GAZETA DE MATEMÁTICA

ANO LXI N.º 139 JULHO 2000

SUMÁRIO

Editorial

Artigo convidado

Nota sobre os Números Triangulares
José Morgado, 5

Efeitos colaterais no uso de máquinas de calcular
Mário M. Graça, 15

Esses Desconhecidos Quaterniões!
P. Cerejeiras, 23

Reflexão sobre um teorema de Jacques Bernoulli relativo a secções cónicas.
Rosa Maria Ribeiro e Maria do Céu Silva, 35

Variações sobre um exercício de Cálculo Combinatório
António Pereira Rosa, 39

Exames nacionais do ensino secundário

Ponto 135 — 12.º ano de escolaridade, 2000
(Decreto n.º 286/89 de 29 de Agosto)

Exames do 1.º ano do ensino superior

Exame de Análise Infinitesimal 1
Luísa Mascarenhas

Noticiário

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática

Gazeta

de

MATEMÁTICA

FUNDADA POR

António Monteiro, Bento Caraça, Hugo Ribeiro,
Silva Paulo e Zaluar Nunes

FICHA TÉCNICA

Título
Gazeta de Matemática

Propriedade
Sociedade Portuguesa de Matemática, Av. da República 37, 4º, 1050-187 Lisboa – Telefone: 21 7939785. Fax: 21 7952349 – Internet: http://www.spm.pt/~spm

Director
Graciano de Oliveira

Conselho Editorial
Graciano de Oliveira, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 3000 Coimbra; gdoliv@mat.uc.pt

Vítor Neves (Director Adjunto), Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 3810-193 Aveiro; vneves@mat.ua.pt

António Batel Anjo, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 3810-193 Aveiro; batel@mat.ua.pt

António J. Antunes, Escola Secundária de José Estevão, Av. 25 de Abril 3810 Aveiro; ajantunes@lusoweb.pt

Fernanda Patrício, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 3000 Coimbra; mfsp@mat.uc.pt

José Sousa Pinto, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 3810-193 Aveiro; jspinto@mat.ua.pt

Assistente de Redacção
José Luís Rodrigues, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 3810-193 Aveiro

Produção
Fundação João Jacinto de Magalhães

Reprodução da capa
Gabinete de Imagem da Fundação João Jacinto de Magalhães

Impressão
Rebelo-Artes Gráficas, L.da

Edição
N.º 139 • Julho de 2000

Tiragem
3000 Exemplares

ISSN
0373-2681

Depósito legal
159725/00

APOIOS
Este número foi apoiado pela Fundação Calouste Gulbenkian e pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia

"O motor da invenção matemática não é o raciocínio mas sim a imaginação."

Augustus de Morgan

Traduzido de Mathematically Speaking,
C C Gaither & A E Cavazos-Gaither,
IOP 1998, pág. 131

Editorial

Desde há muito a SPM tem apelado e promovido o debate das ideias que têm orientado ou, de algum modo, têm estado subjacentes ao ensino da Matemática. Há evidentes dissonâncias entre essas ideias e o que a experiência demonstra a quem as aplica. O caminho a percorrer é ainda seguramente longo.

Eis alguns conceitos e ideias em voga que devem ser discutidos e merecem aturado exame crítico.

1. **Utilitarismo–imediatismo**. O que se estuda deve ser *útil* e a curto prazo. É uma ideia obviamente estiolante do pensamento e cerceadora da criatividade. Conduz às perguntas frequentes dos estudantes *para que serve isto?*, logo *por que tenho de estudar isto?*. Esta atitude insere-se bem no ambiente cultural da época presente o que, naturalmente, não basta para a justificar. Alguma atenção à História sugere a pergunta: foi uma tal postura que promoveu a investigação científica e a inovação? A curiosidade intelectual está definitivamente enterrada ou ainda é tolerada? Afinal que significa *útil*?

2. **Aprende-se Matemática sem esforço**. Pode substituir-se a Matemática por outro assunto. Alguém, que alguma vez tenha estudado Matemática, acredita naquela afirmação? Os estudiosos da Matemática que respondam com sinceridade. Alguém acredita que se motivam os jovens para a Matemática, dizendo-lhes que ela é fácil, ou seja enganando-os?

3. **A Matemática é uma Ciência experimental**. Será? Se a resposta é sim, alguém consegue dar um exemplo de uma Ciência não experimental? Se a Matemática é experimental, a Física Teórica não deveria, por maioria de razão, chamar-se Física Experimental e não deveria inventar-se outro nome para o que chamamos Física Experimental? Ser uma Ciência experimental é uma virtude? E não o ser é um pecado?

4. **O pensamento abstracto é difícil, logo aborrecido, logo pouco interessante**. Isto é verdade? Para todos? Ou as pessoas diferem umas das outras? Teremos de substituir a Matemática por brincadeiras com pirâmides de plástico (a Matemática é experimental!) e por simples contemplações de figuras que os fractais originam, pondo de lado, claro, saber o que é um fractal? Brincadeiras com pirâmides de plástico ou a apresentação do número π por divisão dos perímetros, medidos à custa de um cordel, de circunferências pelos comprimentos dos respectivos diâmetros medidos com régua admitem-se e têm justificação: depende da idade dos alunos a que se dirigem. Mas, e aí reside o grande problema, até onde se pode ir com este tipo de *Matemática*? Até ao 9^0 ano de escolaridade? Até ao 12^0? Ou deve ir-se mais longe e rejeitar os raciocínios

abstractos mesmo na Universidade? E começar quando, com a Matemática no sentido exacto que hoje a palavra tem? Na pós-graduação? Há Ciência sem abstracção? Ver é compreender? E que fazer com os que gostam do abstracto?

5. **O cálculo e manipulação de expressões complicadas é desnecessário.** Porque contraria o conceito do ponto 2, é repetitivo e as máquinas fazem quase tudo. Mas se não se manipular (com presteza) não se perde o que em inglês se chama *insight*? Embora, reconheçamos, se ganhe em agilidade de dedos a premir botões. Aprende-se, nem que seja a andar, sem repetir? Existirá ballet sem os exercícios altamente repetitivos, e por acaso até monótonos, dos bailarinos e bailarinas antes dos espectáculos?

A evolução do ensino pré-universitário criou ou não (ou, se preferirmos, alargou ou não) um hiato brutal entre o 12^0 ano e o 1^0 ano do ensino superior? É verdade ou não que se chega à Universidade sem nunca se ter visto uma demonstração? Examinemos os livros de texto para o 12^0 ano e os programas, ou livros utilizados, das disciplinas do 1^0 ano da Universidade. Há diferenças? Pequenas ou grandes? Que fazer?

O Director

Sousa Pinto, Professor da Universidade de Aveiro, morreu. José Joaquim Magalhães Sousa Pinto nasceu em Sanfins do Douro, Alijó, a 6 de Novembro de 1942.

Licenciou-se em Eng. Química na Faculdade de Engenharia do Porto. Passou pela indústria, mas a sua paixão pela matemática trouxe-o até Aveiro onde iniciou carreira em Novembro de 1977. Doutorou-se em Matemática e foi Professor Associado da Universidade de Aveiro desde de Dezembro de 1991.

Entusiasta pela investigação, ensino e divulgação da matemática, colaborador activo da SPM e da Gazeta de Matemática, tem o seu nome ligado para sempre ao Departamento de Matemática de que foi um incansável impulsionador.

Sousa Pinto morreu a 13 de Agosto. A comunidade matemática portuguesa ficou mais pobre.

GAZETA DE MATEMÁTICA nº 139
Julho de 2000

Nota sobre os Números Triangulares

José Morgado

Centro de Matemática
Faculdade de Ciências
Universidade do Porto

Neste artigo pretendemos divulgar algumas propriedades interessantes dos chamados *números poligonais*, especialmente dos *números triangulares.*

Tais propriedades serão todas ou quase todas conhecidas de quem trabalha em Matemática; mas a verdade é que noções relativas a números poligonais não são habitualmente incluídas em livros de Matemática adoptados no ensino pré-universitário; mesmo no ensino universitário, ou não têm sido incluídas ou tê-lo-ão sido raramente, apesar de tais noções serem já muito antigas.

Vejamos o que, a este respeito, nos dizem **Pierre Dedron** (Inspector Geral da Instrução Pública) e **Jean Itard** (Professor Agregado do Liceu Henri IV), no seu livro intitulado *Mathématiques et Mathématiciens*, Éditions Magnard, Boulevard Saint Germain, Paris VI^e (1959), pp. 32-33:

> "*A noção de número figurado é completamente estranha à tradição euclidiana. Entre os gregos, ela é exposta pelo neopitagórico* Nicómaco de Gerasa, *na sua Introdução à Aritmética.*[(1)]
>
> *[...] Se é difícil atribuir a* Pitágoras *a teoria completa dos números figurados, é, no entanto, razoável atribuir, quer a ele quer aos seus primeiros discípulos, as noções mais simples ligadas a tais números. Pontos dispostos em linha recta formam um número linear. Assim, todo o inteiro é* linear. *Disponhamos os números em triângulo, pondo sobre linhas horizontais consecutivas um ponto, depois dois, três, etc. ...*
>
> 
>
> *Formamos assim os números triangulares* $1, 3, 6, 10, etc.$"

1 Introdução

Consideremos as seguintes progressões aritméticas de números inteiros positivos:

$$
\begin{array}{ll}
A_1: & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ r,\ \cdots \\
A_2: & 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots,\ 2r-1,\ \cdots \\
A_3: & 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \cdots,\ 3r-2,\ \cdots \\
A_4: & 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ \cdots,\ 4r-3,\ \cdots \\
A_5: & 1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ \cdots,\ 5r-4,\ \cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_t: & 1,\ 1+t,\ 1+2t,\ 1+3t,\ 1+4t,\ \cdots,1+(r-1)t,\ \cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

cujas razões são, respectivamente, 1, 2, 3, 4, 5, $\cdots$, t, $\cdots$ e cujos termos gerais são respectivamente r, $2r-1$, $3r-2$, $4r-3$, $5r-4$, $\cdots$, $1+(r-1)t$, $\cdots$.

Para cada sucessão A_i, consideremos a sucessão B_i, que se obtém de A_i do modo seguinte: o primeiro termo de B_i é 1 e o termo de ordem r é a soma dos r primeiros termos da sucessão A_i. (Recordemos que a soma dos s primeiros termos de uma progressão aritmética de razão r, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_s, $\cdots$ é precisamente

$$\frac{a_1+a_s}{2}s;$$

e, já agora, recordemos também que a soma dos s primeiros termos de uma progressão geométrica b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_s, $\cdots$ de razão r é precisamente $\frac{b_1-b_s r}{1-r}$).

As sucessões B_i são as seguintes:

$$
\begin{array}{ll}
B_1: & 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ \frac{1}{2}r(r+1),\ \cdots \\
B_2: & 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots,\ r^2,\ \cdots \\
B_3: & 1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ \cdots,\ \frac{1}{2}r(3r-1),\ \cdots \\
B_4: & 1,\ 6,\ 15,\ 28,\ 45,\ \cdots,\ r(2r-1),\ \cdots \\
B_5: & 1,\ 7,\ 18,\ 34,\ 55,\ \cdots,\ \frac{1}{2}r(5r-3),\ \cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
B_t: & 1,\ 2+t,\ 3+3t,\ 4+6t,\ 5+10t,\ \cdots,\frac{1}{2}r[2+(r-1)t],\ \cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Os números da sucessão B_1 dizem-se *números triangulares*, os da sucessão B_2 dizem-se *números quadrangulares* ou *números quadrados*; os das sucessões seguintes dizem-se, respectivamente, *números pentagonais, hexagonais, heptagonais, octogonais*, etc. Os números que figuram em alguma das sequências B_1, B_2, $\cdots$, B_i, são genericamente designados por *números poligonais* ou *números figurados planos* ou simplesmente *números figurados*(2).

Ponhamos $m = 2+t$. Então os elementos da sucessão B_t podem ser representados como

$$1,\ m,\ 3m-3,\ 6m-8,\ 10m-5,\ \cdots,\ \frac{1}{2}r[2+(r-1)(m-2)],\ \cdots$$

e são designados como *números m-gonais.*

O número m-gonal de ordem r é frequentemente representado como

$$p_r^{(m)} \ = \ \frac{1}{2}r[2+(r-1)(m-2)].$$

Em particular, o número triangular de ordem r é representado por

$$p_r^{(3)} = \frac{1}{2}r[2+(r-1)(3-2)] = \frac{1}{2}r(r+1).$$

Como, neste trabalho, lidaremos sobretudo com números triangulares, representaremos o número triangular de ordem r simplesmente por

$$p_r^{(3)} = \frac{1}{2}r(r+1).$$

ou, mais simplesmente ainda, por

$$T_r = \frac{1}{2}r(r+1)$$

A propósito de números figurados, **Eric Temple Bell**, professor do Instituto de Tecnologia da Califórnia, escreveu o seguinte no seu livro *The Development of Mathematics*, 2^{nd} ed. (1945), p. 50:

> "*Pelas suas repercussões na aritmética superior de* Fermat *e de outros, nos séculos XVIII-XX, os números figurados dos pitagóricos (séculos VI e V a.C.) podem recordar-se como uma das contribuições mais sugestivas da aritmética à moderna aritmética superior. Estes números alcançaram também um certo prestígio na ciência de* Platão, *como, por exemplo, no seu* Timeu. *Os números triangulares, em particular, quando introduzidos na química de* Empédocles, *dos quatro* "elementos" *– terra, ar, fogo e água – foram em parte responsáveis pela singular conclusão metafísica de que toda a matéria é essencialmente triângulo.*"(3)

2 Propriedades dos números triangulares

Teorema 2.1 *A soma de dois números triangulares consecutivos é um inteiro quadrado maior que 1 e, inversamente, todo o inteiro quadrado maior que 1 é soma de dois números triangulares consecutivos.*

Dem. Sejam T_r e T_{r+1} dois números triangulares consecutivos. Então tem-se

$$\begin{aligned} T_r + T_{r+1} &= \frac{1}{2}r(r+1) + \frac{1}{2}(r+1)(r+2) \\ &= \frac{1}{2}(r+1)(2r+2) \\ &= (r+1)^2. \end{aligned}$$

Inversamente, seja a^2 um número inteiro quadrado, com $a \in \mathbb{Z}^+$, e consideremos os números triangulares consecutivos T_{a-1} e T_a. Tem-se, evidentemente,

$$\begin{aligned} T_{a-1} + T_a &= \frac{1}{2}(a-1)a + \frac{1}{2}a(a+1) \\ &= \frac{1}{2}a \cdot 2a \\ &= a^2, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração do teorema.

Teorema 2.2 *Todo o número hexagonal é triangular.*

Dem. Com efeito, seja a um número hexagonal de ordem r. Então, como vimos anteriormente, tem-se

$$a = r(2r-1);$$

mas

$$r(2r-1) = \frac{1}{2}(2r-1)((2r-1)+1) = T_{2r-1},$$

o que prova o teorema.

