - *Men of Mathematics*, Simon & Schuster, New York (reimpressão da edição original de 1937).

[De] Delachet, A. (1977) - *L'Analyse Mathématique* (7ª edição),Vendôme, Presses Universitaires de France.

[HW] Hardy, G. H. e Wright, E. M. (1990) - *An Introduction to the Theory of Numbers* (5th edition), Oxford, Oxford University Press.

[Ne] Neves, M. A. (1997) - *Matemática 10º ano - Parte 2: Funções 1*, Porto, Porto Editora

[NZM] Niven, I. , Zuckerman, H. e Montgomery, H. (1991) - *An Introduction to the Theory of Numbers*, New York, John Wiley & Sons.

[Ol] Oliveira, G. N. (1981) - *Resolução de Equações em Números Inteiros*, Coimbra (notas de um curso integrado na Escola de Verão organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática).

[Pr1] DES (1996) - *Programa de Matemática (Ensino Secundário Recorrente)*, Lisboa, Ministério da Educação.

[Pr2] DES (1997) - *Programas de Matemática 10º, 11º e 12º anos*, Lisboa, Ministério da Educação.

[SN] Nápoles, S. (2001) - A raíz quadrada de 2 não é um número racional, *InforMat, nº 7,* 8.

Bartoon

Luís Afonso, publicado in Jornal Público, 3 Agosto 2000
(publicação gentilmente autorizada pelo autor)

Números Irracionais no Ensino Secundário

António Pereira Rosa
Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho, Lisboa

Para quê estudar estes problemas, se os números irracionais não existem ?

L. Kronecker, sobre a demonstração da transcendência de π devida a F. Lindemann.

1. Introdução

O objectivo deste trabalho é apresentar demonstrações simples (no sentido de serem acessíveis a estudantes do Ensino Secundário Regular ou Recorrente) da irracionalidade de alguns números: duas demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$ (a primeira como consequência do Teorema Fundamental da Aritmética e a segunda pelo método da descida infinita) e uma da irracionalidade de $\log_{10}(2)$. Experimentei nas minhas aulas as actividades descritas (pelo menos em parte) e tive uma reacção encorajadora dos alunos: é curioso e gratificante ver alunos do 12º ano fascinados com consequências simples da divisibilidade. Espero assim contribuir para uma revitalização do interesse pelos números irracionais, praticamente esquecidos no último ajustamento dos programas do ensino secundário: o estudo dos radicais foi quase abandonado e, com o uso indiscriminado das calculadoras, os números reais "reduzem-se" cada vez mais a um conjunto finito de números racionais.

A organização do trabalho é a seguinte: para cada uma das demonstrações referidas, indico os pré-requisitos, a unidade do programa em que pode ser inserida, uma estratégia para a apresentação aos alunos e faço ainda algumas observações sobre aspectos históricos, possíveis generalizações e eventuais ligações com outros assuntos. Qualquer das actividades propostas pode ser realizada à vontade numa aula de 50 minutos, ficando alguns complementos para "trabalho para casa" (TPC) a corrigir posteriormente. Termino esta introdução justificando sumariamente os exemplos escolhidos:

a) a demonstração clássica da irracionalidade de $\sqrt{2}$ atribuída por Aristóteles aos pitagóricos é, por um lado, de difícil generalização e, por outro, considerada muito artificiosa pela maioria dos alunos (falo por experiência própria); tentei pois arranjar outros processos de demonstração e os dois que indico parecem-me interessantes, pela facilidade de generalização, pela ligação a importantes temas de Aritmética que são frequentemente esquecidos e pela possibilidade de interessantes referências históricas.

b) ao escolher provar a irracionalidade de $\log_{10}(2)$ procurei combater a ideia generalizada de que os números irracionais "só aparecem quando há raízes", erro algo compreensível, dado que o estudo das dízimas praticamente já não se faz no ensino secundário e a demonstração da irracionalidade de números como π ou e é demasiado complicada para ser feita no ensino não superior. Por outro lado, o contacto dos alunos com os logaritmos reduz-se na maior parte dos casos à função logarítmica, que surge em geral como uma espécie de "parente pobre" da exponencial, ligada ao estudo de fenómenos físicos como os tremores de terra (escala de Richter) ou à cultura de bacilos. Penso que a apresentação de uma actividade como a que proponho contribui positivamente para uma melhor compreensão das propriedades dos logaritmos e para contrabalançar a tendência do ensino da Matemática apenas pelas suas aplicações a casos ditos "da vida real", que, na minha opinião, está demasiado em voga no Ensino Secundário.

