

---

# GAZETA DE MATEMÁTICA

---

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS  
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANOS XXXVI-VII

N.º 133-136

1975-76

## SUMÁRIO

Introdução aos Processos Estocásticos  
por *J. Tiago de Oliveira*

Sobre o problema de caminhos de comprimento mínimo  
em grafos — Nota acerca do algoritmo de Dijkstra  
por *J. A. Malato de Sousa*

Harmónicas esféricas  
por *Rui João Baptista Soares*

A remark on groups without center  
by *José Morgado*

Sobre sistemas- $m$  e análogos em semi-anéis  
por *A. J. Antunes Monteiro*

Dual de espaços  $L^p$  ( $p > 1$ ) de funções vectoriais  
por *Neyde F. Martins Ribeiro*

Do conceito de fórmula ao de estrutura de informação  
por *F. Teixeira de Queiroz*

Tratamento matemático da elasticidade  
duma barra homogénea  
por *Emanuel Eduardo Pires Vaz*

Some aspects of modern mathematics  
by *S. D. Bajpai*

Movimento Matemático

Matemáticas Superiores  
Pontos de exame de frequência e finais

À guisa de explicação...

Documentos

# G A Z E T A   D E   M A T E M Á T I C A

---

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.*

ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2

---

## R E D A C Ç Ã O

Redactores: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

---

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo prévio entre o Autor e a Redacção.

## Introdução aos Processos Estocásticos

por *J. Tiago de Oliveira*

Centro de Matemáticas Aplicadas (I. A. C.), Faculdade de Ciências de Lisboa

### I — IDEIAS FUNDAMENTAIS

#### I. 1 — Preliminares

A teoria dos processos estocásticos constitui um esquema de modelos para descrever fenómenos bastante irregulares que se desenvolvem no tempo (e/ou no espaço). Exemplos de tal esquematização frutuosa são a descrição do movimento browniano pelos processos de WIENER-LÉVY e, mais aperfeiçoados, de ORSTEIN-UHLENBEK; dos números de chamadas telefónicas para um certo intervalo de tempo (uma hora, por exemplo) em condições análogas, pelos processos de POISSON; dos processos de substituição de peças de máquinas em fábricas e os seus tempos de paragem, pelos processos de renovamento; dos seguros (número e quantitativo das indemnizações) pela teoria colectiva do risco, etc.

Essencialmente, de modo intuitivo, um processo estocástico (ou função aleatória) é uma função (no sentido crescente dos tempos) em que «o acaso interveio a cada instante» — adiante veremos o significado rigoroso a atribuir a esta frase singela; no caso de não haver uma só variável temos os campos

estocásticos (ou aleatórios) de grande importância, por exemplo, na teoria da turbulência. Não trataremos aqui dos campos aleatórios. Não estudaremos também a Análise Aleatória.

Vamos colocar-nos a nível menos avançado e supor totalmente conhecidas as ideias-base das Probabilidades; podem ver-se o já clássico KOLMOGOROFF (1950) que sistematizou na sua versão inicial (em alemão, 1933) a Teoria das Probabilidades ou TIAGO DE OLIVEIRA (1967). Todavia, como se verá, a teoria clássica é insuficiente para a abordagem de certos problemas relevantes e necessita de complementos adicionais. Textos médios, que não abordam as dificuldades referidas nos processos estocásticos, são os de GIRAULT (1969), MANN (1953) e PARZEN (1964); como textos avançados podemos ainda indicar o excepcionalmente claro texto de CRAMÉR & LEADBETTER (1967) e os pesados de LOÈVE (1960), DOOB (1953) e BLANC-LAPIERRE & FORTET (1953).

#### I. 2 — Iniciação gráfica

Se representarmos por  $N(t)$  o número de chamadas telefónicas recebidas (ou efectuadas) por (ou de) determinado telefone com os seus

inícios em instantes  $0 < W_1 < W_2 < \dots$  o gráfico da função  $N(t)$  pode ser o da fig. 1; os intervalos de tempo  $T_{i+1} = W_{i+1} - W_i$  ( $W_0 = 0$ ) tem valores aleatórios e em cada um dos  $W_i$  a função salta de uma unidade.

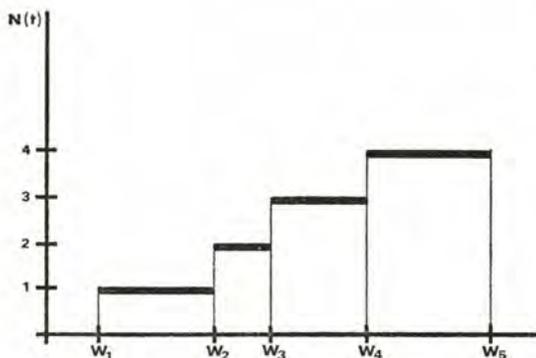


Fig. 1

A trajectória é pois uma trajectória crescente com descontinuidades. Uma tal trajectória obtém-se nos processos de POISSON.

Se considerarmos agora o número de chamadas em processo em dada rede telefónica (ou de pessoas de uma população) vemos que em dados instantes se iniciam chamadas (há nascimentos) e noutros se terminam chamadas (há mortes). A função  $N(t)$  tem então saltos inteiros, muitas vezes unitários (pode haver gémeos e mortes múltiplas) e o gráfico pode ser o da fig. 2. Tais são os processos de nascimento e morte.

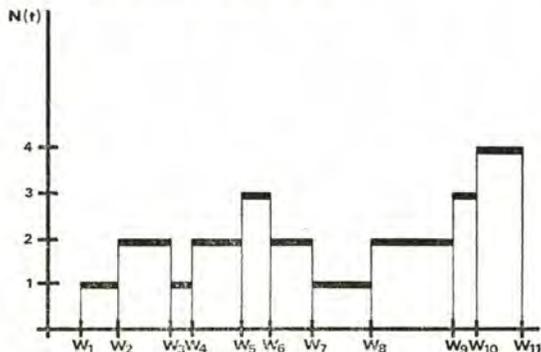


Fig. 2

Finalmente consideremos uma coordenada  $X(t)$  de uma partícula grande imersa num meio fluido. Devido aos impactos das moléculas na partícula, vindos aleatoriamente de todas as direcções, ela desloca-se em todas as direcções, descrevendo uma trajectória irregular cuja projecção num eixo fixo pode ser a do gráfico da fig. 3. Tal é a descrição do movimento browniano pelo processo de WIENER-LÉVY.

Dos três exemplos, os dois primeiros são processos de contagem com trajectórias descontínuas; o terceiro tem trajectórias contínuas.

A teoria elementar que vamos fazer permite descrever fenómenos com este tipo de

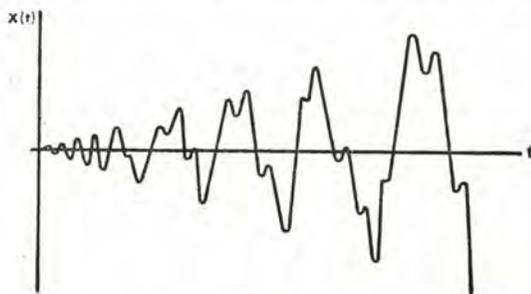


Fig. 3

irregularidade. Exemplos físicos importantes são os dos traçados de barógrafos, termógrafos, sismógrafos, etc., cujas trajectórias contínuas têm flutuações na irregularidade.

### I. 3 — As definições básicas, complementos

A noção da função aleatória ou processo estocástico é a generalização natural da de variável aleatória.

Começemos por um exemplo simples: tomemos um dado e tracemos a recta  $at + b$  em que  $a$  e  $b$  são os resultados de duas experiências realizadas com o dado. A função

$at + b$  é aleatória embora, neste exemplo simples, o acaso apenas tivesse entrado como resultado de duas experiências, definindo a posição da recta. Analogamente se poderiam definir polinómios de grau  $n$ , em que os coeficientes são o resultado de  $n + 1$  experiências aleatórias, ou outras funções com coeficientes aleatórios.

Casos mais complexos, como os de I. 2, são aqueles em que o acaso entra a cada instante. São estas funções, de gráfico essencialmente irregular, que constituem o objectivo da teoria das funções aleatórias que vamos tratar. Convém porém assinalar que a teoria das funções (deterministas) pseudo-aleatórias, de representação formal bastante complexa e bastante irregulares, pode também ser usada na teorização de fenómenos em geral interpretados como devidos à «intervenção do acaso».

No que segue referir-nos-emos sempre ao caso unidimensional; a generalização multidimensional é imediata. Constitue a teoria dos campos aleatórios que se encontra em AGOSTINI & BASS (1960) e BATCHELOR (1960).

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  em espaço de probabilidade e  $T \subseteq \mathbf{R}$  um subconjunto, finito ou não, da recta real  $\mathbf{R}$ . Uma aplicação  $X(\omega, t)$  de  $\Omega \times T$  em  $\mathbf{R}$  diz-se uma *função aleatória* ou *processo estocástico* se para todo o  $t_0 \in T$ ,  $X(\omega, t_0)$  é uma variável aleatória.  $X(\omega, t)$  pode escrever-se  $X_\omega(t)$  ou  $X_t(\omega)$  consoante convier parametrizar com respeito a  $\omega$  ou a  $t$ . Os  $\{X_t\}$  são variáveis aleatórias e os  $\{X_\omega\}$  são funções que se designam por *realizações*, *versões* ou *trajectórias*.

Se não houver lugar a dúvidas escreve-se apenas  $X(t)$ . Uma função aleatória é pois o feixe das suas versões possíveis, probabilizado pelo parâmetro  $\omega \in \Omega$ . Alguns autores distinguem entre processo estocástico e funções aleatórias; o primeiro seria um certo subconjunto de funções aleatórias. Não faremos aqui tal distinção.

Começemos por definir em *lei temporal* um

processo estocástico, dita também *definição fraca* ou *temporal*, introduzida por SLUTSKY.

Uma função aleatória está fraca ou temporalmente definida se se conhecem *todas* as funções de distribuição

$$\begin{aligned} F(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_k, t_k) &= \\ &= P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_k) \leq x_k) \end{aligned}$$

para todos os  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$  ( $t_i \in T$ ). Note-se que as funções  $F$  tem de satisfazer as condições de compatibilidade como

$$\begin{aligned} F(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k; +\infty, t_{k+1}) &= \\ &= F(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) \end{aligned}$$

que traduzem relações de marginação. Nos casos que nos vão interessar, a determinação de todas as funções (compatíveis) é facilmente obtida.

O conhecimento de todas as funções  $F$  introduz no espaço  $\mathbf{R}^T$ , de todas as aplicações de  $T$  em  $\mathbf{R}$ , um sistema de probabilidades para um determinado corpo —  $\sigma$  de subconjuntos — é o célebre teorema de KOLMOGOROFF. Para a sua demonstração veja-se KOLMOGOROFF (1950) ou CRAMÉR & LEADBETTER (1967). Repare-se porém que, por este teorema, apenas aqueles acontecimentos (aqui conjuntos de funções) que se podem exprimir numeravelmente por intersecção, união e passagem ao complementar (além da completação à LEBESGUE) à custa dos acontecimentos  $\{X_\omega(t_0) \leq x\}$  tem probabilidade atribuída, ainda que de cálculo difícil por vezes. O acontecimento  $\{X(t) \leq a, 0 \leq t \leq 1\}$  (se  $[0, 1] \subseteq T$ ), como não se exprime numeravelmente nos acontecimentos indicados, não tem necessariamente probabilidade atribuída. E para este acontecimento, que expressa a não ultrapassagem de nível  $a$  pelo processo estocástico, evidentemente importante em certas questões (cheias de rios, níveis de ruído, etc), interessa calcular a sua probabilidade.

Os acontecimentos do teorema de KOLMOGOROFF têm, eles ou os seus complementares,

«demasiadas» funções, o que leva à dificuldade indicada.

Utilizando a topologia de  $T$  ou outras propriedades podem-se introduzir definições mais fortes de função aleatória (separável, mensurável, etc.), ditas definições *completas*. Um processo é *separável* se é definido pelos seus valores num conjunto numerável de pontos denso em  $T$ ; para tais processos o conhecimento das funções de distribuição  $F(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k)$  permite o cálculo das probabilidades dos acontecimentos desejados. Prova-se que todo o processo  $X(t)$  é equivalente a outro separável  $X^{(s)}(t)$ , i. e.,  $P(X(t) = X^{(s)}(t)) = 1$  para todo o  $t \in T$ . O cálculo de  $P(X(t) \leq a, t \in [0, 1])$  podia agora fazer-se, na versão separável, escolhendo os racionais  $\{r_k\}$  de  $[0, 1]$ , calculando  $P(X(r_{\alpha_1}) \leq a, \dots, X(r_{\alpha_n}) \leq a)$  e passando a limite.

Observe-se que, como é natural, a definição temporal não distingue funções aleatórias equivalentes, i. e., tais que  $X(t, \omega) = Y(t, \omega)$  excepto para  $\omega \in N_t \subseteq \Omega$  com  $N_t$  desprezável (probabilidade nula),  $N_t$  podendo variar com  $t$ .

A classificação de uma função aleatória pode fazer-se de vários pontos de vista: natureza de  $T$ , natureza do conjunto das imagens  $X(\Omega, T)$  e natureza da intervenção do acaso.

$T$  pode ser um conjunto finito, numerável ou contínuo; se  $T$  é finito temos afinal um *vector aleatório*, se  $T$  é numerável dispomos de uma *sequência aleatória* ou *crono-série*, se  $T$  é contínuo (intervalo finito, semi-recta ou recta) trata-se de um *processo estocástico* ou *função aleatória permanente*.

Doutro lado, a totalidade  $X(\Omega, T)$  dos valores de  $X(\omega, t)$  pode ser finito ou numerável originando um *processo discreto* ou um contínuo (intervalo, semi-recta ou recta) dizendo-se o *processo contínuo*.

Finalmente, quanto ao modo de intervenção do acaso, se  $X(\omega, t) = \varphi(t)$  é independente

de  $\omega \in \Omega$  temos uma *função certa*; se  $X(\omega, t)$  depende de finitos parâmetros aleatórios (caso dos polinómios de coeficientes aleatórios), como nesse caso basta conhecer o seu valor em um conjunto finito de pontos, o *processo* diz-se *degenerado*, *cripto-determinista* ou *pseudo-indeterminista*; o caso geral é o dos *processos* (própriamente) *estocásticos*.

A noção de *campo aleatório* em que  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $X(\Omega, T) \subseteq \mathbb{R}^p$  pode generalizar-se ainda considerando um espaço de estados  $S$  e uma aplicação  $\Omega \rightarrow S$  conveniente obtendo-se assim um *elemento* ou *estado aleatório*.  $S$  é  $\mathbb{R}^T$  no caso das funções aleatórias.

#### I. 4 — Processos e markovianos estacionários

Na totalidade de processos estocásticos costumam distinguir-se duas grandes classes (que se não excluem): os processos markovianos e os processos estacionários.

Os processos *markovianos* (de 1.<sup>a</sup> ordem) são aqueles em que as probabilidades (condicionais) de *transição* gozam da propriedade seguinte (enunciada para processos permanentes): se  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$  então

$$P(X(t) \leq x \mid X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n) = P(X(t) \leq x \mid X(t_n) = x_n).$$

Costuma dizer-se que, nos processos markovianos (de 1.<sup>a</sup> ordem), a probabilidade de um acontecimento futuro (no instante  $t > t_n$ ) só depende do presente (da observação  $x_n$  no último instante  $t_n$ ) sendo completamente independente do passado ( $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1}$ ).

Os processos markovianos de 2.<sup>a</sup> ordem verificam a seguinte propriedade: se

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < t$$

então

$$P(X(t) \leq x | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \\ X(t_n) = x_n) = P(X(t) \leq x | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \\ X(t_n) = x_n);$$

analogamente se definem os processos markovianos de ordem mais elevada.

É corrente dizer-se que os processos markovianos traduzem o «determinismo estatístico»; o futuro depende apenas das condições iniciais (presente) e não da história passada — compare-se com o enunciado habitual do princípio do determinismo em Mecânica ou com o princípio de HUYGHENS da Óptica Geométrica. São processos em que não há memória do passado, ou há memória finita no caso dos processos markovianos de 2.<sup>a</sup>, 3.<sup>a</sup>, ... ordens.

Para os processos markovianos o seu estudo depende apenas do conhecimento de probabilidades iniciais  $F(x, t) = P(X(t) \leq x)$  e das probabilidades de transição  $P(X(t) \leq x | X(t') = x') = F(x, t | x', t')$  para  $t' < t$ . No caso contínuo são conhecidas as densidades correspondentes. Todas as outras expressões de lei temporal se podem deduzir delas, o que introduz considerável simplificação. Assim a densidade de

$$X(t_1), X(t_2), X(t_3), \text{ com } t_1 < t_2 < t_3,$$

é dada por

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = f(x_1, t_1) \cdot \\ \cdot f(x_2, t_2 | x_1, t_1) f(x_3, t_3 | x_2, t_2).$$

Quando o conjunto dos estados (contido em  $\mathbf{R}$ ) é discreto (finito ou numerável) e o tempo é discreto o processo markoviano diz-se uma *cadeia de MARKOV*. Foram os processos primeiramente estudados. Neste caso, por ser discreto o espaço de estados, costumam dar-se as probabilidades elementares.

Repare-se que um processo markoviano continua markoviano quando se muda de relógio, i. e., se substitue o tempo  $t$  pelo tempo  $\tau = \Phi(t)$  em que  $\Phi$  é uma bijecção. Tal não é válido para os processos estacionários definidos adiante.

O processo de POISSON e o processo de WIENER-LÉVY são exemplos de processos markovianos. Os processos markovianos são importantes não apenas em si mas pelo facto de grande número de processos estocásticos poderem ser «mergulhados» (à custa do aumento de dimensões do espaço dos estados) em processos markovianos.

Do ponto de vista físico, os processos markovianos costumam traduzir os processos evolutivos.

A observação de certos gráficos sugere que, apesar da irregularidade essencial, o seu evoluir não se alterou no decurso do tempo, embora apresentando flutuações devidas ao acaso. É o caso dos processos (estacionários) do ruído de fundo de um rádio, da dimensão de peças em produção em série, de preços de bens em certas condições e se se corrigiu a desvalorização da moeda, etc.

Duas definições porém costumam dar-se:

a) Um processo permanente é *fortemente estacionário* (DOOB) se para  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$  e todo o  $h(t_i, t_i + h \in T)$  se tem

$$P(X(t_1 + h) \leq x_1, \dots, X(t_k + h) \leq x_k) = \\ = P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_k) \leq x_k),$$

i. e., as probabilidades da lei temporal não variam com uma translação no tempo;

b) um processo permanente de 2.<sup>a</sup> ordem, i. e., com valor médio  $\mathcal{M}(X(t))$  e variância  $\mathcal{V}(X(t))$ , e subsequentemente com covariância  $\mathcal{C}(X(t), X(s))$  pela desigualdade de SCHWARZ, diz-se *fracamente estacionário* (KHINTCHINE) se o seu valor médio  $\mathcal{M}(X(t))$  for indepen-

dente do tempo (constante) e a covariância  $c(X(t), X(s))$  apenas depende de  $|t-s|$ ; costuma denotar-se por  $\mathcal{R}(h) = c(X(t), X(t+h)) = \mathcal{R}(-h)$  a covariância; a variância  $\mathcal{V}(X(t)) = c(X(t), X(t)) = \mathcal{R}(0)$  é então uma constante.

É evidente que um processo de 2.<sup>a</sup> ordem fortemente estacionário é fracamente estacionário mas a definição forte não implica sempre a definição fraca pois o processo pode não ter valor médio ou variância.

A definição fraca de estacionariedade é o mais usado no estudo dos fenómenos naturais não-evolutivos. Para a maior parte dos processos fracamente estacionários é possível substituir o cálculo de  $\mathcal{M}(X(t))$  (valor médio em fase) pela média temporal ao longo de qualquer trajectória do processo, à excepção de um conjunto desprezável de trajectórias — *teorema ergódico*.

Os processos simultaneamente markovianos e fortemente estacionários são homogéneos no tempo, i. e., a distribuição de  $(X(t), X(s))$  apenas depende de  $|t-s|$ , mas nem todo o processo markoviano homogéneo é fortemente estacionário.

Adiante se definirão os processos de incrementos independentes e de incrementos estacionários. Iremos só tratar de processos de 2.<sup>a</sup> ordem.

## I. 5 — Processos de Poisson

Os processos de POISSON servem para descrever probabilisticamente o número de chamadas telefónicas, o número de raios  $\alpha$  emitidos por uma fonte, o número de electrões recebidos no ânodo de tubo de vácuo, o número de automóveis que passam em dado ponto, o número de falhas ou acidentes, etc, para um dado intervalo de tempo. São

dos mais importantes processos de contagem, de que vários outros se podem compor, mas não os únicos. Das várias caracterizações axiomáticas dos processos de POISSON (cf. PARZEN (1964)) vamos utilizar a seguinte: Consideremos acontecimentos que se podem dar no tempo  $t \geq 0$ . Seja  $N(t)$  o número de acontecimentos observados no intervalo  $]0, t]$ ;  $N(t)$  será pois uma função aleatória não-decrescente do tempo. Postulamos então:

P 1)  $N(t)$  está definida em  $[0, +\infty[$  e  $N(0) = 0$ ;

P 2)  $N(t)$  tem *incrementos independentes*, i. e., se  $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$  então  $N(t_2) - N(t_1)$  e  $N(t_4) - N(t_3)$  são independentes;

P 3)  $N(t)$  tem *incrementos estacionários*, i. e., se  $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$  e  $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$  então  $N(t_2) - N(t_1)$  e  $N(t_4) - N(t_3)$  tem a mesma distribuição;

P 4) Para todo o  $t > 0$  é válido

$$0 < P(N(t) = 0) < 1;$$

P 5) Para todo o  $t \geq 0$  é válido

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(N(t+h) - N(t) \geq 2)}{P(N(t+h) - N(t) = 1)} = 0.$$

P 1) resulta de se considerar  $N(t)$  uma contagem começada em  $t=0$ ; o significado de P 2) e P 3) já foi esclarecido; P 4) quer dizer que, para qualquer intervalo de tempo de duração  $t$  (está-se a usar a estacionariedade dos incrementos), há uma probabilidade não-nula, mas não há quase-certeza, de que um acontecimento, pelo menos, se dê; P 5) mostra que em intervalos de tempo muito pequenos ocorre no máximo um acontecimento, i. e., não há acontecimentos simultâneos.

De P 3) resulta que

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = P(N(t) = k).$$

Denotemos por

$$p_k(t) = P(N(t) = k).$$

Temos

$$\begin{aligned} p_0(t+s) &= P(N(t+s) = 0) = \\ &= P(N(t) = 0) \cdot P(N(t+s) - N(t) = 0) = \\ &= P(N(t) = 0) P(N(s) = 0) = p_0(t)p_0(s), \end{aligned}$$

em que se usou P2) e P3).

A solução desta equação funcional é

$$p_0(t) = e^{-\nu t}$$

visto que  $p_0(t)$  é não-crescente (1);  $\nu$  diz-se *intensidade* do processo e  $1/\nu$  é o valor médio dos intervalos entre acontecimentos.

Designemos agora por  $0 < W_1 < W_2 < \dots < W_n < \dots$  os instantes (aleatórios) em em que se dão os acontecimentos (um em cada instante por P5) e por  $T_1 = W_1$ ,  $T_2 = W_2 - W_1$ ,  $\dots$ ,  $T_n = W_n - W_{n-1}$ ,  $\dots$  os intervalos entre acontecimentos (também aleatórios). Da estacionariedade vem que

$$\begin{aligned} P(T_n \leq t) &= P(T_1 \leq t) = P(W_1 \leq t) = \\ &= 1 - P(N(t) = 0) = 1 - e^{-\nu t} \end{aligned}$$

pelo que os intervalos entre acontecimentos tem a distribuição exponencial. Como

$$W_n = T_1 + \dots + T_n$$

(1) Para  $m$  inteiro positivo é óbvio que  $p_0(mt) = p_0(t)^m$  e portanto  $p_0(m) = p_0(1)^m$ ; como para  $n$  inteiro positivo é  $p_0(1/n)^n = p_0(1)$  vem  $p_0(1/n) = p_0(1)^{1/n}$  e portanto é imediato que  $p_0(m/n) = p_0(1)^{m/n}$ . Ora  $p_0(t)$  é não-crescente por definição; então tomando duas sucessões de racionais  $\{r_n\}$  e  $\{r'_n\}$  convergindo para  $t$  e tais que  $r_n < t$  e  $r'_n > t$  vem  $p_0(r_n) \geq p_0(t) \geq p_0(r'_n)$  e portanto passando a limite vem

$$p_0(t) = p_0(1)^t$$

por P4) terá de ser  $p_0(1) = e^{-\nu}$  ( $\nu > 0$ ) o que prova o resultado indicado.

para  $n \geq 1$  temos

$$\{N(t) \leq n\} = \{W_{n+1} > t\}$$

e

$$\{N(t) = n\} = \{W_n \leq t\} \cap \{W_{n+1} > t\}$$

e portanto

$$P(N(t) = n) = P(W_n \leq t) - P(W_{n+1} \leq t).$$

Mas

$$P(W_n \leq t) = 1 - e^{-\nu t} \left( 1 + \nu t + \dots + \frac{(\nu t)^{n-1}}{(n-1)!} \right)$$

pois  $W_n$ , soma de  $n$  variáveis aleatórias exponenciais de função de distribuição  $1 - e^{-\nu t}$ , tem a distribuição gama e portanto

$$P(N(t) = n) = e^{-\nu t} (\nu t)^n / n!$$

o que mostra que  $N(t)$  (ou  $N(s+t) - N(s)$ ) tem a distribuição de POISSON. Consequentemente é  $\partial N(N(t)) = \nu t$  e  $\mathcal{V}(N(t)) = \nu t$ . Daí que seja válido um teorema de tipo ergódico  $N(t)/t \xrightarrow{mq} \nu$  quando  $t \rightarrow \infty$  pois

$$\begin{aligned} \partial N(N(t)/t) &= \nu \text{ e } \partial N(N(t)/t - \nu)^2 = \\ &= \mathcal{V}(N(t)/t) = \mathcal{V}(N(t))/t^2 = \nu/t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Observe-se então que  $\mathcal{C}(N(t), N(s)) = \nu \min(s, t)$  dada a decomposição  $N(t) = N(s) + (N(t) - N(s))$  se  $s \leq t$ .

Visto que  $N(t) - N(0) = N(t)$  e  $N(t+s) - N(t)$  são independentes,  $N(t+s)$ , conhecido  $N(t)$  e valores de  $N$  para instantes anteriores a  $t$ , só depende de  $N(t)$  pelo que o processo é markoviano. Uma mudança do relógio  $\tau = \Phi(t)$ , com  $\Phi$  não linear, faz intervir as diferenças  $\Phi^{-1}(\tau) - \Phi^{-1}(\tau')$  pelo que o processo, não dependendo de  $\tau - \tau'$ , deixa de ser homogéneo; em geral, homogeneiza-se o tempo por comodidade.

Vamos agora fazer considerações de análise aleatória, mais ou menos intuitivas, mos-

trando o seu aspecto mais complexo que análise habitual.

O processo tem quase-certamente trajectórias descontínuas, como o mostra o aspecto em escada do seu gráfico; ao mesmo tempo, como  $P(W_k = t) = 0$  para todo o  $t$  pois  $W_k$  tem uma distribuição contínua (gama), as trajectórias são quase-certamente contínuas em qualquer ponto; a aparente contra-dição explica-se pelo facto de as descontinuidades serem móveis (aleatórias) e nula a probabilidade de o salto se observar num dado instante do tempo. Observe-se ainda que a probabilidade de que  $N(t)$  seja efectivamente contínua (constante em  $]0, t_0]$  ou seja que  $N(t_0) = 0$  é  $P(N(t_0) = 0) = e^{-\nu t_0}$ , probabilidade positiva, decrescente com  $t_0$ . Embora tenha quase-certamente trajectórias descontínuas, o processo é derivável quase certamente em cada ponto e tem derivada nula pois  $P(W_k = t) = 0$ .

O integral do processo no intervalo  $[0, t]$ , supondo que houve  $k$  saltos nos pontos

$$\begin{aligned} W_1 = T_1 \leq W_2 = T_1 + T_2 \leq \dots \leq W_k = \\ = T_1 + \dots + T_k \leq t, \end{aligned}$$

é dado por  $kt - \sum_1^k (k+1-j)T_j$ , representando uma poligonal aleatória que tem inclinações  $0, 1, 2, \dots$ , nos intervalos

$$\begin{aligned} ]0, T_1[, \quad ]T_1, T_1 + T_2[, \\ ]T_1 + T_2, T_1 + T_2 + T_3[, \dots \end{aligned}$$

Convém ainda fazer duas observações importantes. O carácter poissoniano do processo e os tempos entre acontecimentos exponenciais são asserções equivalentes. Além disso, pode mostrar-se que se houver  $k$  acontecimentos no intervalo  $[0, t]$  os tempos  $W_1 \leq W_2 = T_1 + T_2 \leq \dots \leq W_k = T_1 + \dots + T_k \leq t$  tem a distribuição das estatísticas ordinais de uma amostra de  $k$  observações uniformes no intervalo  $[0, t]$ .

## I. 6 - Processo de Wiener-Lévy

O processo de WIENER-LÉVY, como primeiro modelo do movimento browniano, foi abordado por EINSTEIN e SMOLUCHOWSKI por 1905 e desenvolvido por WIENER e LÉVY nos anos 20; BACHELIER, no princípio do século também estudou este processo de passeio aleatório, mas sem grande rigor. Os trabalhos fundamentais estão em WAX (1954).

A função aleatória  $X(t)$  que descreve, em primeira observação, uma coordenada de uma partícula browniana pode ser caracterizada pelos seguintes axiomas:

WL 1)  $X(t)$  está definida em  $[0, +\infty[$  sendo  $X(0) = 0$ ;

WL 2)  $X(t)$  tem incrementos independentes, isto é, se  $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$  então  $X(t_2) - X(t_1)$  e  $X(t_4) - X(t_3)$  são independentes;

WL 3) Se  $0 \leq t_1 < t_2$  então  $X(t_2) - X(t_1)$  têm uma distribuição normal de valor médio nulo e variância contínua  $\sigma^2(t_2 - t_1)$  pelo que os incrementos são estacionários.

Como  $X(0) = 0$  é imediato que  $X(t)$  e o incremento  $E(t, s) = X(t+s) - X(t)$  ( $s > 0$ ) são independentes por WL 2).