Teorema 2.3 *A diferença dos quadrados de dois números triangulares consecutivos é o cubo de um inteiro maior que 1 e, inversamente, o cubo de um inteiro maior que 1 é a diferença dos quadrados de dois números triangulares consecutivos.*

Dem. Seja n um número inteiro positivo qualquer. Então tem-se

$$\begin{aligned}
(T_{n+1})^2 - (T_n)^2 &= \left[\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2\left[(n+2)^2 - n^2\right] \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2[(2n+2)2] \\
&= (n+1)^3,
\end{aligned}$$

o que prova a primeira parte do teorema 2.3.

Inversamente, como o cubo de qualquer número inteiro maior que 1 pode ser representado por $(n+1)^3$, as igualdades anteriores lidas a partir da última para a primeira, mostram que $(n+1)^3 = (T_{n+1})^2 - (T_n)^2$, o que completa a demonstração do teorema.

Note-se que, como o teorema anterior vale para todo o inteiro positivo n, resulta que:

$$\begin{aligned}
n^3 &= (T_n)^2 - (T_{n-1})^2 \\
(n-1)^3 &= (T_{n-1})^2 - (T_{n-2})^2 \\
(n-2)^3 &= (T_{n-2})^2 - (T_{n-3})^2 \\
&\cdots \\
3^3 &= (T_3)^2 - (T_2)^2 \\
2^2 &= (T_2)^2 - (T_1)^2 \\
1^3 &= (T_1)^2.
\end{aligned}$$

Somando membro a membro estas igualdades, resulta a seguinte igualdade encontrada por **Claude Gaspard Bachet** (1581-1683)[(4)]:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = (T_n)^2 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2,$$

i.e., é válido o seguinte

Corolário 1 *A soma dos cubos dos primeiros n números inteiros (positivos) é igual ao quadrado do número triangular de ordem n.*

Teorema 2.4 *A soma dos quadrados de dois números triangulares consecutivos é igual ao número triangular cuja ordem é o quadrado da maior das ordens dos números triangulares considerados.*

Dem. Pretende-se demonstrar que, para todo o inteiro $r \geq 1$, se tem

$$(T_r)^2 + (T_{r-1})^2 = T_{r^2}.$$

Ora

$$\begin{aligned}
(T_r)^2 + (T_{r-1})^2 &= \left[\frac{1}{2}r(r+1)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(r-1)r\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}(r^2+r)^2 + \frac{1}{4}(r^2-r)^2 \\
&= \frac{1}{4}(2r^4+2r^2) \\
&= \frac{1}{2}r^2(r^2+1) \\
&= T_{r^2},
\end{aligned}$$

como se pretendia mostrar.

3 Um teorema de Plutarco e sua generalização por Diofanto

A muito extensa obra de **Plutarco** (~50-~120) contém o importante teorema seguinte:

Teorema 3.1 *A soma do inteiro 1 com o produto de 8 por um número triangular é um número quadrado.*

Dem. Com efeito, para todo o número inteiro positivo r, tem-se

$$\begin{aligned}
8T_r + 1 &= 8 \times \frac{1}{2}r(r+1) + 1 \\
&= 4r^2 + 4r + 1 \\
&= (2r+1)^2,
\end{aligned}$$

o que prova o teorema de **Plutarco**.

Observando que, se s é inteiro positivo ímpar maior que 1, existe algum inteiro positivo r tal que $s = 2r + 1$, a leitura na ordem inversa da última sequência de equações demonstra o seguinte recíproco do teorema anterior, i.e.

Teorema 3.2 *Para todo o inteiro positivo ímpar $s > 1$, existe um número triangular T_r tal que $8T_r + 1 = s^2$.*

Conforme é mencionado por **Leonard Eugene Dickson**, no vol. II, p.3, da sua obra *History of the Theory of Numbers*, este teorema de **Plutarco** foi generalizado por **Diofanto** cerca do ano 250 da nossa era. De facto, **Diofanto** mostrou que

$$8(m-2)p_r^{(m)} + (m-4)^2 \;=\; [(m-2)(2r-1)+2]^2, \tag{1}$$

onde $p_r^{(m)} \;=\; \frac{1}{2}r[2+(r-1)(m-2)]$, designa o número, m-gonal de ordem r.

Note-se que, para $m=3$, a igualdade (1) se reduz a

$$8\times\frac{1}{2}r[2+(r-1)\times 1]+(3-4)^2 \;=\; [(2r-1)+2]^2,$$

ou seja,

$$8\times\frac{1}{2}r(r+1)+1 \;=\; (2r+1)^2,$$

que equivale a

$$8T_r+1 \;=\; (2r+1)^2, \tag{2}$$

o que mostra que a igualdade (2), que figura no teorema de **Plutarco**, é um caso particular da igualdade (1), obtida por **Diofanto**.

Vejamos que, de facto, a igualdade (1) vale para todos os inteiros $m\ge 3$ e $r\ge 3$.

Atendendo ao significado de $p_r^{(m)}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
8(m-2)p_r^{(m)}+(m-4)^2 &= 8(m-2)\frac{1}{2}r[2+(r-1)(m-2)]+(m-4)^2\\
&= 4(m-2)r[2+(m-2)r-m+2]+(m-4)^2\\
&= 16(m-2)r+4(m-2)^2r^2-4mr(m-1)\\
&\qquad +(m-4)^2\\
&= 4m^2r^2-4m^2r-16mr^2+16r^2+m^2+24mr\\
&\qquad -8m-32r+16.
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos indicados no segundo membro de (1) encontra-se precisamente a expressão que encontrámos quando fizemos os cálculos indicados no primeiro membro da mesma equação.

São conhecidas muitas outras propriedades de números triangulares. Na página 5 do livro *History of the Theory of Numbers* de **L. E. Dickson**, já citado, mencionam-se várias propriedades publicadas por **C. G. Bachet** e cuja demonstração é muito simples.

Uma propriedade interessante vem mencionada na página 92 do livro de **David Wells** intitulado *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*; diz o seguinte:

> *"Para todo o número triangular, T_n, há uma infinidade de outros números triangulares, T_m, tais que o produto $T_n\cdot T_m$ é um quadrado."*

Não é dada a demonstração, mas apresenta-se como exemplo $T_3 \cdot T_{24} = 30^2$. Trata-se de um lapso, pois $T_3 \cdot T_{24} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 24 \times 25 = 1800$, que não é um quadrado.

Exemplos:

$$\begin{aligned} T_3 \cdot T_4 &= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 48 \times 49 = 84^2 \\ T_2 \cdot T_{24} &= \frac{1}{2} \times 3 \times 4\frac{1}{2} \times 24 \times 25 = 30^2. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que há uma infinidade de números triangulares, T_m, tais que T_2T_m é um quadrado; por outras palavras, vamos mostrar que há uma infinidade de pares de inteiros positivos (u, m) tais que

$$T_2T_m = u^2, \tag{3}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2}m(m+1) = u^2,$$

i.e., $3m^2 + 3m = 2u^2$, donde resulta que 3 divide u, i.e. $u = 3v$, para algum inteiro v. Logo $m^2 + m - 6v^2 = 0$ ou seja,

$$(2m+1)^2 - 24v^2 = 1.$$

Ponhamos $2m + 1 = z$. Tem-se então

$$z^2 - 24v^2 = 1,$$

e uma solução desta equação é $z = 5$, $v = 1$, a que corresponde $m = 2$ e tem-se evidentemente $T_2T_2 = 9 = 3^2$.

Esta solução aparentemente não tem grande interesse, mas vamos mostrar que, a partir de cada solução (z_1, v_1), inteira e positiva, da equação $z^2 - 24v^2 = 1$, é possível encontrar uma outra solução, (z_2, v_2), inteira e positiva, com $z_2 > z_1$ e $v_2 > v_1$, o que prova a existência de uma infinidade de soluções inteiras e positivas.

Ponhamos $z_1 = 5$ e $v_1 = 1$ e consideremos o sistema

$$\begin{cases} z_2 = az_1 + bv_1 \\ v_2 = cz_1 + dv_1 \end{cases} \tag{4}$$

Vamos ver que existem inteiros positivos a, b, c, d tais que (z_2, v_2) é solução da equação considerada,$z^2 - 24v^2 = 1$ e, para a, b, c, d positivos, tem-se evidentemente $z_2 > z_1$ e $v_2 > v_1$.

Para que (z_2, v_2) seja solução, é necessário e basta que seja:

$$(az_1 + bv_1)^2 - 24(cz_1 + dv_1)^2 = 1,$$

i.e.,

$$(a^2 - 24c^2)z_1^2 + (b^2 - 24d^2)v_1^2 + (2ab - 48cd)z_1v_1 = 1$$

Determinemos inteiros positivos a, b, c, d, tais que

$$\begin{cases} a^2 - 24c^2 &= 1 \\ b^2 - 24d^2 &= -24 \\ 2ab - 48cd &= 0 \end{cases} \tag{5}$$

A 1^a equação é satisfeita para $a = 5$, $c = 1$; a 2^a equação, para ser satisfeita, exige que $24|b^2$, e, para isso, que $12|b^2$; seja $b = 12B$; substituindo na 2^a equação, vem $144B^2 - 24d^2 = -24$, ou seja, $6B^2 - d^2 = -1$, equação equivalente a

$$d^2 - 6B^2 = 1.$$

Uma solução inteira positiva desta última equação é $d = 5$, $B = 2$; daqui resulta que $b = 24$, $d = 5$ é uma solução da 2^a equação do sistema, pois $b^2 - 4d^2 = 576 - 24 \times 25 = -24$.

Além disso, tem-se $2ab - 48cd = 2 \times 5 \times 24 - 48 \times 1 \times 5 = 0$, quer dizer, $a = 5$, $b = 24$, $c = 1$, $d = 5$ é uma solução inteira e positiva do sistema (5). Representando por (z_1, v_1) a solução $(5, 1)$, da equação $z^2 - 24v^2 = 1$, conclui-se que

$$\begin{cases} z_2 &= 5 \cdot z_1 + 24v_1 &= 5 \times 5 + 24 \times 1 &= 49 \\ v_2 &= 1 \cdot z_1 + 5 \cdot v_1 &= 1 \times 5 + 5 \times 1 &= 10; \end{cases}$$

assim, (z_2, v_2) constitui uma solução da equação $z^2 - 24v^2 = 1$, pois $49^2 - 24 \times 100 = 2401 - 2400 = 1$ e, como $2m + 1 = z_2$, tem-se m=24; consequentemente,

$$T_2 T_m = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} 24 \times 25 = 900 = 30^2$$

A partir da solução $(z_2, v_2) = (49, 10)$, obtém-se uma outra solução, tomando

$$\begin{cases} z_3 &= 5 \cdot z_2 + 24 \cdot v_2 &= 485 \\ v_3 &= 1 \cdot z_2 + 5 \cdot v_2 &= 99; \end{cases}$$

atendendo a que $2m + 1 = 485$, vem $m = 242$ e

$$T_2 T_m = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} \times 242 \times 243 = 297^2$$

Repetindo o processo, encontrávamos para cada repetição, uma solução maior que a anterior.

Notas finais

(1) **Dirk J. Struik**, no seu livro *História Concisa das Matemáticas*, considera a *Introdução à Aritmética* de **Nicómaco** como "*a exposição mais completa existente da aritmética pitagórica*".

Timeu, natural de Locros (cidade da Magna Grécia) foi um filósofo que viveu no século V ou IV a.C.. Conforme se pode ler no verbete de **Sebastião T. de Pinho**, da *Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura*, nas doutrinas divulgadas por **Timeu de Locros**, "*encontrou* Platão *assunto para o diálogo em que o principal interlocutor é a figura de Timeu, que deu o nome à mesma obra. Além de um Tratado de Matemática e uma* Vida de Pitágoras *que* Suidas *lhe atribui, passou como sendo também de* Timeu *um tratado em dialecto dórico,* Acerca da alma, do mundo e da natureza."

Suidas (ver Suda)- nome de um léxico grego (também conhecido pela designação menos correcta de Suidas), compilado no final do século X. Segundo a afirmação de **M. H. Rocha Pereira**, Professora da Faculdade de Letras da Universidade de Coimbra, tal léxico "it embora nem sempre fidedigno, é uma fonte de informação riquíssima sobre a Grécia antiga, em muitos casos com base no acesso a textos que se perderam."

(Informações colhidas em verbetes da Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura)

(2) Além dos números figurados planos, há outros números figurados não planos.

(3) **Empédocles**- filósofo grego pré-socrático ($\sim$ 483-430, a.C.). Filho de uma família rica, obteve, diz-se, uma vitória olímpica. Tornou-se chefe do partido democrático, legislador, poeta, médico, profeta, taumaturgo. Subsistem quatrocentos versos do seu poema sobre *O mundo físico.* Sua teoria dos quatro elementos (água, ar, terra, fogo) continuou em vigor até à epoca da química moderna.

(4) **Bachet de Méziriac** nasceu em Bourg-en-Bresse, de uma família nobre. Foi educado pelos Jesuítas e terá sido professor das escolas jesuítas de Côme ou de Milão. Foi eleito, em 1635, membro da Academia Francesa.

Efeitos colaterais no uso de máquinas de calcular

Mário M. Graça

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico,
Av. Rovisco Pais
1049—001 Lisboa,
Portugal.
E-mail: Mario.Graca@math.ist.utl.pt.

Começa-se por referir quatro situações dramáticas ocasionadas pela ocorrência de *erros de arredondamento*. De seguida, são mostrados alguns exemplos de cálculo numérico elementar onde os erros de arredondamento produzem efeitos indesejáveis.

1 Introdução

O autor destas notas vem do tempo da lousa, da tábua de logaritmos, da régua de cálculo, da máquina eléctrica de secretária, da TI 88, da TI 89, do ZX 81, do ZX Spectrum, do Mac Classic, da Casio FX 850P, do 386, do 486 (e outra tralha PC), do PowerBook, etc. No momento da produção deste apontamento o autor está usando um excelente electrodoméstico iMac. Todos os artefactos enumerados possuem uma coisa em comum: podem ser utilizados como instrumentos de cálculo cujo resultado final está, geralmente, afectado de erro. Aos erros resultando da representação dos números em computador é costume chamar-se *erros de arredondamento*.

Reportando-se ao tempo em que a sua calculadora era uma negra lousa (esse notável objecto referido em primeiro lugar), o autor pagou algumas vezes com sofrimento físico e humilhações várias alguns erros de cálculo. As máquinas acima nomeadas logo a seguir à lousa provam assim que a tecnologia pode constituir um alívio para as crianças. No entanto, apesar de todos os progressos, traduzidos na distância que vai entre uma lousa e o electrodoméstico iMac, os erros de arredondamento podem ter ainda efeitos colaterais importantes. Normalmente, os erros de arredondamento provocam efeitos menos dramáticos do que os "erros colaterais" das guerras modernas mas, por vezes, esses erros têm consequências suficientemente sérias, pelo que não podem ser ignorados.

Entre nós, um primeiro efeito colateral já observado consiste na "guerra" entre os que pensam que se deve usar máquinas de calcular nas Escolas Secundárias, e aqueles que pensam que não ([1],[5]). O autor pensa que essa discussão, faz tanto sentido como a questão de saber se se deve ou não usar telemóvel (mesmo que este provoque o cancro, como já se ouviu dizer). Sabe-se, desde tempos imemoriais, da inutilidade do "combate"contra as tecnologias. Convém, sobretudo, saber utilizar a tecnologia com vantagem para o género humano e, se possível, para os animais, as plantas, a água, o ar, a terra e o fogo.