2. Primeira demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$

A prova baseia-se no chamado Teorema Fundamental da Aritmética: qualquer número natural maior do que 1 pode ser decomposto num produto de factores primos de forma única (a menos da ordem dos factores). Este teorema não é dado no ensino secundário, embora seja implicitamente admitido na decomposição em factores primos, estudada logo no 2º ciclo do ensino básico e amplamente utilizada. Há aqui um curioso paralelo com a História: embora o resultado fosse conhecido e amplamente utilizado por muitos matemáticos (os resultados essenciais para a prova constam já dos *Elementos* de Euclides), o primeiro a apresentar uma demonstração foi Gauss nas *Disquisitiones Arithmeticae* (1801); para uma especulação curiosa sobre os motivos que terão feito com que o teorema "escapasse" a Euclides, pode ver-se [HW].

Prova (por redução ao absurdo)

Se $\sqrt{2}$ fosse racional, existiriam dois números naturais a e b (que podemos supor primos entre si e maiores que 1) tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, donde $a^2 = 2b^2$; segue-se que o expoente do primo 2 na decomposição em factores do primeiro membro é par e na do segundo membro é ímpar, o que contradiz o Teorema Fundamental da Aritmética.

Pré-requisitos

Noções elementares de divisibilidade; decomposição em factores primos; propriedades das potências.

Unidade do programa em que pode ser apresentada

Tema II do 11º ano, considerada como parte do tema geral "Lógica e Raciocínio Matemático", para o ensino regular; unidade A1 para o ensino recorrente.

Estratégia para a apresentação

a) rever a decomposição em factores primos, fazer alguns exemplos e enunciar o Teorema Fundamental da Aritmética.
b) mostrar que se a decomposição em factores primos de n é $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots\ldots p_q^{r_q}$, a decomposição de n^2 será $p_1^{2r_1} p_2^{2r_2} \ldots\ldots p_q^{2r_q}$, fazendo primeiro um exemplo numérico e depois o caso geral por aplicação das regras das potências.
c) explicar o que é uma prova por redução ao absurdo e proceder à demonstração como acima indicado.
d) dividir os alunos em grupos, encarregando cada um destes de provar a irracionalidade de um dos números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$.
e) comparar as demonstrações e chegar à generalização: *Se* N *é um número natural que não é um quadrado perfeito,então* $\sqrt{N}$ *é irracional.*

TPC

Provar que $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

Observações

a) o resultado acima pode ser generalizado de maneira óbvia, chegando-se à conclusão de que se o número natural N não é uma n-ésima potência perfeita, então $\sqrt[n]{N}$ é irracional.

b) nalguns manuais para o ensino secundário, como [Ne], aparece sem demonstração o seguinte teorema, atribuído a Gauss: *as eventuais raízes racionais do polinómio de coeficientes inteiros* $x_n + ... + a_{n-1}x + a_n$ *são números inteiros e dividem* a_n. Este teorema cuja demonstração pode ser vista em [AM] permite uma prova imediata do resultado da observação anterior (considerar $x_n - N$) mas no livro referido surge apenas como um instrumento para a pesquisa de zeros. A este respeito, podem-se propor os seguintes exercícios, ambos a nível de 12º ano (ensino regular) e unidade A6 (ensino recorrente):

1. Provar que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional, considerando o polinómio $x^4 - 10x^2 + 1$.
2. Provar que o polinómio $x^5 - 6x + 3$ tem raízes reais e que são todas irracionais.

3. Segunda demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$

Embora esta prova seja também por redução ao absurdo, baseia-se numa ideia completamente diferente: o chamado método da descida, devido a Fermat. Se pretendemos mostrar que uma propriedade ou relação não se verifica para nenhum número natural, basta provar que, se ela se verificasse para um dado número, seria também válida para um menor, obtendo-se assim uma sucessão estritamente decrescente de números naturais, o que é impossível (contradiz a boa ordenação de $\mathbb{N}$). Embora mais artificiosa que a anterior, é talvez mais atraente e elegante. Na verdade, o método da descida é o tipo de argumento que fascina os alunos.