Vamos agora determinar a função  $\sigma^2(t)$ . Da decomposição

$$X(t_2) = X(t_1) + (X(t_2) - X(t_1)) \quad (0 \leq t_1 < t_2)$$

o cálculo da variância, atendendo ao resultado anterior, leva à equação funcional

$$\sigma^2(t_2) = \sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2 - t_1).$$

De modo análogo ao que se usou para estudar a equação funcional do processo de POISSON, ou escrevendo  $p(t) = e^{\sigma^2(t)}$ , verifica-se que a solução é da forma  $\sigma^2(t) = At$ ,  $t \geq 0$ . Como  $A = \sigma^2(1) > 0$ ,  $\sigma^2(t)$  têm a forma  $\sigma^2 \cdot t$ ; quando o desvio padrão  $\sigma$  é

conhecido passa-se ao tempo  $t' = \sigma^2 \cdot t$  o que equivale a tornar  $\sigma^2 = 1$ .

Vamos ainda mostrar que

$$e(X(t_1), X(t_2)) = \sigma^2 \min(t_1, t_2).$$

Supondo  $0 \leq t_1 \leq t_2$  temos como

$$X(t_2) = X(t_1) + (X(t_2) - X(t_1))$$

por WL 2)

$$\begin{aligned} e(X(t_1), X(t_2)) &= e(X(t_1), X(t_1)) = \\ &= v(X(t_1)) = \sigma^2 t_1. \end{aligned}$$

Na impossibilidade de gerar em computador digital o processo permanente, discretizou-se o tempo e geraram-se números aleatórios normais  $E(1), E(2), \dots$ , calculando-se os valores

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ X(1) &= E(1) \\ X(1) &= X(1) + E(2) \\ &\dots \dots \dots \\ X(k) &= X(k-1) + E(k). \end{aligned}$$

Uma sequência gerada, em computador IBM 1620, deu o seguinte gráfico (fig. 4).



Fig. 4

A análise aleatória de  $X(t)$  mostra aspectos interessantes: tem trajectórias quase-certamente contínuas e contínuas quase-certamente em todos os pontos  $t$  (não há pois descontinuidades móveis). Todavia o processo não tem derivada, sendo pois um exemplo, como FERRIN supôs, de função contínua sem derivada.

O processo é obviamente markoviano. Por WL 3) como  $X(0) = 0$  vê-se imediatamente

que  $X(t)$  tem a densidade de probabilidade

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{t}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2 \cdot t}\right)$$

e a densidade de transição para  $0 \leq t_1 < t_2$

$$\begin{aligned} f(x_2, t_2 | x_1, t_1) &= \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{t_2-t_1}}} \exp &-\frac{1}{2} \frac{(x_2-x_1)^2}{\sigma^2 \cdot (t_2-t_1)}. \end{aligned}$$

### I. 7 — Outros processos estocásticos

Os dois processos estocásticos (de POISSON e de WIENER-LÉVY) embora difiram em certas características têm de comum o serem markovianos não estacionários porque de incrementos independentes e estacionários.

Vamos agora considerar o processo de ORSTEIN-UHLENBECK das velocidades. Por integração obtém-se o processo de ORSTEIN-UHLENBECK das posições, assintoticamente equivalente ao processo de WIENER-LÉVY. Tem-se assim uma descrição do movimento browniano que agora já dispõe de velocidade, ao contrário do modelo anterior. O texto já citado de WAX (1954) trata deste processo.

Um processo  $V(t)$  diz-se de ORSTEIN-UHLENBECK de velocidades se verifica os seguintes axiomas:

- OU 1)  $V(t)$  está definida em  $]-\infty, +\infty[$  e tem variância constante;  $V(0)$  é normal de valor médio nulo;
- OU 2)  $V(t_2) = \alpha(t_2-t_1) V(t_1) + E(t_1, t_2-t_1)$ , se  $0 \leq t_1 \leq t_2$ , em que para  $t > 0$   $0 < \alpha(t) < 1$  e  $\alpha(t)$  é uma função contínua;  $V(t_1)$  e  $E(t_1, t_2-t_1)$  são independentes;
- OU 3)  $E(t_1, t_2-t_1)$  ( $0 \leq t_1 \leq t_2$ ) tem distribuição normal de valor médio nulo e variância contínua  $v(t_2-t_1)$ ;

OU4) Se  $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$  então  $E(t_1, t_2 - t_1)$  e  $E(t_3, t_4 - t_3)$  são independentes.

A função  $a(t)$  representa o atrito médio sobre a partícula em movimento no intervalo de tempo  $t$ , reduzindo a sua velocidade, redução que pode ser compensada pelo incremento  $E$ .

Por ser  $V(t) = a(t) V(0) + E(0, t)$  vê-se que  $V(t)$  é normal de valor médio nulo e de variância  $\sigma^2$  (por OU1) verificando a igualdade, já que por OU2)  $V(0)$  e  $E(0, t)$  são independentes,

$$\sigma^2 = a^2(t) \sigma^2 + v(t)$$

o que dá

$$v(t) = (1 - a^2(t)) \sigma^2.$$

Interessa agora determinar  $a(t)$ .

Para  $t_1, t_2 \geq 0$  temos

$$\begin{aligned} V(t_1 + t_2) &= a(t_2) V(t_1) + E(t_1, t_2) = \\ &= a(t_2) [a(t_1) V(0) + E(0, t_1)] + E(t_1, t_2) \end{aligned}$$

e por outro lado

$$V(t_1 + t_2) = a(t_1 + t_2) V(0) + E(0, t_1 + t_2).$$

Tomando valores médios condicionais em  $V(0)$  por OU3) vem

$$a(t_1 + t_2) = a(t_1) a(t_2)$$

equação funcional cuja solução contínua é  $a(t) = e^{-\beta t}$ . Como por OU2)  $a(t) < 1$ , vem  $a(t) = e^{-\beta t}$  ( $\beta > 0$ ) e subsequentemente,  $v(t) = (1 - e^{-2\beta t}) \sigma^2$ .

Vamos agora mostrar que

$$\mathcal{C}(V(t_1), V(t_2)) = e^{-\beta |t_1 - t_2|} \sigma^2.$$

Supondo  $0 \leq t_1 \leq t_2$  temos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(V(t_1), V(t_2)) &= \mathcal{C}(V(t_1), a(t_2 - t_1) V(t_1) + \\ &+ E(t_1, t_2 - t_1)) = a(t_2 - t_1) \mathcal{C}(V(t_1)) = \\ &= e^{-\beta(t_2 - t_1)} \sigma^2 \end{aligned}$$

o processo é pois markoviano e estacionário. A densidade de probabilidade de  $V(t)$  é

$$f(v|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{\sigma^2}\right)$$

e a densidade de transição para  $0 \leq t_1 \leq t_2$  é

$$\begin{aligned} f(v_2, t_2 | v_1, t_1) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{1 - e^{-2\beta(t_2 - t_1)}}} \cdot \\ &\cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(v_2 - e^{-\beta(t_2 - t_1)} v_1)^2}{\sigma^2 (1 - e^{-2\beta(t_2 - t_1)})}\right). \end{aligned}$$

É fácil verificar que para  $t \geq 0$  o processo

$$X(t) = \sqrt{t} V\left(-\frac{1}{2\beta} \log t\right)$$

tem a distribuição de um processo de WIENER-LÉVY de parâmetro  $\sigma^2$ .

Em geral tem especial interesse os processos gaussianos estacionários, como o de ORSTEIN-UHLENBECK, em que as distribuições em  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$  são multinormais de valor médio e variâncias constantes e as covariâncias (e coeficientes de correlação) são funções apenas de  $|t - s|$ . Para alguns detalhes pode ver-se PARZEN (1964) e a parte II.

Outros processos estocásticos têm sido definidos, além dos que serão tratados na parte II. Citam-se a título de exemplo os processos extremos  $X(t)$ , definidos em  $[0, +\infty[$  que tem funções não-decrescentes, quase-certamente descontínuas com infinitos saltos, não-inteiros, em qualquer intervalo  $[0, t]$  e os processos extremos-markovianos-estacionários dos quais o processo de máximos é assintoticamente um processo extremo.

## Exercícios

1.  $\{X_n, n \geq 1\}$  é uma sucessão de variáveis aleatórias independentes de valor médio  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Mostre que os  $\{X_n\}$  formam uma crono-série estacionária nos sentidos forte e fraco. Calcule o seu valor médio, variância e covariância.

2.  $\{X_n, n \geq 0\}$  é uma sucessão de variáveis aleatórias independentes de valor médio  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Mostre que

$$Y_n = \varphi(X_{n-1}, X_n), n \geq 1$$

é um processo markoviano estacionário e determine a expressão geral do valor médio e covariância de  $Y_n$ . Calcule-os especificamente para o caso de

$$\varphi(x, y) = x + y, x - y, xy.$$

3. Se  $X(t), a \leq t \leq b$ , é um processo estacionário no sentido forte ou no sentido fraco então  $Y(t) = X(\alpha t + \beta)$  é um processo estacionário no mesmo sentido.

4. Seja  $N(t), t \geq 0$  um processo de POISSON de intensidade  $\nu$ . Mostre que para todo o  $\alpha > 0$ ,

$$M(t) = e^{\alpha t} \{N(e^{-2\alpha t}) - \nu e^{-2\alpha t}\}, -\infty < t < +\infty$$

é um processo fracamente estacionário. Determine o valor médio e a covariância de  $M(t)$ .

5. Qual o efeito de uma mudança de escala dos tempos nos processos de POISSON, de WIENER-LÉVY e ORSTEIN-UHLENBECK? Determine os novos parâmetros.

6. Para os processos que se seguem verifique se são markovianos, se são estacionários (nos sentidos forte ou fraco) e determine, se possível, os seus valores médios e covariâncias:

a)  $At + B, A \cos t + B \sin t, A \cos Bt, \text{tg}(At + B)$  em que  $A$  e  $B$  são variáveis aleatórias independentes;

b)  $N(t+1) - N(t)$  se  $N(t)$  é um processo de POISSON;

c)  $At + N(t)$  se  $A$  é uma variável aleatória independente de  $N(t)$  (processo de POISSON);

d)  $N_1(t) + N_2(t)$  e  $N_1(t)N_2(t)$  em que  $N_1(t)$  e  $N_2(t)$  são processos de POISSON independentes;

e)  $X(t+1) - X(t), X^2(t)$  e  $|X(t)|$  em que  $X(t)$  é um processo de WIENER-LÉVY;

f)  $V(t+1) - V(t), V^2(t)$  e  $|V(t)|$  em que  $V(t)$  é um processo de ORSTEIN-UHLENBECK.

7. Mostre a expressão de  $P(W_n \leq t)$  indicada nos processos de POISSON.

## REFERÊNCIAS (Parte I)

- L. AGOSTINI & J. BASS, *Les théories de la turbulence*, Publ. Sc. et Tech., Ministère de l'Air, n.º 237 (1960).  
 G. K. BATCHELOR, *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge Univ. Press, (1960).  
 A. BLANC-LAPIERRE & R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*, Paris, Masson, (1953).  
 H. CRAMÉR & M. R. LEADBETTER, *Stationary and related Stochastic Processes*, N. Y., Wiley, (1967).  
 J. L. DOOB, *Stochastic Processes*, N. Y., Wiley, (1953).  
 M. GIRAULT, *Processus aléatoires*, Paris, Dunod, (1969).  
 A. N. KOLMOGOROFF, *Foundations of the Theory of Probability*, N. Y., Chelsea, (1951).  
 M. LOÈVE, *Probability Theory*, 2nd. ed., Princeton, Van Nostrand, (1960).  
 MANN, *An introduction to the theory of Stochastic Processes with continuous parameter*, Nat. Bur. Stand., Appl. Math., Ser., Wash., (1953).  
 E. PARZEN, *Stochastic Processes*, 2nd ed., S. Francisco, (1964).  
 J. TIAGO DE OLIVEIRA, *Probabilidades e Estatística, Conceitos Fundamentais*, 2 vol., Lisboa, Liv. Escolar Editora, (1967).  
 N. WAX, *Noise and Stochastic Processes*, N. Y., Dover Publ., (1954).



# Sobre o problema de caminhos de comprimento mínimo em grafos

## Nota à cerca do algoritmo de Dijkstra

por J. A. Melo de Sousa

Departamento de Matemática — Universidade de Coimbra

### Resumo

Neste artigo são analisadas algumas versões do algoritmo de DIJKSTRA, para a determinação do caminho de comprimento mínimo entre dois vértices de um grafo, e proposta uma outra.

### Résumé

Dans cet article on analyse quelques versions de l'algorithme de DIJKSTRA, pour le problème du plus court chemin entre deux sommets d'un graphe, et on propose une autre.

### Summary

In this paper some versions of the DIJKSTRA's algorithm are analysed in order to find, in a graph, the shortest path between two nodes, and a proposal of another one is presented.

1. Começemos por definir os conceitos básicos utilizados ao longo do texto.

Um grafo  $G = (X, U)$  é o par constituído por um conjunto  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de elementos, usualmente denominados *nodos*

ou *vértices* do grafo, e por uma família  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  de elementos do produto cartesiano

$$X \times X = \{(x_i, x_j) \mid x_i \in X, x_j \in X\}.$$

Uma outra maneira de representar o grafo é a seguinte:

Seja  $\Gamma$  uma correspondência multívoca de  $X$  em  $X$ , definida para todo o  $x_i \in X$  do seguinte modo:

$$\Gamma(x_i) = \{(x_j, x_i), \dots, (x_k, x_i)\}$$

em que  $(x_i, x_j), (x_i, x_k), \dots, (x_i, x_k)$  são elementos de  $X \times X$ . Então o grafo  $G = (X, U)$  pode representar-se também por  $G = (X, \Gamma)$ . Se os elementos  $(x_i, x_j) \in X \times X$  constituem pares ordenados, são chamados *arcos* do grafo e este é dito *orientado* ou *dirigido*; caso contrário, esses pares são denominados *arestas* ou *lados* e o grafo é dito *não orientado*. A família das arestas é representada por  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  e o grafo  $G = (X, E)$  é denominado *multigrafo*. Podemos sempre considerar um multigrafo como um grafo orientado. Para tal basta considerar que cada aresta entre os vértices  $x_i$  e  $x_j$  se pode «desdobrar» em dois arcos do tipo  $(x_i, x_j)$  e  $(x_j, x_i)$ .

Num arco  $(x_i, x_j)$ , o vértice  $x_i$  é chamado *extremidade* ou *vértice inicial* e  $x_j$

*extremidade* ou *vértice final*. Um arco da forma  $(x_i, x_i)$  é denominado *lacete*.

Um *p-grafo* é aquele em que um elemento  $(x_i, x_j) \in X \times X$  aparece quanto muito *p* vezes. Ao número de vértices de um grafo chamaremos *ordem* do grafo.

Dois arcos (arestas) são ditos *adjacentes* se têm pelo menos uma extremidade em comum. Se um vértice  $x$  é extremidade inicial (final) de um arco  $u$ , diremos que o arco  $u$  é *incidente* em  $x$  em direcção ao exterior (interior). Para arestas, diremos apenas que a aresta é *incidente* no vértice  $x$ .

A uma sequência  $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  de arcos de  $G$  tal que cada arco da sequência tenha uma extremidade comum com o arco seguinte, chamaremos *cadeia*. Uma cadeia que passa uma só vez por um mesmo vértice é dita *elementar*; uma cadeia é *simples* se não utiliza duas vezes o mesmo arco. *Caminho* é uma cadeia  $\mu$  de um tipo particular onde para todo o arco  $u_i$  com  $i < k$ , a extremidade final de  $u_i$  coincide com a extremidade inicial de  $u_{i+1}$ . Torna-se evidente que em multigrafos os conceitos de cadeia e caminho coincidem. *Ciclo* é uma cadeia  $\mu$  tal que:

- 1.º o mesmo arco não figure duas vezes na sequência;
- 2.º os dois vértices das extremidades da cadeia coincidam.

*Circuito* é um ciclo orientado, ou seja, para todo o  $i < k$ , a extremidade terminal (ou final) de  $u_i$  coincide com a extremidade inicial de  $u_{i+1}$ .

*Fecho transitivo* de um vértice de um grafo é o sub-conjunto de vértices do grafo que se podem atingir a partir do vértice dado, por um caminho de comprimento qualquer:

$$\hat{\Gamma}(x) = \{x\} \cup \Gamma \{x\} \cup \Gamma^2 \{x\} \cup \dots$$

Por grafo *conexo* entendemos aquele em

que para todo o par de vértices  $x_i$  e  $x_j$  distintos, existe sempre uma cadeia que os liga. Num grafo  $G = (X, U)$ , chamamos *raiz* a um vértice  $x$  tal que exista um caminho de  $x$  para todos os restantes vértices do grafo.

Uma *árvore* é um grafo conexo e sem ciclos. Chamaremos *arborescência* a uma árvore munida de uma *raiz*.

Denominaremos *distância* entre dois vértices ligados por um arco, à função  $a$  definida no conjunto dos arcos do grafo sobre o conjunto dos números reais não negativos. Assim  $a(x_i, x_j)$  representará o valor da distância entre os vértices  $x_i$  e  $x_j$ .

2. Partindo do conhecimento dos conceitos acabados de definir, poderemos enunciar o problema em questão, do seguinte modo:

Dado um 1 — grafo  $G = (X, U)$  conexo, definida uma função distância entre dois vértices do grafo ligados por um arco, determinar o valor e o caminho de «comprimento mínimo» entre dois determinados vértices  $x_I$  (inicial) e  $x_F$  (final). Uma condição necessária e suficiente para que tal caminho exista é a seguinte:

O vértice  $x_F$  terá que pertencer ao fecho transitivo do vértice  $x_I$ .

3. Dos vários algoritmos conhecidos da literatura, descrevemos o mais eficiente, do ponto de vista computacional, da autoria de E. W. DIJKSTRA [1].

Analiseemos a forma como em cada iteração se procede à determinação do vértice e do arco (aresta) a seleccionar no grafo, para formação do caminho (cadeia) de comprimento mínimo. Para tal, os vértices serão subdivididos em três conjuntos:

— Conjunto  $A$  — dos vértices para os quais o caminho mínimo a partir de  $x_I$  é já conhecido (em cada iteração um novo vértice é adicionado a (transferido para) este conjunto).

— Conjunto  $B$  — dos vértices de onde o próximo vértice a ser adicionado ao conjunto  $A$ , será seleccionado; este conjunto contém todos os vértices que estão ligados pelo menos a um vértice do conjunto  $A$ , mas que ainda não pertencem a  $A$ .

— Conjunto  $C$  — dos restantes vértices.

Por seu lado, os arcos (arestas) também estarão subdivididos em três conjuntos:

— Conjunto  $I$  — dos arcos que formam os caminhos mais curtos de  $x_I$  para os respectivos vértices do conjunto  $A$ .

— Conjuntos  $II$  — dos arcos donde vai ser seleccionado o próximo a transferir para o conjunto  $I$ ; um e um só arco deste conjunto ligará um vértice de  $A$  a um vértice de  $B$ .

— Conjuntos  $III$  — dos restantes arcos.

À partida todos os vértices pertencem ao conjunto  $C$  e todos os arcos ao conjuntos  $III$ .

Iniciaremos o processo de cálculo transferindo o vértice  $x_I$  para  $A$  e aplicando consecutiva e repetidamente os seguintes passos:

*Passo 1* — Consideremos todos os arcos  $r$  que ligam directamente o vértice acabado de transferir para o conjunto  $A$ , com vértices  $P$  nos conjuntos  $B$  ou  $C$ . Então:

a) Se o vértice  $P$  pertence ao conjunto  $C$ , ele será transferido para o conjunto  $B$  e o correspondente arco  $r$  transferido para o conjunto  $II$ .

b) Se o vértice  $P$  pertence ao conjunto  $B$ , vejamos se a utilização do arco  $r$  conduz a um caminho de comprimento menor entre  $x_I$  e  $P$  do que o conhecido até à data que utiliza o correspondente arco do conjunto  $II$ . Em caso afirmativo, o arco  $r$  substitui aquele em  $II$ . Caso contrário, o arco  $r$  é rejeitado.

*Passo 2* — Cada vértice em  $B$  pode ligar-se com o vértice  $x_I$  de uma só maneira, se nos restringirmos apenas aos arcos do

conjunto  $I$  e a um único do conjunto  $II$ . Assim, existirão sempre caminhos de  $x_I$  para os vértices do conjunto  $B$ , com determinados valores-comprimento. Transferimos o vértice de  $B$  que determina o valor mínimo para o conjunto  $A$ , passando do conjunto  $II$  para o conjunto  $I$  o correspondente arco. Voltamos novamente ao Passo 1 e repetimos o processo até o vértice final  $x_F$  ser transferido para o conjunto  $A$ . Então o caminho procurado é determinado pela sucessão ou dos vértices (pertencentes ao conjunto  $I$ ), considerados de  $x_F$  para  $X_I$ , ou dos arcos (pertencentes ao conjunto  $A$ ).

3. Por razões de carácter computacional, DREYFUS [2] apresenta do mesmo algoritmo outra versão.

Assinala os vértices  $x_i$  do grafo com rótulos, que poderão ser do tipo  $[x_j, d(x_i)]^{(1)}$ , definitivos ou provisórios, consoante o valor do rótulo representa ou não o valor do caminho de comprimento mínimo de  $x_I$  para  $x_i$ .

Inicialmente, rotula o vértice  $x_I$  com o rótulo definitivo  $[-, 0]$  e todos os restantes com o rótulo provisório  $[-, \infty]^{(2)}$ .

Então, compara, um por um, o valor de cada rótulo, excepção feita para o vértice  $x_I$ , com o valor obtido através da soma do valor do rótulo do vértice  $x_I$  (igual a 0) com a distância directa de  $x_I$  ao vértice em questão. Sendo  $N$  o número de vértices do grafo, o conjunto dos valores dos  $N-1$  rótulos provisórios admitirá um mínimo. Seja  $k$  o vértice cujo rótulo tem valor mínimo. Declara então esse rótulo definitivo. Seguidamente, para cada um dos restantes  $N-2$  rótulos provisórios, compara o seu valor com o do

<sup>(1)</sup>  $x_j$  representa o vértice que precede  $x_i$  no caminho de  $x_I$  para  $x_i$ ;  $d(x_i)$  representa o valor (comprimento) do caminho de  $x_I$  para  $x_i$ , denominado *valor do rótulo*.

<sup>(2)</sup> O sinal  $\infty$  significa que ainda não foi determinado nenhum caminho de  $x_I$  até esse vértice.

rótulo de  $k$  declarado definitivo adicionado à distância directa deste vértice ao vértice em análise. O menor destes dois valores será o valor do novo rótulo provisório.

De forma análoga à descrita, determina o mínimo dos valores dos  $N-2$  rótulos provisórios e declara definitivo o rótulo cujo valor é mínimo, o qual se toma como base para nova transformação dos  $N-3$  rótulos provisórios. Ao fim de quanto muito  $N-1$  iterações, o rótulo do vértice  $x_F$  será definitivo, terminando o algoritmo, e determinando o(s) caminho(s) de comprimento mínimo:

a) Pela sucessão dos vértices indicados na 1.ª parte dos rótulos, partindo de  $x_F$  até atingir  $x_I$ ; ou

b) Pela sucessão dos arcos para os quais se verifica

$$(3.1) \quad d(x_j) = d(x_i) - a(x_j, x_i)$$

com  $1 \leq i, j \leq N$  e  $i \neq j$ , tomando inicialmente  $i = F$  e terminando quando  $j = I$ .

4. Obtêm-se, de facto, por esta última via, 3. b), todos os caminhos de comprimento mínimo entre os dois vértices considerados como início e fim do caminho,  $x_I$  e  $x_F$ . No entanto o mesmo resultado já não é obtido quando se aplica a versão original do algoritmo ou aquela que é indicada em 3. a), ou ainda a descrita por PRICE [3]. Demonstra-se esta afirmação resolvendo o problema indicado na Fig. 1, para ambas as versões.

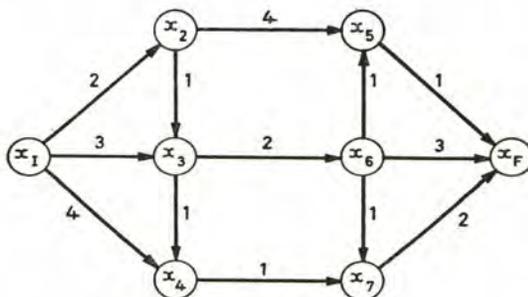


Fig. 1

Os quadros I e II representados nas Figs. 2 e 3 fornecem as soluções obtidas.

5. Baseados no algoritmo de DIJKSTRA tal como é descrito por DREYFUS e PRICE, propomos esta outra versão, por forma a obter todos os caminhos de comprimento mínimo entre  $x_I$  e  $x_F$ , tendo em atenção a via indicada em 3. a).

Antes de iniciarmos propriamente a descrição do algoritmo comecemos por explicar o significado de alguns símbolos nele contido:

$l$  — indicador da ordem da iteração corrente;

$K_i$  — vértices que em cada iteração ficam assinalados com rótulos definitivos;

$i$  — índices desses vértices, que satisfazem a expressão (5.1).

$q_p^{(l)}$  — número de rótulos que assinalam o vértice  $x_p$ , satisfazendo as expressões (5.2) e (5.3) na iteração de ordem  $l$ ;

$f_p^{(l)}$  — número de rótulos que assinalam o vértice  $x_p$  satisfazendo a expressão (5.4) na iteração de ordem  $l$ ;

$T_p^{(l)}$  — número total de rótulos apostos ao vértice  $x_p$ , na iteração de ordem  $l$ .

## Descrição do algoritmo

*Passo 0* — Assinalemos  $x_I$  com o rótulo definitivo  $[-, 0]$  e todos os restantes vértices  $x_i$  com rótulos provisórios  $[-, \infty]$ . Seja  $P$  o conjunto de vértices  $x_p$  que têm rótulos provisórios.

► Façamos  $K_i^{(l)} = K_1^{(l)} \equiv x_I$  e prossigamos directamente com o Passo 2.

*Passo 1*. Determinemos os vértices  $K_i^{(l)}$  com  $i \in \mathbb{N}$  e tal que  $1 \leq i \leq N-1$  por forma a que:

$$(5.1) \quad d(K_i^{(l)}) = \text{Min}_{x_p \in P} [d(x_p)],$$

QUADRO I

Resolução segundo a versão de DIJKSTRA [1]

Início	A	B	C	I	II	III
	$x_I$		$x_2, x_3, x_4$ $x_5, x_6, x_7$ $x_F$			$(x_I, x_2), (x_I, x_3)$ $(x_I, x_4), (x_2, x_3)$ $(x_3, x_4), (x_2, x_5)$
1.1	$x_I$	$x_2, x_3$ $x_4$	$x_5, x_6$ $x_7, x_F$		$(x_I, x_2), (x_I, x_3)$ $(x_I, x_4)$	$(x_3, x_6), (x_4, x_7)$
2.1	$x_I, x_2$	$x_3, x_4$	$x_5, x_6$ $x_7, x_F$	$(x_I, x_2)$	$(x_I, x_3), (x_I, x_4)$	$(x_6, x_5), (x_6, x_7)$ $(x_5, x_F), (x_6, x_F)$ $(x_7, x_F)$
1.2	$x_I, x_2$	$x_3, x_4$ $x_5$	$x_6, x_7$ $x_F$	$(x_I, x_2)$	$(x_I, x_3), (x_I, x_4)$ $(x_2, x_5)$	
2.2	$x_I, x_2, x_3$	$x_4, x_5$	$x_6, x_7$ $x_F$	$(x_I, x_2), (x_I, x_3)$	$(x_I, x_4), (x_2, x_5)$	
1.3	$x_I, x_2, x_3$	$x_4, x_5$ $x_6$	$x_7, x_F$	$(x_I, x_2), (x_I, x_3)$	$(x_I, x_4), (x_2, x_5)$ $(x_3, x_6)$	
2.3	$x_I, x_2, x_3, x_4$	$x_5, x_6$	$x_7, x_F$	$(x_I, x_2), (x_I, x_3), (x_I, x_4)$	$(x_2, x_5), (x_3, x_6)$	
1.4	$x_I, x_2, x_3, x_4$	$x_5, x_6$ $x_7$	$x_F$	$(x_I, x_2), (x_I, x_3), (x_I, x_4)$	$(x_2, x_5), (x_3, x_6)$ $(x_4, x_7)$	
2.4	$x_I, x_2, x_3, x_4$ $x_7$	$x_5, x_6$	$x_F$	$(x_I, x_2), (x_I, x_3), (x_I, x_4)$ $(x_4, x_7)$	$(x_2, x_5), (x_3, x_6)$	
1.5	$x_I, x_2, x_3, x_4$ $x_7$	$x_5, x_6$ $x_F$		$(x_I, x_2), (x_I, x_3), (x_I, x_4)$ $(x_4, x_7)$	$(x_2, x_5), (x_3, x_6)$ $(x_7, x_F)$	
2.5	$x_I, x_2, x_3, x_4$ $x_7, x_6$	$x_5, x_F$		$(x_I, x_2), (x_I, x_3), (x_I, x_4)$ $(x_4, x_7)$ $(x_3, x_6)$		
1.6	$x_I, x_2, x_3, x_4$ $x_7, x_6$	$x_5, x_F$		$(x_I, x_2), (x_I, x_3), (x_I, x_4)$ $(x_4, x_7), (x_3, x_6)$	$(x_2, x_5), (x_7, x_F)$	
2.6	$x_I, x_2, x_3, x_4$ $x_7, x_6, x_5$	$x_F$		$(x_I, x_2), (x_I, x_3), (x_I, x_4)$ $(x_4, x_7), (x_3, x_6), (x_2, x_5)$	$(x_7, x_F)$	
1.7	$x_I, x_2, x_3, x_4$ $x_7, x_6, x_5$	$x_F$		$(x_I, x_2), (x_I, x_3), (x_I, x_4)$ $(x_4, x_7), (x_3, x_6), (x_2, x_5)$	$(x_7, x_F)$	
2.7	$x_I, x_2, x_3, x_4$ $x_7, x_6, x_5, x_F$			$(x_I, x_2), (x_I, x_3), (x_I, x_4)$ $(x_4, x_7), (x_3, x_6), (x_2, x_5)$ $(x_7, x_F)$		

Fig. 2

Solução obtida:  $[(x_I, x_4), (x_4, x_7), (x_7, x_F)]$  com o valor total de 7 unidades.