Assuma-se pois como dado adquirido que máquinas de calcular programáveis ou computadores são usados nos Escolas Secundárias, e que quem os usa terá vantagens em conhecer as suas limitações. Passemos agora ao relato de quatro efeitos colaterais nefastos, que se tornaram mundialmente famosos, devido a erros de arredondamento e/ou erros de programação, e que tiveram origem no descuido ou desprezo quanto aos chamados *pequenos erros de arredondamento*:

1. Em 4 de Junho de 1996 o foguetão Ariane 5 caíu após 36 segundos de voo. A queda ficou a dever-se a um erro de programação: ao converter um número fraccionário, representado no computador de bordo com 64 dígitos binários (bits), para um número inteiro representado com 16 bits, o sistema de voo do foguetão, controlado por computador, entrou em colapso. Para cúmulo, o segmento de software utilizado não era estritamente necessário para o bom desempenho da nave e havia sido herdado do Ariane 4. Os prejuízos foram estimados em várias centenas de milhares de contos.

2. Em 25 de Fevereiro de 1991, durante a guerra do Golfo, um anti-míssil Patriot lançado pela "comunidade internacional" falhou a intercepção dum míssil vindo do lado de Saddam Hussein. Morreram 28 pessoas. O problema resultou da acumulação sucessiva de erros de arredondamento no cálculo do tempo necessário para a intercepção do míssil invasor.

3. Em 1982 a Bolsa de valores de Vancouver instituíu um novo índice, inicializado com o valor nominal de 1000.000. O índice era recalculado e actualizado no final de cada transacção. Após 22 meses, o índice caíu para 524.881. A causa dessa desvalorização foi terem-se efectuado truncaturas em cada transação registada, em lugar de arredondamentos. O valor arredondado correcto daria 1098.892.
Os infelizes investidores desta bolsa possuem razões (fundadas) para detestarem a aritmética computacional.

4. Na Alemanha, um partido com menos de 5% de votos não elege deputado. Na *land* Schleswig-Holstein, num período eleitoral recente, um determinado partido foi dado como tendo obtido 5% dos votos, elegendo assim um deputado. Depois de anunciados os resultados, veio a verificar-se que esse partido na realidade apenas tinha obtido uma percentagem de 4.97%. O deputado eleito deixou de o ser. O fiasco ficou a dever-se ao facto do resultado da votação ter sido arredondado para 2 dígitos. Reposta a legalidade, o maior partido da região acabou por ter a maioria absoluta no Parlamento com a vantagem de um deputado.
Felizmente que o candidato a deputado perdedor poderá recandidatar-se às eleiçes seguintes. Ele pertence aos Verdes, ideário que está a dar.

A informação anterior (descontados os respectivos comentários finais) foi recolhida recentemente pelo Prof. G. W. Stewart [9]. Outros exemplos de efeitos colaterais dos erros de arredondamento podem encontrar-se no URL ("Uniform Resource Locator") http://catless.ncl.ac.uk/Risks.

Claro que nenhuma tragédia equivalente às descritas acima deverá ocorrer em resultado do uso de máquinas de calcular pelos alunos das Escolas Secundárias de Portugal. Poderá prever-se, no entanto, uma ou mais gerações de estudantes mal preparados para a vida, no caso dos professores desses Escolas Secundárias não alertarem os alunos para algumas cautelas a observar no uso das suas máquinas de calcular.

Não é de esperar que um aluno das Escolas Secundárias seja confrontado com um grande volume de cálculo numérico, muitas vezes fonte da ampliação de pequenos erros de arredondamento em certa etapa do cálculo. Mesmo assim, deverá o aluno ter presente uma regra básica que não precisa de muitas explicações teóricas visto resultar do bom senso mais elementar: não deverão ser feitos arredondamentos intermédios num cálculo envolvendo operações consecutivas. Se a resposta a uma questão numérica exige uma ou várias operações consecutivas (na gíria numérica, um *algoritmo*) deverá usar-se, em cada operação, o máximo de precisão que a máquina puder dar — actualmente cerca de 16 dígitos decimais — evitando-se assim arredondamentos intermédios, forçados pelo utilizador. Não quer isto dizer que o resultado final obtido pela máquina tenha os mesmos 16 dígitos correctos iniciais (geralmente não tem!) mas, ao menos, isso não será da responsabilidade do utilizador da máquina.

A questão mais geral de se saber quantos dígitos correctos tem um valor calculado pela máquina, no final da execução de uma ou mais operações, é normalmente impossível de ser decidida com exactidão. Pode sim *estimar-se* o número de dígitos correctos, mas esse assunto não é óbvio. O leitor interessado encontrará na internet inúmeras páginas sobre erros de arredondamento associados ao cálculo numérico. Para um estudo cuidado do assunto não faltam no mercado muito bons livros de introdução ao Cálculo Numérico, de que damos uma pequeníssima amostra nas referências bibliográficas ([2], [3], [6], [8]).

Voltando de novo à nossa questão dos erros de arredondamento resultando de cálculos efectuados num ambiente computacional de aritmética finita, um efeito colateral decorrente do uso de máquinas de calcular, e que pode frequentemente ser evitado, consiste no chamado *cancelamento subtractivo*. Tal como todos os outros erros de arredondamento (inevitáveis), o cancelamento subtractivo deve-se ao facto das máquinas representarem os números usando apenas um número finito de dígitos. Esse efeito pode ocorrer ao efectuarmos em computador a subtracção de dois números reais muito *próximos*, podendo o valor calculado pela máquina resultar completamente errado. Sempre que possível, há pois que tomar precauções para evitar o surgimento desta situação. A próxima secção destina-se a relembrar alguns exemplos clássicos mostrando os efeitos catastróficos que podem ter os erros de arredondamento e, em particular, o cancelamento subtractivo. Foram escolhidos, propositadamente, algoritmos muito simples e familiares a alunos dos anos terminais das Escolas Secundárias que tenham a felicidade de beneficiar da disciplina de Matemática, ou outra qualquer disciplina em que seja utilizada máquina de calcular.

2 Exemplos

Começamos por um exemplo numérico, no âmbito da saúde pública num país distante. Nele se mostra que, em abstracto, os números são neutros. Os mesmos números, traduzindo cenas da vida real, podem ser trágicos.

Exemplo 1. Cancelamento subtractivo

Admita que um certo médico decide que só operará um doente se o resultado de uma análise ao sangue der um valor negativo. O resultado da análise é obtido efectuando a diferença entre dois determinados parâmetros típicos representados, respectivamente, por x_1 e x_2. Conhece-se que esses valores deverão situar-se no intervalo $[0, 1)$. O laboratório de análises utiliza uma máquina que converte os números, arredondando-os para 3 dígitos decimais.

Os valores (exactos) da análise efectuada ao sangue do doente foram os seguintes: $x_1 = 0.9800$, $x_2 = 0.9804$. Eis o documento que serviu de base à decisão (errada) do médico:

Laboratório de Análises Clínicas A. Caveira S.A.
Resultado da análise ao sangue do Senhor José Coitado.
POSITIVO: $(r = 0.000)$

Analisemos o sucedido. Designemos por $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$, respectivamente, os valores de x_1 e x_2 representados na máquina. Tem-se: $\bar{x}_1 = 0.980$ e $\bar{x}_2 = 0.980$. O resultado da máquina é $\bar{r} = 0.000$. O valor exacto da subtracção é $r = x_1 - x_2 = -0.0004$, pelo que o senhor doutor deveria operar o Senhor Coitado. O *erro relativo* de $\bar{r}$ é dado por,

$$\left|\frac{r-\bar{r}}{r}\right| = \frac{0.0004}{0.0004} = 1 \qquad (100\%).$$

Eis assim mais um caso em que a "culpa" é do computador, como é vulgar ouvir-se.

Em conclusão, a subtracção é uma operação aritmética que pode conduzir a erros relativos grandes no resultado (comparados com erros relativos pequenos nos operandos). Este fenómeno é conhecido pela designação de *cancelamento subtractivo*. Este exemplo mostra também quão perigoso é tomar decisões (sim ou não) baseadas apenas num valor numérico r, digamos, estar acima ou abaixo dum certo patamar! Se esse valor tiver sido calculado exactamente, muito bem; senão pode acontecer o mesmo que ao Sr. José Coitado.

Exemplo 2. Propagação do erro de arredondamento ([3], p. 18)

O simples cálculo do valor dum polinómio num ponto encerra muitas dificuldades numéricas. A maior ou menor propagação dos erros de arredondamento depende muito da sequência de cálculos, i.e. do *algoritmo* utilizado. A maneira "mais simples" de executar esse cálculo não é, em geral, a numericamente correcta, como se ilustra a seguir.

Pretende-se calcular $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 0.149$ no ponto $x = 4.71$ usando uma aritmética computacional de 3 dígitos, com arredondamento. A tabela seguinte dá os valores intermédios calculados:

	x	x^2	x^3	$6\,x^2$	$3\,x$
Exacto	4.71	22.1841	104.487111	133.1046	14.13
Arredondamentos 3 dígitos	4.71	22.2	104.	133.	14.1

Tem-se,

$$f(4.71) = -14.636489 \qquad \text{e} \qquad \bar{f}(4.71) = -14.0,$$

sendo $\bar{f}(4.71)$ calculado a partir dos valores inscritos na segunda linha da tabela anterior. Convidamos o leitor a verificar que o erro relativo do valor de $\bar{f}(4.71)$ dado pela máquina é, aproximadamente, 4%. Se refizer os cálculos usando a forma algebricamente equivalente

$$f(x) = ((x-6)x+3)\,x+3)\,x-0.149,$$

obterá um erro relativo aproximado de 0.25%. Esta forma *concatenada* de escrever um polinómio permite-nos assim reduzir o erro de arredondamento propagado. O algoritmo correspondente é o célebre *algoritmo de Horner* ([3], p. 75]).

Exemplo 3. Equação quadrática ([6], p. 20)

Pretende-se calcular as raízes reais da equação quadrática

$$x^2 - 56\,x + 1 = 0,$$

utilizando aritmética computacional com 5 dígitos. Obtém-se:

$$\bar{x}_1 = 28 - \sqrt{783} = 28 - 27.982 = 0.018000,$$
$$\bar{x}_2 = 28 + \sqrt{783} = 28 + 27.982 = 55.982.$$

No entanto as raízes são $x_1 = 0.0178628\ldots$ e $x_2 = 55.982137\ldots$. Verifica-se assim que o valor calculado para x_1 está afectado dum erro relativo grande (porquê?). Ora, como se pode facilmente verificar, o produto das raízes duma equação quadrática $ax^2 + b\,x + c = 0$ $(a \neq 0)$ é $x_1\,x_2 = c/a$. Assim, o cálculo anterior poderá ser realizado começando por $\bar{x}_2$, e depois

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{\bar{x}_2} = 0.017863.$$

Como se vê, o valor de $\bar{x}_1$ obtido em último lugar é mais preciso do que o que foi calculado anteriormente. Este exemplo evidencia que o cálculo numérico a partir duma certa expressão algébrica dada pode não ser a melhor via de cálculo ao levarmos em consideração o efeito de erros de arredondamento; uma reescrita judiciosa da expressão (ou fórmula) inicial pode constituir uma alternativa mais conveniente, como se viu. Dito por outras palavras, fórmulas algebricamente equivalentes deixam geralmente de o ser quando usadas com aritmética computacional de precisão finita.

Cabe ainda dizer que os construtores actuais de máquinas de calcular programáveis, incorporam cada vez mais software capaz de efectuar automaticamente estimativas dos erros de arredondamento, de modo que os dígitos exibidos pela máquina, no final de uma ou várias operações, sejam apenas aqueles que possam ser considerados correctos. Quer isto significar que as máquinas actuais já são muito mais "inteligentes" do que aquilo que parecem. Por isso mesmo, o utilizador consciente duma máquina de calcular deverá consultar os manuais do vendedor para saber exactamente qual o nível do "quociente de inteligência" da sua máquina, no que respeita ao controle dos erros de arredondamento.

Por outro lado, e dado precisamente o pequeno volume de cálculo numérico que é normalmente exigido no ensino secundário, poderá o aluno recorrer, com vantagem, às máquinas dotadas de linguagens de cálculo simbólico. Neste caso o problema dos erros de arredondamento nem sequer se coloca visto que a máquina pode dar respostas exactas! De resto, o advento de linguagens simbólicas como *Mathematica* [10], Maple [4], AXIOM [7] e outras existentes no mercado (inclusive algumas marcas já incorporaram nas suas calculadoras de bolso linguagens simbólicas próprias), reduziu bastante a importância do estudo dos erros de arredondamento em cálculo numérico.

Ficam assim libertadas as mentes para assuntos mais interessantes. Com efeito, essas linguagens simbólicas constituem um novo (e revolucionário) instrumento que permite relançar o ensino e a aprendizagem da matemática nos Escolas Secundárias (e não só) num contexto que realmente interessa, a saber no domínio das ideias. Nada pior do que colocar máquinas de calcular no lugar das ideias matemáticas, quer estas ideias sejam transmitidas a nível do ensino primário, secundário ou universitário. Lá por que houve num passado relativamente recente muitos professores (como o autor destas linhas teve oportunidade de testemunhar) que resistiram à introdução de máquinas de calcular no ensino — pela simples razão de que elas exigem muito estudo e trabalho— isso não justifica que, pelas mesmas razões, alguém pretenda agora transformar todo o ensino da Matemática nos Escolas Secundárias na mera manipulação cega e excessiva desses maravilhosos "brinquedos" de cálculo. Neste sentido, convirá deixar as paranóias ligadas ao folclore tecnológico ao cuidado das televisões mais pobres e outros lugares de diversão pública (ou às políticas e políticos de fachada tecnológica), enveredando-se finalmente por um ensino em que a tecnologia seja um factor determinante mas não o factor decisivo.

Referências

[1] Rui Albuquerque. *Questionário ao uso de Tecnologia nas Aulas de Matemática*, Boletim da SPM, vol. 38, 139-144, 1998.

[2] Kendall E. Atkinson. *An Introduction to Numerical Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1989.

[3] Richard L. Burden and J. Douglas Faires. *Numerical Analysis*, fourth. ed., PWS-KENT, Boston, 1989.

[4] B. W. Char et al. *Maple V — Language Reference Manual* , Springer-Varlag, 1991.

[5] José António Fernandes e Olga Vaz. *Porquê usar tecnologia nas aulas de Matemática?*, Boletim da SPM, vol. 39, 43–55, 1998.

[6] Walter Gautschi. *Numerical Analysis An Introduction*, Birkhäuser, Boston, 1997.

[7] R. D. Jenks and R. S. Sutor. *AXIOM — The Scientific Computation System*, Springer–Verlag, 1992.

[8] Heitor Pina. *Métodos Numéricos*, McGraw–Hill, Lisboa, 1995.

[9] G. W. Stewart. *Rounding Error*, NA Digest, vol. 99, Issue 43, 1–1, 1999.

[10] S. Wolfram. *Mathematica – A System for Doing Mathematics by Computer*, 2nd. ed., Addison–Wesley, California, 1991.