Prova (por redução ao absurdo)

Se $\sqrt{2}$ fosse racional, existiriam dois números naturais a e b tais que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. Segue-se que $a^2=2b^2$ e então $\frac{2b-a}{a-b}$ é um número racional de denominador menor que b e cujo quadrado é 2. Com efeito:

1. como $a=b\sqrt{2}$, vem $a-b<b \Leftrightarrow a<2b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b\sqrt{2}<2b \Leftrightarrow \sqrt{2}<2$.
2. quadrando a expressão $\frac{2b-a}{a-b}$, simplificando tendo em conta que $a=b\sqrt{2}$, vem $\left(\frac{2b-a}{a-b}\right)^2=\frac{6b-4\sqrt{2}b}{3b-2\sqrt{2}b}=2$

Obtemos assim uma sucessão estritamente decrescente de denominadores naturais, o que é impossível.

Pré-requisitos

Noções de cálculo com radicais e expressões algébricas simples.

Unidade do programa em que pode ser apresentada

Tema II do 11º ano, considerada como parte da tema geral "Lógica e Raciocínio Matemático", para o ensino regular; unidade A1 para o ensino recorrente.

Estratégia para a apresentação

a) motivar os alunos para a prova, referindo a propriedade da boa ordenação de $\mathbb{N}$. Comparar com o que se passa em $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$.
b) explicar o que é uma demonstração por redução ao absurdo e proceder à demonstração como indicado (efectuando os cálculos com detalhe, como é natural).
c) concluir com uma breve referência à vida e obra de Fermat.

TPC

1. Justificar que na prova apresentada se tem $a>b$.
2. Provar a irracionalidade de $\sqrt{3}$ por um argumento de descida.
3. Mandar os alunos fazer um trabalho sobre a vida e os resultados obtidos por Fermat, em Teoria de Números ou

no problema das tangentes [trata-se, como é óbvio, de uma tarefa de muito maior escopo que as anteriores; exigirá tempo e apoio do professor. Será talvez de considerar nos trabalhos de projecto preconizados na actual proposta de revisão curricular de ensino secundário].

Observações

a) a prova apresentada pode ser adaptada por forma a mostrar que se o número natural N não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{N}$ é irracional.
b) pode-se ver em [De] uma versão de carácter geométrico da prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ pelo método da descida.
c) recentemente (Novembro de 2000), o conhecido matemático americano Tom Apostol apresentou uma nova prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ por um argumento de descida com carácter fortemente geométrico. O leitor interessado pode ver essa prova em [SN].
d) podem-se ver em [Ol] várias aplicações do método da descida à resolução de equações diofantinas, tópico muito importante na Teoria dos Números.
e) propriedades como a boa ordenação de N são consideradas pelos alunos absolutamente óbvias, o que, em minha opinião, é perfeitamente razoável a nível do ensino secundário. Creio que a maneira mais frutuosa de mostrar a sua importância é utilizá-las para provar resultados não-triviais, como o apresentado.

4. Logaritmos e números irracionais

Tal como a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ apresentada em 1., a prova da irracionalidade de $\log_{10}(2)$ baseia-se em propriedades simples da divisibilidade, pelo que são aplicáveis muitas das considerações aí feitas.

Prova (por redução ao absurdo)

Se $\log_{10}(2)$ fosse racional, existiriam dois números naturais a e b tais que $\log_{10}(2) = \frac{a}{b}$, donde se seguiria que $10^{\frac{a}{b}} = 2$; elevando ambos os membros ao expoente b, $10^a=2^b$, o que é absurdo, já que o primeiro membro é divisível por 5 e o segundo não.

Pré-requisitos

Noções elementares de divisibilidade; decomposição em factores primos; propriedades dos logaritmos e das potências.

Unidade do programa em que pode ser apresentada

Tema II do 12º ano para o ensino regular; unidade A7 para o ensino recorrente.