## QUADRO II (5)

Resolução segundo DREYFUS [2] (via indicada em 3. a) e PRICE [3]

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$[-, 0]$	$[-, \infty]$						
	$[x_1, 2]$	$[x_1, 3]$	$[x_1, 4]$	$[-, \infty]$	$[-, \infty]$	$[-, \infty]$	$[-, \infty]$
		$[x_1, 3]$	$[x_1, 4]$	$[x_2, 6]$	$[-, \infty]$	$[-, \infty]$	$[-, \infty]$
			$[x_1, 4]$	$[x_2, 6]$	$[x_3, 5]$	$[-, \infty]$	$[-, \infty]$
				$[x_2, 6]$	$[x_3, 5]$	$[x_4, 5]$	$[-, \infty]$
				$[x_2, 6]$			$[x_7, 7]$
							$[x_7, 7]$

Fig. 3

Solução obtida:  $[(x_1, x_4), (x_4, x_7), (x_7, x_8)]$  com o valor total de 7 unidades.

considerando-se os vértices  $K_i^{(l)}$  com rótulos definitivos.

Se algum  $K_i^{(l)} = x_p$ , o algoritmo termina, e os caminhos de comprimento mínimo são determinados «caminhando» de  $x_p$  para  $x_1$ , atendendo à sucessão dos vértices considerados na 1.ª parte dos rótulos e tomando em linha de conta todas as alternativas.

**Passo 2** — Consideremos de per si, todos os vértices  $x_p$  que estão directamente ligados por um arco aos vértices  $K_i^{(l)}$ ; se não existirem tais vértices  $x_p$ , então fazemos  $K_i^{(l)} = K_i^{(l-1)}$  e procuremos os vértices  $x_p \in P$

que estejam directamente ligados aos  $K_i^{(l-1)}$ . Se tais vértices não existirem, repetimos o processo até encontrarmos um  $K_i^{(l)}$  que esteja ligado a, pelo menos, um vértice  $x_p \in P$ . Então, dar-se-á um dos três casos seguintes:

1.º Caso — Se, para cada  $K_i^{(l)}$

$$(5.2) \quad d_i(x_p) = d(K_i^{(l)}) + a(K_i^{(l)}, x_p) < d(x_p)$$

(3) No quadro, as entradas assinaladas a duplo traço indicam o vértice e o rótulo que nessa iteração foi considerado definitivo.

então o novo valor do rótulo do vértice  $x_p$  será

$$(5.3) \quad d(x_p) = \underset{i}{\text{Min}} [d_i(x_p)]$$

e atribuíamos novos rótulos, em número de  $q_p^{(i)}$  (com  $q \leq i$ ) ao vértice  $x_p$  (4).

2.º Caso — Se, para cada  $K_i^{(l)}$  se tem

$$(5.4) \quad d_i(x_p) = d(K_i^{(l)}) + a(K_i^{(l)}, x_p) = d(x_p)$$

então sejam  $f_p^{(l)}$  o número de rótulos que verificam (5.4). Há no entanto a juntar a este quantitativo o número de rótulos que o vértice em consideração tinha na iteração anterior  $T_p^{(l-1)}$ .

Então, o vértice  $x_p$  ficará com  $T_p^{(l)} = T_p^{(l-1)} + f_p^{(l)}$  rótulos.

3.º Caso — Se, para cada  $K_i^{(l)}$

$$(5.5) \quad d_i(x_p) = d(K_i^{(l)}) + a(K_i^{(l)}, x_p) > d(x_p)$$

então nenhuma alteração é feita nos rótulos do vértice considerado.

Depois de todos os vértices  $x_p \in P$  directamente ligados com os  $K_i^{(l)}$  terem sido considerados, retornamos ao Passo 1 e damos início a nova iteração.

A demonstração da convergência desta versão do algoritmo de DIJKSTRA, é a mesma da apresentada por DREYFUS e PRICE.

6. Para uma melhor compreensão deste processo de cálculo, descrevemos pormenorizadamente a resolução do problema apresentado em 4. na Fig. 1.

(4) Os  $q_p^{(i)}$  rótulos provisórios são do tipo  $[K_i^{(l)}, d(x_p)]$  e tanto quantos os novos  $K_i^{(l)}$  determinados nessa iteração, verificando a expressão (5.1).

1.ª Iteração —  $l = 1$ .

Passo 0 — Vértice  $x_I$  assinalado com o rótulo definitivo  $[-, 0]$  e todos os restantes vértices com rótulos provisórios  $[-, \infty]$ .

$$P = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$$

$$K_i^{(1)} = K_1^{(1)} \equiv x_I$$

$$d(x_I) = 0$$

Passo 2

— Vértice  $x_2$

$$d_1(x_2) = d(x_I) + a(x_I, x_2) = 0 + 2 = 2 < d(x_2) \quad (1.º \text{ caso})$$

$$q_2^{(1)} = 1; T_2^{(1)} = 1.$$

— Vértice  $x_3$

$$d_1(x_3) = d(x_I) + a(x_I, x_3) = 0 + 3 = 3 < d(x_3) \quad (1.º \text{ caso})$$

$$q_3^{(1)} = 1; T_3^{(1)} = 1.$$

Vértice  $x_4$

$$d_1(x_4) = d(x_I) + a(x_I, x_4) = 0 + 4 = 4 < d(x_4) \quad (1.º \text{ caso})$$

$$q_4^{(1)} = 1; T_4^{(1)} = 1.$$

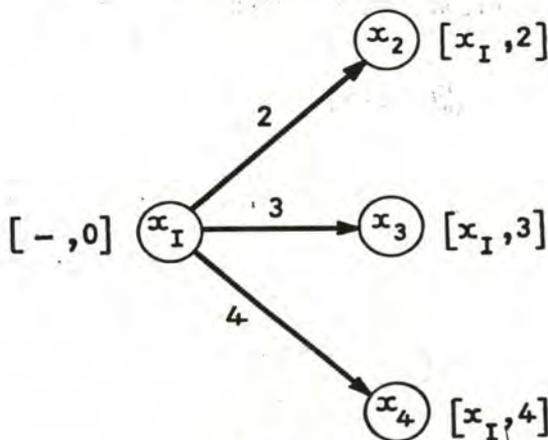


Fig. 4

2.<sup>a</sup> Iteração -  $l = 2$ .

Passo 1

$$\begin{aligned} P &= \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_F\} \\ d(K_1^{(2)}) &= \text{MIN}[d(x_2), d(x_3), d(x_4), \\ &\quad d(x_5), d(x_6), d(x_7), d(x_F)] \\ &= \text{MIN}[2, 3, 4, \infty, \infty, \infty, \infty] \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$d(K_1^{(2)}) = d(K_1^{(2)}) = 2 \rightarrow K_1^{(2)} \equiv x_2.$$

Ao vértice  $x_2$  é atribuído o rótulo definitivo  $[x_1, 2]$ .

Passo 2

- Vértice  $x_3$

$$\begin{aligned} d_1(x_3) &= d(x_2) + a(x_2, x_3) = 2 + 1 = \\ &= 3 = d(x_3) \quad (2.^{\circ} \text{ caso}) \end{aligned}$$

$$f_3^{(2)} = 1; T_3^{(1)} = 1; T_3^{(2)} = T_3^{(1)} + f_3^{(2)} = 1 + 1 = 2.$$

- Vértice  $x_5$

$$\begin{aligned} d_1(x_5) &= d(x_2) + a(x_2, x_5) = 2 + 4 = \\ &= 6 < d(x_5) \quad (1.^{\circ} \text{ caso}) \end{aligned}$$

$$q_5^{(2)} = 1; T_5^{(2)} = 1$$

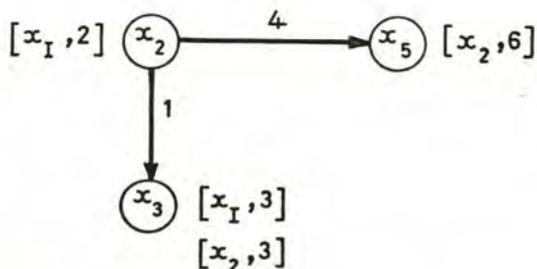


Fig. 5

3.<sup>a</sup> Iteração -  $l = 3$ .

Passo 1

$$\begin{aligned} P &= \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_F\} \\ d(K_1^{(3)}) &= \text{MIN}[d(x_3), d(x_4), d(x_5), \\ &\quad d(x_6), d(x_7), d(x_F)] \\ &= \text{MIN}[3, 4, 6, \infty, \infty, \infty] \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$d(K_1^{(3)}) = d(K_1^{(3)}) = 3 \rightarrow K_1^{(3)} \equiv x_3.$$

Ao vértice  $x_3$  são atribuídos os rótulos definitivos  $[x_1, 3]$  e  $[x_2, 3]$ .

Passo 2

- Vértice  $x_4$

$$\begin{aligned} d_1(x_4) &= d(x_3) + a(x_3, x_4) = 3 + 1 = \\ &= 4 = d(x_4) \quad (2.^{\circ} \text{ caso}) \end{aligned}$$

$$f_4^{(3)} = 1; T_4^{(1)} = T_4^{(2)} = 1; T_4^{(3)} = T_4^{(2)} + f_4^{(3)} = 1 + 1 = 2.$$

- Vértice  $x_6$

$$\begin{aligned} d_1(x_6) &= d(x_3) + a(x_3, x_6) = 3 + 2 = \\ &= 5 < d(x_6) \quad (1.^{\circ} \text{ caso}) \end{aligned}$$

$$q_6^{(3)} = 1; T_6^{(3)} = 1.$$

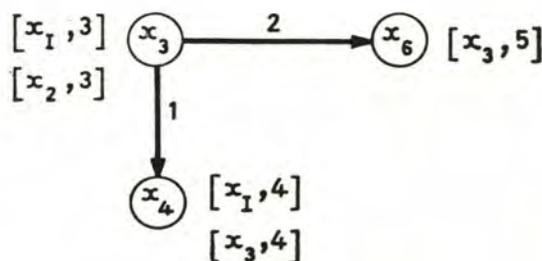


Fig. 6

4.<sup>a</sup> Iteração -  $l = 4$ .

Passo 1

$$P = \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_F\}$$

$$d(K_1^{(4)}) = \text{MIN} [d(x_4), d(x_5), d(x_6), d(x_7), d(x_F)]$$

$$= \text{MIN} [4, 6, 5, \infty, \infty]$$

$$= 4$$

$$d(K_1^{(4)}) = d(K_1^{(4)}) = 4 \rightarrow K_1^{(4)} \equiv x_4.$$

Ao vértice  $x_4$  são atribuídos os rótulos definitivos  $[x_7, 4]$  e  $[x_3, 4]$ .

Passo 2

- Vértice  $x_7$

$$d_1(x_7) = d(x_4) + a(x_4, x_7) = 4 + 1 = 5 < d(x_7) \quad (1.^{\circ} \text{ caso})$$

$$q_7^{(4)} = 1; T_7^{(4)} = 1$$

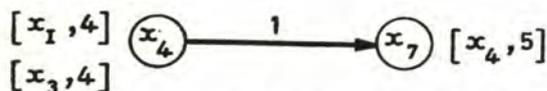


Fig. 7

5.<sup>a</sup> Iteração -  $l = 5$

Passo 1

$$P = \{x_5, x_6, x_7, x_F\}$$

$$d(K_1^{(5)}) = \text{MIN} [d(x_5), d(x_6), d(x_7), d(x_F)]$$

$$= \text{MIN} [6, 5, 5, \infty]$$

$$= 5$$

$$d(K_1^{(5)}) = d(K_1^{(5)}) = d(K_2^{(5)}) = 5 \rightarrow K_1^{(5)} \equiv x_6$$

e

$$K_2^{(5)} \equiv x_7$$

Aos vértices  $x_6$  e  $x_7$  são atribuídos respectivamente os rótulos definitivos  $[x_3, 5]$  e  $[x_4, 5]$ .

Passo 2

- Vértice  $x_5$

$$d_1(x_5) = d(x_6) + a(x_6, x_5) = 5 + 1 = 6 = d(x_5) \quad (2.^{\circ} \text{ caso})$$

$$f_5^{(5)} = 1; T_5^{(4)} = T_5^{(3)} = T_5^{(2)} = 1;$$

$$T_5^{(5)} = T_5^{(4)} + f_5^{(5)} = 1 + 1 = 2.$$

- Vértice  $x_F$

$$d_1(x_F) = d(x_6) + a(x_6, x_F) = 5 + 3 = 8 < d(x_F) \quad (1.^{\circ} \text{ caso})$$

$$d_2(x_F) = d(x_7) + a(x_7, x_F) = 5 + 2 = 7 < d(x_F) \quad (1.^{\circ} \text{ caso}).$$

O novo valor do rótulo do vértice  $x_7$  será:

$$d(x_F) = \text{MIN} [d_1(x_F), d_2(x_F)]$$

$$= \text{MIN} [8, 7]$$

$$= 7$$

$$q_F^{(5)} = 1; T_F^{(5)} = 1$$

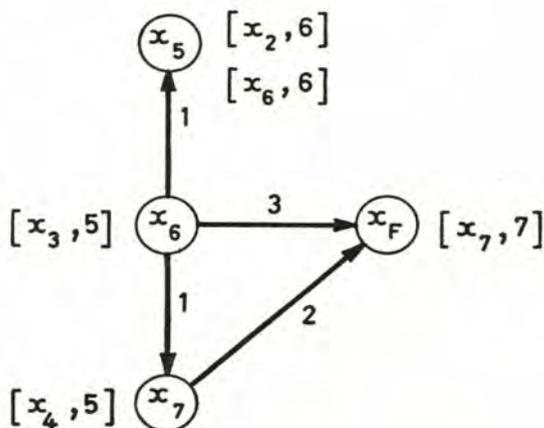


Fig. 8

6.<sup>a</sup> Iteração —  $l = 6$

Passo 1

$$\begin{aligned} P &= \{x_5, x_F\} \\ d(K_i^{(6)}) &= \text{MIN}[d(x_5), d(x_F)] \\ &= \text{MIN}[6, 7] \\ &= 6 \\ d(K_i^{(6)}) &= d(K_1^{(6)}) = 6 \rightarrow K_1^{(6)} \equiv x_5 \end{aligned}$$

Ao vértice  $x_5$  serão atribuídos os rótulos definitivos  $[x_2, 6]$  e  $[x_6, 6]$ .

Passo 2

— Vértice  $x_F$

$$\begin{aligned} d_1(x_F) &= d(x_5) + a(x_5, x_F) = 6 + 1 = \\ &= 7 = d(x_F) \quad (2.^{\circ} \text{ caso}) \end{aligned}$$

$$f_F^{(6)} = 1; T_F^{(6)} = T_F^{(5)} + f_F^{(6)} = 1 + 1 = 2$$

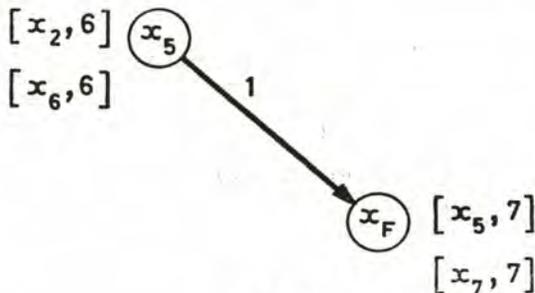


Fig. 9

7.<sup>a</sup> Iteração —  $l = 7$

Passo 1

$$\begin{aligned} P &= \{x_F\} \\ d(K_i^{(7)}) &= \text{MIN}[d(x_F)] \\ &= 7 \\ d(K_i^{(7)}) &= d(K_1^{(7)}) = 7 \rightarrow K_1^{(7)} \equiv x_F \end{aligned}$$

e o algoritmo terminou.

Para visualizarmos melhor o conjunto das soluções do problema, poderemos utilizar o seguinte processo gráfico:

Construamos uma arborescência de raiz  $x_F$ ; genericamente, cada vértice  $x_i$  da arborescência terá como sucessor(es) o(s) vértice(s) indicado(s) na 1.<sup>a</sup> parte do(s) seu(s) rótulo(s). Parte-se, portanto, de  $x_F$  até atingir  $x_I$ . Cada «ramo» da arborescência será um caminho. A solução do problema consiste no conjunto dos «ramos» da arborescência (em sentido inverso).

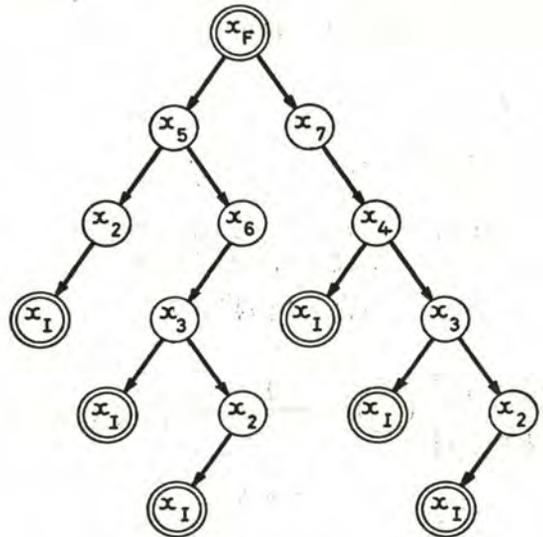


Fig. 10

Solução obtida:

- 1)  $[(x_I, x_2), (x_2, x_5), (x_5, x_F)]$
- 2)  $[(x_I, x_3), (x_3, x_6), (x_6, x_5), (x_5, x_F)]$
- 3)  $[(x_I, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_6), (x_6, x_5), (x_5, x_F)]$
- 4)  $[(x_I, x_4), (x_4, x_7), (x_7, x_F)]$
- 5)  $[(x_I, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_7), (x_7, x_F)]$
- 6)  $[(x_I, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_7), (x_7, x_F)]$

Todos estes caminhos têm o valor total de 7 unidades.

7. Uma extensão natural do problema focado será aquela que conduzirá à determinação do(s) caminho(s) de comprimento mínimo entre um dado vértice inicial e todos os restantes vértices do grafo. As soluções, sujeitas às restrições anteriormente focadas, são determinadas de modo análogo. Há apenas que abrir um parêntesis no que concerne ao ponto onde os processos de cálculo terminam.

Na versão de DIJKSTRA, o algoritmo findará quando todos os vértices pertencerem ao conjunto  $A$ ; nas outras versões, quando rótulos definitivos tiverem sido atribuídos a todos os vértices.

\*  
\* .

Cumpre-se sempre com agrado o elementar dever de agradecimento a todos os que, de algum modo, contribuíram para este trabalho.

Para a Fundação Calouste Gulbenkian que o subsidiou, através da concessão de uma bolsa de estudo ao autor; para Amílcar Gonçalves, J. M. Simões Pereira, R. Agonia Pereira e Mário Rosa que o leram e criticaram; e ainda para M. H. Teixeira de Sousa e Manuel Guimarães que, respectivamente, o dactilografaram e elaboraram os desenhos, vão os agradecimentos do autor.

#### REFERÊNCIAS

- [1] DIJKSTRA, E. W., *A note on two problems in connexion with graphs*, Numerische Mathematik, **1**, (1959), pág. 270.
- [2] DREYFUS, S. E., *An appraisal of some shortest paths algorithms*, Operations Research, **17**, N.º 3 (1969), pág. 396.
- [3] PRICE, W. L., *Graphs and Networks*, Butterworths, (1971), pág. 46.



## Harmónicas esféricas

por Rui João Baptista Soares

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

### Introdução

A necessidade de expandir uma função  $F(\theta, \lambda)$  em série de harmónicas esféricas de superfície levou-nos às considerações que a seguir apresentamos.

Tal desenvolvimento permite aos especialistas uma interpretação dos modelos criados e a sua conseqüente aceitação ou negação de acordo com as realidades.

### 1.1. Campos de vectores

Uma região do espaço diz-se um *campo de vectores* se a cada ponto dessa região corresponder um vector — vector campo — com o ponto de aplicação nesse ponto e de componentes

$$1) \quad X_i = X_i(x, y, z) \quad i = 1, 2, 3.$$

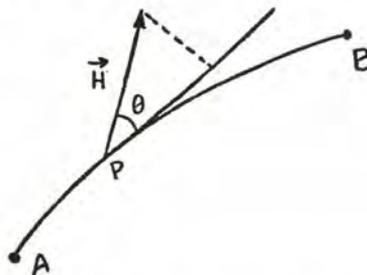
Sempre que no campo de vectores exista uma função  $V(x, y, z)$  tal que

$$2) \quad X_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3$$

diz-se que ele admite um potencial.

O significado da função potencial é simples: ao pretendermos calcular o trabalho efectuado pelo campo no deslocamento  $AB$ ,  $dW$  é uma diferencial total pelo que: a diferença de potencial entre os pontos  $A$  e  $B$  é independente do percurso e representa o trabalho efectuado pelo vector campo quando

o seu ponto de aplicação se desloca de  $A$  a  $B$ .



$$3) \quad \int_{AB} dW = W_B - W_A.$$

Num campo de vectores, toda a superfície em que se verifique

$$4) \quad V(x, y, z) = \text{constante}$$

diz-se *superfície equipotencial*.

Convém desde já salientar algumas propriedades importantes das superfícies equipotenciais:

- $P_1$ : o vector campo num dado ponto é normal à superfície equipotencial que passa por esse ponto;
- $P_2$ : a derivada do potencial segundo a normal a uma superfície equipotencial é igual ao vector campo;
- $P_3$ : os afastamentos de duas superfícies equipotenciais em dois pontos diferentes são inversamente proporcionais aos valores do vector campo nesses pontos.

### 1.2. Fórmula de Ostogradsky; identidades de Green

Consideremos uma superfície fechada  $S$  limitando um volume  $V$ , e três funções  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ ; representando por  $l, m, n$  os cossenos directores da normal externa à superfície e por  $dS$  o elemento de área sobre  $S$  teremos

$$\begin{aligned} I_3 &= \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz \\ &= \iint_D dx dy \int_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_D [R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)] dx dy \\ &= \iint_S R n dS \end{aligned}$$

em que  $D$  é a projecção de  $S$  em  $XOY$ ; analogamente se estabeleciam as igualdades

$$I_2 = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q m dS$$

$$I_1 = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P l dS.$$

Somando as três igualdades anteriores obtém-se a expressão cartesiana da fórmula de OSTOGRADSKY

$$\begin{aligned} 5) \quad & \iiint_V \left[ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right] dV \\ &= \iint_S [Pl + Qm + Rn] dS \end{aligned}$$

Consideremos duas funções  $V_1(x, y, z)$ ,  $V_2(x, y, z)$  admitindo primeiras derivadas

em ordem a  $x, y, z$ . Fazendo na fórmula de OSTOGRADSKY

$$P = V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x}; \quad Q = V_2 \frac{\partial V_1}{\partial y}; \quad R = V_2 \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

resulta

$$\begin{aligned} 6) \quad & \iiint_V \left[ \frac{\partial V_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\partial V_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial z} \right] dV \\ &+ \iint_S V_2 \nabla^2 V_1 dV = \iint_S V_2 \frac{dV_1}{dn} dS \end{aligned}$$

que constitui a 1.<sup>a</sup> identidade de Green.

Por troca de  $V_1$  e  $V_2$  obtinha-se uma expressão análoga a 6); subtraindo-as ordenadamente resulta

$$\begin{aligned} 7) \quad & \iiint_V [V_1 \nabla^2 V_2 - V_2 \nabla^2 V_1] dV \\ &= \iint_S \left[ V_1 \frac{dV_2}{dn} - V_2 \frac{dV_1}{dn} \right] dS \end{aligned}$$

que traduz a 2.<sup>a</sup> identidade de Green.

Considere-se um ponto  $P_0 \in S$ ; seja  $V_1$  uma função harmónica em  $S$  e façamos  $V_2 = \frac{1}{d}$ . Por aplicação da 2.<sup>a</sup> identidade de Green se vê que o integral é nulo excepto em  $P_0$ .

Isolando  $P_0$  com o volume elementar facilmente se vê que

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[ V_1 \frac{dV_2}{dn} - V_2 \frac{dV_1}{dn} \right] dS \\ &= \iint_S \left[ V_1 \frac{dV_2}{dn} - V_2 \frac{dV_1}{dn} \right] dS \end{aligned}$$

$$= \iint_{\Sigma} V_1 \frac{dV_2}{dn} dS = -\frac{1}{R^2} \iint_{\Sigma} V_1 dS$$

$$= 4\pi (V_1)_{\Sigma}$$

donde

8)

$$(V_1)_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ V_1 \frac{dV_2}{dn} - V_2 \frac{dV_1}{dn} \right] dS.$$

Como o segundo membro de 8) é independente de  $R$  podemos concluir que

1. o valor médio de uma função harmónica sobre uma esfera é independente do raio;
2. o valor médio de uma função harmónica sobre uma esfera é igual ao seu valor central.

A afirmação 2. permite-nos escrever

9)  $(V_1)_P = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ V_1 \frac{dV_2}{dn} - V_2 \frac{dV_1}{dn} \right] dS$

que é a 3.<sup>a</sup> identidade de Green.

As expressões 5), 6), 7) e 9) podem estender-se ao espaço exterior de  $S$  desde que as funções  $P$ ,  $Q$ , e  $R$  satisfaçam as condições, ditas de regularidade no infinito

10)  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 P = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 Q = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 R = 0.$

Estas condições são verificadas desde que as funções  $V_1$  e  $V_2$  sejam regulares no infinito, isto é, quando

11)  $\rho V_i$  e  $\rho^2 \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$   $i = 1, 2$   
 $j = 1, 2, 3$

se mantenham finitas quando  $\rho \rightarrow \infty$ .

### 1. 3. Coordenadas ortogonais generalizadas

Consideremos um sistema de eixos  $OXYZ$  ortogonais e sejam  $x_i$  as coordenadas de um ponto genérico; façamos

12)  $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \quad i = 1, 2, 3$

sendo  $x_i$  funções unívocas dos  $q_j$ ; diremos então que os  $q_j$  constituem um sistema de coordenadas generalizadas.

Para um deslocamento elementar ter-se-á

13)  $dx_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot dq_j \quad i = 1, 2, 3.$

Definindo  $R_j$  e  $S_{ij}$  pelas expressões

14)  $R_j^2 = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2 \quad j = 1, 2, 3$

15)  $S_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \quad i \neq j \quad i = 1, 2, 3$   
 $j = 1, 2, 3$

podemos escrever a expressão do elemento linear em coordenadas reais como se segue

16)  $ds^2 = \sum_{j=1}^3 R_j^2 \cdot dq_j^2$   
 $+ 2 \sum_{i \neq j} S_{ij} dq_i dq_j \quad i = 1, 2, 3$   
 $j = 1, 2, 3$

Para determinarmos os cosenos directores do elemento  $ds_j$  sobre a linha  $s_j$  devemos atender a 13) e 16).

17)  $\frac{dx_i}{ds_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \frac{1}{R_j} \quad i = 1, 2, 3$   
 $j = 1, 2, 3$

O sistema de coordenadas generalizadas diz-se *ortogonal* quando as linhas  $s_j$  forem

perpendiculares duas a duas o que se traduz pelo anulamento das expressões 15).

Considerando, a partir deste momento, somente sistemas ortogonais, teremos sucessivamente os elementos lineares  $ds_j$ , os elementos de área  $dS_k$  e o elemento de volume  $dV$  dados pelas expressões

$$18) \quad ds_j = R_j \cdot dq_j \quad j = 1, 2, 3$$

$$19) \quad dS_k = R_i R_j dq_i dq_j \quad i, j \neq k = 1, 2, 3$$

$$20) \quad dV = R_1 R_2 R_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Dada uma superfície fechada  $S$  e uma função potencial  $V$  poder-se-ia deduzir a expressão

$$21) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{R_1 R_2 R_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \cdot \left[ \frac{R_j R_k}{R_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial q_i} \right] \quad j, k \neq i = 1, 2, 3$$

do laplaciano da função  $V$  em coordenadas generalizadas ortogonais.

#### 1. 4. Equação de Laplace em coordenadas esféricas

Representando por  $(r, \theta, \lambda)$  as coordenadas esféricas

$$22) \quad \begin{cases} x = r \operatorname{sen} \theta \cos \lambda \\ y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \lambda \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

vem sucessivamente

$$23) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\lambda^2$$

$$24) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \operatorname{sen} \theta \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \operatorname{sen} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) \right]$$

donde

$$25) \quad r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cotg \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0.$$

As soluções desta equação, numa certa região do espaço, dizem-se funções harmônicas nessa região; convém salientar, pela necessidade que adiante teremos, uma propriedade de tais funções.

P1. Se uma função  $V$  for harmônica numa região interior a uma superfície  $S$  tem-se

$$26) \quad \iiint_V \nabla^2 V dV = 0 = \iint_S \frac{dV}{dn} dS.$$

Suponhamos que a função  $V$ , solução da equação de Laplace, é da forma

$$27) \quad V = f_1(r) \cdot f_2(\theta) \cdot f_3(\lambda) = f_1(r) \cdot F(\theta, \lambda).$$

Substituindo na expressão 25) resulta

$$28) \quad r^2 f_1'' F + 2r f_1' F + f_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + f_1 \cotg \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + f_1 \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} = 0$$

ou

$$\frac{1}{f_1} [r^2 f_1'' + 2r f_1'] + \frac{1}{F} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \cotg \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \right] = 0$$

donde

$$29) \quad r^2 f_1'' + 2r f_1' - c_1 f_1 = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} + \cotg \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} + c_1 F = 0$$

$$f_2'' \cdot f_3 + \cotg \theta \cdot f_2' \cdot f_3' + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \cdot f_2 \cdot f_3'' + c_1 f_2 f_3 = 0$$

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{f_2} [\operatorname{sen} \theta \cdot f_2'' + \cos \theta \cdot f_2' + c_1 \operatorname{sen} \theta \cdot f_2] + \frac{f_3''}{f_3} = 0$$

e portanto

$$30) \quad f_3'' + c_2 f_3 = 0$$

$$31) \quad \operatorname{sen} \theta \cdot f_2'' + \cos \theta \cdot f_2' + c_1 \operatorname{sen} \theta \cdot f_2 - c_2 \frac{f_2}{\operatorname{sen} \theta} = 0$$

façamos

$$c_1 = n(n+1) \quad p = \cos \theta \\ c_2 = m$$

Nestas condições as soluções das equações 29), 30) e 31) são respectivamente

$$f_1(r) = r^n \quad \text{ou} \quad f_1(r) = r^{-(n+1)}$$

$$f_2(\theta) = \operatorname{sen}^m \theta \cdot \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^{m+n}}{d p^{m+n}} (p^2 - 1)^n$$

$$f_3(\lambda) = \cos m \lambda \quad \text{ou} \quad f_3(\lambda) = \operatorname{sen} m \lambda.$$

### 1. 5. Funções associadas de Legendre; polinómios de Legendre; tesserais e zonais; algumas propriedades

As soluções  $f_2$  é usual chamar-se *funções associadas de Legendre* e representam-se por  $P_{nm}$  em que o índice  $n$  é o grau e o índice  $m$  é a ordem da função.