GAZETA DE MATEMÁTICA nº 139
Julho de 2000

Esses Desconhecidos Quaterniões!

P. Cerejeiras

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
3810-193 Aveiro, Portugal

As páginas que se seguem são dedicadas a uma tentativa de divulgação da Análise Quaterniónica. Com base neste propósito, optei por usar uma abordagem ligeira, iniciando este trabalho por uma pequena recapitulação histórica e passando então a algumas ideias para aplicações práticas.

O leitor deverá ter presente, durante a leitura, que esta (voluntariamente) simples abordagem foi feita à custa de um escamoteamento dos verdadeiros problemas.

Se esta "brincadeira" o levar a querer saber mais sobre tais entidades, darei por conseguido o principal objectivo destas páginas. Encontrará, no final, uma indicação de bibliografia que poderá consultar caso deseje aprofundar os tópicos aqui referidos.

1 Mais umas achas p'ra uma velha fogueira

"Quaterniões?! O que são?" é a pergunta que ocorre ao comum dos mortais, que imediatamente se imagina na presença de mais alguma estranha e esotérica invenção matemática, completamente divorciada da realidade. E, convenhamos, a Matemática goza de uma péssima reputação, no que toca a esse respeito - diga-se em abono da verdade, nem sempre injustificada. Todavia - e por agora, o leitor terá que confiar em mim - não é esse o caso destas entidades.

O que motiva então o seu desconhecimento por parte do público geral? A pergunta é complexa. Pode dizer-se, numa primeira análise simplista, que a culpa reside no hábito dos Matemáticos darem estranhos e complicados nomes às entidades com que lidam, e a partir das quais extraem as mais mirabolantes conclusões.

A ideia é tentadora, mas nunca poderá justificar tão completo oblívio. Afinal, pode o leitor nunca vir a saber quais as reais aplicações das matrizes, ou de grupos invariantes, para não falar de outros objectos, mas ainda assim faz uma ideia razoável daquilo em que consistem.

Na realidade, não nos podemos esquecer que, em última análise, a Matemática é essencialmente uma linguagem. Possui regras próprias e está em constante adaptação, sendo usada para descrever os mais variados fenómenos. Tem sofrido alterações ao longos dos séculos (e não poucas), mas nenhuma outra linguagem a bate em sucesso: 5 000 anos de duração, e isto se contarmos apenas a partir do período Egípcio. Conhecem melhor história de sucesso?

Mas voltemos à questão que aqui nos traz, ou seja, aos quaterniões. Se, pela parte do público, a reacção é de receio e desconfiança, a situação não se apresenta muito melhor quando encaramos a reacção da comunidade matemática. Com efeito, a generalidade parece reagir como se em presença de algo *demasiado simples* para merecer um segundo olhar de atenção. Bem diz a sabedoria popular que não se pode agradar a gregos e a troianos. Mas desagradar a ambos?...

Os factos que apresentaremos de seguida mostrarão que mesmo as ferramentas mais simples podem ser de grande utilidade, ajudando desta forma a desmistificar um pouco a (má) fama criada em torno dos quaterniões, em particular, e da Matemática, em geral.

2 Um Pouco de História

Por onde começar? Talvez pela principal vantagem dos quaterniões, que consiste numa fácil interpretação física, dado cada operação algébrica surgir associada a um efeito geométrico. Um exemplo disto é dado pela entidade *Spinor* [da qual nos basta saber ser um elemento particular na Álgebra Quaterniónica que expressa um tipo de rotação (em inglês, Spin)]. Como tudo na vida, este efeito é, simultaneamente, fruto do acaso e do propósito com que foi desenvolvida a álgebra.

A Geometria, um dos primeiros ramos da Matemática, se não *o* primeiro, esteve desde o princípio ligada a problemas concretos do dia-a-dia. Não é, portanto, de espantar as tentativas de construir, no século XVII, um sistema de cálculo que "operasse" com linhas, áreas e outros, de forma análoga ao cálculo numérico.

O célebre Matemático Leibniz (1646-1716) foi um dos primeiros a aperceber-se desta necessidade. Numa carta escrita ao seu amigo Huygens[1], abordava já o problema de estabelecer uma *geometria da situação* que permitisse operar com a posição de um objecto como se de um número se tratasse. Nesta carta, publicada apenas em 1833, Leibniz introduzia já certas propriedades a esperar de tal sistema. Mais tarde, esta carta viria a estar na base de uma competição nada amigável entre os diferentes sistemas apresentados como candidatos a "geometria de situação".

Paralelamente a estes acontecimentos, desenvolvia-se na Europa o estudo dos números complexos; com efeito, o paradoxo criado pelo facto de $\sqrt{-1}$ não ser ordenável relativamente ao elemento neutro para a adição esteve, entre outras razões, na base da difícil aceitação do sistema dos complexos.

O facto desta raíz não ser posicionável na recta real conduziu à ideia intuitiva da existência de uma representação planar para estes novos números. Neste sentido, o primeiro estudo com sucesso foi efectuado por Caspar Wessel (1745-1818), que o apresentou perante a Royal Academy of Denmark. Todavia, o estudo ficou por longo tempo ignorado devido à relutância do autor em comunicar os resultados aos restantes colegas europeus.

Neste trabalho, Wessel propunha o tratamento dos números complexos como entidades geométricas, em que $\epsilon = \sqrt{-1}$ seria ortogonal à unidade real 1 (o que permite ver que este tinha já presente o actual conceito de vector). Graças ao estabelecimento de adequadas regras de adição e produto para estas entidades, conseguiu criar um sistema de cálculo perfeitamente consistente.

[1] Christian Huygens, Físico Holandês. Conhecido pelos seus trabalhos no campo da óptica.

O desconhecimento deste trabalho manteve-se por um século, período durante o qual vários outros matemáticos se debruçaram sobre o assunto. Dentre estes, destacam-se os esforços (independentes) de D'Argand e Gauss. O primeiro, com a publicação, em 1806, de *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, estabeleceu a representação geométrica dos números complexos tal como hoje a conhecemos.

Todavia, fosse talvez o receio pelo modo como seria recebido tal ensaio, ou, tal como Wessel, a relutância em partilhar conhecimentos, a verdade é que o ensaio se manteve ignorado por mais de sete anos. Com efeito, seria necessário que um outro matemático chamasse a atenção para este trabalho de autor desconhecido (pois D'Argand deixara-o incógnito), para que este finalmente reclamasse a sua autoria.

Ainda assim, a aceitação destas novas ideias processou-se de modo lento até à publicação, em 1831, de um escrito de Gauss (curiosamente, sem título) onde se tratava da representação geométrica de complexos. Uma investigação apurada dos anteriores trabalhos de Gauss permite dar crédito à sua afirmação de possuir o conceito desta representação já em 1799.

E finalmente chegamos ao Matemático Irlandês Sir William Rowan Hamilton, inventor dos quaterniões.

3 Sir William Rowan Hamilton (1805-65)

Sir William Rowan Hamilton foi indubitavelmente um dos grandes Matemáticos da sua época. Natural de Dublin, seria nomeado, muito novo, Astrónomo Real, cargo este que manteve até ao fim da sua vida. Entre os seus trabalhos mais importantes contam-se os efectuados na área da Dinâmica e do Cálculo de Variações. Cite-se, por exemplo, Schrödinger, o qual louva o princípio Hamiltoniano como uma das pedras nucleares da Física Moderna.

Dando grande relevo ao que actualmente se designa por *Matemática Aplicada*, Hamilton influenciou as gerações de Matemáticos e Físicos que se seguiram.

Tendo iniciado a sua vida com grande projecção mundial - os seus estudos no Trinity College de Dublin foram a tal ponto brilhantes que lhe grangearam, ainda antes do curso concluído, uma justificada fama - os finais do século XIX viram a sua memória cair num quase completo esquecimento. Para tal, muito contribuiu a obcessão de Hamilton pelos quaterniões, nos quais via *o* sistema ideal para descrever modelos físicos, e aos quais dedicou os restantes 20 anos da sua vida.

Com efeito, no ensaio *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time*[2] constava uma última parte dedicada à teoria dos "pares ordenados de números reais"; nesta, Hamilton apresentava uma sistematização do cálculo complexo sem, todavia, entrar em considerações de ordem geométrica.

A recepção favorável deste ensaio levou-o a virar-se para o problema de estender o seu método de cálculo a triplos ordenados (na altura, um problema ao qual vários Matemáticos se dedicavam). Nos anos que se seguiram, Hamilton procurou, em vão, uma regra de multiplicação de triplos, por ele já designados vectores[3].

[2]Publicado em 1837.

[3]O conceito de vector, tal como hoje o conhecemos, surgirá com o devido rigor apenas a partir

Reza a história que todas as manhãs, ao pequeno-almoço, os seus dois filhos lhe perguntavam "Então, Papá, já consegues multiplicar triplos?", ao que este respondia "Ainda não, só somar e subtrair.".

Procurando uma analogia com os complexos, Hamilton estabeleceu inicialmente um sistema em que as unidades fundamentais 1, i e j seriam ortogonais duas a duas. Deste modo, cada elemento teria a forma

$$q = x + yi + zj.$$

Dado pretender que os complexos estivessem incluídos neste novo sistema (à semelhança dos números reais, que surgem como caso particular dos complexos), então forçosamente devia exigir que $x + yi = x + yi + 0j$, ou seja, $i^2 = -1$.

Em face da ortogonalidade entre i e j, e da possibilidade de estabelecer um isomorfismo entre o espaço vectorial $\mathbb{C}$ e o espaço dos elementos da forma $x+zj = x+0i+zj$, o mesmo raciocínio justificava $j^2 = -1$.

Logicamente, ter-se-ia então que $(ij)^2 = +1$, donde $ij = +1$ ou $ij = -1$. Todavia, esta simples conclusão entrava em contradição com outras propriedades a exigir dos triplos, nomeadamente, com a *lei dos módulos*.

Atendendo a que $|q| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ representaria a distância do triplo q à origem do referencial, então a lei dos módulos estabeleceria que, multiplicando dois triplos, a distância do triplo resultante à origem deveria ser dada pelo produto das distâncias associadas aos triplos originais, ou seja, se

$$(x_1 + y_1 i + z_1 j)(x_2 + y_2 i + z_2 j) = x_3 + y_3 i + z_3 j$$

então

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2. \tag{6}$$

Mas bastava um pequeno exemplo

$$\begin{aligned}(i+j)(i+j) &= i^2 + ij + ji + j^2 \\ &= -2 + 2ij\end{aligned}$$

para constatar que, quer ij assumisse o valor $+1$ ou -1, a lei (6) falharia.

Hamilton provou igualmente que, independentemente dos valores dos coeficientes $x_1, y_1, \ldots$, a lei (6) apenas se verificaria se impusesse a condição extra $ij = 0$. Porque esta condição não tinha significado físico, Hamilton rejeitou esta possibilidade.

O paradoxo do valor a atribuir a ij sugeriu-lhe a ideia de que talvez o sistema por ele proposto estivesse incompleto. Introduziu então uma quarta unidade fundamental $k = ij$, ortogonal às anteriores.

Assim, o novo sistema consistia agora em quádruplos ordenados, e já não em triplos. Porém, isso continuava a não resolver o problema (6). Seriam precisos seis anos para que Hamilton se apercebesse de que o verdadeiro problema do seu novo sistema residia na suposição implícita da comutatividade do produto.

Finalmente, a 16 de Outubro de 1843, enquanto se dirigia para a Royal Irish Academy na companhia da esposa, Hamilton teve a intuição da chave para o problema. Encontrando-se, nesse momento, sobre a ponte de Broughan, talhou a resposta

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

dos trabalhos de Gibbs, em 1881.

na pedra da ponte, como ainda hoje se pode ver. E passaria os restantes anos da sua vida a estudar as propriedades deste novo sistema.

4 Álgebra Quaterniónica

O novo sistema consiste então em quádruplos ordenados $q = (x, y, z, w) = x + yi + zj + wk$ que se podem adicionar e subtrair pelas regras usuais para vectores. Deste modo, o conjunto $\mathbb{H}$ dos quaterniões[4], constitui um espaço vectorial real.

À semelhança dos números complexos, denota-se por *parte escalar de q* o número real $Sc(q) = x$, e por *parte vectorial* o vector tridimensional $\vec{q} = yi + zj + wk$, donde a representação usual $q = x + \vec{q}$. De igual modo, define-se o *conjugado do quaternião* q como sendo o novo elemento $\overline{q} = x - \vec{q} = x - yi - zj - wk$.

Mais importante, é agora possível multiplicar quaterniões de acordo com as regras estabelecidas por Hamilton

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k; \; jk = -kj = i; \; ki = -ik = j$$

ou seja, efectuando os (fastidiosos) cálculos,

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (x_1 + y_1i + z_1j + w_1k)(x_2 + y_2i + z_2j + w_2k) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 - w_1w_2) + (x_1y_2 + y_1x_2 + z_1w_2 - w_1z_2)i + \\ &\qquad (x_1z_2 + z_1x_2 + w_1y_2 - y_1w_2)j + (x_1w_2 + w_1x_2 + y_1z_2 - z_1y_2)k \\ &= (x_1x_2 - \vec{q_1} \cdot \vec{q_2}) + x_1\vec{q_2} + x_2\vec{q_1} + \vec{q_1} \times \vec{q_2}, \end{aligned}$$

em que $\vec{q_1} \cdot \vec{q_2}$ e $\vec{q_1} \times \vec{q_2}$ representam, respectivamente, os produtos interno e externo usuais de $\mathbb{R}^3$. Deste modo, ter-se-á

$$\begin{aligned} Sc(q_1q_2) &= (x_1x_2 - \vec{q_1} \cdot \vec{q_2}) \\ &= \frac{q_1q_2 + q_2q_1}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\vec{q_1q_2}) &= x_1\vec{q_2} + x_2\vec{q_1} + \vec{q_1} \times \vec{q_2} \\ &= \frac{q_1q_2 - q_2q_1}{2}. \end{aligned}$$

A análise destas expressões permite as seguintes observações:

- é fácil de constatar que a expressão $< q_1, q_2 >= -Sc(q_1q_2)$ representa um produto interno real em $\mathbb{H}$.
- o produto q pelo seu conjugado $\overline{q}$ é o real não-negativo $q\overline{q} = |q|^2 = x^2 + c^2 + z^2 + w^2$, que constitui o quadrado da distância do quaternião (visto como vector de $\mathbb{R}^4$) à origem do referencial. Designaremos por *norma de q* o real não-negativo $|q|$.

  Por outro lado, $< q, q >= |q|^2$, pelo que temos estabelecida no conjunto dos quaterniões uma métrica induzida por um produto interno.

[4]Conjunto designado pela letra "H" em honra de Hamilton.

- quando a parte escalar de ambos os quaterniões é nula (isto é, quando se está em presença de "puros" vectores em $\mathbb{R}^3$), então a parte vectorial do produto acima descrito corresponde ao bem conhecido produto vectorial, enquanto a sua parte escalar corresponde ao simétrico do produto interno.

- também da afirmação anterior resulta a existência de inverso para cada quaternião não-nulo, dado por $q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\overline{q}$.