Estratégia para a apresentação

a) rever a decomposição em factores primos e enunciar o Teorema Fundamental da Aritmética.
b) explicar, se necessário, o que é uma prova por redução ao absurdo e proceder à prova como indicado.
c) dividir os alunos em grupos e mandar proceder à prova da irracionalidade de mais alguns números deste tipo, como $\log_7(6)$, $\log_9(4)$ e $\log_6(9)$.
d) comparar as várias provas e, se o nível da turma o permitir, chegar à seguinte generalização: "*Se a e b são números naturais maiores que* 1, *tais que a tem um factor primo que b não tem (em particular se a e b são primos entre si),* $\log_a(b)$ *é irracional*".

TPC

1. Justificar que na prova apresentada se pode supor que a e b são naturais e não inteiros quaisquer (o que é talvez menos óbvio do que na prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$....)
2. Provar que $\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)$ é irracional.

3. Sendo a e b números inteiros distintos e maiores que 1 com os mesmos factores primos, mostrar por meio de exemplos que $\log_a(b)$ pode ser racional ou irracional.

4. Provar que $\dfrac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(3)}$ é irracional.

Observação

Se se pretende fazer a generalização referida acima, é talvez preferível argumentar que 5 é factor primo do primeiro membro e não é do segundo.

5. Referências

[Ab] Abrantes, P. (1985) - *Planificação no Ensino da Matemática*, Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa.

[AM] Machado, A. (1997) - Consultório Matemático, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 36,* 61-64.

[Be] Bell, E. T. (1986) - *Men of Mathematics*, Simon & Schuster, New York (reimpressão da edição original de 1937).

[De] Delachet, A. (1977) - *L'Analyse Mathématique* (7ª edição),Vendôme, Presses Universitaires de France.

[HW] Hardy, G. H. e Wright, E. M. (1990) - *An Introduction to the Theory of Numbers* (5th edition), Oxford, Oxford University Press.

[Ne] Neves, M. A. (1997) - *Matemática 10º ano - Parte 2: Funções 1*, Porto, Porto Editora

[NZM] Niven, I. , Zuckerman, H. e Montgomery, H. (1991) - *An Introduction to the Theory of Numbers*, New York, John Wiley & Sons.

[Ol] Oliveira, G. N. (1981) - *Resolução de Equações em Números Inteiros*, Coimbra (notas de um curso integrado na Escola de Verão organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática).

[Pr1] DES (1996) - *Programa de Matemática (Ensino Secundário Recorrente)*, Lisboa, Ministério da Educação.

[Pr2] DES (1997) - *Programas de Matemática 10º, 11º e 12º anos*, Lisboa, Ministério da Educação.

[SN] Nápoles, S. (2001) - A raíz quadrada de 2 não é um número racional, *InforMat, nº 7,* 8.

Bartoon

Luís Afonso, publicado in Jornal Público, 3 Agosto 2000
(publicação gentilmente autorizada pelo autor)

O Prémio Abel

Graciano de Oliveira
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Materializando uma sugestão do Departamento de Matemática da Universidade de Oslo, o governo norueguês acaba de instituir o Prémio Abel. Como é sabido não existia Prémio Nobel da Matemática. Desde 1936 atribuem-se Medalhas Fields que, em prestígio, equivalem ao Prémio Nobel. Todavia não despertam o interesse dos media o que, para desgosto de muitos, contribui para a falta de visibilidade da investigação matemática.

Espera-se que o Prémio Abel, que seguirá o modelo do Prémio Nobel, venha colmatar a falta.

Niels Henrik Abel, falecido em 1829 com 27 anos, é um dos matemáticos mais famosos do mundo e um dos maiores vultos da ciência norueguesa.

A União Internacional de Matemática já manifestou a sua satisfação pelo novo prémio.