Chama-se *polinómio de Legendre* de grau  $n$ , e representa-se por  $P_n$  à função associada de Legendre de grau  $n$  e ordem zero.

É pois uma função de  $\theta$  definida por

$$32) \quad P_n = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{d p^n} (p^2 - 1)^n$$

e cuja expressão explícita é

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} l_{n,m} x^{n-2m}$$

com

$$l_{n,m} = (-1)^m \frac{[2(n-m)]!}{2^n (n-m)! m! (n-2m)!}.$$

Entre estes coeficientes vale a seguinte fórmula de recorrência (tipo triângulo PASCAL)

$$l_{n+1,m+1} = \frac{1}{n+1} [(2n-2m-1) l_{n,m+1} - (n-2m) l_{n,m}].$$

Todavia para o cálculo destes coeficientes utilizamos a igualdade

$$l_{n,m} = \frac{1 \cdot 3 \cdots [2(n-m)-1]}{n!} \cdot h_{n,m}$$

por se dispôr de uma subrotina para o cálculo dos  $h_{n,m}$ .

É óbvio que  $\frac{d^i}{d p^i} (p^2 - 1)^n$  tem  $(2n-i)$  raízes;  $(n-i)$  serão iguais a  $-1$ ;  $(n-i)$  serão iguais a  $+1$  e  $i$  estarão compreendidas entre  $-1$  e  $+1$  sendo todas distintas pelo que:

$P_1$ : o polinómio de LEGENDRE de grau  $n$  tem  $n$  raízes distintas no intervalo  $(-1, 1)$ ; conseqüentemente  $\frac{d^m}{d p^m} P_n$  tem  $(n-m)$  raízes distintas no mesmo intervalo.

Dado que  $P_{nm}$  são soluções de 31), quando  $m = 0$  podemos escrevê-la na forma

$$(1 - p^2) P_n'' - 2p P_n' + n(n+1) P_n = 0.$$

Derivando  $(j-1)$  vezes em ordem a  $p$  obtemos

$$(1 - p^2) P_n^{(j+1)} - 2pj P_n^{(j)} + (n+j)(n-j+1) P_n^{(j-1)} = 0$$

ou ainda

$$P_m^{(j-1)} \left\{ \frac{d}{dp} [(1 - p^2)^j P_n^{(j)}] \right\} \\ = - (n+j)(n-j+1) (1 - p^2)^{j-1} \\ \cdot P_m^{(j-1)} P_n^{(j-1)}.$$

Definindo

$$G_j = \int_{-1}^1 (1 - p^2)^j P_m^{(j)} \cdot P_n^{(j)} dp$$

obtém-se

$$G_j = [(1 - p^2)^j \cdot P_n^{(j)} P_m^{(j-1)}]_{-1}^1 \\ - \int_{-1}^1 P_m^{(j-1)} \left\{ \frac{d}{dp} [(1 - p^2)^j P_n^{(j)}] \right\} dp \\ = (n+j)(n-j+1) \int_{-1}^1 (1 - p^2)^{j-1} P_m^{(j-1)} P_n^{(j-1)} dp \\ = (n+j)(n-j+1) G_{j-1}.$$

Deste resultado se deduz

$$33) \quad G_j = \frac{(n+j)!}{(n-j)!} \cdot G_0.$$

Sabendo que

$$G_0 = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

podemos dizer

$P_2$ : os polinômios de LEGENDRE verificam as igualdades

$$G_j = \int_{-1}^1 (1 - p^2)^j P_m^{(j)} P_n^{(j)} dp \\ = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+j)!}{(n-j)!} & m = n. \end{cases}$$

É evidente que, sendo

$$P_{k+1}' - P_{k-1}' = (2k+1) P_k,$$

se obtém, fixando sucessivamente  $k=1, 2, \dots, n$ , a seguinte propriedade dos polinômios de LEGENDRE

$$P_3) \quad P_{n+1}' + P_n' = \sum_{k=0}^n (2k+1) P_k.$$

Chamam-se *tesseractais* de grau  $n$  e ordem  $m$  às funções de  $\theta$  e  $\lambda$  definidas por

$$34) \quad \begin{aligned} R_{nm} &= \cos m\lambda \cdot P_{nm} \\ S_{nm} &= \sin m\lambda \cdot P_{nm} \end{aligned}$$

donde resulta que para  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$  as tesseractais se anulam em  $2m$  pontos igualmente espaçados; atendendo à propriedade  $P_1$  pode dizer-se que para  $0 < \theta < 2\pi$  as tesseractais se anulam em  $n-m$  pontos distintos; para valores  $\theta=0$  ou  $\theta=\pi$  as tesseractais são nulas.

É fácil ver, adoptando uma definição adequada de produto interno, que as tesseractais verificam as seguintes relações de ortogonalidade

$$35. 1) \quad \iint R_{nm} S_{ij} d\sigma = 0 \quad \text{sempre}$$

$$35. 2) \quad \iint R_{nm} R_{ij} d\sigma = 0 \quad \begin{cases} m \neq j \\ \text{ou} \end{cases}$$

$$35. 3) \quad \iint S_{nm} S_{ij} d\sigma = 0 \quad \begin{cases} n \neq i \end{cases}$$

$$35.4) \int \int R_{n0}^2 d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} = 2\pi \cdot G_0$$

$$35.5) \int \int R_{nm}^2 d\sigma = \int \int S_{nm}^2 d\sigma \\ = \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{(m+n)!}{(n-m)!} = \pi \cdot G_m \quad m \neq 0.$$

Zonal é uma tesseral de ordem zero; de 34) resulta que as zonais  $S_{n0} = 0$  para todo o  $n$ , enquanto as zonais  $R_{n0} = P_{n0} = P_n$  se identificam com os polinómios de LEGENDRE.

Da representação integral

$$36) P_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (p + i\sqrt{1-p^2} \cos \omega)^n d\omega$$

se conclui a seguinte propriedade

$P_4$ : os polinómios de LEGENDRE verificam

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0 \quad \text{se } |p| \neq 1.$$

Suponhamos que se pretende obter o desenvolvimento em série da função harmónica  $\frac{1}{d}$  segundo as potências  $\frac{r_1}{r_2}$ .

Desde que  $\left| \frac{r_1}{r_2} \right| < 1$  os desenvolvimentos que vamos obter são absolutamente convergentes e podemos trabalhar seguramente; teremos sucessivamente:

$$37) \frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha}} \\ = \frac{1}{r_2} \left[ \left( 1 - \frac{r_1}{r_2} e^{i\alpha} \right) \left( 1 - \frac{r_1}{r_2} e^{-i\alpha} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \\ = \frac{1}{r_2} \left[ 1 + \frac{r_1}{r_2} \cos \alpha + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \left( \frac{3}{4} \cos 2\alpha + \frac{1}{4} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^3 \left( \frac{5}{8} \cos 3\alpha + \frac{3}{8} \cos \alpha \right) + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{r_2} \left[ P_0 + \frac{r_1}{r_2} P_1(\cos \alpha) + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 P_2(\cos \alpha) \right. \\ \left. + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^3 P_3(\cos \alpha) + \dots \right] \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n}{r_2^{n+1}} P_n(\cos \alpha).$$

Com base neste resultado facilmente se determinava o valor de  $G_0$ .

Sendo  $(r_1, \theta_1, \lambda_1)$  e  $(r_2, \theta_2, \lambda_2)$  as coordenadas esféricas dos pontos  $P_1, P_2$  teremos

$$38) \quad \cos \alpha = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \\ + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$$

e portanto

$$39) \quad P_1(\cos \alpha) = P_1(\cos \theta_1) \cdot P_1(\cos \theta_2) \\ + R_{11}(\theta_1, \lambda_1) \cdot R_{11}(\theta_2, \lambda_2) \\ + S_{11}(\theta_1, \lambda_1) \cdot S_{11}(\theta_2, \lambda_2).$$

Atendendo à expressão de  $P_2(\cos \alpha)$  resulta

$$40) \quad P_2(\cos \alpha) = P_2(\cos \theta_1) \cdot P_2(\cos \theta_2) \\ + \frac{1}{3} [R_{21}(\theta_1, \lambda_1) \cdot R_{21}(\theta_2, \lambda_2) + S_{21}(\theta_1, \lambda_1) \\ \cdot S_{21}(\theta_2, \lambda_2)] + \frac{1}{12} [R_{22}(\theta_1, \lambda_1) \cdot R_{22}(\theta_2, \lambda_2) \\ + S_{22}(\theta_1, \lambda_1) \cdot S_{22}(\theta_2, \lambda_2)].$$

De um modo geral obtém-se a fórmula de decomposição

$$41) \quad P_n(\cos \alpha) = P_n(\cos \theta_1) \cdot P_n(\cos \theta_2) \\ + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [R_{nm}(\theta_1, \lambda_1) \\ \cdot R_{nm}(\theta_2, \lambda_2) + S_{nm}(\theta_1, \lambda_1) \cdot S_{nm}(\theta_2, \lambda_2)].$$

1. 6. **Desenvolvimento de uma função em série de harmónicas esféricas de superfície; cálculo dos coeficientes e convergência da série**

Por *harmónica de superfície* de grau  $n$ , entende-se a função  $F_n(\theta, \lambda)$  definida por

$$42) \quad F_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (a_{nm} R_{nm} + b_{nm} S_{nm})$$

onde  $a_{nm}, b_{nm}$  são constantes; porque  $S_{n0}$  não existe temos que determinar  $(2n+1)$  constantes.

Designa-se por *harmónica sólida* à função estendida a todo o espaço  $V(r, \theta, \lambda)$  definida por

$$43) \quad V = r^n F_n(\theta, \lambda) \quad \text{ou} \quad V = r^{-(n+1)} F_n(\theta, \lambda)$$

e que são soluções da equação de Laplace.

Pretende-se desenvolver uma função  $F(\theta, \lambda)$  em série de harmónicas de superfície; para tal teremos de calcular os coeficientes  $a_{nm}, b_{nm}$  da expressão

$$44) \quad F(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\theta, \lambda) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_{nm} R_{nm} + b_{nm} S_{nm})$$

o que se faz atendendo às relações de ortogonalidade estabelecidas para as tesserais; assim

$$45.1) \quad a_{n0} = \frac{1}{2\pi G_0} \iint F(\theta, \lambda) \cdot P_n(\cos \theta) d\sigma$$

$$45.2) \quad a_{nm} = \frac{1}{\pi G_m} \iint F(\theta, \lambda) R_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma$$

$$45.3) \quad b_{nm} = \frac{1}{\pi G_m} \iint F(\theta, \lambda) S_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 45.2) \\ 45.3) \end{matrix}} \right\} m \neq 0.$$

Calculados os coeficientes ficamos a conhecer  $F_n(\theta, \lambda)$ ; todavia podíamos obter  $F_n(\theta, \lambda)$  a partir da fórmula

$$46) \quad F_n(\theta, \lambda) = \frac{1}{2\pi G_0} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{2\pi} F(\theta, \lambda) P_n(\cos \alpha) \sin \theta d\sigma.$$

Comparando as expressões 42) e 46) resulta que as situações são diferentes; com efeito dada uma certa função  $F(\theta, \lambda)$  vamos considerar o seu desenvolvimento em torno de um valor médio; fazemos as observações e deduzem-se os coeficientes  $a_{nm}, b_{nm}$  após o que substituímos no modelo criado obtendo-se novos valores para comparação; dos residuos resultantes surge a interpretação do modelo escolhido bem como uma melhor determinação dos coeficientes por técnicas apropriadas. Deverá notar-se que quanto mais pontos forem observados tanto melhor será a informação colhida.

Para além do que se acaba de dizer urge assegurar a convergência da série indicada em 44), sem o que não teria sentido o cálculo dos coeficientes.

Considere-se a soma

$$47) \quad \mathcal{F}_m(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^m F_n(\theta, \lambda).$$

O nosso problema consiste em demonstrar que

$$48) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}_m(\theta, \lambda) = F(\theta, \lambda).$$

Considere-se um sistema de coordenadas  $(\bar{\theta}, \bar{\lambda})$  com o eixo passando por  $P_1$ ; nestas condições

$$\mathcal{F}_m(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^m \frac{2n+1}{4\pi} \iint F(\theta, \lambda) P_n(\cos \alpha) \sin \theta d\sigma =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^m \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(\cos \alpha) dp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\bar{\theta}, \bar{\lambda}) d\bar{\lambda} \\
&= \sum_{n=0}^m \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (2n+1) P_n(\cos \alpha) G_0(p) dp \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (P'_{n+1} + P'_n) G_0(p) dp \\
&= G_0(+1) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (P_{n+1} + P_n) G'_0(p) dp \\
&= F(\theta, \lambda)|_{\alpha=0} + R_m.
\end{aligned}$$

Do resultado obtido em  $P_4$  é evidente a nossa tese.

Deve reparar-se que  $G_0(p)$  é precisamente

o valor médio de  $F(\theta, \lambda)$  sobre um círculo de centro em  $P_1$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- AFONSO, JOSÉ NUNO DO VALE MONTEIRO DE SOUSA, *Geodesia dinâmica. Determinação da figura da Terra por métodos gravimétricos* «Cadernos Técnicos e de Informação», Instituto Geográfico e Cadastral, Lisboa, **16**, 1968, 118 p.
- BYERLY, WILLIAM ELWOOD, *An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical, and ellipsoidal harmonics*. 1 vol., Boston, Ginn & Co., 1893, IX + 287 p.
- PEIXOTO, JOSÉ PINTO; et. al. *Harmonic analysis of the topography along parallels of the earth*. Journal of Geophysical Research, Baltimore, 69 (8), 1964, p. 1501-1505.
- SOARES, RUI JOÃO BAPTISTA, *Relações entre os coeficientes dos polinómios  $T_n(x)$  e  $P_n(x)$  e os coeficientes dos polinómios  $He_n(x)$ . Aplicação ao cálculo automático*. «Gaz. de Matemática», Lisboa, XXXIV-V (129-132), 1973-74, p. 17-20.



## A remark on groups without center

by José Morgado

Faculdade de Ciências, Universidade do Porto — Portugal

### Introduction

Let  $G$  be a multiplicative group and let  $e$  denote the neutral element of  $G$ . If the center  $Z$  of  $G$  is constituted only by the element  $e$ , then  $G$  is said to be a *group without center*.

The purpose of this note is to state the following

**THEOREM:** *If  $G$  is a group without center and the commutator subgroup  $G'$ , of  $G$ , is directly indecomposable, then  $G$  is directly indecomposable.*

We give two proofs of this Theorem.

For the first proof, we need some results on normal endomorphisms.

### 1 — Preliminary Lemmas

Let us recall that an endomorphism  $\alpha$  of  $G$  is said to be a *normal endomorphism* of  $G$ , if one has

$$(1) \quad \alpha(xy x^{-1}) = x \alpha(y) x^{-1}, \text{ for all } x, y \in G.$$

An endomorphism  $\alpha$  of  $G$  is called a *projector* of  $G$ , if  $\alpha$  is normal and *idempotent* (i. e.,  $\alpha^2 = \alpha$ ).

The group  $G$  is directly indecomposable, if and only if the projectors of  $G$  are exactly the identity endomorphism  $\varepsilon$  (defined by  $\varepsilon(x) = x$ , for every  $x \in G$ ) and the zero endomorphism  $\omega$  (defined by  $\omega(x) = e$ , for every  $x \in G$ ).

**LEMMA 1:** *Let  $G'$  be the commutator subgroup of  $G$ . If  $\alpha$  is a normal endomorphism of  $G$ , then the restriction of  $\alpha$  to  $G'$  is a projector of  $G'$ .*

**PROOF:** Indeed, let  $\gamma$  be the restriction of  $\alpha$  to  $G'$ .

It is clear that  $\gamma$  is an endomorphism of  $G'$ , for  $G'$  is a fully invariant subgroup of  $G$ .

Moreover the endomorphism  $\gamma$  of  $G'$  is obviously normal. Thus, in order to prove that  $\gamma$  is a projector of  $G'$ , it is sufficient to prove that

$$\gamma^2(a) = \gamma(a), \text{ for every } a \in G'.$$

Since every  $a \in G'$  is a product of commutators of  $G$ , it is clearly sufficient to prove that

$$\begin{aligned} \gamma^2(x^{-1}y^{-1}xy) &= \gamma(x^{-1}y^{-1}xy), \\ &\text{for all } x, y \in G. \end{aligned}$$

By (1), one has for all  $x, y \in G$ ,

$$\begin{aligned} \gamma^2(x^{-1}y^{-1}xy) &= \alpha^2(x^{-1}y^{-1}xy) = \\ &= \alpha(\alpha(x^{-1}y^{-1}x)\alpha(y)) = \\ &= \alpha(x^{-1}\alpha(y^{-1})x\alpha(y)) = \\ &= \alpha(x^{-1})\alpha(\alpha(y^{-1})x\alpha(y)) = \\ &= \alpha(x^{-1})\alpha(y^{-1})\alpha(x)\alpha(y) = \\ &= \alpha(x^{-1}y^{-1}xy) = \\ &= \gamma(x^{-1}y^{-1}xy), \end{aligned}$$

as wanted.

**LEMMA 2:** *Let  $\alpha$  and  $\beta$  be normal endomorphisms of  $G$  and let  $\gamma$  and  $\delta$  be, respectively, the restrictions of  $\alpha$  and  $\beta$  to  $G'$ . If one has*

$$\gamma(a) = \delta(a), \text{ for every } a \in G',$$

then the operator  $\alpha - \beta$  is a normal endomorphism of  $G$  and the subgroup  $\text{Im}(\alpha - \beta)$  is contained in the center  $Z$  of  $G$ .

PROOF: In fact, from

$$\begin{aligned}\alpha(x^{-1}y^{-1}xy) &= \gamma(x^{-1}y^{-1}xy) = \\ &= \delta(x^{-1}y^{-1}xy) = \beta(x^{-1}y^{-1}xy),\end{aligned}$$

for all  $x, y \in G$ , it follows, by the normality of  $\alpha$  and  $\beta$ ,

$$\begin{aligned}x^{-1}\alpha(y^{-1})x\alpha(y) &= x^{-1}\beta(y^{-1})x\beta(y), \\ \text{for all } x, y \in G.\end{aligned}$$

Hence,

$$(2) \quad \begin{aligned}x\alpha(y)\beta(y^{-1}) &= \alpha(y)\beta(y^{-1})x, \\ \text{for all } x, y \in G,\end{aligned}$$

that is to say,

$$x(\alpha - \beta)(y) = (\alpha - \beta)(y)x, \text{ for all } x, y \in G,$$

meaning that the set  $\text{Im}(\alpha - \beta)$  is contained in the center  $Z$  of  $G$ .

Now, let us see that the operator  $\alpha - \beta$  is an endomorphism of  $G$  (and so  $\text{Im}(\alpha - \beta)$  is a subgroup of  $G$ ).

One has clearly, for all  $x, y \in G$ ,

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)(xy) &= \alpha(xy)\beta(xy)^{-1} = \\ &= \alpha(x)\alpha(y)\beta(y^{-1})\beta(x^{-1}).\end{aligned}$$

On the other hand,

$$(\alpha - \beta)(x)(\alpha - \beta)(y) = \alpha(x)\beta(x^{-1})\alpha(y)\beta(y^{-1}).$$

Thus, one must prove that

$$\begin{aligned}\alpha(y)\beta(y^{-1})\beta(x^{-1}) &= \beta(x^{-1})\alpha(y)\beta(y^{-1}), \\ \text{for all } x, y \in G\end{aligned}$$

and this is obviously true, in view of (2).

Lastly, for all  $x, y \in G$ , one has, by the normality of  $\alpha$  and  $\beta$ ,

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)(xyx^{-1}) &= \alpha(xyx^{-1})\beta(xyx^{-1})^{-1} = \\ &= x\alpha(y)x^{-1}x\beta(y^{-1})x^{-1} = \\ &= x(\alpha - \beta)(y)x^{-1},\end{aligned}$$

and from here one concludes that the endomorphism  $\alpha - \beta$  is normal, which completes the proof of Lemma 2.

## 2 — First proof of Theorem above

Let us suppose that the commutator subgroup  $G'$ , of  $G$ , is directly indecomposable and let  $\alpha$  be a normal endomorphism of  $G$ .

Then, by Lemma 1, one has necessarily either

$$\alpha(x^{-1}y^{-1}xy) = x^{-1}y^{-1}xy, \text{ for all } x, y \in G$$

or

$$\alpha(x^{-1}y^{-1}xy) = e, \text{ for all } x, y \in G.$$

This means that, if  $\alpha$  is a normal endomorphism of  $G$ , then one has

$$\text{either } \alpha' = \epsilon' \text{ or } \alpha' = \omega',$$

where  $\alpha'$ ,  $\epsilon'$ ,  $\omega'$  denote, respectively, the restrictions of  $\alpha$ ,  $\epsilon$ ,  $\omega$  to  $G'$ .

By Lemma 2, one has clearly

$$\text{either } \text{Im}(\epsilon - \alpha) \subseteq \{e\} \text{ or } \text{Im}(\alpha - \omega) \subseteq \{e\},$$

in view of the fact that  $G$  is a group without center.

Thus, one has obviously

$$\begin{aligned}\text{either } \alpha(x) &= x \text{ for every } x \in G \\ \text{or } \alpha(x) &= e \text{ for every } x \in G,\end{aligned}$$

meaning that

$$\text{either } \alpha = \epsilon \text{ or } \alpha = \omega.$$

Consequently,  $G$  has only the trivial projectors,  $\varepsilon$  and  $\omega$ , and so  $G$  is directly indecomposable, as it was to be shown.

### 3 — Another proof

Let us suppose that  $G$  is the direct product of the (normal) subgroups  $A$  and  $B$ ,  $G = A \times B$ .

One must prove that

$$\text{either } A = e \text{ or } B = \{e\}.$$

First, we are going to show that, if  $G = A \times B$ , then one has  $G' = A' \times B'$ ,  $G'$ ,  $A'$  and  $B'$  being, respectively, the commutator subgroups of  $G$ ,  $A$  and  $B$ .

In fact, let  $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$  be a commutator of  $G$ .

Since  $g = ab$  and  $h = cd$ , with  $a, c \in A$  and  $b, d \in B$  and, moreover, each element of  $A$  commutes with each element of  $B$ , one has

$$\begin{aligned} [g, h] &= b^{-1}a^{-1}d^{-1}c^{-1}abcd = \\ &= a^{-1}b^{-1}d^{-1}c^{-1}acbd = \\ &= a^{-1}c^{-1}acb^{-1}d^{-1}bd = \\ &= [a, c][b, d]. \end{aligned}$$

From this it follows that  $G' \subseteq A'B'$  and, since  $A'B' \subseteq G'$ , one concludes that  $G' = A'B'$ .

Now,  $A'$  and  $B'$  are normal subgroups of  $G'$ ; in fact, if  $g \in G'$  and  $[a, c] \in A'$ ,

with  $a, c \in A$ , then

$$g[a, c]g^{-1} = [gag^{-1}, gcg^{-1}] \in A',$$

because  $gag^{-1} \in A$  and  $gcg^{-1} \in A$ , proving that  $A'$  is a normal subgroup of  $G'$ . Analogously for  $B'$ .

In addition, one has  $A' \cap B' \subseteq A \cap B = \{e\}$ .

Consequently,  $G' = A' \times B'$ , as desired.

Now, since  $G'$  is directly indecomposable, one has

$$\text{either } A' = \{e\} \text{ or } B' = \{e\},$$

that is to say,

either  $A$  is an Abelian subgroup of  $G$  or  $B$  is an Abelian subgroup of  $G$ .

From this it follows that

$$\text{either } A \subseteq Z \text{ or } B \subseteq Z$$

and, since  $Z = \{e\}$ , one concludes that

$$\text{either } A = \{e\} \text{ or } B = \{e\},$$

as required.

### BIBLIOGRAPHY

- [1] JOSÉ MORGADO, *A note on the normal endomorphisms of a group*, «Gazeta de Matemática», 109-112 (1968), pp. 6-8.
- [2] A. ALMEIDA COSTA, *Cours d'Algèbre Générale*, vol. 1, Lisboa, 1964.



## Sobre sistemas- $m$ e análogos em semi-anéis

por A. J. Antunes Monteiro

Lisboa

### 1. Sistemas- $m$ e sistemas- $p$

Tome-se um conjunto  $X$ , parte de um semi-anel  $\mathfrak{S}$  e ponha-se, para cada par  $(a, b) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ ,  $\Omega_{a,b}(X) = \{x \in X \mid axb \in X\}$ . Então, suposto  $\emptyset \neq M \subseteq \mathfrak{S}$ ,  $M$  será um sistema- $m$  se e só se, tomados  $a, b \in M$ , for sempre  $\Omega_{a,b}(M) \neq \emptyset$ ; e será  $P \neq \emptyset$  um sistema- $p$  se e só se, tomado  $a \in P$ , for  $\Omega_{a,a}(P) \neq \emptyset$ .

**PROPOSIÇÃO 1:** *Se  $X \subseteq \mathfrak{S}$  é um subsemigrupo de  $(\mathfrak{S}, +)$ , o mesmo acontece a  $\Omega_{a,b}(X)$ , quaisquer que sejam  $a, b \in \mathfrak{S}$ . Com efeito, tomados  $x, y \in \Omega_{a,b}(X)$ , de  $axb, ayb \in X$  conclui-se que  $a(x+y)b = axb + ayb \in X$  e, portanto, que  $x+y \in \Omega_{a,b}(X)$ .*

**PROPOSIÇÃO 2:** *Suposto  $M$  um sistema- $m$ ,  $\Omega_{a,b}(M)$  é um sistema- $m$ , quaisquer que sejam  $a, b \in \mathfrak{S}$ . Analogamente, se  $P$  é um sistema- $p$ ,  $\Omega_{a,a}(P)$  é um sistema- $p$ . Demonstraremos apenas a primeira afirmação. Sejam  $x, y \in \Omega_{a,b}(M)$ . De  $axb, ayb \in B$ , conclui-se que, para algum  $z \in \mathfrak{S}$ , se tem  $(axb)z(ayb) \in M$ . Mas  $(axb)z(ayb) = a(xbz a y)b$ , pelo que  $x(bz a)y \in \Omega_{a,b}(M)$ , o que demonstra a afirmação. [Nota: a proposição é válida, mesmo que o sistema- $m$  ou o sistema- $p$  se suponham vazios, porque então  $\Omega_{a,b}(\emptyset) = \Omega_{a,a}(\emptyset) = \emptyset$ ].*

**OBSERVAÇÕES:** *i) Se  $\mathfrak{a} \neq \emptyset$  é um ideal de  $\mathfrak{S}$ , e se  $a \in \mathfrak{a}$  (ou se  $b \in \mathfrak{a}$ ), tem-se  $\Omega_{a,b}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{S}$ .*

*ii) O ideal  $\mathfrak{a}$  é semi-primo se e só se  $a \in \mathfrak{a}$  equivale a  $\Omega_{a,a}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{S}$ . De modo*

análogo,  $\mathfrak{a}$  é primo se e só se  $\Omega_{a,b}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{S}$  equivale a  $a \in \mathfrak{a}$  ou  $b \in \mathfrak{a}$ . A este respeito, veja-se [1].

*iii) Se  $X$  é um subsemigrupo de  $(\mathfrak{S}, \cdot)$ , vale a inclusão:  $X \subseteq \bigcap_{a,b \in X} \Omega_{a,b}(X)$ .*

*iv) Se designarmos por  $X_3$  o conjunto dos produtos de três elementos de  $X$ , vemos que a inclusão  $X_3 \subseteq X$  é equivalente à inclusão  $X \subseteq \bigcap_{a,b \in X} \Omega_{a,b}(X)$ .*

### 2. Sistemas- $r$ e sistemas- $l$

Diremos  $A \subseteq \mathfrak{S}$  um sistema- $r$ , quando, tomado  $a \in A$ , existir  $x \in \mathfrak{S}$  tal que  $ax \in A$ . E diremos  $B \subseteq \mathfrak{S}$  um sistema- $l$ , quando, tomado  $b \in B$ , existir  $x \in \mathfrak{S}$  tal que  $xb \in B$ . O conjunto vazio é sistema- $r$  e sistema- $l$ .

Dados agora  $a, b \in \mathfrak{S}$ , definem-se  $R_a(X)$  e  $L_b(X)$ , para cada  $X \subseteq \mathfrak{S}$ , pelas igualdades seguintes:

$$R_a(X) = \{x \in \mathfrak{S} \mid ax \in X\},$$

$$L_b(X) = \{x \in \mathfrak{S} \mid xb \in X\}.$$

Então, supondo  $\emptyset \neq A \subseteq \mathfrak{S}$ ,  $A$  será um sistema- $r$ , se e só se, para cada  $a \in A$ , for  $R_a(A) \neq \emptyset$ ; e será  $B \neq \emptyset$ , ( $B \subseteq \mathfrak{S}$ ), um sistema- $l$ , se e só se, para cada  $b \in B$ , for  $L_b(B) \neq \emptyset$ .

**OBSERVAÇÕES:** *i) Se  $\mathfrak{r} \neq \emptyset$  é um ideal direito de  $\mathfrak{S}$ , tem-se, para qualquer  $a \in \mathfrak{r}$ ,*

$R_a(\mathfrak{r}) = \mathfrak{S}$ ; e, se  $\mathfrak{e} \neq \emptyset$  é um ideal esquerdo, para qualquer  $b \in \mathfrak{e}$ , é  $L_b(\mathfrak{e}) = \mathfrak{S}$ .

ii) Todo o sistema- $p$  e, portanto, todo o sistema- $m$ , é sistema- $r$  e sistema- $l$ .

iii) Afirmar que  $A$  é fechado para o produto é equivalente a escrever  $A \subseteq \bigcap_{a \in A} R_a(A)$ .

PROPOSIÇÃO 3: Se  $X \subseteq \mathfrak{S}$  é um subsemi-grupo de  $(\mathfrak{S}, +)$ , o mesmo sucede com  $R_a(X)$  e  $L_b(X)$ , quaisquer que sejam  $a, b \in \mathfrak{S}$ .

Valem, também, as seguintes proposições, de demonstração imediata:

PROPOSIÇÃO 4: Supostos  $A$  um sistema- $r$  e  $B$  um sistema- $l$ ,  $R_a(A)$  e  $L_b(B)$  são, respectivamente, sistema- $r$  e sistema- $l$ , quaisquer que sejam  $a, b \in \mathfrak{S}$ .