O conjunto $\mathbb{H}$ dos quaterniões fica assim munido da estrutura de Álgebra de Divisão. Todavia, existe uma importante diferença relativamente às Álgebras Real e Complexa pois o produto não é comutativo. Tal arrasta a existência de dois quocientes de um quaternião q_1 por um quaternião $q_2 \neq 0$, designados por *quociente à direita* $q_1 q_2^{-1}$ e *quociente à esquerda* $q_2^{-1} q_1$.

Igualmente da primeira observação, poderia argumentar-se que o trabalho de Gibbs na análise vectorial também se obtém por intermédio do de Hamilton. Todavia, note-se que há uma importante diferença na filosofia dos dois sistemas: o de Gibbs baseia-se mais numa compreensão intuitiva do espaço. Já o de Hamilton exige também conhecimentos na parte de estruturas algébricas, compensando esta dificuldade inicial com uma maior facilidade *à posteriori* do cálculo operacional.

Como curiosidade, registe-se que as exigências de Hamilton (recorde-se, a álgebra conter as de dimensão inferior e satisfazer a lei dos módulos (6)) apenas podem ser satisfeitas partindo de espaços vectoriais de dimensão 1, 2, 4 ou 8[5].

5 Implicações geométricas

Quais são as consequências da Álgebra Quaterniónica? Em primeiro lugar, para $q = x + yi + zj + wk$, podemos definir uma forma polar estabelecendo $\cos(\alpha) = \frac{x}{|q|}$ e, após normalizar a parte vectorial

$$I(q) = \frac{yi + zj + wk}{|yi + zj + wk|},$$

tomando $\sin(\alpha) I(q) = \frac{yi+zj+wk}{|q|}$. Então teremos

$$q = |q|(\cos(\alpha) + \sin(\alpha) I(q))$$

e o produto de q por um quaternião $\vec{X}$ com parte escalar nula e parte vectorial ortogonal a $\vec{q}$ (no sentido de $\mathbb{R}^3$), dá-nos

$$q\vec{X} = \cos(\alpha)\vec{X} + \sin(\alpha) I(q) \times \vec{X} \tag{7}$$

o que permite concluir que $q\vec{X}$ expressa a rotação de ângulo α do novo vector $\vec{X}$ em torno do eixo $I(q)$.

Veja-se a importância desta interpretação: lembrando-nos de que, para determinar uma rotação em $\mathbb{R}^3$ era, e ainda é, necessário recorrer ao cálculo dos respectivos ângulos de Euler e usar matrizes de 3×3, é imediato que este método gera uma

[5] Um resultado provado, entre outros, por Frobenius e Hurwitz.

enorme simplificação dos cálculos. Afinal, só precisamos do eixo de rotação $I(q)$ e do ângulo α. Todavia, o método acima descrito é restricto apenas a rotações em que o vector é perpendicular ao eixo de rotação ($\vec{X} \cdot \vec{q} = 0$).

Já depois de Hamilton, outros matemáticos conseguiram interpretar o produto para o caso geral, isto é, em que o vector $\vec{X}$ (com parte escalar nula) não é necessariamente ortogonal a $I(q)$, escrevendo o produto na forma

$$\begin{aligned} \vec{W} &= q\vec{X}\overline{q} \\ &= (x^2 - |\vec{q}|^2)\vec{X} + 2(\vec{q} \cdot \vec{X})\vec{q} + x(\vec{q} \times \vec{X}) \end{aligned} \tag{8}$$

e que se prova determinar a rotação de $\vec{X}$ em torno do eixo $I(q)$, de ângulo 2α (a ideia de um ângulo de valor duplo do original para a rotação pode ser facilmente intuida tendo em atenção (7) e o facto de que agora multiplicamos também à direita por $\overline{q}$).

Desta forma, o produto do tipo (8) expressa rotações no espaço de uma forma não só facilmente visualizável, como também simples de calcular.

Problemas que requeiram rotações são vários: desde o jogo de vídeo dos nossos filhos, em que as imagens mudam constantemente, consoante a posição do jogador (donde, rotação no espaço tridimensional), até aos problemas envolvendo a localização e estabilidade de satélites espaciais. Apesar da rapidez dos computadores actuais, cálculos simples e rápidos são sempre preferíveis (na estabilização de um satélite, uma demora de um segundo pode ser demasiada, e todos nós ouvimos os filhos queixarem-se "daquele jogo lento" ...).

6 Análise Quaterniónica

Estamos agora em condições de dar início a um estudo das funções que assumem valores em $\mathbb{H}$, ditas *funções quaterniónicas*. A continuidade de tais funções

$$f = f_0 + f_1 i + f_2 j + f_3 k$$

é obtida impondo a continuidade das funções componentes reais f_i.

A questão da diferenciabilidade, porém, revela-se mais delicada: as diferenças existentes entre as análises Real e Complexa deixam pressupor um crescendo de dificuldades, motivado pelo aumento da dimensão do espaço de partida. A primeira questão a surgir prende-se ao facto de, em ambas as análises referidas, haver lugar ao conceito clássico de *derivada total de uma função*. Será possível generalizar-se tal ideia para o caso quaterniónico?

Curiosamente, a resposta é não. E esta conclusão pode o leitor intuí-la do facto, sobejamente mencionado, da ausência de comutatividade da Álgebra $\mathbb{H}$. Com efeito, já em 1893, o Matemático G. Scheffers provara que a derivada no sentido clássico apenas poderia existir em álgebras que fossem simultaneamente associativas e *comutativas*.

Para contornar esta barreira, há que procurar a raíz do problema: na Análise Complexa, é bem conhecido o facto de que a teoria das funções holomorfas se pode desenvolver a partir três conceitos distintos, mas equivalentes. São eles o *conceito de derivada total*, da autoria de Cauchy, o de *séries de potências*, de Weierstrass, e o proposto por Riemann, baseado nas célebres *equações de Cauchy-Riemann*. A questão reside agora em saber qual destes métodos é generalizável a funções quaterniónicas.

Como visto, o primeiro conceito conduz a uma classe de funções demasiado restricta: a das funções lineares. De facto, após convencionarmos em que sentido assumir o quociente a efectuar[6] o limite

$$\lim_{q \to q_o} [f(q) - f(q_0)](q - q_o)^{-1}$$

existe na condição de $f(q) = \alpha q + \beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$. Note-se que este "simples" resultado não é de demonstração trivial.

Por outro lado, o recurso às séries dá origem a uma classe demasiado ampla, em virtude de toda a função real analítica nas variáveis x, y, z, e w se poder escrever como uma série de potências do quaternião $q = x + yi + zj + wk$. Assim, este caminho também não fornece a adequada abordagem.

Restam-nos as equações de Cauchy-Riemann.

Antes de uma discussão mais aprofundada sobre este aspecto, convém referirmos a operação diferencial introduzida por Hamilton em 1846,

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial y} + j\frac{\partial}{\partial z} + k\frac{\partial}{\partial w}, \tag{9}$$

cujo principal interesse residia na propriedade do simétrico do seu quadrado simbólico

$$-\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2}\right), \tag{10}$$

expressar um operador com múltiplas aplicações na Física Matemática[7].

Uma destas aplicações é usada precisamente nas *equações clássicas de Maxwell*, que expressam um campo electromagnético no vácuo. Dado o valor das componentes eléctrica $\vec{E}$ e magnética $\vec{H}$ desse campo num dado $t + xi + yj + zk \in \mathbb{H}$, então

$$Sc(\nabla\vec{E}) = Sc(\nabla\vec{H}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla}\vec{H} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

estabelece a relação quaterniónica entre essas componentes no momento $t > 0$ e no ponto espacial $xi + yj + zk \in \mathbb{R}^3$.

Numa sequência de artigos publicados na década trinta, o Matemático Suiço Rudolf Fueter[8] retomou o operador (9), estendendo-o agora a $\mathbb{H}$,

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} + j\frac{\partial}{\partial z} + k\frac{\partial}{\partial w}, \tag{11}$$

e estudou as propriedades das funções quaterniónicas que satisfaziam $Df = 0$, ou seja

$$\begin{aligned} Sc(Df) &= (\frac{\partial f_0}{\partial x} - \nabla \cdot \vec{f}) \\ (\vec{Df}) &= \frac{\partial}{\partial x}\vec{f} + \nabla f_0 + \nabla \times \vec{f} \end{aligned}$$

[6] Relembre-se que temos duas possibilidades: quociente à esquerda, ou à direita. No que se segue, consideraremos apenas o quociente à direita

[7] Como decerto reconheceu, estes são os operadores *gradiente* e de *Laplace*.

[8] Perfaz, neste ano, o quinquagésimo aniversário da sua morte.

por ele designadas *funções regulares*.

Nos anos que se seguiram os Matemáticos Mejlihson (em 1948) e Sudbery (em 1979) provaram que a abordagem de Fueter (que pode ser vista como a generalização a $\mathbb{H}$ das equações de Cauchy-Riemann) era a que fornecia uma classe de funções que generalizava a classe das funções complexas holomorfas.

Os anos cinquenta e sessenta viram o renascer dos quaterniões com o desenvolvimento da Análise Quaterniónica e as aplicações dos resultados daí resultantes à Física/Matemática.

7 Uma breve aplicação

A abordagem de problemas por meio dos quaterniões, de combinação com técnicas previamente conhecidas, permite muitas vezes a obtenção de resultados de uma forma elegante. O exemplo que se segue, tirado da Teoria dos Números, é disso uma clara prova.

O problema que aqui nos propomos resolver, por recurso à Álgebra quaterniónica, foi resolvido por J. L. Lagrange em 1770, e consiste em determinar se "*todo o natural n se pode expressar como soma de quatro quadrados perfeitos*". Para este efeito, apenas precisaremos de definir o conceito de *quaternião inteiro* como um quaternião cujos coeficientes são inteiros, bem como do seguinte lema de Euler (que apresentaremos sem demonstração).

Lema *Para todo o primo ímpar p, existem inteiros x, y e m tais que $x^2 + y^2 + 1 = mp$, com $0 < m < p$.*

Passemos então à resolução do problema de Lagrange: pelo Teorema Fundamental da Aritmética, todo o natural n se pode expressar como um produto de primos. Visto que a norma do produto de quaterniões é ainda o produto das suas normas, bastará mostrar que todo o número primo constitui a norma de um quaternião inteiro.

Quando o número primo $p = 2$ a relação é imediata, dado que $2 = 1^2+1^2+0^2+0^2$, pelo que é suficiente tratar-se o caso dos primos ímpares.

Seja p um tal primo. Pelo Lema de Euler, existe um quaternião inteiro $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ tal que a sua norma satisfaz $|q|^2 = mp$, para algum inteiro m compreendido estritamente entre 0 e p, tome-se m_0 como o menor m que satisfaz esta propriedade.

Em primeiro lugar, m_0 não pode ser par, pois $|q|^2 = x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$ par implicará que também $x_0+x_1+x_2+x_3$ seja par. Três casos podem ocorrer: todos os coeficientes são pares, todos são ímpares ou dois, e apenas dois, são pares (sejam eles x_0 e x_1). Em qualquer das situações, teremos sempre $x_0 \pm x_1$ e $x_2 \pm x_3$ pares, donde

$$\frac{1}{2}m_0 = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_0 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_3}{2}\right)^2$$

é a soma de quatro quadrados perfeitos. Desta forma, $\frac{1}{2}m_0$ é um natural menor que m_0, que satisfaz também a condição de $|q|^2 = mp$ para algum quaternião inteiro q. Isto contradiz a assumpção de que partimos e, portanto, m_0 terá de ser ímpar.

Sejam agora z_i os inteiros mais próximos de $\frac{x_i}{m_0}$. Teremos que

$$\left|\frac{x_i}{m_0} - z_i\right| < \frac{1}{2}$$

nunca se registando a igualdade; com efeito, se a igualdade fosse válida, então $m_0 = 2|x_i - m_0 z_i|$ donde m_0 seria par, com $z_0, \ldots, z_3 \in \mathbb{Z}$.

Tome-se o quaternião inteiro $w = q - m_0 z$, onde $z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k$. Cada coeficiente w_i deste novo quaternião verifica, por sua vez, $|w_i| = |x_i - m_0 z_i| < \frac{m_0}{2}$, donde

$$|w|^2 < 4\left(\frac{m_0}{2}\right)^2 = m_0^2.$$

Por outro lado,

$$|w|^2 = |q|^2 - m_0(q\overline{z} + \overline{z}q) + m_0^2|z|^2$$

onde $(q\overline{z} + \overline{z}q)$ representa o dobro da parte escalar do produto $q\overline{z}$. Assim,

$$\begin{aligned} |w|^2 &= m_0 p - 2m_0 Sc(q\overline{z}) + m_0^2|z|^2 \\ &= m_0(p - 2Sc(q\overline{z}) + m_0|z|^2) \\ &= m_0 m_1, \end{aligned}$$

com $m_1 = p - 2Sc(q\overline{z}) + m_0|z|^2$.

Mas porque $m_0 m_1 < |w|^2 = m_0^2$, resulta $m_1 < m_0$. Considerando agora o produto

$$\begin{aligned} w\overline{q} &= q\overline{q} - m_0 z\overline{q} \\ &= m_0(p - z\overline{q}) \end{aligned}$$

facilmente se constata que existe um quaternião inteiro $p - z\overline{q}$ para o qual $m_1 p = |p - z\overline{q}|^2$, pois que $(m_0 m_1)(m_0 p) = |w\overline{q}|^2 = m_0^2|p - z\overline{q}|^2$. Portanto, ou de novo nos encontramos na situação de m_0 não ser o menor natural satisfazendo esta condição, ou $m_1 = 0$. Neste último caso, teremos $w = 0$ e, com a igualdade $w = q - m_0 z$, que $q = m_0 z$. Daqui resulta $m_0 p = m_0^2|z|^2$, ou seja, $p = m_0|z|^2$. Portanto (não esquecer que p é primo) $m_0 = 1$ ou $m_0 = p$. Como m_0 é, por hipótese, inferior a p, só a primeira possibilidade é válida.

Este raciocínio prova, para cada primo p, a existência de um quaternião inteiro $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ cuja norma satisfaz a igualdade $|q|^2 = p$.

8 Considerações finais

O leitor não deve tomar este artigo como mais uma tentativa de impor os Quaterniões ao público geral. Esta estrutura algébrica, se bem que contasse inicialmente com a vantagem de o seu autor ser Hamilton, um dos mais famosos Matemáticos do seu tempo, apresentava a ideia, demasiado avançada para o tempo, de anticomutatividade. Muitos foram os Matemáticos da época que não entenderam esta nova álgebra, e se os Matemáticos a não entendiam, como a podia entender a gente comum? ...

Actualmente, o sistema de Gibbs está bem implementado e satisfaz as necessidades de cálculo. O que aqui defendo não é a sua substituição pelos Quaterniões, mas tão somente que estes não sejam rejeitados com base em argumentos do tipo "já temos um sistema que faz isso". Cada problema exige uma ferramenta adequada e creio ter mostrado que, em certos casos, essa ferramenta *é efectivamente* fornecida pelos Quaterniões. Que o digam os Físicos.

Referências

[Al] Altmann, Simon L. - *Hamilton, Rodrigues and the Quaternion Scandal*, Mathematical Magazine, 62, pag. 291-308, 1989.