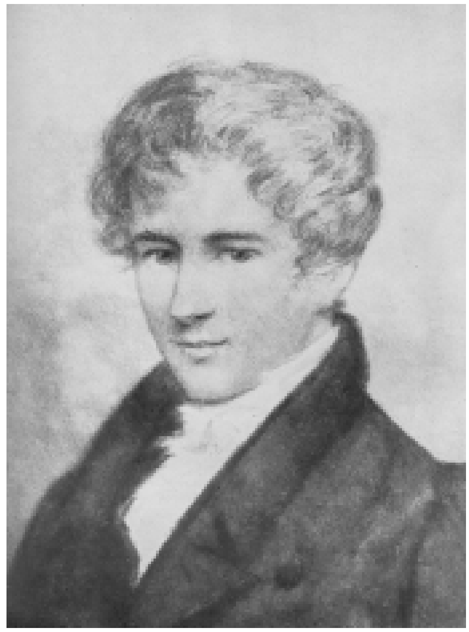
Um pouco de História

O prémio Nobel é talvez o prémio mais conhecido em todo o mundo e, provavelmente, o que mais prestígio traz aos laureados. O seu fundador foi Alfred Nobel, químico de nacionalidade sueca, nascido em Outubro de 1833 e falecido em Dezembro de 1896. No seu testamento estabeleceu que os dividendos de uma parte da fortuna que deixou deveriam ser distribuídos por 5 pessoas, independentemente das nacionalidades, que tivessem feito grandes descobertas nos campos da Física, Química, Fisiologia ou Medicina e ainda por quem tivesse obra de vulto (de tendência idealista, sublinhou Nobel) na área da Literatura e, finalmente, por quem tivesse feito o melhor trabalho em prol da fraternidade entre as nações. É esta a origem dos Prémios Nobel da Física, Química, Medicina, Literatura e Paz. Em 1968, o Banco da Suécia acrescentou o Prémio Nobel da Economia.

Assim não existe, nem nunca existiu, um Prémio Nobel da Matemática. Pode perguntar-se porquê. Correm várias explicações mas, provavelmente, a mais correcta é a de que Nobel não se lembrou. Houve uma primeira versão do seu testamento, feito quando Nobel já tinha cerca de 60 anos, em que só se fala, e de um modo um tanto vago, de um prémio destinado a galardoar feitos intelectuais. O mais provável é que Nobel fosse amadurecendo a ideia e, como era Químico, desse preferência à Química, Fisiologia e Física. Era também um apaixonado pela literatura pelo que o prémio da literatura não surpreende. Como se preocupava muito com a humanidade e descobriu explosivos com enorme poder destrutivo e receava que fossem utilizados para a guerra e não para a paz, ocorreu-lhe premiar quem se notabilizasse na promoção da fraternidade universal. Diz-se que uma das razões para deixar a Matemática de fora teria sido o facto de as suas relações com o matemático Mittag-Leffler não serem as melhores e este ser o mais provável vencedor de tal prémio. Mittag-Leffler era 15 anos mais novo que Nobel e admite-se que tenham existido atritos entre os dois, de pequena monta mas suficientes para levarem Mittag-Leffler a espalhar, ele próprio, o boato. São suposições, não sendo conhecidos documentos que provem o que quer que seja. Pelo contrário, conhecem-se cartas trocadas pelos dois homens escritas em termos muito corteses e cordiais.

O único facto objectivo é que, nem Nobel nem ninguém depois da morte dele, instituiu um Prémio Nobel da Matemática. Não pode considerar-se isso de espantar, nem é preciso andar à procura de justificações para a omissão uma vez que há muitas áreas da actividade humana a que não corresponde nenhum Prémio Nobel.

Apesar de tudo a falta de tal prémio foi notada e sentida por muitos matemáticos, todos eles interessados em dar peso e tornar conhecida a ciência que cultivavam. De entre eles deve destacar-se J. C. Fields, um matemático canadiano desaparecido em 1932. Graças a Fields instituíram-se as medalhas Fields, designadas pelo seu nome após a sua morte. A designação não teria merecido a sua aprovação, fosse ele vivo. Na sua opinião as medalhas deveriam ser o mais internacionais possível, sem ligação ao nome de nenhum país, instituição ou pessoa. Ao que parece Fields estava muito sensibilizado pelas divisões profundas da comunidade matemática internacional motivadas pela primeira guerra mundial e queria apagar essas dissensões no campo da Ciência. Procurou que a medalha fosse tão neutra quanto possível em termos políticos. Por isso preconizou que, se tivesse algum a inscrição, fosse em grego ou latim. Dentro desta ordem de ideias, a medalha que veio a cunhar-se apresenta a efígie de Arquimedes e as inscrições, *transire suum pectus mundoque potiri*, de um lado, e *congregati ex toto mathematici ob scripta insignia trebuere*, do outro. É de ouro de 14 quilates. Assim se evitou a utilização que qualquer língua viva e o ferir de susceptibilidades. Naquele tempo a grande divisão era entre matemáticos alemães e de países seus aliados na primeira grande guerra e matemáticos franceses e potências aliadas. A escolha correspondeu a uma neutralidade aceitável para a época e, até hoje, ninguém protestou contra o privilégio dado à cultura ocidental com a escolha do latim. Na realidade o