PROPOSIÇÃO 5: Todo o conjunto unido de sistemas- $r$  (resp.: sistemas- $l$ ) é um sistema- $r$  (resp.: sistema- $l$ ).

PROPOSIÇÃO 6: Suponham-se  $\mathfrak{a}$  um ideal e  $A$  um sistema- $r$ , tais que  $\mathfrak{a} \cap A = \emptyset$ . Então, entre os ideais de  $\mathfrak{S}$  que contêm  $\mathfrak{a}$  e são disjuntos de  $A$ , existe um ideal maximal  $\mathfrak{e}$ , e entre os sistemas- $r$  que contêm  $A$  e são disjuntos de  $\mathfrak{a}$ , existe um sistema- $r$  maximal. A demonstração reduz-se a aplicações simples do lema de Zorn.

### 3. Ideais fortes

É sabido, da teoria geral dos semi-anéis (veja-se [1]), que, suposto  $\mathfrak{x}$  um ideal semi-primário, é  $a \in \mathfrak{x}$  se e só se  $a \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{x}$ ; e que, se  $L$  for o radical de Levitzki de um semi-anel,  $a \in L$  é equivalente a  $a \mathfrak{S} \subseteq L$ .

Para uma sistematização de tais situações, introduziremos as definições seguintes:

Um ideal  $\mathfrak{a}$  do semi-anel  $\mathfrak{S}$  chamar-se-á ideal-forte- $d$  (resp.: forte- $e$ ) quando  $a \in \mathfrak{a}$  for

equivalente a  $a \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$  (resp.:  $\mathfrak{S} a \subseteq \mathfrak{a}$ ); a dir-se-á forte- $b$  quando  $a \in \mathfrak{a}$  for equivalente a  $a \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{S} a \subseteq \mathfrak{a}$ ; finalmente,  $\mathfrak{a}$  será um ideal forte quando for simultaneamente forte- $d$  e forte- $e$ .

OBSERVAÇÃO: As definições acabadas de dar transpõem-se para anéis, com o seu conteúdo habitual de ideal.

PROPOSIÇÃO 7: O ideal  $\mathfrak{a}$  é um ideal forte se e só se  $a \in \mathfrak{a}$  for equivalente a  $\mathfrak{S} a \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$ . De facto, se  $\mathfrak{a}$  é um ideal forte, de  $\mathfrak{S} a \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$  conclui-se que, para qualquer  $s \in \mathfrak{S}$ , é  $s a \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$ , donde, sucessivamente,  $s a \in \mathfrak{a}$ , para qualquer  $s$  pertencente a  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{S} a \subseteq \mathfrak{a}$ ,  $a \in \mathfrak{a}$ . Reciprocamente, se  $\mathfrak{a}$  for tal que de  $\mathfrak{S} a \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$  se conclua  $a \in \mathfrak{a}$ , de  $\mathfrak{S} a \subseteq \mathfrak{a}$  ou  $a \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$  conclui-se que  $\mathfrak{S} a \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$  e, portanto, que  $a \in \mathfrak{a}$ .

COROLÁRIO: Todo o ideal primo é um ideal forte. A este propósito, veja-se, de novo, [1].

OBSERVAÇÕES: i) Além dos exemplos que precedem as definições anteriores, devemos notar que, num semi-anel com identidade, todo o ideal é forte- $d$ , forte- $e$ , forte e forte- $b$ .

ii) Seguindo as notações de [1], vemos que o ideal  $\mathfrak{a}$  é forte- $d$  se e só se  $(\mathfrak{a} : \mathfrak{S})_a = \mathfrak{a}$ .

iii) Todo o ideal que seja intersecção de ideais fortes- $d$  é ainda forte- $d$ . O mesmo para fortes- $e$ , etc.

iv) Se  $A$  é um sistema- $r$  e  $\mathfrak{a}$  um ideal tal que  $A \cap \mathfrak{a} = \emptyset$ , temos  $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{S})_a \subseteq C(A)$ , em que  $C(A)$  designa o conjunto complementar de  $A$  em  $\mathfrak{S}$ .

v) No que se segue, consideraremos apenas ideais-fortes- $d$ . Os outros casos podem estudar-se paralelamente.

PROPOSIÇÃO 8: Se  $\mathfrak{a}$  é um ideal de  $\mathfrak{S}$ ,  $C(\mathfrak{a})$  é um sistema- $r$  quando  $\mathfrak{a}$  for um ideal

forte-d. E também: o complementar de um sistema- $r$ , suposto um ideal, é um ideal forte d.

**PROPOSIÇÃO 9:** *Seja  $\varphi: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$  um epimorfismo de semi-anéis e  $\mathfrak{a}'$  um ideal forte-d de  $\mathfrak{S}'$ . Então,  $\varphi^{-1}(\mathfrak{a}')$  é um ideal forte-d de  $\mathfrak{S}$ . Com efeito, de  $\mathfrak{a} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{a}')$  conclui-se que  $\varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}' = \varphi(\mathfrak{a}) \varphi(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{a}'$ . Mas então, por hipótese,  $\varphi(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{a}'$  e  $\mathfrak{a} \in \varphi^{-1}(\mathfrak{a}')$ .*

**PROPOSIÇÃO 10:** *Sejam  $\mathfrak{S}$  e  $\mathfrak{S}'$  anéis e  $\varphi: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$  um epimorfismo de anéis. Há uma correspondência bijectiva entre os ideais fortes-d de  $\mathfrak{S}$  que contêm  $\text{Ker } \varphi$  e os ideais fortes-d de  $\mathfrak{S}'$ . Na verdade, se  $\mathfrak{a}$  for um ideal forte-d de  $\mathfrak{S}$ , que contenha  $\text{Ker } \varphi$ , supondo  $\mathfrak{a}' = \varphi(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{S}'$  tal que  $\mathfrak{a}' \subseteq \varphi(\mathfrak{a})$ , vemos que, para todo o  $s \in \mathfrak{S}$ , se tem  $\varphi(as) \in \varphi(\mathfrak{a})$ ; donde, uma vez que  $\mathfrak{a} \supseteq \text{Ker } \varphi$ ,  $as \in \mathfrak{a}$ , qualquer que seja  $s \in \mathfrak{S}$ . Mas isto significa que  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$  e, por hipótese, que  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{a}$ . Finalmente,  $\mathfrak{a}' \in \varphi(\mathfrak{a})$ . A demonstração da parte inversa é análoga à da proposição anterior.*

**PROPOSIÇÃO 11:** *Seja  $\mathfrak{a}$  um ideal do anel  $\mathfrak{A}$ . Designando por  $\bar{0}$  o elemento zero de  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$ , podemos afirmar que  $\mathfrak{a}$  é ideal forte-d de  $\mathfrak{A}$  se e só se  $\left( (\bar{0}) : \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}} \right)_{\mathfrak{a}} = (\bar{0})$ . Esta afirmação é consequência imediata das definições dadas.*

**PROPOSIÇÃO 12:** *Se  $\mathfrak{A}$  é um anel tal que  $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}$ , o ideal  $((0) : \mathfrak{A})_{\mathfrak{a}}$  é um ideal forte-d. Suponha-se  $\mathfrak{a} \subseteq ((0) : \mathfrak{A})_{\mathfrak{a}}$ . Então,  $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a} \mathfrak{A} = (0)$ , consequentemente  $\mathfrak{a} \in ((0) : \mathfrak{A})_{\mathfrak{a}}$ .*

**COROLÁRIO:** *Se  $\mathfrak{A}$  é um anel tal que  $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}$ , temos  $\left( (\bar{0}) : \frac{\mathfrak{A}}{((0) : \mathfrak{A})_{\mathfrak{a}}} \right)_{\mathfrak{a}} = (\bar{0})$ .*

Trata-se de uma consequência imediata das proposições 11 e 12, acima.

#### 4. Semi-anéis- $\rho_{\mathfrak{a}}$ e semi-anéis- $\rho'_{\mathfrak{a}}$

O semi-anel  $\mathfrak{S}$  diz-se um *semi-anel- $\rho_{\mathfrak{a}}$*  quando verifica a *condição- $\rho_{\mathfrak{a}}$* , que se enuncia da seguinte forma: *suposto  $\emptyset \neq A$  um sistema- $r$ , toda a família de ideais disjuntos de  $A$  contém um ideal maximal.*

**PROPOSIÇÃO 13:** *Um semi-anel- $\rho_{\mathfrak{a}}$  verifica a condição de cadeia ascendente para os subideais de um ideal forte-d diferente de  $\mathfrak{S}$ . Tomem-se um ideal forte-d  $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$  e uma cadeia  $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \dots$  de subideais de  $\mathfrak{a}$ . Uma vez que  $\emptyset \neq A = C(\mathfrak{a})$  é um sistema- $r$  e que os  $\mathfrak{a}_i$  são disjuntos de  $A$ , existe um  $\mathfrak{a}_k$  maximal.*

O semi-anel  $\mathfrak{S}$  diz-se um *semi-anel- $\rho'_{\mathfrak{a}}$*  quando verifica a *condição- $\rho'_{\mathfrak{a}}$* , cujo enunciado é o que se segue: *suposto  $A \neq \mathfrak{S}$  um sistema- $r$ , toda a família de ideais disjuntos de  $A$  contém um ideal minimal.*

**PROPOSIÇÃO 14:** *Um semi-anel- $\rho'_{\mathfrak{a}}$  verifica a condição de cadeia descendente para os subideais de um ideal forte-d não vazio. Tomem-se um ideal forte-d  $\mathfrak{a} \neq \emptyset$ , e uma cadeia  $\mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{a}_n \supseteq \dots$ , de subideais de  $\mathfrak{a}$ . Uma vez que  $\mathfrak{S} \neq A = C(\mathfrak{a})$  é um sistema- $r$  e que os  $\mathfrak{a}_i$  são disjuntos de  $A$ , existe um  $\mathfrak{a}_k$  minimal.*

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] ALMEIDA COSTA, A., *Cours d'Algèbre Générale*, vol. III, (Lisboa), 1974.  
 [2] ———, *Cours d'Algèbre Générale*, vol. II, (Lisboa), 1968.



## Dual de espaços $L^p$ ( $p > 1$ ) de funções vectoriais(\*)

por Neyde F. Martins Ribeiro

Instituto de Matemática; Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

### Introdução

O objectivo deste trabalho é apresentar uma exposição didática da caracterização do dual de  $L^p(0, T; X)$ ,  $p > 1$  onde  $X$  é um espaço de Banach. Ele foi motivado pelo uso frequente que se faz de tal resultado em equações diferenciais parciais, no caso particular em que o espaço de Banach  $X$  é um espaço de Sobolev. De modo mais preciso, demonstra-se que se o dual  $X^*$  de  $X$  gozar da propriedade de que toda função de variação limitada  $f: X^* \rightarrow \mathbf{C}$  possui uma derivada quase sempre, então o dual de  $L^p(0, T; X)$  será  $L^q(0, T; X^*)$  sendo  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Tal resultado é devido a S. BOCHNER e A. E. TAYLOR [3].

Esta condição imposta ao dual é satisfeita, por exemplo, pelos espaços  $H^m$  de Sobolev conforme § 4.

A apresentação que fazemos aqui é auto-suficiente, sendo acessível a leitores com conhecimentos elementares da geometria dos espaços normados. Ela foi dividida em três parágrafos, dos quais o primeiro baseia-se essencialmente no trabalho de S. BOCHNER e A. E. TAYLOR [3].

Esta redacção contém parte das exposições que fizemos no Seminário de Equações Diferenciais Parciais, que vem se realizando no Instituto de Matemática da UFRJ, sob a

orientação de L. A. MEDEIROS, G. PERLA MENZALA e P. HUMBERTO RIVERA.

Queremos agradecer ao Prof. L. A. MEDEIROS pela sugestão deste trabalho e pela orientação necessária a sua realização, e aos Profs. G. PERLA MENZALA e P. HUMBERTO RIVERA pelas valiosas sugestões durante a execução do mesmo.

### 1 — Preliminares

No que segue  $X$  é um espaço de Banach tal que  $X^*$  satisfaz à condição: toda função de variação limitada tem uma derivada quase sempre. A definição de «variação limitada» é dada abaixo.

Estudaremos o dual de espaços  $L^p$  ( $p > 1$ ) quando os elementos são funções definidas em um intervalo  $[0, T]$  da recta  $\mathbf{R}$ , com valores em  $X$ . Para  $u: [0, T] \rightarrow X$  e  $f: X^* \rightarrow \mathbf{C}$  escreveremos também  $\langle f, u(t) \rangle$  em lugar de  $f(u(t))$ .

Faremos uso das seguintes notações:

$V^p(0, T; X)$  será a classe das funções  $u$  com valores em  $X$ , definidas quase sempre em  $[0, T]$  e tais que as somas

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\|u(t_\nu) - u(t_{\nu-1})\|^p}{|t_\nu - t_{\nu-1}|^{p-1}}$$

são limitadas para todas as partições  $\{t_\nu\}$ ,  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ . O supremo destas somas é anotado por  $V^p(u)$ .

(\*) Este trabalho foi financiado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FNDCT) e CEPG-UFRJ.

Definimos

$$\|u\|_{V^p(0, T; X)} = \|u(0)\| + \{V^p(u)\}^{1/p}.$$

Com esta norma  $V^p(0, T; X)$  é um espaço de Banach. Funções deste espaço são ditas de variação  $p$  limitadas e no caso de  $p = 1$  dizemos simplesmente «funções de variação limitada».

$V_0^p(0, T; X)$  será a subclasse de  $V^p(0, T; X)$  para a qual os elementos  $u$  tem a propriedade  $u(0) = 0$ .

$L^p(0, T; X)$  será a classe das funções  $u$  Bochner-integráveis tais que a função:  $s \rightarrow \|u(s)\|$  pertence a  $L^p(0, T; \mathbf{R})$ .

$C(0, T; X)$  será a classe das funções de  $[0, T]$  em  $X$  que são contínuas, normado por  $\|u\| = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|$ .

Com estas definições, prova-se que  $C(0, T; X)$  é denso em  $L^p(0, T; X)$  na norma de  $L^p(0, T; X)$  que é dada por  $\|u\|_{L^p(0, T; X)}^p = \int_0^T \|u(s)\|^p ds$ .

## 2. Uma primeira caracterização de $(L^p(0, T; X))^*$

Para cada  $x \in X$  e cada real  $s$ ,  $0 \leq s \leq T$ , definimos:

$$\text{se } s > 0, u_{s,x}: [0, T] \rightarrow X \\ t \rightarrow \begin{cases} x, & 0 \leq t \leq s \\ 0, & s < t \leq T \end{cases}$$

$$\text{e } u_{0,x}: [0, T] \rightarrow X \\ t \rightarrow 0.$$

É imediato que, para cada  $s \in [0, T]$  e para cada  $x \in X$ ,  $u_{s,x} \in L^p(0, T; X)$ .

Seja  $U \in (L^p(0, T; X))^*$ .

Consideremos para cada  $s \in [0, T]$ , a seguinte função:

$$\Phi(s): X \rightarrow \mathbf{C} \\ x \rightarrow U(u_{s,x}).$$

Mostraremos que  $\Phi \in V_0^q(0, T; X^*)$ , o que nos permitira definir:

$$S: (L^p(0, T; X))^* \rightarrow V_0^q(0, T; X^*) \\ U \rightarrow \Phi$$

i)  $\Phi(s): X \rightarrow \mathbf{C}$  é linear.

De facto, se  $s = 0 \Rightarrow \Phi(s) \equiv 0$  logo linear. Se  $s \neq 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$   $u_{s, x_{x_1+x_2}}(t) = \alpha u_{s, x_1}(t) + u_{s, x_2}(t)$  isto é  $u_{s, x_{x_1+x_2}} = \alpha u_{s, x_1} + u_{s, x_2}$  para todo  $x_1, x_2 \in X$  e  $\alpha \in \mathbf{C}$ , o que implica  $\Phi(s)[\alpha x_1 + x_2] = U(u_{s, \alpha x_1 + x_2}) = \alpha U(u_{s, x_1}) + U(u_{s, x_2}) = \alpha \Phi(s)x_1 + \Phi(s)x_2$ .

ii)  $\Phi(s) \in X^* \quad \forall s \in [0, T]$ .

De facto,  $\Phi(0) \equiv 0$  logo  $\Phi(0) \in X^*$ . Se  $s \neq 0$ , como

$$\|u_{s,x}\|_{L^p(0, T; X)}^p = \int_0^T \|u_{s,x}(t)\|^p dt = \\ = \int_0^s \|u_{s,x}(t)\|^p dt = \|x\|^p s$$

isto é  $\|u_{s,x}\|_{L^p(0, T; X)} = s^{1/p} \|x\|$ , teremos que  $|\Phi(s)x| = |U(u_{s,x})| \leq \|U\| \|u_{s,x}\|_{L^p(0, T; X)} = \|U\| s^{1/p} \|x\|$  logo  $\Phi(s) \in X^*$ .

iii)  $\Phi \in V_0^q(0, T; X^*)$  e

$$V^q(\Phi) \leq \|U\|_{(L^p(0, T; X))^*}^q.$$

Para a prova de tal afirmação precisamos mostrar que

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\|^q}{|t_\nu - t_{\nu-1}|^{q-1}} \leq \|U\|^q,$$

para toda partição  $\{t_\nu\}_{\nu=1}^n$  de  $[0, T]$ .

Consideremos o seguinte raciocínio: seja  $\varepsilon > 0$  e  $b_1, \dots, b_n$  números reais não negativos. Fixemos  $\nu$ . Se  $b_\nu > 0$  então como  $\varepsilon_{1nb_\nu} > 0$  e  $\|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| = \sup_{\|x\|=1} |\Phi(t_\nu)x_\nu - \Phi(t_{\nu-1})x_\nu|$  existe  $\bar{x}_\nu \in X$  com  $\|\bar{x}_\nu\| = 1$  tal que  $|\Phi(t_\nu)\bar{x}_\nu - \Phi(t_{\nu-1})\bar{x}_\nu| > \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| - \varepsilon_{1nb_\nu} = \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| \|\bar{x}_\nu\| - \varepsilon_{1nb_\nu}$ . Multiplicando por  $b_\nu$ , vem

$$\begin{aligned} & |\Phi(t_\nu)b_\nu\bar{x}_\nu - \Phi(t_{\nu-1})b_\nu\bar{x}_\nu| > \\ & > \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| \|b_\nu\bar{x}_\nu\| - \varepsilon_{1n} \end{aligned}$$

e fazendo  $x_\nu = b_\nu\bar{x}_\nu$  temos

$$\begin{aligned} & |\Phi(t_\nu)x_\nu - \Phi(t_{\nu-1})x_\nu| > \\ & > \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| \|x_\nu\| - \varepsilon_{1n}, \quad \|x_\nu\| = b_\nu. \end{aligned}$$

Se  $b_\nu = 0$  tomamos  $x_\nu = 0$ , logo podemos afirmar que  $\forall \varepsilon > 0$  e números reais não negativos  $b_1, \dots, b_n$ , existe  $x_\nu \in X$  com  $\|x_\nu\| = b_\nu$  tal que  $|\Phi(t_\nu)x_\nu - \Phi(t_{\nu-1})x_\nu| > \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| b_\nu - \varepsilon_{1n}$  (1).

Por outro lado,

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^n |\Phi(t_\nu)x_\nu - \Phi(t_{\nu-1})x_\nu| = \\ & = \sum_{\nu=1}^n |U(u_{t_\nu, x_\nu}) - U(u_{t_{\nu-1}, x_\nu})| \leq \\ & \leq \|U\| \sum_{\nu=1}^n \|u_{t_\nu, x_\nu} - u_{t_{\nu-1}, x_\nu}\| = \\ & = \|U\| \sum_{\nu=1}^n \cdot \\ & \cdot \left( \int_0^T \|u_{t_\nu, x_\nu}(t) - u_{t_{\nu-1}, x_\nu}(t)\|^p dt \right)^{1/p} = \\ & = \|U\| \sum_{\nu=1}^n \left( \int_0^T \|x_\nu \chi_{(t_{\nu-1}, t_\nu)}(t)\|^p dt \right)^{1/p} = \\ & = \|U\| \left( \sum_{\nu=1}^n \|x_\nu\|^p (t_\nu - t_{\nu-1}) \right)^{1/p} \quad (2). \end{aligned}$$

Assim, de (1)

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^n |\Phi(t_\nu)x_\nu - \Phi(t_{\nu-1})x_\nu| > \varepsilon + \\ & + \sum_{\nu=1}^n \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| b_\nu, \end{aligned}$$

que com (2) acarreta

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^n \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| b_\nu < \varepsilon + \\ & + \|U\| \left( \sum_{\nu=1}^n b_\nu^p (t_\nu - t_{\nu-1}) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Assim se  $b_\nu = \left( \frac{\|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\|}{|t_\nu - t_{\nu-1}|} \right)^{q/p}$ , fazendo  $\alpha_\nu = \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\|$  e  $\Delta_\nu = |t_\nu - t_{\nu-1}|$  então  $b_\nu = \left( \frac{\alpha_\nu}{\Delta_\nu} \right)^{q/p}$  e a desigualdade anterior torna-se:

$$\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu b_\nu = \sum_{\nu=1}^n \frac{\alpha_\nu^{q/p}}{\Delta_\nu^{q/p}} \leq \|U\| \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{\alpha_\nu^q}{\Delta_\nu^{q-1}} \right)^{1/p}$$

isto é,

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\alpha_\nu^q}{\Delta_\nu^{q-1}} \leq \|U\| \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{\alpha_\nu^q}{\Delta_\nu^{q-1}} \right)^{1/p}$$

que elevando à potência  $q$ , torna-se

$$\left( \sum_{\nu=1}^n \frac{\alpha_\nu^q}{\Delta_\nu^{q-1}} \right)^q \leq \|U\|^q \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{\alpha_\nu^q}{\Delta_\nu^{q-1}} \right)^{q/p}$$

e como  $q - q/p = 1$  obtemos

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\alpha_\nu^q}{\Delta_\nu^{q-1}} \leq \|U\|^q,$$

isto é,

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\|^q}{|t_\nu - t_{\nu-1}|^{q-1}} \leq \|U\|^q,$$

para toda participação  $\{t_\nu\}_{1 \leq \nu \leq n}$  de  $[0, T]$ .  
Daí  $\Phi \in V_0^q(0, T, X^*)$  com  $V^q(\Phi) \leq \|U\|^q$   
logo a função

$$S: (L^p(0, T; X))^* \rightarrow V_0^q(0, T; X^*) \\ U \rightarrow \Phi$$

está bem definida, sendo imediato verificar que é linear.

Mostraremos que  $S$  é sobrejectiva.

Seja  $\Phi \in V_0^q(0, T; X^*)$ . Desejamos exibir  $U \in (L^p(0, T; X))^*$  tal que  $S(U) = \Phi$ , isto é, tal que se  $s \in [0, T]$  então  $\forall x \in X$ ,  $S(U)(s)x = \Phi(s)x$  ou  $U(u_{s,x}) = \Phi(s)x$ .

Antes porém, precisamos definir um certo tipo de integral, baseado na noção de RIEMANN-STIELTJES.

Se  $u \in C(0, T; X)$  e  $\Phi \in V^q(0, T; X^*)$ , correspondendo a uma partição  $D_n: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  e pontos  $\tau_\nu, t_{\nu-1} \leq \tau_\nu \leq t_\nu$ , formamos a soma

$$\delta(D_n) = \sum_{\nu=1}^n [\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})] u(\tau_\nu),$$

que é um elemento de  $\mathbf{C}$ . Seja

$$|D_n| = \max_{1 \leq \nu \leq n} |t_\nu - t_{\nu-1}|.$$

A prova de que, para uma sequência de partições  $(D_i)$  com  $|D_i| \rightarrow 0$ , as somas  $\delta(D_i)$  tem um limite em  $\mathbf{C}$  que independe da sequência  $(D_i)$ , é feita de maneira usual.

De facto,

$$|\delta(D_n)| = \left| \sum_{\nu=0}^n [\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})] u(\tau_\nu) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^n \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| \|u(\tau_\nu)\| = \\ = \sum_{\nu=1}^n \frac{\|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\|}{|t_\nu - t_{\nu-1}|^{\frac{1}{p} = \frac{q-1}{q}}} |t_\nu - t_{\nu-1}|^{1/p} \|u(\tau_\nu)\| \leq \\ \leq \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{\|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\|^q}{|t_\nu - t_{\nu-1}|^{q-1}} \right)^{1/q} \cdot \\ \cdot \left( \sum_{\nu=1}^n \|u(\tau_\nu)\|^p |t_\nu - t_{\nu-1}| \right)^{1/p}.$$

Mas  $\Phi \in V^q(0, T; X^*)$  e  $t \rightarrow \|u(t)\|$  é contínua então passando limite quando  $n \rightarrow \infty, |D_n| \rightarrow 0$  teremos

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n \frac{\|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\|^q}{|t_\nu - t_{\nu-1}|^{q-1}} = V^q(\Phi)$$

e

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n \|u(\tau_\nu)\|^p |t_\nu - t_{\nu-1}| = \int_0^T \|u(t)\|^p dt,$$

logo a série  $\sum_{\nu=0}^n |\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})| u(\tau_\nu)$  é absolutamente convergente e daí convergente e anotamos seu limite por  $\int_0^T u(t) d\Phi(t)$ .  
Pela desigualdade estabelecida, teremos que:

$$\left| \int_0^T u(t) d\Phi(t) \right| \leq \{V^q(\Phi)\}^{1/q}$$

$$\left( \int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p} = \{V_q(\Phi)\}^{1/q} \|u\|_{L^p(0, T; X)}.$$

É fácil ver que

$$U: C(0, T; X) \rightarrow \mathbf{C}$$

$$u \rightarrow \int_0^T u(t) d\Phi(t)$$

é um funcional linear sobre  $C(0, T; X)$  de norma  $\{V^q(\Phi)\}^{1/q}$  e, como  $C(0, T; X)$  é denso em  $L^p(0, T; X)$  com a norma de  $L^p(0, T; X)$ , ele admite uma única extensão a um funcional linear sobre  $L^p(0, T; X)$  com a mesma norma, que continuaremos anotando por  $U$ .

Definimos então para  $u \in L^p(0, T; X)$ ,  $\int_0^T u(t) d\Phi(t)$  por esta extensão. Assim está bem definido

$$U: L^p(0, T; X) \rightarrow \mathbf{C}$$

$$u \rightarrow \int_0^T u(t) d\Phi(t)$$

e

$$|U(u)| = \left| \int_0^T u(t) d\Phi(t) \right| \leq$$

$$\{V^q(\Phi)\}^{1/q} \|u\|_{L^p(0, T; X)}.$$

Provaremos agora que  $S(U) = \Phi$ , isto é,  $\forall s \in [0, T] U(u_{s,x}) = \Phi(s)x$ ,  $\forall x \in X$ .

De facto, se  $s=0 \Rightarrow u_{0,x} \equiv 0$  logo  $U(u_{0,x}) = 0 = \Phi(0)x$  já que  $\Phi(0) \equiv 0$  pois  $\Phi \in V_0^q(0, T; X^*)$ .

Se  $s > 0$ , definimos para  $x \in X$ ,

$$u_n(t) = \begin{cases} x, & 0 \leq t \leq s \\ -n(t - s - \frac{1}{n})x, & s \leq t \leq s - \frac{1}{n} \\ 0, & s + \frac{1}{n} \leq t \leq T. \end{cases}$$

Então  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \in C(0, T; X)$  e

$$\int_0^T \|u_n(t) - u_{s,x}(t)\|^p dt = \int_s^{s+\frac{1}{n}}$$

$$\left\| -n \left( t - s - \frac{1}{n} \right) x \right\|^p dt \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Assim  $(u_n)$  converge em  $L^p(0, T; X)$  para  $u_{s,x}$  e como  $U \in (L^p(0, T; X))^*$  temos que  $U(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U(u_{s,x})$ . Mas  $U(u_n)$  também converge para  $\Phi(s)x$ , conforme provamos abaixo, logo  $U(u_{s,x}) = \Phi(s)x$  isto é  $S(U) = \Phi$ .

De facto,

$$\begin{aligned} U(u_n) &= \int_0^T u_n(t) d\Phi(t) = \int_0^s x d\Phi(t) + \\ &+ \int_s^{s+\frac{1}{n}} \left[ -n \left( t - s - \frac{1}{n} \right) x \right] d\Phi(t) + \\ &+ \int_{s+\frac{1}{n}}^T 0 d\Phi(t). \end{aligned}$$

A 3.ª parcela é zero e

$$\begin{aligned} \int_0^s x d\Phi(t) &= \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n [\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})] x = \\ &= \lim_{|D| \rightarrow 0} [\Phi(t_1)x - \Phi(0)x + \Phi(t_2)x - \dots - \\ &- \Phi(t_{n-1})x + \Phi(s)x] = \Phi(s)x \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned} |U(u_n) - \Phi(s)x| &= \\ \left| \int_s^{s+\frac{1}{n}} \left[ n \left( s + \frac{1}{n} - t \right) x \right] d\Phi(t) \right| &\leq \\ &\leq \lim_{|D_k| \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^k \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| \cdot \\ &\cdot \left\| n \left( s + \frac{1}{n} - \gamma_\nu \right) x \right\| = \\ &= \|x\| \lim_{|D_k| \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^k \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| \\ &\left| n \left( s + \frac{1}{n} - \gamma_\nu \right) \right|, \end{aligned}$$

onde

$$s \leq \gamma_\nu \leq s + \frac{1}{n}$$

o que implica

$$0 \leq n \left( s + \frac{1}{n} - \gamma_\nu \right) \leq 1$$

e daí

$$\begin{aligned} & \left| \int_s^{s + \frac{1}{n}} \left[ n \left( s + \frac{1}{n} - t \right) x \right] \right| \leq \\ & \leq \|x\| \lim_{|D_k| \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^k \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| \leq \\ & \leq \|x\| \left\{ \text{variação de } \Phi \text{ sobre } \left( s, s + \frac{1}{n} \right) \right\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ou seja  $\lim_{n \rightarrow \infty} |U(u_n) - \Phi(s)x| = 0$ .