[BDS] Brackx, F.,Delanghe, R., e Sommen, F. - *Clifford analysis*, Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[Cr] Crowe, Michael J. - *A History of Vector Analysis*, Dover Publications, Inc., 1993.

[GM] Gilbert, J., e Murray, M. - *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis*, Cambridge University Press, 1991.

[Ha] Habetha, K. - *Function Theory in Algebras*, reprint from Indianapolis Journal of Mathematics and Physics, combined vols. 1 & 2, 1982-83, pp. 43-64.

[Ku] Kuipers, Jack B. - *Quaternions and rotation sequences*, Princeton University Press, 1999.

[Wa] Waerden, B. L. van der - *Hamilton's Discovery of Quaternions* , Mathematical Magazine, 49, pag. 227-234, 1976.

GAZETA DE MATEMÁTICA nº 139
Julho de 2000

Reflexão sobre um teorema de Jacques Bernoulli relativo a secções cónicas

Rosa Maria Ribeiro e Maria do Céu Silva

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Resumo

Quando pensamos na parábola como curva plana definida como o conjunto dos pontos que estão a igual distância de um ponto fixo (o foco) e de uma recta dada (a directriz), associamos-lhe inevitavelmente uma equação do tipo $y^2 = px$, que se diz *equação reduzida da parábola*, onde p é o *parâmetro*. Mas, nem a parábola nem a elipse e a hipérbole, foram sempre interpretadas desta maneira. Apolónio obteve estas curvas seccionando um cone oblíquo de base circular por um plano em condições especiais e indicou, para cada uma delas, uma propriedade que a caracterizava. No caso da parábola, a propriedade característica envolvia um segmento, que Apolónio designou por *latus erectum* e ao qual corresponde actualmente o parâmetro. Para o latus erectum, Apolónio determinou uma expressão dependente do cone gerador e do vértice da cónica; contudo, a sua interpretação não permite um reconhecimento geométrico imediato desta grandeza.

Em finais do século XVII, Jacques Bernoulli deduziu um processo simples de reconhecer geometricamente, no cone gerador, um segmento de comprimento igual ao do parâmetro, tomando como suporte a definição de parábola dada por Apolónio (Apolónio, *Conicas*, Livro I, proposição XI).

É esse teorema de Bernoulli, *Novum Theorema Pro Doctrina Sectionum Conicarum*, que vai ser objecto da nossa reflexão.

1 Definição de parábola dada por Apolónio

"Se um cone é cortado por um plano que passa pelo eixo e por um outro plano que corta a base do cone segundo uma recta perpendicular à base do triângulo passando pelo eixo; se, além disso, o diâmetro da secção é paralelo a um dos lados do triângulo que passa pelo eixo, o quadrado de qualquer recta conduzida da secção do cone paralelamente à secção comum

do plano secante e da base do cone até ao diâmetro da secção equivale ao rectângulo delimitado pela recta que ela corta sobre o diâmetro, do lado do vértice da secção, e por uma certa recta cuja razão para a recta situada entre o ângulo do cone e o vértice da secção é a mesma que a do quadrado da base do triângulo passando pelo eixo para a do rectângulo delimitado pelos dois outros lados do triângulo. Chamaremos a tal secção uma parábola"

(Ver Eecke, *Les Coniques d'Apollonius de Perge*, p.21).

Convém explicitar, no que ficou dito, que a teoria que Apolónio desenvolveu sobre cónicas começou com uma definição inovadora de *cone* (cujo eixo não era obrigatoriamente perpendicular à base) e utilizou nela o conceito de *triângulo axial* (triângulo passando pelo eixo). Definiu *eixo do cone* como a recta que une o vértice do cone ao centro do círculo da base, *plano axial* como o plano que contém o eixo e é perpendicular à base e designou por triângulo axial a intersecção do plano axial com o cone. Dois dos lados deste triângulo são geratrizes do cone e a sua base é um diâmetro do círculo da base. Relativamente ao *plano de secção*, Apolónio tomou-o perpendicular ao triângulo axial, de modo a intersectar a base deste triângulo (ou o seu prolongamento) segundo uma recta perpendicular a essa base. No caso particular da parábola o plano de secção é, também, paralelo a um dos lados do triângulo axial e intersecta o outro lado e a base desse triângulo em dois pontos que têm papel preponderante na definição da cónica. O primeiro é o *vértice da parábola* e o segundo define com o vértice o *eixo da parábola*, segmento que Apolónio designou por *latus transversum*.

Com base nestes conceitos, designando por H o vértice da parábola e por HO o seu eixo; designando ainda por K um ponto qualquer da curva e por G o seu projectado ortogonal sobre o eixo, a propriedade definidora da parábola pode traduzir-se pela relação $GK^2 = HT \cdot HG$. (Fig.1)

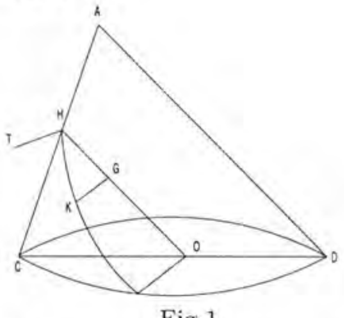


Fig.1

Na figura encontra-se também representado o segmento HT utilizado por Apolónio na definição da curva e designado por *latus erectum*. Este segmento era obtido por um processo [9] correntemente utilizado na Geometria Clássica Grega e em termos actuais pode exprimir-se pela relação

$$\frac{HT}{HA} = \frac{CD^2}{AC \cdot AD},$$

[9]Referimo-nos ao processo de aplicação de áreas.

ou seja, depende apenas do triângulo axial e do vértice da parábola, como, aliás já atrás referimos.

Estão agora reunidas as condições para apresentarmos o teorema de Jacques Bernoulli, que atrás referimos, e que Chasles, na sua obra *Aperçu Historique des Méthodes en Géométrie* enuncia como se segue.

2 *Novum theorema pro doctrina sectionum conicarum*

"Tomando um plano paralelo à base de um cone e situado à mesma distância do seu vértice que o plano da secção cónica dada, este plano intersectará o cone segundo um círculo cujo diâmetro será o latus rectum [10] *da cónica." (Bernoulli,*Obra completa, *vol. I, pp. 45 e 46)*

Apresentamos a demonstração no caso particular em que o plano de secção é paralelo a uma geratriz, isto é, quando a secção cónica é uma parábola. Consideremos um cone de vértice A e base circular σ e designemos por α o plano de secção. Seja ACD o triângulo axial e HO o eixo da parábola. Note-se que $HO \| AD$ (pela natureza da cónica). Tracemos $AI \perp \sigma$ e $AB \perp HO$; tomemos N em AI, tal que $d(A,N)=d(A,\alpha)=d(A,HO)=d(A,B)$. Consideremos, agora, um plano β, paralelo a σ passando por N. O plano β intersecta o triângulo axial ACD nos pontos F e E, que são as extremidades do diâmetro do círculo produzido no cone pelo plano β. (Fig.2)

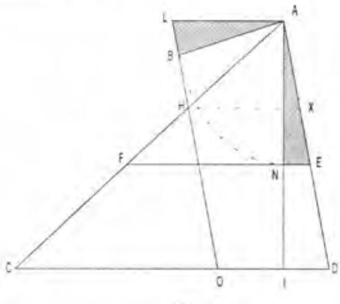


Fig.2

Mostraremos que EF é o latus rectum.

Comecemos por traçar por A uma recta paralela à base, CD, do triângulo axial; esta recta intersecta HO em L. Por H tracemos outra recta paralela a CD que intersecta a geratriz AD em X.

Os triângulos ABL e ANE são congruentes pois $AB = AN$ (por construção), $\angle ABL = \angle ANE$ (rectos) e $\angle BAL = \angle NAE$ (pois $\angle BAL = \angle NAL - \angle NAB = \angle EAB - \angle NAB = \angle NAE$). Desta congruência podemos concluir que $AL = AE$. Por outro lado, do facto de $HXAL$ ser um paralelogramo (pois $XH \parallel AL$ e $HL \parallel XA$) resulta que $XH = AL$. Assim, $XH = AL$ e $AL = AE$, donde, $XH = AE$. Como,

[10] A designação *latus erectum*, utilizada por Apolónio, foi substituída, na Renascença por *latus rectum*.

além disso, os triângulos AHX, AFE e ACD são semelhantes (pois têm os ângulos iguais cada um a cada um), vem

$$\frac{EF}{XH}=\frac{AE}{AX},\quad \frac{CD}{AC}=\frac{XH}{HA}\quad \text{e}\quad \frac{CD}{AD}=\frac{XH}{AX}.$$

Das igualdades $\frac{EF}{XH}=\frac{AE}{AX}$ e $XH=AE$, resulta $XH^2=EF\cdot AX$.
De acordo com a relação $\frac{HT}{HA}=\frac{CD^2}{AC\cdot AD}$ atrás estabelecida, vem:

$$\frac{HT}{HA}=\frac{CD^2}{AC\cdot AD}=\frac{CD}{AC}\cdot\frac{CD}{AD}=\frac{XH}{HA}\cdot\frac{XH}{AX}=\frac{XH^2}{HA\cdot AX}=\frac{EF\cdot AX}{HA\cdot AX}=\frac{EF}{HA},$$

donde $HT=EF$. Este teorema de Bernoulli permite colocar, com facilidade, uma cónica dada sobre um cone também dado. Referindo-se a ele Chasles diz o seguinte:

> *"Apolónio e os geómetras que escreveram depois dele, deram diferentes expressões geométricas, tomadas no cone, do comprimento do latus rectum, para cada secção, mas nenhuma nos pareceu tão simples e tão elegante como a de Jacques Bernoulli."*
>
> (Chasles, *Aperçu Historique des Méthodes en Géométrie*, p.19)

3 Bibliografia

Referências

[1] Bernoulli, Jacques. *Obra Completa*, vol.I, Lips, 1699.

[2] Chasles, M. *Aperçu Historique sur l'Origine et le Developpement des Méthodes en Géométrie.* Paris, Gauthier-Villars et Fils, Imprimeurs-Libraires, 1889.

[3] Eves, H. *Introdução à História da Matemática* - trad. Hygino H. Domingues. Campinas, S.P.: Editora da UniCamp, 1995.

[4] Heath, T. *Apollonius of Perga Treatise on Conic Sections.* Cambridge: at the University Press, 1896.

[5] Katz, V. *A History of Mathematics: An Introduction.* New York: Harper Collins College Publishers, 1993.

[6] Veloso, E. *Geometria, Temas Actuais.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

[7] ——,H. Fonseca, J. P. Ponte e P. Abrantes. *Ensino da Geometria no virar do milénio.* Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1999.

[8] Ver Eecke, P. *Les Coniques d'Apollonius de Pergue-Oeuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes.* Brugges, Desclée, de Brouwer et C, 1923.

Gazeta de Matemática nº 139
Julho de 2000

Variações Sobre um exercicio de Cálculo Combinatório

António Pereira Rosa

Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho
Rua Rodrigo da Fonseca, nº 115
1069–99 Lisboa

O presente trabalho pretende ilustrar a utilização de um exercício aparentemente rotineiro de Cálculo Combinatório (a nível de 12ºano) para motivar a abordagem de algumas questões de técnicas de contagem aritmética (divisibilidade, decomposição em factores primos).

1 O exercício

Num conhecido manual para o 12ºano ([YG]), surge o seguinte exercício no capítulo dedicado ao cálculo Combinatório:

Quantos produtos diferentes de três factores distintos é possível formar com os números $2, 3, 5$ e 7 ?

A maioria dos alunos resolve-o rapidamente: dá ${}^4C_3 = 4$! Quando instados a explicar o raciocínio apresentam razões do tipo *"Como não pode haver repetições e a ordem não interessa (a multiplicação é comutativa), é com combinações e é evidente que têm de ser de 4 objectos tomados de* 3 *a* 3, *pelo que dá* ${}^4C_3 = 4$ *"*. O resultado obtido pode ser confirmado facilmente enumerando todos os possíveis produtos nas condições de enunciado: $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 7 = 42$, $2 \times 5 \times 7 = 70$ e $3 \times 5 \times 7 = 105$. Trata-se de um exercício considerado, em geral, muito fácil e de rotina; no manual surge integrado numa série de exercícios mais ou menos imediatos na margem das páginas dedicadas às combinações. Sucede porém que se podem construir algumas variantes deste exercício que levam à consideração de questões interessantes de técnicas de contagem e de aritmética, que normalmente não são abordadas no Ensino Secundário.

2 Algumas variações

Uma ideia que surge naturalmente é considerar produtos de dois factores escolhidos entre $2, 3, 5$ e 7; pelo raciocínio anterior, deveria haver ${}^4C_2 = 6$ desses produtos, o que é fácil de confirmar. Porém, se trabalharmos com números $2, 3, 4$, e 6, verifica-se que existem apenas 5 produtos distintos de dois factores, já que 2×6 e 3×4 valem ambos

12. Confrontados com esta situação, a maioria dos alunos atribui a discrepância à diferente natureza dos números nos dois casos, de modo muito vago (por exemplo, afirmam que no segundo exemplo todos os números são pares e no primeiro não). Sugerimos então aos alunos duas hipóteses de trabalho:

1. Será que diferença de comportamento tem algo a ver com o facto de no exercício inicial estarmos a considerar produtos de três factores escolhidos entre quatro e na segunda dois entre quatro ?

2. Será que diferença de comportamento tem algo a ver com os números particulares em causa ?

Salientamos ainda que qualquer que seja a causa, a discrepância verificada sugere que o raciocínio feito para resolver o problema inicial está, no mínimo, incompleto, ainda que o resultado final esteja certo (algo que não parece perturbar muitos alunos, que afirmam que estando o resultado certo, o raciocínio não importa muito ...)

2.1 A primeira hipótese

Sejam $x, y, z,$ e w quatro números naturais distintos. Será que os produtos de três factores distintos escolhidos entre eles têm de ser diferentes ? A chave de resposta encontra-se na seguinte observação: Dois quaisquer subconjuntos diferentes com 3 elementos de um conjunto com 4 elementos têm de ter dois elementos em comum. Com efeito, sejam A um conjunto com 4 elementos e B e C subconjuntos distintos de A com 3 elementos. Como $B \cup C = A$ e $\#(B \cup C) = \#B + \#C - \#(B \cap C)$ vem $4 = 3 + 3 - \#(B \cup C)$ e portanto $\#(B \cap C) = 2$, como desejávamos. Assim, se dois dos produtos referidos fossem iguais, teriam necessariamente dois factores iguais e os terceiros factores em cada um deles teriam de ser iguais também. Estabelece-se pois uma bijecção entre os subconjuntos de três elementos e os produtos de três factores distintos; como há exactamente ${}^4C_3 = 4$ subconjuntos nestas condições, fica completo o raciocínio feito quando da resolução inicial. É instrutivo ver porque motivo este argumento falha para produtos de dois factores: é que um conjunto com 4 elementos $\{x, y, z, w\}$ tem subconjuntos disjuntos com dois elementos como, por exemplo, $\{x, y\}$ e $\{z, w\}$.