Niels Henrik Abel

essencial das discussões sobre a cooperação internacional, o papel da União Internacional de Matemática e a orientação dos Congressos Internacionais, tinha lugar na Europa com a colaboração crescente de matemáticos americanos. O prémio foi aprovado no Congresso Internacional de Zurique em 1932 (um mês depois de J. C. Fields morrer) e foi sempre universalmente aceite. Estabeleceu-se que, de 4 em 4 anos, se atribuiriam duas medalhas Fields. São acompanhadas por um prémio pecuniário muito inferior ao do Prémio Nobel que, no presente, se eleva a quase 1.000.000 de Euros. As primeiras Medalhas Fields da História foram entregues no Congresso Internacional de 1936, em Oslo, a Ahlfors e Douglas. Em 1966 quebrou-se pela primeira vez a tradição de se contemplarem 2 matemáticos e contemplaram-se 4. De então para cá, houve anos em que se contemplaram 2, 3 e 4 matemáticos.

Alfred Nobel dispôs no seu testamento que o Prémio Nobel deveria premiar trabalho feito e também servir de estímulo para o prosseguimento. A interpretar-se à letra, o Prémio Nobel deveria dar-se, portanto, só a jovens com perspectiva de um futuro frutuoso na investigação. O Nobel não seguiu esta tradição sendo, em geral, atribuído a homens que fizeram muito mas com uma idade que não permitirá esperar um longo futuro de trabalho. Deve notar-se que, nas Ciências exactas, o apogeu dum investigador é, em média, alcançado por volta dos 30 anos. A medalha Fields, ao contrário do Nobel, preferiu a via preconizada por Nobel e em 1966 deu-se um significado exacto à expressão *matemático jovem*. Por definição, adoptada nesse ano, um *matemático jovem* é aquele que não tem mais de 40 anos. Esta decisão explica que, desde há anos, os medalhados tenham aspecto imberbe. Quem tiver mais de 40 anos, por maior que tenham sido as suas descobertas, não recebe a medalha. Muito provavelmente não vai ser assim com o Prémio Abel.

O Prémio Nevanlinna

À medida que os computadores se foram desenvolvendo, alguns matemáticos começaram a sentir a necessidade de um prémio para a área das Ciências da Computação.

L. Carleson, Presidente da Comissão Executiva da União Internacional de Matemática de 1979 a 1982, começou por investigar se a comissão que atribuía as medalhas Fields se disporia a considerar admitir cientistas da computação como possíveis candidatos à medalha Fields. Foi-lhe dada resposta mais ou menos negativa com o pretexto de que as Ciências da Computação são demasiado jovens faltando-lhes ainda muito para atingirem a maturidade da Matemática. Perante tal resposta diligenciou-se no sentido de criar um outro prémio específico para esta área. Depois de várias discussões foi decidido chamar-lhe Prémio Nevanlinna, um importante matemático finlandês que desempenhara um papel muito importante na introdução dos computadores nas Universidades do seu país. O primeiro Prémio Nevanlinna foi entregue em 1982 a Tarjan.

Portugal e os Prémios de Matemática

Nenhum português ganhou até hoje uma medalha Fields ou o Prémio Nevanlinna. Na área das ciências só um obteve o Prémio Nobel: Egas Moniz, em 1949, pelos seu trabalhos em Medicina. Na Matemática, e confinando-nos a Prémios de âmbito universal (isto é, que admitem candidatos de todo o mundo) só temos conhecimento do Prémio Householder atribuído a Marques de Sá em 1981, *ex aequo* com o belga Paul van Dooren.

Quanto a Prémios atribuídos por entidades portuguesas por feitos matemáticos, não abundam. Parece haver razões para se pensar que a Ciência não é uma coisa particularmente querida no nosso país. Provavelmente o prémio mais importante destinado especificamente a galardoar trabalho de investigação matemática que temos é o Prémio José Anastácio da Cunha. Este prémio ainda só foi atribuído uma vez (a Maria Cristina Câmara) e vai ter a sua segunda edição em breve.