Provaremos agora que  $S$  preserva a norma, isto é

$$\|S(U)\|_{V_0^q(0, T; X^*)} = \|U\|_{(L^p(0, T; X))^*}.$$

Ora, se  $U \in (L^p(0, T; X))^*$  conforme já vimos

$$\begin{aligned} \|S(U)\|_{V_0^q(0, T; X^*)} &= \|\Phi\|_{V_0^q(0, T; X^*)} = \\ &= \|\Phi(0)\|_{X^*} + \{V^q(\Phi)\}^{1/q} \leq \|U\|_{(L^p(0, T; X))^*}. \end{aligned}$$

Resta-nos mostrar que

$$\|U\|_{(L^p(0, T; X))^*} \leq \|S(U)\|_{V_0^q(0, T; X^*)}.$$

Seja  $u_n: [0, T] \rightarrow X$  função simples que toma valor  $x_\nu$  para  $t_{\nu-1} < t \leq t_\nu$ .

Mas

$$\sum_{\nu=1}^n [u_{t_\nu, x_\nu}(t) - u_{t_{\nu-1}, x_\nu}(t)] = x_j, \quad t \in (t_{j-1}, t_j]$$

e daí

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \sum_{\nu=1}^n [u_{t_\nu, x_\nu}(t) - u_{t_{\nu-1}, x_\nu}(t)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt = \sum_{\nu=1}^n \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \|x_\nu\|^p dt = \\ &= \sum_{\nu=1}^n \|x_\nu\|^p |t_\nu - t_{\nu-1}| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |U(u_n)| &= \left| \sum_{\nu=1}^n U(u_{t_\nu, x_\nu}) - U(u_{t_{\nu-1}, x_\nu}) \right| = \\ &= \left| \sum_{\nu=1}^n \Phi(t_\nu)x_\nu - \Phi(t_{\nu-1})x_\nu \right| \leq \\ &\leq \sum_{\nu=1}^n \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| \|x_\nu\| \leq \\ &\leq \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{\|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\|^q}{|t_\nu - t_{\nu-1}|^{q-1}} \right)^{1/q} \\ &\quad \left( \sum_{\nu=1}^n \|x_\nu\|^p |t_\nu - t_{\nu-1}| \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \{V^q(\Phi)\}^{1/q} \|u_n\|_{L^p(0, T; X)}. \end{aligned}$$

Assim, se  $u \in L^p(0, T; X)$  e  $u_n$  é escolhida tal que  $u_n \rightarrow u$  na norma de  $L^p(0, T; X)$  teremos que

$$|U(u)| \leq \{V^q(\Phi)\}^{1/q} \|u\|_{L^p(0, T; X)}$$

e daí

$$\begin{aligned} \|U\|_{(L^p(0, T; X))^*} &\leq \{V^q(\Phi)\}^{1/q} = \\ &= \|S(U)\|_{V_0^q(0, T; X^*)}. \end{aligned}$$

Concluimos pois que

$$S: (L^p(0, T; X))^* \rightarrow V_0^q(0, T; X^*)$$

$$U \rightarrow \Phi$$

é linear, sobre e preserva a norma, o que implica  $(L^p(0, T; X))^*$  equivalente a  $V_0^q(0, T; X^*)$  sempre que  $X$  é um espaço de Banach e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $1 < p < \infty$ .

### 3 — O espaço dual de $L^p(0, T; X)$

Seja  $Y$  um espaço de Banach tal que toda função de variação limitada tenha uma derivada quase sempre.

Mostraremos que a função

$$L: V_0^p(0, T; Y) \rightarrow L^p(0, T; Y)$$

$$u \rightarrow u'.$$

- (1) Está bem definida
- (2) Preserva a norma
- (3) É linear
- (4) É sobrejectiva

(1)  $L$  está bem definida.

Seja  $u \in V_0^p(0, T; Y)$ . Mostraremos que  $t \rightarrow u'(t)$  é fortemente mensurável e  $t \rightarrow \|u'(t)\|$  pertence a  $L^p(0, T; \mathbf{R})$ .

Consideremos uma sequência de conjuntos finitos de pontos no intervalo  $[0, T]$ , o  $m$ -ésimo conjunto sendo  $t_{m,1}, t_{m,2}, \dots, t_{m,n}$  e tais que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{\nu} (t_{m,\nu+1} - t_{m,\nu}) = 0$  [por exemplo dividimos o intervalo em  $2^m$  partes iguais].

Definimos

$$u_m(t) = \frac{u(t_{m,\nu+1}) - u(t_{m,\nu})}{t_{m,\nu+1} - t_{m,\nu}}$$

em cada intervalo  $t_{m,\nu} \leq t < t_{m,\nu+1}$ .

Se  $t$  não é um dos pontos  $t_{m,\nu}$ ,  $t_{m,\nu} < t < t_{m,\nu+1}$  podemos escrever:

$$\begin{aligned} u_m(t) &= \frac{u(t_{m,\nu+1}) - u(t)}{t_{m,\nu+1} - t} \cdot \frac{t_{m,\nu+1} - t}{t_{m,\nu+1} - t_{m,\nu}} + \\ &+ \frac{u(t_{m,\nu}) - u(t)}{t_{m,\nu} - t} \cdot \frac{t - t_{m,\nu}}{t_{m,\nu+1} - t_{m,\nu}} = \\ &= \{u'(t) + o_1(t)\} \cdot \frac{t_{m,\nu+1} - t}{t_{m,\nu+1} - t_{m,\nu}} + \\ &+ \{u'(t) + o_2(t)\} \cdot \frac{t - t_{m,\nu}}{t_{m,\nu+1} - t_{m,\nu}} = \\ &= u'(t) + o_3(t) \end{aligned}$$

onde  $\|o_3(t)\| \leq \|o_1(t)\| + \|o_2(t)\|$ ,  $\|o_1(t)\|$  e  $\|o_2(t)\|$  tendem a zero quando  $t_{m,\nu+1} -$

$-t_{m,\nu} \rightarrow 0$ . Assim,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m(t) - u'(t)\| = 0$  quase sempre isto é, existe uma sequência de funções simples convergindo fortemente para  $u'$  quase sempre, logo  $u'$  é fortemente mensurável.

Para cada  $m$ ,  $u_m \in L^p(0, T; Y)$  logo  $t \rightarrow \|u_m(t)\|$  pertence a  $L^p(0, T, \mathbf{R})$  e

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u_m(t)\|^p dt &= \sum_{\nu=1}^{n_p} \frac{\|u(t_{m,\nu+1}) - u(t_{m,\nu})\|^p}{|t_{m,\nu+1} - t_{m,\nu}|^{p-1}} \leq \\ &\leq \sup_P \sum_{\nu=1}^{n_p} \frac{\|u(t_{\nu}) - u(t_{\nu-1})\|^p}{|t_{\nu} - t_{\nu-1}|^{p-1}} = V^p(u). \end{aligned}$$

Pelo Lema de Fatou para funções reais, vem que  $t \rightarrow \|u'(t)\|$  é integrável e

$$\int_0^T \|u'(t)\|^p dt \leq V^p(u)$$

isto é,

$$\|u'\|_{L^p(0, T; Y)}^p \leq V^p(u),$$

assim  $L$  está bem definida e

$$\|L(u)\|_{L^p(0, T; Y)} = \|u'\|_{L^p(0, T; Y)} \leq \|u\|_{V^p(0, T; Y)}.$$

(2)  $L$  preserva a norma.

Pela desigualdade anterior, resta-nos mostrar que  $\|u\|_{V^p(0, T; Y)} \leq \|u'\|_{L^p(0, T; Y)}$ .

Iniciaremos definindo

$$v: [0, T] \rightarrow Y$$

$$t \rightarrow u(0) + \int_0^t u'(s) ds$$

e mostrando que  $v(t) = u(t) \forall t \in [0, T]$ , para  $u' \in L^p(0, T; Y)$ .

Seja  $f \in Y^*$  qualquer. Então:

$$[0, T] \rightarrow \mathbf{R}$$

$$t \rightarrow \langle f, u(t) \rangle$$

é quase sempre derivável, isto é, existe  $\frac{d}{dt} \langle f, u(t) \rangle$  quase sempre. De facto, para os  $t$ 's tais que existe  $u'(t)$ , temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\langle f, \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle = \\ = \left\langle f, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle = \langle f, u'(t) \rangle$$

isto é,

$$\frac{d}{dt} \langle f, u(t) \rangle = \left\langle f, \frac{d}{dt} u(t) \right\rangle.$$

Notemos que:  $t \rightarrow \langle f, u(t) \rangle$  é absolutamente contínua, pois se  $\varepsilon > 0$  e  $I_n = ]\alpha_n, \beta_n[$  é uma sequência de intervalos dois a dois disjuntos, definindo  $\delta = \left( \frac{\varepsilon}{\|f\| (V^p(u))^{1/p}} \right)^q$  teremos que:

$$\begin{aligned} \Sigma | \langle f, u(\beta_n) \rangle - \langle f, u(\alpha_n) \rangle | &\leq \\ &\leq \|f\| \Sigma \|u(\beta_n) - u(\alpha_n)\| \leq \\ &\leq \|f\| \left( \Sigma \frac{\|u(\beta_n) - u(\alpha_n)\|^p}{|\beta_n - \alpha_n|^{p-1}} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

$$(\Sigma |\beta_n - \alpha_n|)^{1/q} < \varepsilon \text{ se } \Sigma |\beta_n - \alpha_n| < \delta.$$

Dai

$$\begin{aligned} \langle f, u(t) \rangle &= \langle f, u(0) \rangle + \\ &+ \int_0^t \frac{d}{dt} \langle f, u(s) \rangle ds = \\ &= \langle f, u(0) \rangle + \int_0^t \left\langle f, \frac{d}{dt} u(s) \right\rangle ds = \\ &= \langle f, v(t) \rangle. \end{aligned}$$

Assim,  $\forall f \in y^*$  e  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\langle f, u(t) \rangle = \langle f, v(t) \rangle$$

logo  $u = v$ , isto é:

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds = \int_0^t u'(s) ds.$$

Seja agora  $P$  uma partição qualquer do intervalo  $[0, T]$ . Então

$$\begin{aligned} \|u(t_{\nu+1}) - u(t_\nu)\| &= \\ &= \left\| \int_0^{t_{\nu+1}} u'(s) ds - \int_0^{t_\nu} u'(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \int_0^{t_{\nu+1}} \|u'(s)\| ds \leq \\ &\leq \left( \int_0^{t_{\nu+1}} \|u'(s)\|^p ds \right)^{1/p} \cdot \left( \int_0^{t_{\nu+1}} ds \right)^{1 - \frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

logo

$$\frac{\|u(t_{\nu+1}) - u(t_\nu)\|}{|t_{\nu+1} - t_\nu|^{\frac{p-1}{p}}} \leq \left( \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} \|u'(s)\|^p ds \right)^{1/p}.$$

Dai para toda participação  $P$  de  $[0, T]$

$$\sum_{\nu=1}^{n_p} \frac{\|u(t_{\nu+1}) - u(t_\nu)\|^p}{|t_{\nu+1} - t_\nu|^{p-1}} \leq \int_0^T \|u'(s)\|^p ds,$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{V^p(0, T; Y)} &= \{V^p(u)\}^{1/p} \leq \\ &\leq \|u'\|_{L^p(0, T; Y)} = \|L(u)\|_{L^p(0, T; Y)} \end{aligned}$$

(3)  $L$  é linear.

Omitiremos tal prova por ser demais conhecida.

(4)  $L$  é sobrejectiva.

Seja  $u \in L^p(0, T; Y)$ . Devemos mostrar que existe  $v \in V^p(0, T; Y)$  tal que  $L(v) = u = v' = u$ .

Definimos

$$v(t) = \int_0^t u(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Como  $u \in L^p(0, T; Y)$  temos, por definição, que existe uma seqüência  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  de funções simples tal que  $(\varphi_n)$  converge fortemente para  $u$  quase sempre e tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_n(s) - u(s)\| ds = 0.$$

Mas

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{h} |v(t+h) - v(t)| - u(t) \right\| = \\ & = \left\| \frac{1}{h} \left[ \int_0^{t+h} u(s) ds - \int_0^t u(s) ds \right] - u(t) \right\| \leq \\ & \leq \left\| \frac{1}{h} \left[ \int_0^{t+h} (u(s) - \varphi_n(s)) ds - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_0^t (u(s) - \varphi_n(s)) ds \right] \right\| + \\ & + \left\| \frac{1}{h} \left[ \int_0^{t+h} \varphi_n(s) ds - \int_0^t \varphi_n(s) ds \right] - \right. \\ & \quad \left. - \varphi_n(t) \right\| + \|\varphi_n(t) - u(t)\| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|u(s) - \varphi_n(s)\| ds \right| + \\ & + \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)\| ds \right| + \\ & \quad \|\varphi_n(t) - u(t)\|. \end{aligned}$$

Ora,  $(u - \varphi_n) \in L(0, T; Y) \forall n$ , logo a função  $s \rightarrow \|u(s) - \varphi_n(s)\|$  pertence a  $L(0, T; \mathbb{R})$  e daí

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi_n(s) - u(s)\| ds \right\| &= \\ &= \|\varphi_n(t) - u(t)\| \end{aligned}$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)\| ds \right\| = 0$$

quase sempre em  $[0, S]$ .

Agora,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{h} [v(t+h) - v(t)] - u(t) \right\| \leq \\ & \leq 2 \|u(t) - \varphi_n(t)\| + o(h) \end{aligned}$$

onde  $o(h) \rightarrow 0$  e como o membro esquerdo independente de  $n$  e pelo facto de  $\varphi_n \rightarrow u$  fortemente temos que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$  tal que se  $n \geq n_\varepsilon$  então  $\|u'(t) - \varphi_n(t)\| < \varepsilon$ , para quase todo  $t$ .

Assim, tomando o limite quando  $h \rightarrow 0$ , vem que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} [v(t+h) - v(t)] - u(t) \right\| = 0$$

para quase toda  $t \in [0, T]$  e pela continuidade da norma temos que existe  $v'(t)$  e  $v'(t) = u(t)$  para quase todo  $t \in [0, T]$ .

Seja agora  $P$  uma partição qualquer do intervalo  $[0, T]$ .

Então

$$\begin{aligned} \|v(t_{\nu+1}) - v(t_\nu)\| &= \left\| \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} u(s) ds \right\| \leq \\ & \leq \left( \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} \|u(s)\|^p ds \right)^{1/p} \\ & \left( \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} ds \right)^{1-\frac{1}{p}} = |t_{\nu+1} - t_\nu|^{1-\frac{1}{p}} \\ & \cdot \left( \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} \|u'(s)\|^p ds \right). \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{\|v(t_{\nu+1}) - v(t_\nu)\|}{|t_{\nu+1} - t_\nu|^{\frac{p-1}{p}}} \leq \left( \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} \|u(s)\|^p ds \right)^{1/p}$$

logo

$$\sum_{\nu=1}^{np} \frac{\|v(t_{\nu+1}) - v(t_\nu)\|^p}{|t_{\nu+1} - t_\nu|^{p-1}} \leq \int_0^T \|u(s)\|^p ds$$

e como  $P$  é qualquer partição de  $[0, T]$  temos

$$\begin{aligned} & \sup \sum_{\nu=1}^{n_P} \frac{\|v(t_{\nu+1}) - v(t_{\nu})\|^p}{|t_{\nu+1} - t_{\nu}|^{p-1}} \leq \\ & \leq \int_0^T \|u(s)\|^p ds = \|u\|_{L^p(0, T; Y)}^p \end{aligned}$$

portanto  $v \in V_0^p(0, T; Y)$  pois  $v(0) = 0$  e  $L(v) = u$ .

Por (1), (2), (3) e (4) temos que  $V_0^p(0, T; Y)$  é equivalente a  $L^p(0, T; Y)$ .

Assim se  $X$  é um espaço de Banach tal que  $X^*$  satisfaz à condição de que toda função de variação limitada tenha uma derivada quase sempre, teremos que

$$(L^p(0, T; X))^* = L^q(0, T; X^*).$$

OBSERVAÇÃO: Seja  $H$  um espaço de Hilbert com o produto interno anotado por  $\langle | \rangle_H$ . Então a função:

$$\langle | \rangle : L^2(0, T; H) \times L^2(0, T; H) \rightarrow \mathbf{C}$$

$$(u, v) \rightarrow \int_0^T \langle u(t) | v(t) \rangle_H dt$$

define um produto interno em  $L^2(0, T; H)$  que nos dá

$$\|u\|^2 = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt.$$

Assim  $L^2(0, T; H)$  é um espaço de Hilbert, logo reflexivo. Segundo [3], Teorema 7.1, o dual de  $H, H^*$  satisfaz a condição exigida no §1. Daí, teremos por exemplo para os espaços  $H_0^m$  de Sobolev que

$$(L^p(0, T; H_0^m))^* = L^q(0, T; H^{-m}).$$

#### REFERÊNCIAS

- [1] E. C. TITCHMARSH — *The Theory of Functions* — Oxford, University Press, 1939.
- [2] HAIM BREZIS — *Operateurs Maximaux Monotones — et Semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [3] S. BOCHNER ann A. E. TAYLOR — *Annals of Mathematics* — 2, vol. 39 (1938) pág. 913-922.

## Do conceito de fórmula ao de estrutura de informação

por F. Teixeira de Queiroz

(Instituto Gulbenkian de Ciência)

**Introdução** — Um matemático, ligado a problemas de informática, é normalmente solicitado para tratar problemas de dois tipos diferentes: ou lhe é pedido para efectuar um estudo dum problema concreto, bem definido, ou o que é pretendido é um utensílio para abordar uma classe de problemas, todos da mesma natureza, mas podendo apresentar uma certa diversidade.

No primeiro caso, concluído o estudo, a entidade que solicita o trabalho poderá eventualmente desejar o tratamento de um ou outro ponto de pormenor, mas, dum modo geral, não tenciona recorrer novamente ao matemático. Ao contrário desta situação, o segundo tipo de problemas que referimos, pressupõe a utilização prolongada dum ordenador. Em tais condições torna-se fundamental garantir a total independência do utilizador relativamente ao matemático que concebe o programa, mesmo que esse utilizador desconheça completamente qualquer linguagem de programação. O papel do matemático será então o de conceber e garantir a manutenção dum sistema susceptível de tratar a família de problemas que se deseja resolver.

Desta forma, a constituição dum sistema implica necessariamente a existência de duas entidades que se completam [1]:

- a) Uma entidade que cria o sistema e assegura a sua manutenção.
- b) Um utilizador ou grupo de utilizadores.

Para estes é fundamental que essa utilização seja o mais transparente possível e que, simultaneamente, seja suficientemente bem adaptada à resolução dos problemas que deva tratar. Um dos modos de alcançar este duplo objectivo consiste na organização e montagem duma linguagem não processual. Vejamos o que se entende por tal:

O matemático, ao redigir um programa, utiliza usualmente sequências de instruções pre-construídas, e já testadas, que mantém em biblioteca. Essas sequências estão organizadas em unidades mais ou menos autónomas, os *processos*, e executam algoritmos que realizam tarefas específicas. As linguagens de programação têm meios que permitem activar esses processos e fornecerem-lhes os dados que eles deverão trabalhar. Para a utilização de tais processos torna-se necessário o conhecimento quer da linguagem em que os mesmos estão redigidos quer do modo de os chamar.

Dizemos que uma linguagem que permite a chamada de processos é processual.

A fim de evitar ao utilizador a tarefa de estudar uma linguagem deste tipo, tem o matemático a possibilidade de construir uma linguagem não processual. Esta, apoiar-se á num programa redigido numa linguagem de programação e será constituída por um pequeno número de vocábulos chave que poderão ser escolhidos de combinação entre o matemático e o utilizador. Tais vocábulos, ao serem usados como dados, permitirão a

realização de tarefas complexas podendo conter, inclusivamente, a chamada de processos. Eles serão assim usados pelo utilizador numa forma indirecta, libertando-o completamente do conhecimento da linguagem em que foram redigidos. (Esta será a metalinguagem da linguagem criada).

A criação duma linguagem não processual põe em primeiro lugar a necessidade duma análise dos objectos que terão de ser manipulados para que possa ser escolhida uma representação conveniente dos mesmos. Determinada a natureza desses objectos, ou seja a *estrutura da informação* contida neles, importa seguidamente, redigir os processos input-output, isto é, as partes do programa que convertem os elementos que o utilizador deseja tratar, na representação que os mesmos deverão ter quando arquivados pelo ordenador.

Seguidamente haverá que estudar os algoritmos que manipulam essas estruturas.

Pensamos que o exemplo que damos seguidamente poderá ter interesse, já que no caso tratado, o potencial utilizador a que nos referimos anteriormente, é o matemático. Com efeito, a linguagem não processual que foi montada destina-se à manipulação de fórmulas, tendo sido usada como metalinguagem o ALGOL [2, 3].

1 — No seu trabalho, o matemático utiliza expressões analíticas tais como

$$a) (a - 1) \cdot \cos x + (a + 1) \sin(\pi/2 - x)$$

$$b) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$c) \sin^4 x - \sin 4 \cdot x$$

$$d) \frac{d}{dt} \left( \varphi(t) \cdot \frac{dy}{dt} \right) + \psi(t) \cdot y$$

etc., que transforma desenvolvendo, simplificando, ou substituindo variáveis por ex-

pressões. Cada uma destas expressões fornece um conjunto de informações que permite a sua utilização, de acordo com regras bem definidas, mas de um modo heurístico.

O objectivo da construção dum manipulador de fórmulas consiste na mecanização de toda essa actividade com vista à sua execução por um ordenador.

De acordo com o programa assinalado no início, teremos como primeira tarefa, que determinar a estrutura de informação contida nas fórmulas referidas ou noutras do mesmo tipo.

Uma primeira análise mostra-nos que elas contêm sinais de operação, cada um dos quais liga entre si dois operandos para dar origem a uma operação algébrica. O resultado desta poderá por sua vez constituir um operando de nova operação. De tal facto resulta um caracter recursivo para a linguagem utilizada pelo matemático e a necessidade de associar a ela estruturas de informação da mesma natureza. Dado que cada sinal operatório liga dois operandos, torna-se possível representar uma fórmula por meio duma arborescência binária. A cada nodo desta estará ligado um sinal operatório e a cada ramo um operando.

Para vermos melhor a conexão existente entre fórmulas e arborescências binárias, consideremos a seguinte definição recursiva destas últimas:

Por arborescência binária entende-se um objecto que ou se reduz a um único elemento (folha) ou é o enlace de duas arborescências binárias. O ponto que faz o enlace dessas arborescências é um nodo a que se dá o nome de raiz.

Aparentemente esta definição é uma tautologia. Para vermos que não o é, deverá introduzir-se o conceito de altura da arborescência: dizemos que uma arborescência é de altura um se se reduzir a um único ponto, e dizemos que é de altura não superior a  $i$  se for o resultado do enlace de duas

arborescências de alturas não superiores a  $i - 1$ .

Vemos que a definição de arborescência que demos é na realidade uma definição por indução finita.

A associação de arborescências binárias a expressões analíticas leva-nos a considerar diversos tipos de nodos. Pelo que já dissemos, vemos que a cada sinal operativo deveremos associar um tipo de nodo. Isso leva-nos a considerar cinco tipos diferentes de nodos (Representando-se a potenciação por  $X \uparrow N$ ). A existência de funções elementares leva-nos a introduzir um novo tipo de nodo reduzindo-se um dos ramos da arborescência à sigla da função. Finalmente, a operação de derivação dará origem a outro tipo de nodo, contendo um dos ramos apenas a variável em ordem à qual se deriva.

Num formalismo estricto, a existência de diversos tipos de nodos levar-nos-ia a considerar, associado a cada nodo, mais um ramo contendo como única informação o tipo desse nodo. Pensamos porém que tal prática complicaria inutilmente a descrição que estamos a fazer. Em vez disso admitiremos que é possível aplicar a qualquer arborescência o selector NODO ( ) que determina o objecto elementar que está contido na sua raiz. Com dois outros selectores (DIR ( ), ESQ ( )) poderemos localizar os nodos consecutivos, da arborescência (direito e esquerdo) caso esta não se reduza a um ponto.

Com estes tres selectores é possível criar um processo, chamemos-lhe ANALISAR, que determina a natureza da raiz e localiza os dois nodos consecutivos de qualquer arborescência. Terá um papel inverso de um outro, a que darei o nome de COLECTOR DE ENLACE, que permite enlaçar duas arborescências a partir dum nodo. Estes dois processos constituem o mecanismo fundamental de qualquer sistema que tenha que lidar com arborescências binárias. Eles permitirão não só analisar como também criar

novas arborescências, de acordo com a natureza da raiz.

Um exemplo típico de aplicação destes processos trata-se da maneira de organizar formas de percorrer a arborescência. Entendemos por tal a determinação escalonada de toda a informação contida nela.

No algoritmo que damos em seguida, os pontos terminais são assinalados pelo anulamento do seu ramo esquerdo, estando a informação contida no nodo e no seu ramo direito. A possibilidade de editar essa informação está contida no processo INFORMACAO. Quanto ao processo EDITAR edita apenas o tipo da raiz.

O algoritmo que está redigido em ALGOI, e utiliza a natureza recursiva do conceito de arborescência será

```
«PROCEDURE» PERCORRER (ARB);
«VALUE» ARB; «INTINGER» ARB;
«BEGIN» «INTEGER» NODO, DIR, ESQ;
ANALISAR (ARB, NODO, DIR, ESQ);
«IF» ESQ = 0 «THEN»
INFORMACAO (NODO, DIR) «ELSE»
«BEGIN» EDITAR (NODO);
    PERCORRER (ESQ);
    PERCORRER (DIR); «END»
«END» PERCORRER;
```

Obtemos processos análogos a este se intercalarmos a edição do nodo entre o percurso do ramo direito e o do ramo esquerdo ou se collocarmos essa edição posteriormente ao percurso dos dois ramos.

Estando a arborescência associada a uma fórmula, o primeiro tipo de percurso origina a representação da fórmula em notação polaca, o segundo tipo gera uma notação sensivelmente análoga à usual e, finalmente, o terceiro método dá origem à representação da fórmula em cadeia polaca inversa.

No caso do percurso ser feito com a edição do nodo colocada antes do percurso dos dois

ramos da arborescência dizemos que é feito em pré-ordem. Quando a mesma edição é colocada entre o percurso dos dois ramos da arborescência damos o nome de percurso em pós-ordem. (Isso é devido à importância que quase sempre tem o ramo esquerdo da arborescência. Assim no algoritmo que damos, é aí que está a indicação de se ter obtido um ponto terminal). Também se usa neste caso, por vezes, o nome de percurso simétrico. Finalmente, quando a edição do nodo se coloca no final do percurso este recebe o nome de percurso em ordem final.

Qualquer que seja a ordem pela qual o percurso é feito, obter-se-á sempre uma lista de símbolos. Será uma imagem da arborescência binária.

Na figura representamos a arborescência que corresponde à expressão

$$(a \cdot x + b)^2 - 3 \cdot (x + 1)$$

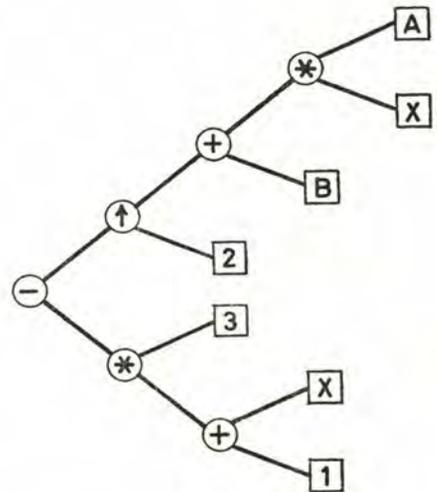
bem assim como a cadeia de símbolos que resulta do seu percurso segundo as ordens definidas. Vemos que, realmente, os percursos em pré-ordem e em ordem final geram respectivamente uma cadeia polaca e uma cadeia polaca inversa.

Pelo que acabamos de dizer, construir linguagens que manipulam fórmulas, implica criar um conjunto de algoritmos que operam sobre arborescências binárias e ainda algoritmos que convertam fórmulas em arborescências e arborescências em fórmulas.

2 — A nosso ver, o exemplo que demos, ilustra bastante bem a necessidade de determinar a estrutura que suporta um determinado tipo de informação, sempre que se torne necessário um tratamento eficiente da mesma ou sempre que se tenha que lidar com objectos de natureza complexa.

Um outro aspecto que o exemplo dado pode também mostrar é a possibilidade de usar representações distintas para a estrutura

da informação e para a sua representação interna num ordenador. Alguns manipuladores de fórmulas representam-nas por meio de cadeias polacas, as quais na realidade são cadeias de símbolos (listas).



EXPRESSÃO A PERCORRER

$$(A * X + B) \uparrow 2 - 3 * (X + 1)$$

EM PRÉ-ORDEM (notação polaca)

$$- \uparrow + * A X B 2 * 3 + X 1$$

EM ORDEM SIMÉTRICA

$$A * X + B \uparrow 2 - 3 * X + 1$$

EM ORD. FINAL (notação polaca inversa)

$$A X * B + 2 \uparrow 3 X 1 + * -$$

Pensamos ter mostrado a necessidade duma classificação e do estudo sistemático dos diferentes tipos de estrutura que poderão aparecer. Numa tal classificação o ponto importante é analisar as interdependências existentes entre os diversos elementos de cada objecto da família a estudar, por forma a verificar se existem hierarquias, priori-

dade, referências cruzadas, etc. Importa seguidamente determinar a classificação dos diferentes tipos de objectos da forma mais «pobre» possível, isto é, classificar os diversos objectos no menor número de famílias por forma a permitir o seu tratamento eficiente em ordenador.

Exemplifiquemos:

Uma árvore geneológica dá-nos um exemplo dum tipo de hierarquia muito comum em estruturas.

A notação de BACKUS, usada por exemplo, para descrever a linguagem ALGOL, apoia-se na propriedade de qualquer expressão admissível da linguagem ser quer um elemento simples quer o enlace de duas expressões admissíveis [4].

A língua portuguesa fornece nos um bom exemplo sobre prioridades: as palavras, que são listas de letras, ordenam-se no dicionário por ordem lexicográfica de forma a permitir a fácil localização dum vocábulo. Cada palavra fica classificada pela sua primeira letra o que origina a criação de vinte e quatro classes. Porém, para um tratamento eficiente em ordenador, será possivelmente preferível classificar os vocábulos pela sua letra final pois isso determina um menor número de classes. Além disso a sua parte terminal poderá dar imediatamente informações sobre a natureza do vocábulo com que se lida.

3 — Certamente que não nos é possível esgotar os exemplos que apontam para uma individualização do conceito de estrutura de informação e para a necessidade do seu estudo [5, 6, 7, 8].

A construção duma linguagem que opera sobre uma dada família de objectos põe, tal como acontece com as linguagens naturais, um certo número de problemas de semiótica. Esta divide-se usualmente em sintaxe, semântica e pragmática.