Sugestão para um trabalho mais avançado:

Prove que, se a partir de n números naturais distintos, formarmos todos os possíveis produtos de $n-1$ factores diferentes, esses produtos são em número de ${}^nC_{n-1} = n$ (na prática, temos proposto generalizações mais simples, como o caso de $n = 5$).

2.2 A segunda hipótese

Será possível obter um resultado do tipo

"Se a partir de n números naturais distintos, formarmos todos os possíveis produtos de k factores diferentes $(2 \leq k \leq n-1)$, esses produtos são em número de ${}^nC_{n-1} = n$ ",

mediante a imposição de restrições razoáveis aos números considerados? (consideramos $k \neq 1$, já que o caso de $k = 1$ tem pouco interesse e, além disso, a generalidade dos alunos acha bizarra a ideia de produtos com um só factor). Como já referimos, muitos alunos inclinam-se para esta hipótese, embora não sejam capazes de formular hipóteses satisfatórias sobre a natureza dos números a considerar.

Voltemos aos números $2, 3, 5$, e 7. Como todos são primos, se dois quaisquer produtos de dois factores formados a partir deles fosssem iguais, teríamos duas decomposições em factores primos distintas do mesmo número, o que contraria a unicidade da factorização em números primos no conjunto dos números naturais. Naturalmente, este argumento não é aplicável ao caso dos números $2, 3, 4$ e 6. Um raciocínio análgo justifica a seguinte afirmação

"Se a partir de n números naturais primos distintos, formarmos todos os possíveis factores de k factores diferentes $(2 \leq k \leq n-1)$, esses produtos são em número de ${}^nC_k$) ".

Temos asssim uma restrição conveniente a impôr aos números em causa. É de referir que nesta propriedade está a justificação de uma antiga e curiosa designação das combinações (produtos diferentes), actualmente em desuso (ver[SS]).

Exercicío:

A exigência de todos os números serem primos é condição suficiente para o resultado. Será também necessária ?

Temos verificado que a análise desta segunda hipótese é muito mais difícil para os alunos. Na verdade, a nível do 12^oano, a generalidade dos alunos nem sequer sabe o que é um número primo, quanto mais questões "subtis"como a unicidade da decomposição.... Esta situação lamentável não é de estranhar, já que, depois de algum contacto com números primos e decomposição a nível do 2^ociclo e, a título de revisão, no 7^oano de escolaridade, estes assuntos nunca mais são estudados no ensino pré-universitário. Além disso, são em geral, abordados numa perspectiva utilitária como o uso de decomposição em factores primos para a determinação do menor múltiplo comum nos cálculos com fracções (que, diga-se de passagem, muitos alunos esquecem rapidamente). Não nos parece, aliás, razoável uma perspectiva mais ambiciosa com alunos dos 10 a 13 anos. Assim, numa tentativa de inverter esta situação, temos usado precisamente este problema como motivação para levar alunos já num estágio de desenvolvimento mais avançado a um estudo um pouco mais aprofundado da Aritmética.

Referências

[Ca] Calado, J.J.G. (1973). *Compêndio de Aritmética Racional*, Livraria Popular de Francisco Franco, Lisboa.

[YG] Lima, Y. e Gomes, F. (1994), *XeqMat 12*, Editorial O Livro, Lisboa.

[SS] Sebastião e Silva, J. e Silva Paulo, J. (1973), *Compêndio de Álgebra* (7^oano - 2^otomo), Livraria Popular de Francisco Franco, Lisboa.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

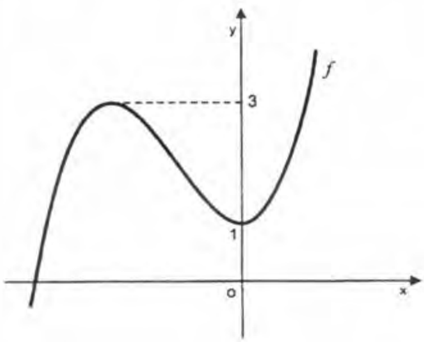
Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função polinomial de terceiro grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.



Quantas são as soluções da equação $f(x) = 2$?

(A) uma **(B)** duas **(C)** três **(D)** quatro

2. Considere a função h definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = \operatorname{sen} x$

Qual das seguintes equações pode definir uma recta tangente ao gráfico de h ?

(A) $y = 2x + \pi$ **(B)** $y = -2$

(C) $y = \sqrt{2}\ x - 9$ **(D)** $y = x$

3. O coeficiente de ampliação A de uma certa lupa é dado, em função da distância d (em decímetros) da lupa ao objecto, por

$$A(d) = \frac{5}{5-d}$$

Indique a que distância do objecto tem de estar a lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5.

(A) $2\ dm$ **(B)** $4\ dm$ **(C)** $6\ dm$ **(D)** $8\ dm$

4. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que:

- o gráfico de g é uma recta, que designamos por s
- $\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente verdadeira** ?

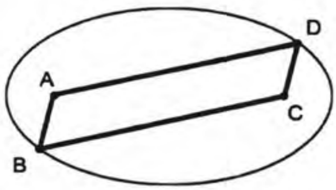
(A) A recta s é tangente ao gráfico de f

(B) A recta s é secante ao gráfico de f

(C) A recta s não intersecta o gráfico de f

(D) A recta s é uma assimptota do gráfico de f

5. Na figura junta estão representados uma elipse e um paralelogramo $[ABCD]$.
Os vértices A e C são os focos da elipse.
Os vértices B e D são pontos da elipse.
O perímetro do paralelogramo é 30.



Qual é o comprimento do eixo maior da elipse?

(A) 12 **(B)** 15 **(C)** 18 **(D)** 20

6. Considere um vector $\overrightarrow{AB}$ tal que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 1$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \, . \, \overrightarrow{BA}$?

(A) 1 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 2

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os planos definidos pelas equações $z = 1$ e $z = 5$.

Qual das equações seguintes define uma superfície esférica tangente aos dois planos?

(A) $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$

(B) $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25$

(C) $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$

(D) $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4$

8. Três rapazes e duas raparigas vão dar um passeio de automóvel.

Qualquer um dos cinco jovens pode conduzir.

De quantas maneiras podem ocupar os cinco lugares, dois à frente e três atrás, de modo a que o condutor seja uma rapariga e a seu lado viaje um rapaz?

(A) 36 **(B)** 120 **(C)** 12 **(D)** 72

9. Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Qual é a probabilidade de sair face 6 em exactamente um dos dois lançamentos?

(A) $\frac{1}{36}$ **(B)** $\frac{5}{36}$ **(C)** $\frac{1}{18}$ **(D)** $\frac{5}{18}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x - \cos x$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, ou seja, **sem** utilizar a calculadora, resolva as alíneas seguintes:

1.1. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem, pelo menos, um zero, no intervalo $]0, \pi[$.

1.2. Seja f' a função derivada de f. Mostre que $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e justifique que o zero de f, cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.

1.3. A recta de equação $y = 2x - \frac{1}{2}$ intersecta o gráfico de f em infinitos pontos. A abcissa de um desses pontos pertence ao intervalo $[3\pi, 4\pi]$. Determine-a.

2. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude h (em **quilómetros**), por

$$P(h) = 101\ e^{-0{,}12\,h}$$

2.1. A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico - Açores. A altitude do cume do Pico é 2350 metros.

Qual é o valor da pressão atmosférica, nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.

2.2. Determine x tal que, para qualquer h, $P(h + x) = \frac{1}{2}\,P(h)$. Apresente o resultado arredondado às décimas.

Interprete o valor obtido, no contexto do problema.

3. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus.

3.1. Num certo jogo de cartas, utiliza-se um baralho completo e dão-se treze cartas a cada jogador.
Imagine que está a participar nesse jogo.
Qual é a probabilidade de, nas treze cartas que vai receber, haver exactamente seis cartas do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

3.2. De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.
Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas ser do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura abaixo está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

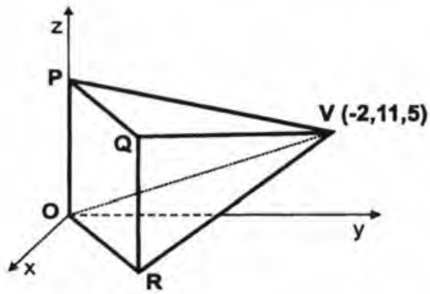
O vértice O é a origem do referencial

O vértice P pertence ao eixo Oz

O vértice R pertence ao plano xOy

O vértice V tem coordenadas $(-2, 11, 5)$

Uma equação vectorial da recta que contém a altura da pirâmide é
$(x, y, z) = (7, -1, 5) + k(6, -8, 0),\ k \in \mathbb{R}$



4.1. Mostre que a base da pirâmide está contida no plano de equação $3x - 4y = 0$

4.2. Justifique que o centro da base da pirâmide é o ponto de coordenadas $(4, 3, 5)$.

4.3. Determine o volume da pirâmide.

$$\textit{Volume da pirâmide} = \frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$$

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte	**81**
Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte		**119**
1.		37
1.1.	11	
1.2.	13	
1.3.	13	
2.		24
2.1.	10	
2.2.	14	
3.		22
3.1.	11	
3.2.	11	
4.		36
4.1.	12	
4.2.	12	
4.3.	12	

TOTAL	**200**

UNIVERSIDADE DO ALGARVE
ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA I
1° Ano Matemática-1999/2000-Exame final
9 Fevereiro 2000-14h30/17h00

1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo, $n \in \mathbb{N}$ e $G = \left\{X \in M_n(\mathbb{K}) : X = X^{\top}\right\}$. Mostre que, para a soma de matrizes, G é um grupo.

2. Considere, em $M_2(\mathbb{R})$:

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : 2a - d = 0 \wedge b = 0 \right\}$$

$$G = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

   (a) Prove que F é subespaço vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

   (b) Determine uma base e a dimensão de F.

   (c) Se possível, encontre $X, Y, Z \in F$, tais que (X, Y, Z) seja linearmente independente.

   (d) Determine uma base de $F + G$ e uma base para $F \cap G$.

   (e) F e G estão em soma directa? Justifique.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \\ & & 1 \\ 1 & & -3 \\ & & -2 \end{bmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ \\ 2 \\ \\ \end{bmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$.

   Se possível, complete A e B de modo a que o sistema $AX = B$ seja:

   (a) Possível e determinado.

   (b) Possível e indeterminado com grau de indeterminação 2.

4. Se possível, dê exemplos de:

   (a) Uma matriz equivalente a $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   (b) Dois conjuntos de vectores, X e Y num espaço vectorial de dimensão finita V tais que $X \neq Y$ e $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$.

   (c) Uma aplicação linear f de $\mathbb{R}_3[x]$ para $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $\mathrm{Imf} = \left\langle \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}, -\mathrm{x}^2 - 1 \right\rangle$ e
   $2x^3 - x^2 + 1 \in Nucf$.

5. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha^2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix}$, com parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Discuta, em função dos parâmetros α e β, o sistema $AX = B$.

   (b) Resolva, **utilizando o método de eliminação**, o sistema $AX = B$, para $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, indicando a solução geral e duas soluções distintas do sistema.

6. Seja $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $f(p(x)) = (p(0), 2p(1), -p(0))$.

   (a) Mostre que f é uma aplicação linear.

   (b) Determine uma base do núcleo de f e classifique f.

   (c) Determine $f^{\leftarrow}(\{(1,1,1)\})$.

7. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

   (a) Se v_1, v_2 e v_3 são vectores de um espaço vectorial real V tais que $2v_1 + v_2 - v_3 = 0_V$, então (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente.

   (b) O subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$, $F = \langle (1,0,1,0), (0,-1,1,1) \rangle$ é o conjunto de soluções de um sistema de equações.

   (c) Qualquer aplicação linear de $M_2(\mathbb{R})$ para $\mathbb{R}_3[x]$ é um isomorfismo.

8. Sejam V um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e F, G e H subespaços vectoriais de V. Mostre que se $V = F + G$ e $G = H \oplus (F \cap G)$, então $V = F + H$ e $F \cap H = \{0_V\}$.

Resolução

1. Fixe-se $n \in \mathbb{N}$. Repare-se que G é o conjunto das matrizes simétricas de ordem n. Sabe-se já que a soma de matrizes (quando definida) é associativa e tem por elemento neutro a matriz nula do tipo apropriado. Para verificar que G é grupo basta, portanto verificar os seguintes pontos:

   i) **G é fechado para a soma.**

   Sejam A e B dois elementos de G. Como se sabe que $(A+B)^{\top} = A^{\top} + B^{\top}$, e $A^{\top} + B^{\top} = A + B$, porque $A, B \in G$, a matriz $A + B$ também pertence a G.

   ii) **G tem elemento neutro.**

   A matriz nula de ordem n, O_n, está em G, pois é uma matriz simétrica.

   iii) **Qualquer elemento de G tem simétrico em G.**

   Seja A um elemento de G. Como se sabe $(-A)^{\top} = -A^{\top}$; mas $-A^{\top} = -A$, porque $A \in G$, portanto a matriz $-A$ também pertence a G.

2. (a) É preciso verificar as condições da definição de subespaço vectorial

i) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pertence trivialmente a F.

ii) Sendo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ dois elementos de F, a sua soma é $\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}$.

Por hipótese $b=0$, $b'=0$, $2a-d=0$ e $2a'-d'=0$. Então $b+b'=0$ e $2(a+a')-(d+d')=(2a-d)+(2a'-d')=0+0=0$. Daqui se conclui que $\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix} \in F$.

iii) Sendo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in F$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$.

Por hipótese $b=0$ e $2a-d=0$. Então $\lambda b = 0$ e $2(\lambda a)-\lambda d = \lambda(2a-d)=0$.

Daqui se conclui que $\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} \in F$.

(b) Um vector genérico de F é uma matriz da forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 2a \end{bmatrix}$, com $a, c \in \mathbb{R}$.

Como $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 2a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, o sistema de vectores $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ forma um sistema de geradores de F. Sendo um sistema linearmente independente é uma base de F. Como o número de vectores de uma base de F é 2, $\dim F = 2$.

(c) Como foi visto na alínea anterior, $\dim F = 2$ e, por isso é impossível encontrar em F um sistema linearmente independente com três vectores.

(d) Sabemos que $F+G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Como $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, e os restantes vectores formam um sistema linearmente independente, concluímos que $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$ é uma base de $F+G$.

Sabendo que $\dim F+G = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$, concluimos $\dim(F\cap G) = 1$.

Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ pertence a F e a G, uma base de $F \cap G$ pode ser $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$.

(e) F e G não estão em soma directa porque $\dim(F\cap G) = 1$.

3. (a) O sistema $AX = B$ é possível e determinado se e só se $car\,[A|B] = car\,(A) = 3$ (pois o número de incógnitas é 3). Uma possível forma de completar as matrizes é então $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & 1 \\ 1 & \underline{0} & -3 \\ \underline{0} & \underline{0} & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ \underline{0} \\ 2 \\ \underline{0} \end{bmatrix}$. Uti-

lizando o método de condensação verifica-se facilmente que estas matrizes satisfazem a condição pretendida.

(b) O sistema $AX = B$ é possível e determinado se e só se $car\,[A|B] = car\,(A) = 2$ (pois no caso do sistema ser possível o grau de indeterminação é igual à diferença entre o número de incógnitas e a característica de A).