Lista do Premiados com a Medalha Fields

1936: Ahlfors, Douglas
1950: Selberg, L. Schwartz
1954: Kodaira, Serre
1958: Roth, Thom
1962: Hörmander, Milnor
1966: Atiyah, Cohen, Grothendieck, Smale
1970: Baker, Hironaka, Novikov, Thompson
1974: Bombieri, Mumford
1978: Deligne, Fefferman, Margulis, Quillen
1982: Connes, Thurston, Yau
1986: Donaldson, Faltings, Freedman
1990: Drinfeld, V. F. R. Jones, S. Mori, Witten
1994: Bourgain, P.-L. Lions, Yoccoz, Zelmanov
1998: Borcherds, Gowers, Kontsevich, McMullen

Andrew Wiles apesar de ter dado resposta ao problema designado de há muito por último Teorema de Fermat não obteve uma medalha Fields devido a não satisfazer a definição de jovem matemático. Por isso foi-lhe atribuída uma distinção especial constituída por uma placa de prata.

Os próximos contemplados com a medalha Fields serão conhecidos em 2002 durante o Congresso Internacional de Matemática que terá lugar em Pequim entre 20 e 28 de Agosto.

Lista dos Premiados com o Prémio Nevanlinna

1982: Trajan
1986: Valiant
1990: Razborov
1994: Wigderson
1998: P. Shor

42as Olimpíadas Internacionais de Matemática Washington DC, Estados Unidos da América

Reportagem por Daniel Pinto,
Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Entre 4 e 14 de Julho de 2001 estiveram reunidos, em Washington DC, 473 estudantes de 83 países das mais variadas regiões do globo. Tudo por causa de alguns pequenos desafios matemáticos que constituíram a parte competitiva das 42as Olimpíadas Internacionais de Matemática. Uns dias antes, já o Júri Internacional tinha chegado à capital norte-americana, tendo em vista a elaboração da prova e a sua tradução para mais de cinquenta idiomas distintos. A selecção dos problemas foi feita a partir duma lista previamente elaborada com várias das propostas enviadas pelos diferentes países participantes. Essa lista encontrava-se dividida em quatro capítulos: Álgebra, Combinatória, Geometria e Teoria dos Números. Visto que a competição contemplava apenas estudantes pré-universitários, o Júri procurou evitar os problemas que envolvessem noções próximas do Cálculo Infinitesimal.

A equipa portuguesa foi formada pelos seguintes alunos:

- Nelson Filipe Rosário Dias, 11º ano
  Escola Sec. Mira de Aire
- Luís Miguel Diogo, 12º ano
  Escola Sec. Mem Martins
- André Lopes da Fonseca, 12º ano
  Colégio Interno dos Carvalhos
- Fábio Diales Rocha, 12º ano
  Escola Sec. Carlos Amarante, Braga
- João Luís Carvalho Serranho, 12º ano
  Escola Sec. Prof. Herculano de Carvalho, Lisboa
- Diogo Gaspar Oliveira e Silva, 12º ano
  Escola Sec. Augusto Gomes, Matosinhos

Todos eles estiveram no pavilhão de basquetebol da Universidade George Mason, onde decorreram os dois dias de prova.

Os participantes foram distribuídos por mesas individuais espalhadas pelo recinto e pelos corredores de acesso. Sem outro material para além de papel, caneta e instrumentos de desenho, confrontaram-se com seis desafios matemáticos de elevado grau de dificuldade.

Até essa altura não houve qualquer contacto entre os elementos do Júri e os participantes de modo a impedir a fraude ou a passagem de informação relevante que desvirtuasse os resultados e pusesse em perigo a lealdade com que devem decorrer umas Olimpíadas de Matemática.

Para lá da competição, houve também oportunidade para conhecer Washington e Baltimore, para ver uma partida de basebol, os museus e as embaixadas. Houve ainda tempo para as diversões aquáticas e para os jogos de futebol na relva irregular do Campus.