A descrição formal duma linguagem, usando por exemplo a notação de BACKUS, permite resolver duma forma clara o problema da sintaxe. Por meio dela poderemos saber se uma instrução foi redigida com uma forma correcta ou não.

São os problemas de semântica e de pragmática que poderão criar dificuldades entre o criador duma linguagem e o utente da mesma.

O valor semântico dos vocábulos, isto é, o significado das palavras no contexto da frase, terá de ser caracterizado duma forma não ambígua de maneira ao utilizador e ao construtor usarem de maneira idêntica as palavras chave que caracterizam a linguagem. A forma mais cómoda de caracterizar o significado dos vocábulos é por meio dum manual de utilização da linguagem. Parece-nos que as tentativas de formalização da semântica, por muitos méritos que tenham, não são de molde a facilitarem a sua utilização prática. Veja-se, por exemplo, o cálculo  $\lambda$ .

Não desejamos terminar este artigo sem chamar a atenção do leitor que por ventura se meta a construir uma linguagem, para os problemas que envolvem o outro aspecto da semiótica: a pragmática.

A pragmática estuda as relações duma linguagem com o seu utilizador. Ora enquanto o construtor duma linguagem e o seu utilizador têm que ter visões idênticas no que diz respeito à sintaxe e à semântica, já o mesmo não se pode dizer no respeitante à pragmática. Enquanto o primeiro pensa em termos de instruções e de chamadas a processos usando uma linguagem de programação (Portanto em termos duma metalinguagem), o último considera-a em termos de utilização. A coordenação das duas perspectivas é fundamental para que a linguagem possa ser eficaz.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] DENIS, J. B., *The Design and Constructions of Software Systems*, in *Advanced Course on Software Engineering*. Springer.
- [2] RIET, R. P. VAN, *Formula Manipulation in ALGOL 60*, *Mathematical Centre Tracts*, Amsterdam
- [3] QUEIROZ, F. T., *Manual para Manipulação de Fórmulas*, Instituto Gulbenkian de Ciência.
- [4] NAUR, P. e outros, *Relatório revisito sobre a linguagem algorítmica ALGOL-60*. Tradução de Gaspar Teixeira em «Gazeta de Matemática» n.º 94-95 e seguintes.
- [5] KNUTH, D., *The Art of Programming*, Vol. 1, 2, 3 Addison Wesley.
- [6] D'IMPÉRIO, N., *Data Structures and Their Representation in Storage*. *Annual Review in Automatic Programming*. n.º 5.
- [7] ———, *Machine Intelligence*. Edimburg University Press.
- [8] WEGNER, P., *Programming Languages, Information Structures and Machine Organization*, McGraw-Hill Series in Computer Science.

## Tratamento matemático da elasticidade duma barra homogénea

por Emanuel Eduardo Pires Vaz

Engenheiro Electrotécnico (Telecomunicações) — Universidade do Porto

Neste artigo discute-se um problema importante de estruturas elásticas: Determinação do estado de torção em todos os pontos materiais de uma barra feita dum isotrópico ou quase isotrópico.

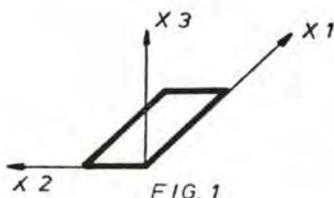
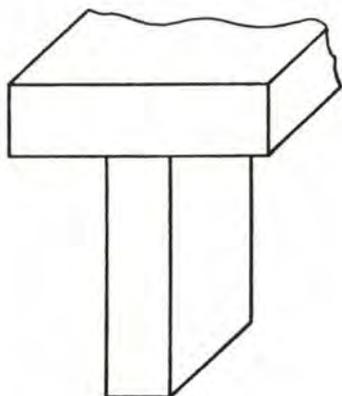


FIG. 1

Vamos resolver este problema por um semelhante para a barra da figura 1. Este é um problema clássico nestes domínios.

Nas barras aplicam-se forças externas às suas bases cuja resultante é nula e o momento

é perpendicular a elas. Supomos, também, que não existe densidade volumétrica de forças. A transição de um para o outro caso pode ser feita nos seguintes termos: O efeito de torção é desprezável em todos os pontos perto da parede; a condição matemática impõe que as componentes do vector deslocamento são desprezáveis nestas regiões, ou  $x_1 \rightarrow \infty \forall x_3 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$  e conseqüentemente  $\psi \rightarrow 0$ , onde  $\varphi$  é a função de Saint-Venant e  $\psi$  é a sua conjugada harmónica.

Defini-la-emos abaixo. No caso de pequeno efeito de torção e se outros efeitos elásticos não são tomados em consideração nesta teoria está de acordo com a realidade.

1. Consideremos um cilindro ou um prisma cuja secção não é circular. Aplica-se um sistema de forças às suas bases cuja resultante é nula e o momento é perpendicular às bases.

Neste caso as teorias como a de Coulomb não são aplicáveis mas, podemos resolver o problema da torção pela teoria de Saint-Venant para as estruturas elásticas. Esta teoria consiste em aceitar que todas as secções horizontais rodam em volta do eixo dos  $x_3$  de ângulos proporcionais à sua distância  $x_3$  à base que está fixa. Os pontos da estrutura elástica fazem deslocamentos longitudinais. Isto é equivalente a dizer que as deformações nas secções horizontais tomam lugar no problema, noutros termos; a componente  $x_3$  do vector das deformações não é nula.

Então temos :

$$D = (U_1, U_2, U_3)$$

$$(1) \quad \begin{cases} U_1 = -\alpha x_2 x_3 \\ U_2 = \alpha x_1 x_3 \\ U_3 = \alpha \varphi(x_1, x_2), \end{cases}$$

onde  $D$  é o campo vectorial dos deslocamentos. A função  $\varphi$  chama-se função de Saint-Venant e as suas derivadas devem ser contínuas.

Para resolver o problema devemos conhecer  $\alpha$  e  $\varphi(x_1, x_2)$ . Para a sua determinação devemos ter em mente que as equações da teoria matemática da elasticidade devem ser verificadas.

Pelas relações entre as componentes do tensor das deformações  $e_{ij}$  e as componentes do vector  $D$ , podemos determinar  $\alpha$  e  $\varphi$  inserindo as condições fronteira.

Precisamente, calculemos  $e_{ij}$ .

$$e_{ii} = e_{12} = 0$$

$$2e_{13} = \alpha(-x_2 + \varphi_{,1})$$

$$(2) \quad 2e_{23} = \alpha(x_2 + \varphi_{,2})$$

$$\tau_{ij} = 0 \text{ excepto } \tau_{13} = \mu\alpha(-x_2 + \varphi_{,1}) = \tau_{31}$$

$$\tau_{23} = \mu\alpha(x_2 + \varphi_{,2}) = \tau_{32}.$$

As equações de equilíbrio  $\tau_{ij,j} + F_i = 0$  devem ser verificadas. Como por hipótese, não há densidade volumétrica de forças e, como  $\varphi$  é somente uma função das variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , temos a seguinte relação apenas :

$$\tau_{31,1} + \tau_{32,2} = 0;$$

inserindo as relações (2) a última equação dá :

$$\varphi_{,1,1} + \varphi_{,2,2} = 0 \Leftrightarrow \Delta\varphi = 0,$$

esta equação deve ser verificada em todos os pontos do corpo.

A terceira coordenada não está incluída nesta última equação e, então, aquela deve

ser verificada em todos os pontos numa secção horizontal.

Agora, vamos considerar um elemento da área lateral; a função  $\vec{n}(x_1, x_2, x_3)$  representa um campo vectorial de perpendiculares à área lateral. As condições fronteira para área, quando do equilíbrio são expressas por  $\tau_{ij}n_j = 0 \Leftrightarrow \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 = 0$ , e por (2) esta relação dá origem a :

$$\mu\alpha(-x_2n_1 + x_1n_2 + \varphi_{,1}n_1 + \varphi_{,2}n_2) = 0$$

com

$$\mu\alpha \neq 0$$

numa linha fechada  $C$  que limita toda a secção horizontal.

Outra forma para a última equação é :

$\varphi_{,n} = x_2n_1 - x_1n_2$  onde  $\varphi_{,n}$  é a derivada na direcção  $\vec{n}$ .

Então  $\varphi$  está determinada; mas pretende-se dar-lhe uma expressão. O seu cálculo para o nosso problema concreto será a nossa tarefa na terceira parte da nossa exposição. A determinação de  $\alpha$  pode ser feita exprimindo todas as condições fronteira para a resultante e o momento. O seu cálculo aparece nos livros de texto desta especialidade e, por esta razão, não vamos tratá-lo neste artigo.

2. Em vez de  $\varphi$  pretendemos a determinação directa do seu conjugado harmónico  $\psi$ .

As relações entre  $\varphi$  e  $\psi$  são as conhecidas expressões de CAUCHY-RIEMAN :

$$\begin{cases} \varphi_{,1} = \psi_{,2} \\ \varphi_{,2} = -\psi_{,1} \end{cases}$$

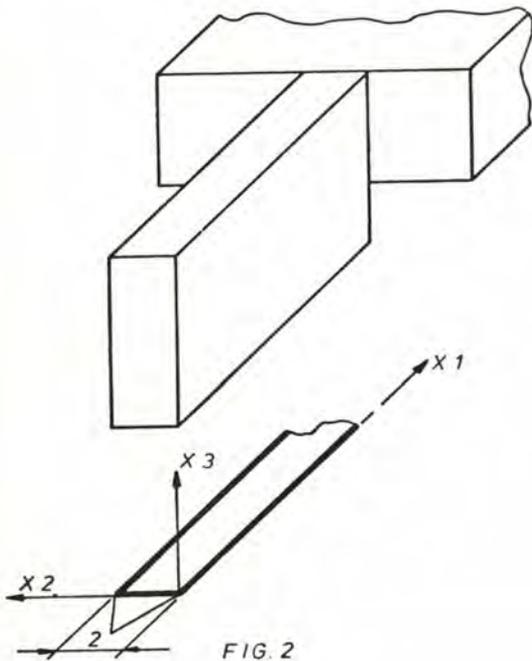
Por derivação temos :

$$\begin{cases} \varphi_{,1,2} = \psi_{,2,2} \Rightarrow \psi_{,1,1} + \psi_{,2,2} = 0 \\ \varphi_{,2,1} = -\psi_{,1,1} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Delta\psi = 0$  em  $R$ , sendo  $R$  a região interna limitada por  $C$ .

Neste caso dum prisma ou dum cilindro em que todas as secções são não circulares, a determinação de  $\psi$  é fácil e é dada em todos os cursos de elasticidade e nos livros de texto.

Mas, quando as condições fronteira são diferentes de local para local e, no caso da figura 2, esta teoria não é aplicável.



No caso da figura 2 pretende-se fazer a determinação de  $\psi$  para as condições fronteira :

$$(3) \quad \psi = \begin{cases} 2x_2, & x_2 \in [0, 1] & x_1 = 0 \\ 2(2 - x_2), & x_2 \in [1, 2] & x_1 = 0 \\ 0, & x_2 = 2 & \forall x_1. \end{cases}$$

Como se disse na introdução pretende-se resolver este problema inserindo-o nos cálculos precedentes considerando-o como um caso limite em que  $\psi \rightarrow 0$ ,  $x_1 \rightarrow \infty$  em  $R$

e as condições fronteira em  $C$  são expressas por (3). Esta escolha foi feita para simplificação de cálculos e é referida a problemas concretos.

Esta hipótese está de acordo com a realidade. No topo de cima e, em regiões pouco separadas desta base as considerações desenvolvidas não são aplicáveis mas, no problema precedente (o da figura 1) já não o eram, também.

3. Pretende-se obter soluções deste problema sobrepondo soluções alcançadas pelo método da separação de variáveis :

$$e^{ax_1} \cos ax_2; e^{ax_1} \sin ax_2; e^{bx_1} \cos bx_1; e^{bx_1} \sin bx_1 \quad \forall a, b \in R,$$

e por fim

$$1; x_1; x_2; x_1 x_2.$$

Devemos sobrepor, apenas, soluções que satisfaçam as condições fronteira. Supomos que  $\psi \rightarrow 0$ ,  $x_1 \rightarrow \infty$ , então podemos, apenas, esperar soluções da forma  $e^{-ax_1} \cos ax_2$ ;  $e^{-ax_1} \sin ax_2$  com  $a > 0$ . Mas, temos  $x_2 = 0 \quad \forall x_1 \Rightarrow \psi = 0$ , então não podemos tomar soluções em  $\cos ay$ .

Quando  $x_2 = 1 \quad \forall x_1 \Rightarrow \psi = 0$ ; devemos tomar uma que satisfaça a equação

$$\sin a = 0 \Leftrightarrow a = n\pi$$

( $n$  é um número natural). Resultam, apenas, soluções da forma  $e^{-n\pi x_1} \sin n\pi x_2$  que podemos sobrepor em  $\psi = \sum B_n e^{-n\pi x_1} \sin n\pi x_2$ , onde  $B_n$  é uma constante dependente do índice  $n$ , escolhida para satisfazer às condições fronteira últimas.

Esta condição é :

$$x_1 = 0 \Rightarrow \psi = f(x_2)$$

com

$$f(x_2) = \begin{cases} 2x_2, & x_2 \in [0, 1] \\ 2(2-x_2), & x_2 \in [1, 2] \end{cases}$$

Então, temos

$$\forall x_2 \in [0, 2] \quad x_1 = 0, \quad \sum B_n \sin n\pi x_2 = f(x_2).$$

Isto não é sempre possível com uma adição de um número finito de termos mas, é possível como uma série. Esta é a série de senos de  $f$  em  $[0, 2]$  como período  $T=2$ ; Aquela converge uniformemente em  $[0, 2]$  porque há monotónia parcial e continuidade.

Temos, então:

$$\begin{aligned} B_n &= 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^1 2x_2 \sin n\pi x_2 dx_2 + \\ &+ 2 \cdot \frac{2}{T} \int_1^2 2(2-x_2) \sin n\pi x_2 dx_2 = \\ &= \frac{4 \cos 2n\pi}{n\pi} + \frac{4 \cos n\pi}{n\pi}. \end{aligned}$$

$$B_{2p} = \frac{4 \cos 4p\pi}{2p\pi} + \frac{4 \cos 2p\pi}{2p\pi} = \frac{8}{2p\pi}$$

$$\begin{aligned} B_{2p+1} &= \frac{4 \cos 2(2p+1)\pi}{(2p+1)\pi} + \\ &+ \frac{4 \cos (2p+1)\pi}{(2p+1)\pi} = 0. \end{aligned}$$

Temos a expressão para  $\psi$ :

$$\psi = \frac{8}{2p\pi} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-2p\pi x_1} \sin 2p\pi x_2.$$

Majorando  $|\psi|$  por séries geométricas cuja razão seja  $e^{-2\pi x_1}$ ,  $k > 0$  vemos que estas

séries e as que se obtêm por derivação uma e duas vezes termo a termo são absoluta e uniformemente convergentes para  $x_1 > k$   $\forall x_2 \in \mathbb{R}$ ; e, esta é a justificação, a posteriori, de todos os cálculos, mostrando que a função assim obtida  $\psi$  é uma solução do problema,

4. Agora, a função  $\psi$  é conhecida; um problema elementar de matemática permite-nos a completa determinação da natureza de  $\varphi$ .

A solução encontrada é verificada, exactamente, em todos os pontos da barra com pouca separação da base mais baixa dela; mas, em muitos problemas práticos onde este problema aparece nós precisamos, apenas, de uma solução na metade mais baixa da barra.

Em conclusão, há uma satsiação intelectual na inesperada natureza dos métodos envolvidos na resolução do problema, quando existe uma dificuldade adicional, ao simplificá-lo.

#### BIBLIOGRAFIA

- A. P. BORESI — *Elasticity in Engineering Mechanics*, P.-Hall, N. J.  
 A. A. GUIMARÃES — *Lições de Matemáticas Gerais*, 1962-63, C. U. P.  
 C. MATOS — *Funções de variável real*, I. A. C.  
 J. V. GONÇALVES — *Álgebra Superior*.  
 PARODI — *Fonctions de variable complexe, Analyse symbolique*, C. D. U., Paris.  
 L. SCHWARTZ — *Séries et intégrales*, C. D. U., Paris.  
 LASS — *Vector and tensor analysis*, Mc.Graw Hill.  
 SOKOLNIKOFF — *Mathematical theory of elasticity*, Mc. Graw Hill.  
 Notas (do autor) dos cursos de Física Geral, 1967 e Física Complementar, 1969, proferidos na Universidade do Porto.

## Some aspects of modern mathematics

by *S. D. Bajpai*

Department of Mathematics, College of Science & Technology,  
Port Harcourt (Nigeria)

We should be reasonably familiar with the meaning and nature of Modern Mathematics and its implications for School mathematics. It should be realized at the very outset that the meaning of Modern Mathematics varies from person to person, mathematician to mathematician. Here we will discuss two important points of view about Modern mathematics.

### Modern mathematics in general

From this point of view modern mathematics means essentially that mathematics, which was not known as recently as about 150 years ago. Important among such ideas are sets, relations, mapping, non-Euclidean geometry, algebraic structures, logical foundation of mathematics, symbolic logic, functional analysis, abstract algebra, topology, game theory, theory of probability and statistical inference. These new ideas generally deal with the historical development of systems of numeration; evolution of the concept of number; the logical basis of the number system, measurement, functions and variables and other fundamental concepts; the role of postulates and definitions in mathematics; abstract formalism and generalization; the fundamental nature of symbols, relations, operations, intuitive set theory and mathematical proofs.

### Modern mathematics in Schools

From this point of view the term modern mathematics essentially refers to the new subject matter of school mathematics which contains roughly all important and useful ideas of modern mathematics as well as traditional mathematics and is placed in the mainstream of expanding science and technology so that it can be more useful, interesting, exciting and stimulating. It stands for a new attitude and fresh understanding of the subject matter in which emphasis is placed on general structure of mathematics rather than on specific tricks and manipulation.

### Traditional mathematics

Traditional school mathematics contained nothing that was discovered or created after the time of Newton. It is important to note that between the time of Newton and the beginning of the twentieth century, the major applications of mathematics were science and technology. But nowadays, there are new concepts and theories in mathematics, and it has been widely used in social and behavioural sciences, medicine, education, biological sciences, business and industry. Therefore, one of the important reasons to improve mathematics curriculum is to bring some current and recent developments in

mathematics to an average student. This does not, however, mean that all mathematics of the traditional kind is no longer necessary. Many useful and beautiful ideas were developed early, which promoted the growth of human civilization, science and technology. As a matter of fact classical mathematics is still of immense value for engineers, physical scientists, educationists, pharmacists, navigators, surveyors, accountants and various other experts; but it is insufficient for many of the needs of modern science and technology. In conclusion, the traditional mathematics is still useful, but some ideas of the modern mathematics are important. Therefore, we should include in school mathematics curriculum the best elements from the traditional as well as the modern mathematics.

#### SOME OTHER REASONS FOR INTRODUCING MODERN MATHEMATICS IN OUR SCHOOLS

People in general think of mathematics as an old science dealing with absolute ideas that never change and that the mathematical facts are final and unambiguous. They believe that arithmetic, algebra and geometry were invented and completely explored by the ancients and there is no scope for new inventions in mathematics. Most people are therefore surprised when they hear of Modern Mathematics and they consider it a whim with some mathematicians, who may be presenting old wine in new bottles. Is not two plus two still four, as it was centuries ago? Many of those who are concerned with mathematics education, whether they are teachers, or administrators or guardians, generally feel that there is no need of shift from traditional mathematics to new mathematics. Until recently, this general attitude was even prevalent among mathematicians themselves. But now-a-days there are new

concepts about numbers, new methods of performing computations, new revolutionary theorems have been proved in geometry, new applications of mathematics have been found, and completely new fields of mathematics have been invented, therefore we have to change this attitude.

#### Social Utility Movement

Education is a preparation of life. A child must leave school with such a background of mathematics which may enable him to apply himself to problems he will meet as a potential member of the society. For some years educationists and mathematicians have been advocating for the Social Utility Movement in mathematical teaching. The recent social changes have major implications for our school programme. New ideas such as set theory, statistics, probability, and mathematical logic have been introduced to satisfy the needs of most scientific research workers and professionals. Sociologists and psychologists need certain knowledge of game theory, statistics and probability in order to be able to carry on with his work efficiently. Engineers, scientists, economist and experts in various technologies and other field also need a good dose of mathematics. Therefore, we must teach best mathematics to more and more children, in a short time, so that they can pursue the many important careers that are dependent on a sound mathematical background. These aims can only be achieved with introduction of modern mathematics at our schools.

#### Computerization of our culture

Nowadays a great deal of concern centres about the place of computer science to serve the professional needs of our computing

community. We can speak without reservations of a computerization of our culture that is already broader, though less deep, than its mathematization. Nowadays computing has become important in mathematics, but it is relatively minor fraction of the total volume of computing done today. Others include experimental and theoretical physics, business data processing, economic planning, library work, engineering design, education, inventory management, space science, police operations, musical performances, nuclear devices, political strategy, automated factories, medicine, social science etc. Modern industry is being reorganized due to the invention and utilization of the electrical computers. Most important mathematical components of computer science are numerical analysis and programming languages. Computer science deals with information in an abstract way, the meaning of the symbols and number may change from problem to problem. Presumably, it will soon be taken for granted that all graduates of applied sciences, engineering and business administration will have to learn computer sciences, during the course of their university education. Therefore, it is not merely necessary but it is urgent to introduce such aspects of modern mathematics at school level.

### **Modern mathematics is more meaningful.**

As a matter of fact the modern mathematics offers an opportunity to learn mathematics in a more meaningful way than before. It offers a new approach and fresh understanding of the mathematics, which is enriched by new insight. As for example, the simple arithmetic operations (addition, subtraction, multiplication and division) have been seen to have aspects that make of them more than simple mechanical operations that have baffled several generations of students. In an algebraic

equation the concept of  $x$ , the unknown, takes a new meaning. Geometry is now not only arbitrary repetition of series of proof of obvious, but a new depth has been given to it, which is placed on sound footing in the mainstream of mathematics. Modern mathematics, therefore is meaningful mathematics both in point of view and subject matter.

### **Modern Mathematics Unifies all branches of mathematics.**

The modern critics pointed out that the trouble with traditional school mathematics was that it offered little or no correlation among different disciplines of mathematics. Arithmetic seemed to have little or no relationship with Algebra or Geometry. It has been felt strongly that mathematics should be presented as a unified science and all its branches should be inter-related to each other so that the contributions of each branch can be used to the best advantage. The new mathematics provides the opportunity to unify all branches of mathematics.

### **Modern mathematics improves the teaching of mathematics.**

One of the most important aims to introduce modern mathematics at schools is to improve the teaching of mathematics and make mathematics an interesting subject. Traditional methods of teaching mathematics induced great fear for mathematics among children, they found it very ugly and unpleasant. A child could easily tell his teacher that he did not know mathematics, and mathematics did not know him. This attitude has been changed to a great extent by introducing modern methods of teaching mathematics.

It should be realized that major changes in school mathematics are in the approach of

teaching rather than much change in its content. In short the changes are more in method than in content. It seems new in content to old generation because it uses more precise language and symbolism. If somebody has good knowledge of traditional high school mathematics, he can understand all new mathematics that is prescribed in elementary schools, but the symbols and notations are different, so that he fails to appreciate it.

### **Modern mathematics introduces new ideas and symbols from the beginning.**

To add precision and understanding to mathematical operations, modern mathematics introduces new mathematical ideas, new words and symbols much earlier than the traditional mathematics used to introduce. Experiments in many parts of the world have proved that children learn complex ideas, words and symbols at much earlier age than what we expected earlier, provided they are taught by modern methods.

### **Modern mathematics provides intellectual challenge.**

Some people are of this view that children are forced to study difficult subject matter at a very young age. However this view is not true, much of the new subject matter is basically easier than the traditional school mathematics. Although traditional mathematics's meaningless long and repeated drills can produce the desired proficiency in accurate computation, but they ultimately lead to a permanent distaste for mathematics. Traditional mathematics proved tasteless to students, because it presented no intellectual challenge. One of the aims of modern school mathematics programme is to avoid this un-

fortunate situation, and cultivate the desire of creation, intellectual curiosity and scientific foundation of thinking among the children.

### **Modern mathematics is based on the fundamental structure of mathematics.**

Psychologists are of the opinion that the best study of a subject is only possible when it is based on its fundamental structure of the subject. This stress on the structure is also in agreement with modern theories of education. Therefore another important aspect of introducing modern mathematics is that it is based on the fundamental structure of mathematics.

Mathematics has been also defined as the science of logical thinking and systematic reasoning, therefore each mathematical problem should be proved by a logical sequence of steps and arguments. The basic elements of mathematical structure are definitions, assumptions, the concepts of sets, logical basis of the number system, abstract formalism, generalization, the role of axioms, postulates and theorems etc. Mathematics involves the process of abstraction, starting with concrete situation, recognizing corresponding structures and using one structure to solve problems presented in other structure. Modern mathematics, presents mathematics in such a way that involves the whole process, and not only with the techniques of the internal operation within one system. When a student follows this structure then mathematics makes sense to him and he enjoys the intellectual thrill of mathematics. The real power of mathematics lies in its structure an abstractness instead of its computational part.

### **REFERENCE**

1. **BAJPAT, S. D.:** *Teaching of Mathematics at Primary and Secondary Schools.* Math. Edu.VI - 1 (1972), 33-40.

# MOVIMENTO MATEMÁTICO

## PRÉMIO DE ENSAIO À MEMÓRIA DE BERTRAND RUSSEL

### REGULAMENTO

1. É atribuído um prémio de £200 (duzentas libras estrelinas, cerca de 12.000\$00) ao ensaio que melhor analise um ou mais aspectos das relações entre as ciências matemáticas e o desenvolvimento das condições sócio-económicas. O dito ensaio deve possuir interesse geral para os matemáticos e, preferivelmente, para um público leitor mais largo ainda. Deve além disso ter em conta a prática matemática corrente.

2. Os ensaios submetidos devem ser escritos à máquina e conter um máximo de 20.000 palavras. Podem ser escritos em Inglês, Francês, Espanhol, Japonês, Polaco ou Russo.

3. A data limite para entrega dos ensaios é 1 de Fevereiro de 1976. Os organizadores não aceitam responsabilidade pelos originais submetidos, pelo que os respectivos autores devem guardar uma cópia dos mesmos.

4. É intenção do júri apreciador julgar os trabalhos submetidos sem conhecimento do nome dos respectivos autores, o qual deve constar apenas numa folha separada, juntamente com a morada e o título do ensaio, submetida juntamente com este.

5. Os ensaios submetidos devem ser originais não publicados anteriormente. O ensaio que receber o prémio será publicado em formato adequado, sendo porém condição de entrada que os organizadores têm o direito de publicar ensaios premiados sem pagamento adicional aos seus autores.

6. Os organizadores reservam, no entanto, o direito de não atribuir o prémio se nenhum ensaio tiver, na sua opinião, mérito suficiente. Em anos subsequentes serão atribuídos prémios semelhantes.

7. Todos os ensaios submetidos ou pedidos de informação devem ser dirigidos a: Bertrand Russel Memorial Essay Prize, c/o Dr. A. Slomson, School of Mathematics, The University, Leeds LS2-9JT, England.

### Comité de Organização:

- J. L. BELL (London School of Economics);
- M. A. DICKMANN (CNRS, Paris);
- M. MACHOVER (Chelsea College);
- G. PRIEST (St. Andrews University);
- A. B. SLOMSON (Leeds University);
- Y. SUZUKI (Sussex University);
- G. M. WILMERS (Manchester University).

## ENCONTROS INTERNACIONAIS DE LÓGICA MATEMÁTICA

### Relatório sobre o «International Summer Institute and Logic Colloquium» (ISILC) Kiel, 1974

#### 1. Organização, Participantes, etc.

Decorreu na cidade Alemã Ocidental de Kiel, de 17 de Julho a 3 de Agosto de 1974 um Seminário de Lógica Matemática, organizado pelos Professores A. OBERSCHELP e

K. POTTHOFF, dos Departamentos de Filosofia e de Matemática respectivamente da Univ. de Kiel, e pelo Prof. G. H. MÜLLER da Univ. de Heidelberg, sob os auspícios da Secção Europeia da Associação de Lógica Simbólica e da Divisão de Lógica, Metodo-

logia e Filosofia da Ciência da União Internacional de História e Filosofia da Ciência (IUHPS), de que é presidente o Prof. A. MOSTOWSKY da Univ. de Varsóvia.

O Seminário decorreu em amplas instalações do Instituto de Matemática, estando à disposição dos participantes dois grandes anfiteatros, salas de estudo e de convívio, máquinas fotocopiadoras e outras facilidades.

A maioria dos participantes (cerca de 180 na totalidade) era constituída por estudantes pós-graduados de diversos países, para os quais havia subsídios cobrindo inscrição (cerca de mil escudos), e uma boa parte dos custos de alojamento em dormitório estudantil e de alimentação em Refeitório da Associação de Estudantes local, podendo qualquer participante beneficiar, no entanto, do uso destas instalações a preços especiais. Fontes de receita provieram de inscrições, das três organizações promotoras já indicadas e da Cidade de Kiel.

A representação da Polónia era a mais numerosa (20) a seguir à da República Federal Alemã (76), seguida pela do Reino Unido (18), Países Escandinavos (12), EUA (10), Itália (8), Holanda (8), Bélgica (7) e França (6). Havia ainda representações da Áustria, Checoslováquia, Egipto, Hungria, Monaco, Suíça e Portugal.

Escusado será dizer que em todos os aspectos a organização e o apoio dados aos participantes foram excelentes. Além das facilidades de uso de instalações já mencionadas, acrescentemos a distribuição prévia de notas poligrafadas dos textos dos cursos e lições, constituindo no final uma substancial colectânea, não esquecendo a organização de passeios e visitas turísticas nos fins de semana a troco de quantias módicas, igualmente importantes para uma saudável recuperação de forças e equilíbrio mental...

As sessões de trabalho decorreram em língua inglesa, estando prevista a publicação dos respectivos «Proceedings» pela editora

Springer-Verlag na colecção «Lecture Notes in Mathematics», onde se encontram já editados os «Proceedings» de diversas Conferências e Seminários de Lógica Matemática realizados em anos anteriores (vide nota final (1)).

## 2. Programa Científico.

Como o título indica, o Encontro em Kiel dividiu-se em duas partes, o «Summer Institute» (SI) e o «Logic Colloquium» (LC). As sessões iniciavam-se normalmente às 9,30 h., interrompendo-se para almoço e continuando até às 5 da tarde, mas prolongando-se por vezes pela noite em regime menos formal.