Uma possível forma de completar as matrizes é então $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -2 \end{bmatrix}$

e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$, que se verifica facilmente estarem nas condições pretendidas.

4. (a) Sabe-se que efectuando qualquer operação elementar nas linha ou colunas de uma matriz se obtém uma matriz com a mesma característica da primeira. Um possível exemplo pode ser a matriz $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ obtida da matriz inicial por multiplicação dos elementos da primeira linha por dois.

Outra possível resolução seria calcular a característica da matriz inicial e dar como exemplo qualquer matriz com a característica obtida, pois duas matrizes do mesmo tipo são equivalentes se e só se têm a mesma característica.

(b) No espaço vectorial $\mathbb{R}^2$, podem-se considerar os conjuntos $X = \{(1,0,0)\}$ e $Y = \{(2,0,0)\}$. $X \neq Y$ e $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$, pois $(1,0,0) \in \langle Y \rangle$ — $(1,0,0) = \frac{1}{2}(2,0,0)$ — e $(2,0,0) \in \langle X \rangle$ — $(2,0,0) = 2\,(1,0,0)$.

(c) Considere-se o sistema de vectores $\left(2x^3 - x^2 + 1, x^2, x, 1\right)$, que se verifica facilmente ser uma base $\mathbb{R}_3\,[x]$ pois é um sistema linearmente independente com quatro vectores. Defina-se, por exemplo, a seguinte aplicação f através das imagens dos vectores dessa base:

$f\left(2x^3 - x^2 + 1\right) = 0$

$f\left(x^2\right) = x^2 + 2x$

$f\,(x) = -x^2 - 1$

$f\,(1) = -x^2 - 1.$

Por construção, $2x^3 - x^2 + 1 \in Nucf$ e como se sabe que Imf é gerado pelas imagens dos vectores de qualquer base tem-se que

$$Imf = \left\langle 0, x^2 + 2x, -x^2 - 1, -x^2 - 1 \right\rangle = \left\langle x^2 + 2x, -x^2 - 1 \right\rangle.$$

5. (a) Vamos condensar a matriz ampliada do sistema, de modo a poder proceder à discussão:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & \alpha^2 & \beta \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \beta-1 \end{array}\right]$$

Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$, $car\,[A|B] = car\,(A) = 3$ - o sistema é possível e determinado.

Se $\alpha = 1$, os casos são

$\beta = 1$, $car\,[A|B] = car\,(A) = 1$ e - o sistema é possível e indeterminado, com g.i.$= 2$.

$\beta \neq 1$, $car\,[A|B] = 2$, $car\,(A) = 1$ e o sistema é impossível.

Se $\alpha = -1$ os casos são

$\beta = 1$, $car\,[A|B] = car\,(A) = 2$ e o sistema é possível e indeterminado, com g.i.$=1$.

$\beta \neq 1$, $car\,[A|B] = 3$, $car\,(A) = 2$ e o sistema é impossível.

(b) Utilizando os cálculos da alínea anterior, começamos a resolução do sistema com a condensação seguinte:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2+L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, o sistema inicial é equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

e o conjunto de soluções do sistema é $S := \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -x_3\}$.

Duas soluções do sistema podem ser, por exemplo, $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, -1)$.

6. (a) Uma condição para que f seja linear é

$$\forall p, q \in \mathbb{R}_2[x] \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad f((\alpha p + \beta q)(x)) = \alpha f(p(x)) + \beta f(q(x))$$

Esta condição é satisfeita, pois se p e q são elementos arbitrários de $\mathbb{R}_2[x]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} f((\alpha p + \beta q)(x)) &= ((\alpha p + \beta q)(0), 2(\alpha p + \beta q)(1), -(\alpha p + \beta q)(0)) \\ &= (\alpha p(0) + \beta q(0), 2(\alpha p(1) + \beta q(1)), -(\alpha p(0) + \beta q(0))) \\ &= (\alpha p(0), 2\alpha p(1), -\alpha p(0)) + (\beta q(0), 2\beta q(1), -\beta q(0)) \\ &= (\alpha p(0), 2p(1), -p(0)) + \beta(q(0), 2q(1), -q(0)) \\ &= \alpha f(p(x)) + \beta f(q(x)). \end{aligned}$$

(b) $Nuc f = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : f(p(x)) = (0,0,0)\}$, que também se pode escrever $\{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : (p(0), 2p(1), -p(0)) = (0,0,0)\}$. Sendo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, as três condições seguintes são equivalentes,

$$(p(0), 2p(1), -p(0)) = (0,0,0)$$

$$\left\{\begin{array}{l} d=0 \\ 2(a+b+c+d)=0 \\ -d=0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} d=0 \\ a+b+c=0 \end{array}\right.$$

Um vector genérico de $Nucf$ é, portanto, qualquer polinómio da forma

$$p(x)=(-b-c)\,x^3+bx^2+cx, \qquad (b,c\in\mathbb{R}).$$

Como $(-b-c)\,x^3+bx^2+cx = b\left(-x^3+x^2\right)+c\left(-x^3+x\right)$, os vectores $-x^3+x^2$ e $-x^3+x$ formam um sistema de geradores de $Nucf$ e como formam um sistema linearmente independente de vectores, $\left(-x^3+x^2,-x^3+x\right)$ é uma base de $Nucf$.

A função f não é injectiva porque $Nucf\neq\{0\}$ e não é sobrejectiva porque $Imf\neq\mathbb{R}^3$, pois $\dim Imf = 4-\dim Nucf = 4-2=2$.

(c) $f^{\leftarrow}(\{(1,1,1)\}) = \{p(x)\in\mathbb{R}_2[x] : f(p(x))=(1,1,1)\}$, que é o $\{p(x)\in\mathbb{R}_2[x] : (p(0),2p(1),-p(0))=(1,1,1)\}$ e este é $\emptyset$, pois $p(0)$ não pode ser simultaneamente 1 e -1.

7. (a) A afirmação é falsa pois $2v_1+v_2-v_3=0_V$ é uma combinação linear nula não trivial dos vectores v_1, v_2 e v_3.

(b) Verdadeira, qualquer subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$ é o conjunto de soluções de algum sistema de equações.

A justificação pode também ser dada determinando o sistema: $(x,y,z,w)\in F$ é equivalente a $(x,y,z,w)\in\langle(1,0,1,0),(0,-1,1,1)\rangle$ que também é equivalente a (x,y,z,w) é combinação linear de $\langle(1,0,1,0),(0,-1,1,1)\rangle$, ou seja $((x,y,z,w),(1,0,1,0),(0,-1,1,1))$ é linearmente dependente, ou ainda, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \end{bmatrix}$ tem característica dois.

Basta então determinar condições sobre x, y, z e w de forma a que a matriz tenha característica dois. Considere-se a condensação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \end{bmatrix} \xrightarrow{-xL_1+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & y & z-x & w \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{yL_2+L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z-x+y & w+y \end{bmatrix}$$

Concluímos que

$$(x,y,z,w)\in F \Leftrightarrow -x+y+z=0$$

e $y+w=0$, ou seja $F:=\langle(1,0,1,0),(0,-1,1,1)\rangle$ é o conjunto de soluções do sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ y+w=0 \end{array}\right.$$

(c) A afirmação é falsa, basta considerar a aplicação linear nula de $M_2(\mathbb{R})$ para $\mathbb{R}_3[x]$, que é trivialmente não injectiva nem sobrejectiva.

8. Sendo v um elemento arbitrário de V, como $V = F + G$, existem $f \in F$ e $g \in G$ tais que $v = f + g$ (1)

   Usando a hipótese de $G = H \oplus (F \cap G)$, existem $h \in H$ e $f_1 \in F \cap G$ tais que $g = h + f_1$. Substituindo em (1), obtém-se $v = (f + f_1) + h$. Conclui-se que $V = F + H$.

   Tem-se ainda

   $\dim V = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ (2)

   $\dim G = \dim H + \dim(F \cap G)$ (3)

   Por (2) e (3), $\dim V = \dim F + \dim H$ o que implica $F \cap G = \{0_V\}$.

Conferência Internacional sobre Novas Tecnologias no Ensino das Ciências
4 - 6 Julho, 2001, Aveiro,
Portugal

Organizado pelas Universidade de Aveiro e a Universidad de Castilla-La Mancha em cooperação com a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM).

Objectivos

Apresentação de modelos, ferramentas e aplicações das Novas Tecnologias (não necessariamente computacionais) no Ensino das Ciências. Será dada uma atenção especial aos artigos relacionados com os Ensinos Secundário e Superior.

Tópicos

- Multimedia, Hipermedia e ambientes virtuais
- De Tutorias a Ambientes Abertos
- Ensino à Distância
- Redes e Internet no Ensino
- Sistemas para pessoas com necessidades especiais
- Laboratórios Virtuais
- Cooperação e Colaboração

Aplicados aos processos de ensino e aprendizagem de:

- Matemática
- Ciências da Computação
- Física
- Química
- Biologia

Conferencistas Convidados

Benedict du Boulay (U. Sussex, UK) Jari A. Multisilta (Tampere U.T., FI) Jaime Sánchez (U. Chile, CL)

Idiomas

Português, Inglês e Espanhol.

Submissão de Artigos

Os artigos devem ser propostos via e-mail para cintec@mat.ua.pt . Em formato RTF, Postscript (.PS) ou MS Word (.DOC). Os artigos propostos não devem exceder as dez (10) páginas escritas a um espaço e meio na fonte "Times New Roman 11pt"e devem incluir um resumo em inglês. Os artigos deverão chegar ao Secretariado do CINTEC até 20 de Abril de 2001.

Indique quatro palavras chave para identificação do tópico do seu artigo. Indique o endereço do(s) autor(es), nome(s) completo(s), instituição de trabalho, números de telefone e de fax e endereços electrónicos.

Datas Importantes
Proposta de Artigos – 20 de Abril de 2001
Notificação de Aceitação – 18 de Maio de 2001
Versão Final dos Artigos – 1 de Junho de 2001
Inscrição Antecipada – 1 de Junho de 2001
Conferência – 4-6 de Julho de 2001

Taxas de Inscrição
A taxa geral de inscrição na Conferência é de 300 Euros. A taxa de inscrição antecipada é de 250 Euros. Haverá reduções para estudantes e membros das Organizações Colaboradoras. Para além da inscrição na Conferência esta taxa inclui Actas impressas, almoços (durante a conferência), Cocktail de Recepção e Banquete.

Para mais informações contacte com:

Secretariado do CINTEC
Universidade de Aveiro,
Departamento de Matemática
Campus de Santiago 3810-193
Aveiro, PORTUGAL
Tel: 351 234 370359
Fax: 351 234 382014
e-mail: cintec@mat.ua.pt
http://www.mat.ua.pt/cintec

É com o maior prazer que a Comissão Organizadora do CINTEC o(a) convida a juntar-se a nós na intenção de tornar este evento num acontecimento inesquecível. Um dos objectivos fundamentais da Conferência é promover encontros e discussões entre cientistas com vista a contribuições significativas no desenvolvimento e uso das Novas Tecnologias no Ensino das Ciências. Esperamos poder oferecer um ambiente de trabalho criativo, inspirador e estimulante que propicie resultados promissores.

Ana Breda
(Presidente da Com. Org. do CINTEC)

EquaMat2001

2 de Maio de 2001

Primeiro apelo à participação

A **EquaMat** é uma competição matemática dirigida a alunos do 8^o ano de escolaridade (ano em que são tratadas as equações do 1^o grau em $\mathbb{Q}$, principal objecto do programa) da responsabilidade do *Projecto Matemática-Ensino* (PmatE) do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

A *EquaMat2001* (FINAL) terá lugar no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, a 2 de Maio de 2001. À semelhança das 10 edições anteriores queremos transformar esta data numa festa. Festa que nos mostre que a matemática escolar pode ser estudada e aprendida com gosto, compensando assim o indispensável esforço despendido.Nesta edição, tal como em anos anteriores, decorrerão duas competições em paralelo, uma para o 8^o ano e outra para o 9^o ano, num máximo de dois mil alunos, isto é, mil equipas de dois elementos.

Sugerimos às escolas a organização de competições locais – inter-turmas, ou mesmo inter-escolas (para escolas próximas) – que permitam seriar os alunos. Sugerimos também que estas experiências sejam organizadas de tal forma que possam ser apresentadas no **II Encontro EquaMat** a realizar em Julho de 2001.

Este anúncio, feito à distância de vários meses, tem por objectivo permitir às escolas planearem as suas actividades e evitarem dificuldades que por vezes têm surgido, nomeadamente no que respeita a transportes. Várias escolas têm visto impossibilitada a sua participação, à última hora, devido a falta de transporte. Neste contexto, sugerimos às escolas que desejam participar neste evento, que façam desde já o respectivo pedido de transporte, junto das Câmaras Municipais ou outras entidades. Como sempre, na final, a realizar a 2 de Maio de 2001, haverá bons prémios para cerca de 30% dos participantes e para as Escolas mais bem classificadas.

Posteriormente, será disponibilizado o programa informático a todas as escolas que o não possuam, para permitir o treino e a realização das competições locais. Por motivos de organização é desejável que as Escolas que têm a intenção de participar façam a sua pré-inscriçãoo mais rapidamente possível. Esta iniciativa conta com o apoio do Departamento de Matemática, da Reitoria da Universidade de Aveiro e da UI&D *"Matemática e Aplicações"*

Para obter mais informações poderá consultar o endereço

http://www.mat.ua.pt/pmate/equamat,

ou solicitá-las directamente através do telefone 234370359, por fax 234382014 ou por um dos email's,equamat@mat.ua.pt ou batel@mat.ua.pt

INFORMAÇÃO PARA OS AUTORES

A *Gazeta de Matemática* não publica artigos de investigação especializada.

Artigos que fomentem o gosto pela Matemática enquanto parte do conhecimento universal — puro ou aplicado — são especialmente benvindos.

Os textos propostos devem incluir um resumo com um máximo de 150 palavras ou uma parte introdutória onde se descreva o tema do trabalho apresentado, e ser acompanhados de um resumo em inglês ou francês com um máximo de 200 palavras.

Os textos podem ser propostos para publicação quer por escrito quer electronicamente. Se forem submetidos por escrito devem sê-lo em duplicado, dactilografados em folhas A4, em caracteres de pelo menos 11pt, com espaçamento duplo entre linhas, com margens amplas, perfazendo um total máximo de 15 páginas. As figuras devem ser bem referenciadas no texto, mas enviadas à parte, prontas para reprodução.

Os editores agradecem que os artigos sejam submetidos em ficheiros .rtf ou .tex, em disquete ou por correio electrónico para gazeta@mat.ua.pt.

No caso de envio em *disquete*, esta deve ser acompanhada de texto dactilografado de acordo com as instruções acima. Por razões de composição tipográfica, as figuras devem ser bem referenciadas no texto, mas enviadas em ficheiros independentes.

Opiniões expressas em artigos assinados são da inteira responsabilidade dos autores e não reflectem necessariamente posições do Conselho Editorial.

Endereços para correspondência

Gazeta de Matemática
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República 37 – 4.º
1050 – 187 Lisboa

Gazeta de Matemática
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
3810 – 193 Aveiro

P.V.P. 650$00