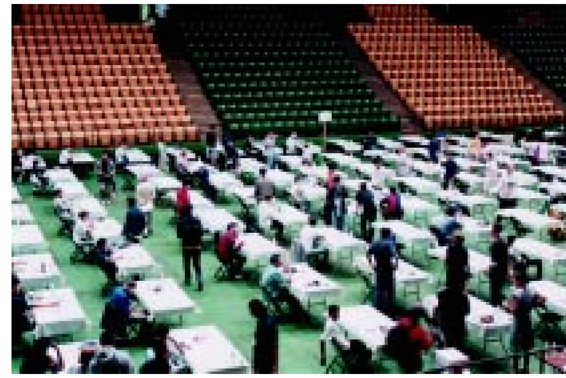
Mas sobretudo, os estudantes tiveram a possibilidade de conversar, na mesma mesa ou nas residências universitárias, com gente de outras culturas, tentando entender as diferenças e as afinidades.

Para facilitar a coordenação das dezenas de equipas envolvidas, a organização contratou guias (jovens, na sua maioria) que acompanharam os participantes de cada uma das nações.

Em 2002 as IMO terão lugar em Glasgow, estando já decidido quais os países onde o evento irá decorrer nos dois anos seguintes: Japão (2003) e Grécia (2004).

Se é verdade que os resultados da equipa portuguesa não foram brilhantes (78º lugar) fica, pelo menos, a certeza de que os muitos alunos que participaram nas olimpíadas nacionais e, principalmente, aqueles que estiveram nas internacionais, expandiram os seus conhecimentos e puderam desenvolver a criatividade que noutros espaços de aprendizagem lhes é vedada.

Se observarmos que tudo isso foi feito aproveitando uma faceta sedutora e contagiante da matemática, talvez não seja assim tão pouco.



As XVI Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, Minas, Uruguai

Reportagem por Daniel Pinto
Departamento de Matemática -Universidade de Coimbra

As Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática são, no que diz respeito ao seu funcionamento e à natureza dos seus objectivos, muito semelhantes às IMO (Olimpíadas Internacionais de Matemática). No entanto, o número de países envolvidos é mais reduzido pois apenas podem participar os estados Ibero-Americanos.

Em Setembro de 2001 estiveram no Uruguai, país anfitrião das XVI Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, dezassete equipas do continente americano e duas representando as nações ibéricas: Portugal e Espanha. A equipa portuguesa foi formada pelos dois alunos mais bem classificados nas IMO de Washington (Diogo Silva e Luís Miguel Diogo), por Andreia Gomes (da Esc. Sec. Frei Gonçalo de Azevedo em S. Domingo de Rana) e André Dias (aluno do Colégio Manuel Bernardes em Lisboa). Foram eles, juntamente com os elementos da equipa brasileira, os únicos falantes de português presentes visto que o espanhol é o idioma dominante e oficial do evento. Contudo, a prova teve duas versões para que os participantes pudessem concentrar-se apenas nos desafios matemáticos e não se perdessem nos detalhes da tradução.


Andreia Gomes (medalha de bronze)

Colectivamente, Portugal classificou-se em 12º lugar, próximo do 11º lugar ocupado pela equipa do Uruguai mas muito longe do Brasil (vencedor por equipas). Na competição individual, Andreia Gomes conseguiu obter uma das

medalhas de bronze atribuídas e Luís Diogo recebeu uma menção honrosa pela resolução completa de um dos problemas propostos. Em destaque esteve também a equipa da Venezuela que ganhou a *Copa Puerto Rico* devido ao crescimento da pontuação dos seus concorrentes nos últimos anos.

Durante os dias livres os participantes estiveram envolvidos em diversas actividades desportivas no *Parque de Vacaciones de Minas,* onde estavam alojados, e em visitas preparadas pela organização. As praias de *Punta del Este*, destino favorito de muitos uruguaios e argentinos, e a Cidade Velha de Montevideu foram alguns dos sítios por onde passaram as diversas equipas. Na viagem de regresso, aproveitando a escala na Argentina, a equipa portuguesa esteve também do outro lado do *rio de la Plata,* percorrendo algumas das ruas principais de Buenos Aires durante uma tarde, a última antes de voltar a Lisboa.

Foi publicado o primeiro volume da série *Monografias da Sociedade Portuguesa de Matemática*: "Introduction to Random Time and Quantum Randomness" de Kai-Lai Chung e Jean-Claude Zambrini.

Esta nova série destina-se a publicar monografias de investigação de alto nível científico em todos os domínios da Matemática.

Preço: 20,95 Euros