Durante a primeira parte, que decorreu de 17 a 31 de Julho, foram leccionados os seguintes cursos:

- 1 — *An Outline of the Theory of Large Cardinals*, W. BOOS (Iowa City).
- 2 — *First-Order Logic and its Extensions*, J. FLUM (Freiburg).
- 3 — *The Model Theory of Local Fields*, S. KOCHEN (Princeton).
- 4 — *General Proof Theory of First and Higher Order Systems; Normalization of Proofs*, D. PRAWITZ (Oslo).
- 5 — *Inductive definitions*, W. RICHTER (Minneapolis).
- 6 — *Lambda Calculus: Models and Applications*, D. SCOTT (Oxford).

Estes primeiros seis cursos intensivos consistiram de oito lições de uma hora cada; os dois cursos seguintes foram de quatro lições, e os restantes de uma lição apenas.

- 7 — *Computation Theories: An Axiomatic approach to Recursion on General Structures (Numbers, Higher Types, Ordinals)*, J. E. FENSTAD (Oslo).

- 8 — *The solution of the Gap-2 Case of the Two Cardinal Problem*, R. B. JENSEN (Bonn).
- 9 — *Partition Cardinals*, F. DRAKE (Leeds).
- 10 — *Set Theory in Infinitary Languages*, K. GLOEDE (Heidelberg).
- 11 — *The Interaction of the HOD Operation in Set Theory*, S. GRIGORIEFF (Paris).
- 12 — *Quantifier Elimination*, P. KRAUSS (New Platz).
- 16 — *The Great Chain of Cardinality: Large Cardinals and the Set Theorist's Plenum Formarum*, W. BOOS (Iowa City).
- 17 — *On Some Points Concerning the Method in the History of Logic*, C. IMBERT (Paris).
- 18 — *Intensional Logic and Linguistics*, F. V. KUTSCHERA (Regensburg).
- 19 — *Models of Axiomatic Theories of Classes*, A. MOSTOWSKI (Warsaw).
- 20 — *Many Valued Algorithmic Logic*, H. RASIOWA (Warsaw).
- 21 — *Combinatorics in Inaccessible Powers*, E. SPECKER (Zurich).

Durante o SI houve ainda uma sessão de duas horas para leitura de trabalhos contribuídos («Contributed Papers») com o tempo de 20 minutos para cada trabalho, incluindo discussão, um Simpósio sobre Grandes Cardinais organizado pelo Prof. G. H. MULLER, além de outras discussões e reuniões organizadas espontaneamente, incluindo as duas lições extra-programa seguintes:

- 13 — *Gödel's New Axioms on the Continuum*, G. TAKEUTI (Urbana),
- 14 — *Silver's Result on the Singular Cardinal Problem*, F. DRAKE (Leeds).

A segunda parte, de 1 a 3 de Agosto, foi constituída por sessões de leitura e discussão de trabalhos contribuídos que decorreram paralelamente, distribuídas por três secções:

- Lógica Pura, Teoria dos Modelos, Teoria de Conjuntos.
- Teoria da Recursão, Teoria da Demonstração, Informática Teórica.
- História e Filosofia da Ciência.

Durante o LC decorreu ainda um Simpósio sobre Teoria da Demonstração organizado por J. DILLER (Münster) em homenagem ao Prof. K. SCHÜTTE, além das lições seguintes:

- 15 — *Various Facts and Questions about Decision Problems in Groups*, W. W. BOOLE (Urbana).

### 3. Programa Extra-Científico

Foi grande e bem sucedida a preocupação dos organizadores em promover o convívio informal entre os participantes fora das horas e dias de trabalho. Mencionemos concretamente: visitas à cidade de Kiel e arredores, à Aldeia Olímpica onde se realizaram os campeonatos de Vela de 1972, a dois museus, aos estaleiros navais, excursão de comboio e barco à linda região dos lagos de Plön, incluindo almoço em restaurante típico, excursão à Dinamarca (a uma escassa centena de kms de Kiel), passeio noturno de barco ao longo do fiorde de Kiel e ... clima radioso durante quase três semanas.

### 4. Conclusão. Futuros Encontros

Démos nestas notas algumas informações porventura menos relevantes mas igualmente necessárias para se ter uma ideia aproximada dos diversos aspectos que rodeiam a realização dum congresso científico como o que teve lugar em Kiel. Queremos no entanto sublinhar os seguintes dois pontos: a) a realização de congressos científicos no nosso

País é importante para o nosso desenvolvimento económico social; *b*) a sua realização é compatível com pequenos recursos financeiros, sendo possível evitar exhibições de falso prestígio e hotéis luxuosos. Eles permitem, por um lado, acordar as nossas escolas e outras instituições para a investigação dos problemas que nos são próprios (A Investigação não se importa!) e, por outro, mostram-nos como cientistas e estudiosos doutros países abordam esses problemas. Além disso há o valioso contributo que é o convívio pessoal com a comunidade científica internacional de que afinal os nossos melhores, (muitos vivendo longe da Pátria), tem feito parte no passado.

### Relatório sobre o «Seminaire International d'Été et Colloque International de Logique» (SIECIL) — Clermont-Ferrand, 1975

Na sequência dos Encontros Internacionais de Lógica Matemática que têm lugar todos os anos em diversos países europeus (vide nosso Relatório na pág. 3), realizou-se de 15 a 25 de Julho de 1975 na Universidade de Clermont-Ferrand, França, o SIECIL, constituindo o Encontro Anual da Secção Europeia da ASL. O Colóquio e o Seminário foram financiados pelo CNRS, pela IUHPS, pela Universidade de Clermont-Ferrand e por outras colectividades regionais e locais, tendo presidido ao Comité de Programação o Professor G. KREISEL, da Universidade de Stanford (EUA).

As sessões do SIECIL tiveram lugar num dos edifícios da «Unités des Sciences Exactes et Naturelles», localizado junto à vila de Aubière, nos arredores de Clermont-Ferrand, com lindas vistas para os montes próximos do Puy-de-Dôme (1465m), no coração da região pitoresca de Auvergne, cerca de 300 km a sul de Paris. Os participantes, aproximando as duas centenas, puderam usufruir das Residências e Restaurantes do Complexo Universitário.

O tema geral para este ano foi o estudo das influências recíprocas Lógica-Álgebra, Lógica-Análise, Lógica-Fundamentos, sendo também especialmente versados a Teoria da Demonstração e diversos aspectos da Informática, e Teorias da Automação e da Computação. O programa científico do SIECIL foi constituído por:

De facto, o progresso do nosso País depende de maneira essencial do reforço dos nossos recursos no campo da educação em todos os níveis, e particularmente da reorientação das instituições para a investigação.

O próximo Encontro realizar-se-à em Julho de 1975 na Univ. de Clermont-Ferrand, França, organizado pelo Prof. F. GUILLAUME. Para 1976 está previsto outro encontro em Oxford. Para 1977/78, conta-se organizar um seminário de curta duração em Portugal, antecedido por cursos intensivos de Lógica Matemática de acordo com as necessidades dos participantes portugueses.

a) Cursos de quatro lições cada, nomeadamente:

1. *Proof. Theory* — G. KREISEL.
2. *Descriptive Set Theory* — Y. N. MOSCHOVAKIS.
3. *Stable Theories* — S. SHELAH.
4. *Applications du Forcing en Theories des Espaces de Banach* — J. L. KRIVINE.

b) Vinte e quatro Conferências individuais de uma hora cada.

c) Sessões de Leitura de trabalhos contribuídos, totalizando para cima de trinta intervenções.

A lista dos títulos correspondentes às alíneas b) e c) é demasiado longa para ser aqui incluída. O leitor interessado poderá no entanto encontrá-las nos *Proceedings* do Encontro, que serão publicados.

Durante uma das muitas reuniões informais entre grupos de logicistas presentes foi decidido criar uma «Société Française de Logique», cuja constituição se espera seja oficialmente pronunciada por ocasião das Jornadas de Lógica em Lyon, marcadas para 2 a 4 de Março de 1976. Ainda sobre futuros Encontros, os participantes no SIECIL tomaram conhecimento dos programas dos dois Encontros seguintes:

1. **Second colloquium in set theory.** Instituto de Matemática da Universidade Técnica de Wrocław, Polónia, de 18 a 27 de Setembro

de 1975. O Comité de Organização é presidido por ANDRZEJ ZARACH, Mathematical Institute I-18, Technical University, 50-370 Wrocław, Wybrzeże Wyspińskiego 27, Poland.

II. **Oxford logic summer school 1976** (e conjuntamente **the North-Holland 25-Year Symposium**, e **European summer meeting of the ASL**), de 19 a 30 de Julho de 1976 em Oxford, Inglaterra. As sessões de *Summer School* serão organizadas em torno de quatro Secções de Trabalho («workshops») versando respectivamente os seguintes temas

- 1) História da Lógica;
- 2) Funcionais Contínuos;
- 3) Teoria de Modelos Aplicada;
- 4) Complexidade de Computações.

O comité de Organização é constituído pelos Professores R. O. GANDY (Oxford), D. SCOTT (Oxford), D. VAN DALEN (Utrecht), J. E. FENSTAD (Oslo) e R. I. SOARE (Chicago), Mathematical Institute, 24-29 St. Giles, Oxford OX1 3LB, England.

(1) — **Breves notas de história dos Encontros.** Desde o encontro de 1956 em Oxford, organizado pelo Filósofo ARTHUR PRIOR, os logicistas ingleses passaram a reunir-se anualmente, constituindo o «British Logic Colloquium» (BLC), embora esta designação só recentemente tenha passado a corresponder a uma organização mais ou menos definida, tendo como Secretário o Dr. F. DRAKE (Leeds). A partir de 1960 estes encontros são reconhecidos como reuniões europeias da «Association for Symbolic Logic» (ASL) com sede nos E. U. A., e as suas actividades reportadas no «Journal of Symbolic Logic».

O oitavo encontro, que decorreu igualmente em Oxford, em Junho de 1963, foi o primeiro a ser parcialmente subsidiado pela O. T. A. N. e reconhecido como Instituto de Estudos Avançados da OTAN, sendo pela primeira vez publicados os respectivos «Proceedings». Contava cerca de 100 participantes. O encontro de 1964 em Bristol realizou-se em semelhantes condições.

O Encontro de Leicester em 1965 viu alargada a duração de 3 a 4 dias que vinha sendo usual de modo a englobar um «Summer School in Mathematical Logic» com a duração de duas semanas e meia, desta vez sem apoio da OTAN. Em 1966 realizou-se o primeiro encontro fora de Inglaterra, em Hanover, mas em cooperação com o BLC.

Em 1967 repetiu-se a experiência de 1965 em Leeds,

financiada pela OTAN, e contando com participantes de 14 países além do Reino Unido, incluindo Polónia e Checoslováquia (embora para estes últimos tivessem de ser procurados subsídios noutras fontes). Em Agosto de 1968 a reunião europeia da ASL realizou-se em Varsóvia, enquanto a OTAN financiava uma conferência de Lógica Matemática e Curso de Verão em Varenna, Itália, de 7 a 17 de Setembro, sem qualquer relação com o BLC.

O primeiro sinal de oposição à aceitação de subsídios provenientes da OTAN ocorreu durante o Encontro de Manchester em 1969, em que foi assinada uma declaração de protesto por 35 participantes dissociando-se dos objectivos político-militares daquela organização. O Encontro em 1970 no Bedford College, Londres, embora de menor duração (23 a 28 de Agosto) mostrou a viabilidade em prescindir de tais subsídios (assim como já o tinha mostrado a Conferência de Leicester). Por outro lado, aquela tomada de posição deve ser encarada no movimento geral de consciencialização político-social dos trabalhadores científicos (em 1969 é fundada a «British Society for the Social Responsibility in Science»), catalizada pela alegada intervenção da OTAN na perpetuação do Golpe dos Coronéis na Grécia (cf. o artigo de G. WILMERS «NATO's Counter-Revolutionary Role: a Case Study», p. 65-89 na Ref. abaixo).

Muito embora a Conferência de 1971 em Cambridge tenha sido desde cedo (Outubro de 1970) planeada com base no financiamento substancial por parte da OTAN, só em Março de 1971 este facto se tornou de conhecimento geral dos logicistas ingleses. Foi então proposto por MAX DICKMAN, Y. SUZUKI e G. WILMERS realizar uma conferência paralela na Dinamarca (onde os dois primeiros se encontravam na altura), ideia esta que rapidamente adquiriu adeptos em Inglaterra e noutros países, tendo-se juntado ao comité de organização JOHN BELL, M. MACHYER e ALAN SLOMSON. Após várias tentativas de conciliação (cf. a referência abaixo) foi finalmente decidido levar por diante a Conferência alternativa em Uldum, Dinamarca, simultaneamente com a conferência de Cambridge.

Os objectivos da Conferência de Uldum foram claramente enunciados como sendo:

I. Proporcionar uma alternativa aos logicistas que não desejam participar numa Conferência publicamente associada com a OTAN.

II. Assegurar que futuras Conferências de Lógica Matemática não sejam financiadas pela OTAN ou por qualquer outra organização de carácter militar.

III. Estabelecer um ponto de encontro de logicistas onde seja permitido analisar as implicações sociais

da sua actividade e discutir as interrelações entre a Lógica e a Matemática em geral.

O sucesso da Conferência de Uldum comprovou a necessidade dos objectivos I e III, enquanto o segundo objectivo se tem imposto por si próprio nas conferências posteriores (Orleans-1972, Bristol-1973 e Kiel-1974).

Os dados para estas notas são tirados do artigo de

ALAN SLOMSON «Uldum 1971: The Bertrand Russell Memorial Logic Conference and the controversy surrounding it» p. 11-39 no volume dos respectivos Proceedings (Publicado por BRMLC, Dr. A. SLOMSON, School of Mathematics, The University, Leeds 2, England, 1973, 408 pág.) cuja leitura recomendamos vivamente.

AUGUSTO J. FRANCO DE OLIVEIRA

## UNIVERSIDADE DE LUANDA

Apresentamos aqui uma relação dos licenciados em Ciências Matemáticas (ramo único de especialização científica) na Universidade de Luanda e respectivos temas dos relatórios de estágio (todos do 2.º Semestre do 5.º Ano da Licenciatura), nos anos lectivos de 1972/73, 1973/74 e época especial de Abril de 1975.

Indicações mais detalhadas e referências dos relatórios poderão ser obtidas directamente junto destes licenciados, da Biblioteca da Secção de Matemática, ou ainda do referente desta notícia.

Carlos Alberto dos Santos Braumann: «Teoria da Decisão Estatística», Julho de 1973;

Maria Henriqueta Batalha da Silva Lopes: «Organização de um Estudo Estatístico sobre Acidentes de Viação Apoiado na Informática», Julho de 1973;

Álvaro Manuel Duarte Nunes: «Séries Cronológicas e suas Aplicações», Julho de 1973;

Ana Maria de Castro e Silva Ferreira de Lemos: «Análise da Variância», Julho de 1974;

Irene Fernandes Tomáz da Conceição de Araújo: «Organização de um Estudo Estatístico sobre Acidentes de Viação Ocorridos em Angola no Ano de 1972 com com Base na Informática», Abril de 1975;

José de Matos Lopes Teixeira: «Programação Linear Inteira e Variáveis Booleanas», Abril de 1975;

Ana Maria dos Santos: «Programação Linear e Funções Convexas», Abril de 1975;

Maria de Lourdes Lopes: «Tabelas de Continência», Abril de 1975;

Maria Leonor Anacleto Leitão: «Testes do  $\chi^2$  — Aplicações a Estatísticas de Seguros», Abril de 1975.

J. MARQUES HENRIQUES

# MATEMÁTICAS SUPERIORES

## PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS  
MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Informática Superior —  
Exame Final — Época de Recurso — 1 de Julho  
de 1974.

### I

**5819** — Mostre que se  $F$  é uma função diádica (computável) associativa e comutativa, então satisfaz às identidades

$$\wedge /, ((F/A) F F/B) = F/A, B$$

$$\wedge /, ((F/A) F F/B) = F/A F B$$

quaisquer que sejam os argumentos  $A$  e  $B$ , dos domínios de  $F$ .

### II

a) Desenvolva um conjunto de funções tais que, dados para argumento à direita os coeficientes de um polinómio (por ordem crescente das suas potências — o grau do polinómio será igual ao número dos coeficientes subtraído de uma unidade), permitam:

- Via função diádica calcular o valor do polinómio num ponto dado como argumento à esquerda;
- via função monádica calcular os coeficientes da derivada;
- via função monádica calcular os coeficientes da primitiva desse polinómio.

b) Aproveite as duas primeiras funções desenvolvidas acima para escrever uma outra função diádica tal que, dados os coeficientes do polinómio para argumento à direita e um valor real de partida como argumento à esquerda, calcule uma raiz real desse polinómio pelo método de NEWTON-RAPHSON (use  $x_{n+1} = x_n - p(x_n)/p'(x_n)$ , onde  $x_0$  será portanto o argumento à esquerda da função; o programa deverá parar quando se tiver alcançado uma determinada tolerância, por exemplo,  $|x_{n+1} - x_n| < 10E-5$ ).

### III

Desenvolva um algoritmo que, incorporado numa parse de um compilador de FORTRAN, permita a tradução de uma instrução de IF aritmético.

Para simplificar poderá admitir que a sintaxe da instrução é de um dos tipos:

$$\rightarrow 4 \ 6 \ 2 \ IF \ (A-B*2)$$

$$\rightarrow IF \ (A-B*2), \ 4.6, 2$$

onde, por definição do IF aritmético, a transferência será feita para as instruções referenciadas respectivamente pelo primeiro, segundo ou terceiro rótulos, consoante o valor da expressão aritmética entre parêntesis venha negativo, nulo ou positivo (neste caso, admitida a simplificação acima, tratar-se-á, mais rigorosamente do ponto de vista sintático, de um dialecto do FORTRAN).

### IV

Enuncie a hierarquia que existe entre os vários tipos de linguagens e gramáticas de estrutura de frase. Exemplifique para mostrar que as inclusões são próprias.

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS  
MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Estatística I — Exame  
Final de 1972/73 — Época de Recurso — 11 de  
Março de 1974.

### I

**5820** — a) Calcule a média e a variância dos  $n$  primeiros números naturais; relacione este resultado com uma distribuição teórica importante.

b) Qual o significado, para uma distribuição de frequências, de se anular a variância? O que se pode deduzir, neste caso, relativamente aos coeficientes de assimetria e de achatamento?

c) Mostre que, para qualquer distribuição, o 1.º momento absoluto é mínimo quando centrado na mediana e o 2.º momento é mínimo quando centrado na média.

### II

Considere uma amostra de dimensão  $n > 2$  ( $n$  inteiro), colhida de um universo com distribuição bino-

mial em que a probabilidade de sucesso é  $p$  ( $0 < p < 1$ ).  
Calcule:

- A ( $s$ ) moda ( $s$ );
- Os coeficientes de assimetria e de achatamento;
- Indique a condição necessária e suficiente de simetria desta distribuição;
- Considerando os coeficientes de assimetria e de achatamento como função de  $n$ , qual o seu limite quando  $n \rightarrow \infty$ ? Relacione este facto com a convergência da lei binomial reduzida para a normal (teorema do limite central).

## III

Designe por

$$X = ((x_{ki})) \quad (k = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, m)$$

uma matriz de  $n$  linhas e  $m$  colunas representando as  $n$  observações de  $m$  variáveis. Define-se, para os vectores-coluna de  $X$ , uma matriz de variâncias e covariâncias de elemento genérico

$$r_{ij} = \frac{\sum_k (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_k (x_{ki} - \bar{x}_i)^2 \sum_k (x_{kj} - \bar{x}_j)^2}}$$

$$= \frac{\sum_k (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)}{\sqrt{S_i^2 S_j^2}}$$

( $i, j = 1, \dots, m$ ), onde  $\bar{x}_i = \sum_k x_{ki}/n$ ,  $\bar{x}_j = \sum_k x_{kj}/n$ ,

$$S_i^2 = \sum_k (x_{ki} - \bar{x}_i)^2/n \quad \text{e} \quad S_j^2 = \sum_k (x_{kj} - \bar{x}_j)^2/n.$$

Mostre que a matriz  $R = ((r_{ij}))$  é:

- Simétrica;
- definida não-negativa.

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS  
MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Estatística I — Epoca de  
Recurso — 8 de Julho de 1974.

## I

**5821** — Calcule a moda, a mediana, a média e a variância da distribuição de densidade

$$f_i = \frac{6}{\pi^2 i^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

[Nota:  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ]. Discuta os resultados.

## II

Dado um universo qualquer, descrito por uma v. a  $X$  com  $E(X) = \mu$  e  $V(X) = \sigma^2$ , mostre que:

a) Definindo  $\bar{x}_n$  como sendo a média de uma amostra casual de observações independentes, de dimensão  $n$   $x_1, x_2, \dots, x_n$ , vem

$$E(\bar{x}_n) = \mu \quad \text{e} \quad E((\bar{x}_n - \mu)^2) = \frac{\sigma^2}{n};$$

b) Designando, como habitualmente, por  $\mu_4$  o quarto momento centrado do universo descrito por  $X$ , sob a hipótese de  $\mu_4$  existir e ser finito, vem

$$E[(x_i - \mu)(x_j - \mu)(x_k - \mu)(x_l - \mu)] = \begin{cases} \mu_4 & \text{se as observações } x_i, x_j, x_k, x_l \text{ forem} \\ & \text{coincidentes} \\ \sigma^4 & \text{se exactamente dois pares de observa-} \\ & \text{ções coincidirem} \\ 0 & \text{em quaisquer outras circunstâncias.} \end{cases}$$

## III

Considere um universo com média  $\mu$ , variância  $\sigma^2$  e quarto momento centrado  $\mu_4$ , sendo todas estas medidas desconhecidas mas finitas. Mostre que definindo, como habitualmente,

$$\bar{x}_n = \sum x_i/n, \quad m_n^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x}_n)^2$$

se tem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(m_n^2 = \sigma^2) = 1$$

onde  $n$  é a dimensão da amostra.

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS  
MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Estatística II — Exame  
Final de 1972/73 — Epoca de Recurso — 28 de Fe-  
vereiro de 1974.

## I

**5822** — Considere amostras de dimensão  $n$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , colhidas de um universo normal de

média  $\mu = 0$  e variância  $\sigma^2$  (desconhecida). Determine os estimadores de máxima verosimilhança da variância e do desvio padrão do universo; são estes estimadores centrados? Justifique.

II

Dada uma população normal com parâmetros (desconhecidos)  $(\mu, \sigma^2)$ , determine um par de estatísticas suficientes para os estimar.

III

No caso da regressão linear múltipla

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k + e$$

pretende-se testar a hipótese simples de que para um certo  $i$  ( $1 < i < k$ ), fixo, é  $b_i = 0$ , contra a hipótese alternativa de que  $b_i \neq 0$ . Deduza uma estatística adequada para efectuar esse teste, nos dois casos de  $E(e^2) = \sigma^2 I_n$  ( $n$  é o número de observações), com  $\sigma^2$  conhecido e  $\sigma^2$  desconhecido, respectivamente.

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Estatística II — Exame Final — 31 de Julho de 1974.

I

5823 — Determine o estimador de máxima verosimilhança de  $\theta$  na distribuição (exponencial negativa) de densidade

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x > 0 \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

onde  $-\infty < \theta < +\infty$ .

II

Numa escola primária foram seleccionados 20 alunos completamente ao acaso e divididos em dois grupos de 10 cada. A um dos grupos foi dado todos os dias um copo de sumo de frutos e ao outro um copo de leite. Ao fim de um certo período o aumento de peso dos alunos é de (kilos):

1.º grupo: 4 2,5 3,5 4 1,5 1 3,5 3 2,5 3,5

2.º grupo: 1,5 3,5 2,5 3 2,5 2 2 2,5 1,5 3

Sabendo que  $\int_{-\infty}^{3,10} f_{t(18)}(x) dx = 0,975$  efectue um teste da significância do aumento de peso dos alunos que beberam sumo relativamente aos que beberam leite.

III

a) Designando por  $F_{(n,m)\epsilon}$  o valor da distribuição  $F_{(n,m)}$  tal que

$$P(F_{(n,m)} < F_{(n,m)\epsilon}) = \epsilon,$$

e analogamente por  $t_{(n)\epsilon}$  o valor da distribuição  $t_{(n)}$  para o qual

$$P(t_{(n)} < t_{(n)\epsilon}) = \epsilon,$$

mostre que

$$F_{(1,n)1-\epsilon} = t_{(n)1-\frac{\epsilon}{2}}^2;$$

b) Prove que a mediana da distribuição  $F_{(n,m)}$  é igual ao inverso da mediana da distribuição  $F_{(m,n)}$

IV

Cálculos efectuados para uma regressão linear simples de 100 pares de observações  $(y_i, x_i)$  forneceram como resultados os seguintes valores da recta  $y = \alpha + \beta x$ :  $\bar{x} = 0$ ;  $\Sigma x_i^2/n = 9,7$ ;  $\hat{\alpha} = 1,1$ ;  $\hat{\beta} = 0,02$ ;  $\hat{\sigma}^2 = 0,0036$ .

Sabendo que  $\int_{-\infty}^{1,65} \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx = 0,9505$ , calcule intervalos de confiança aproximados ao nível de 90% para  $\alpha$  e  $\beta$ .

V

Dada a sucessão finita de variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$  normais e independentes, com distribuições  $X_i \stackrel{d}{=} N(\mu_i, 1)$ , define-se a variável aleatória

$$\chi_{\delta,(n)}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

como possuindo a distribuição do  $\chi^2$  descentrado com  $n$  graus de liberdade e parâmetro de descentragem  $\delta = \sqrt{\Sigma \mu_i^2}$ . (A variável aleatória  $\chi_{(n)}^2$  é, pois, um caso particular notável e portanto coincidente com  $\chi_{0,(n)}^2$ ).

a) Calcule  $E(\chi_{\delta,(n)}^2)$  e  $V(\chi_{\delta,(n)}^2)$ ;

b) Mostre que  $\chi_{(n)}^2/n \xrightarrow{P} 1$ .

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Estatística II — Exame Final — Época de Recurso — 8-11-1974.

## I

5824 — Mostre que se uma variável aleatória  $X$  possui a distribuição do  $\chi^2_{(n)}$ , então  $\sqrt{2X} - \sqrt{2n-1}$  converge para a normal reduzida.

## II

Considere um universo descrito por uma variável aleatória  $X$ , com distribuição uniforme no intervalo  $[0, \theta]$ , onde  $\theta > 0$  é um parâmetro desconhecido, isto é  $X$  possui a densidade

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} \text{ se } 0 < x < \theta; \\ = 0 \text{ senão.}$$

Deste universo colheu-se uma amostra de  $n$  observações independentes  $x_1, \dots, x_n$ .

a) Construa a função de verosimilhança e deduza o estimador de máxima verosimilhança de  $\theta$  obtido com base nesta amostra,  $\tilde{\theta}_n$ ;

b) Com base no resultado de a), deduza a distribuição de  $\tilde{\theta}_n$ ;

c) Calcule  $E(\tilde{\theta}_n)$  e  $V(\tilde{\theta}_n)$ , verificando se este estimador é ou não centrado e coerente.

## III

De um universo que se sabe seguir a lei normal  $N(\mu, \sigma^2)$  com  $\mu$  desconhecido e  $\sigma^2$  conhecido, colhe-se uma amostra de dimensão  $n$ .

a) Construa um intervalo de confiança de  $100\alpha\%$  para  $\mu$  ( $0 < \alpha < 1$ );

b) Designando por  $L(n, \alpha)$  a amplitude do intervalo obtido, verifique que é independente do parâmetro desconhecido  $\mu$ ;

c) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(n, \alpha)$  e interprete este resultado tendo em vista a definição de intervalo de confiança e a distribuição do universo.

## IV

Considere que das hipóteses relativas à distribuição dos erros do modelo de regressão linear múltipla é relaxada a relativa à normalidade. Indique quais as

implicações que essa diminuição trás, em particular no que respeita aos estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros do modelo, valores esperados, variâncias e covariâncias desses estimadores.

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Programação Matemática — Exame Final — 11 de Julho de 1974.

## I

5825 — Mostre que se uma função  $f$  está definida para os pontos de um conjunto convexo  $K \subset R^n$ , então uma condição necessária para que  $f$  seja convexa é que para qualquer  $\lambda \in R^1$  o conjunto

$$A = \{x \in K : f(x) \leq \lambda\}$$

seja convexo.

É esta condição também suficiente? Demonstre ou dê um contra-exemplo.

## II

Considere o seguinte programa linear

$$Q(x) = 10x_1 + 8x_2 + 15x_3 + 7x_4 + 9x_5 \stackrel{!}{=} \max \\ 9x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 1.$$

a) Escreva-o na forma canónica;

b) Calcule a sua solução optimal no caso de as duas últimas restrições serem substituídas por  $x_i = 0$  ou  $x_i = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) (programação booleana). Indique, nesse caso, qual o conjunto das soluções admissíveis e uma sua possível representação.

## III

Para  $x, p \in R^n$  e  $y, b \in R^m$  ( $n > m$ ), definiu-se o dual de

$$\min Q(x) = p^T x, Ax = b, x \geq 0$$

por

$$\max G(y) = y^T b, A^T y \leq p,$$

onde desapareceram as restrições ao sinal das componentes de  $y$ ; estas restrições que definem os conjuntos de soluções admissíveis dos dois programas

não podem ser, para além disso, substancialmente relaxadas.

Demonstre que: ou  $Ax = b$  possui uma solução  $x \in R^n$  ou  $A^T y = 0$ ,  $b^T y = 1$  possui uma solução  $y \in R^m$ , mas não ambos simultaneamente.

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS  
MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Programação Matemática  
— Exame Final — Epoca de Recurso — 8-11-1974.

## I

5826 — a) Mostre que se  $K$  for um conjunto convexo, então qualquer combinação convexa de um número arbitrário de pontos de  $K$  é ainda um ponto de  $K$ . É a mesma afirmação válida para uma combinação linear? Demonstre ou dê um contra-exemplo.

b) Sobre um conjunto convexo  $K$  está definida uma sucessão de funções convexas  $f_1, f_2, \dots$ , que convergem em todos os pontos de  $K$  para uma função  $f$ ; é  $f$  também uma função convexa? Justifique. Qual o resultado a que se chega se a sucessão  $\{f_n\}$  for de funções estritamente convexas?

## II

a) Se  $a^1, \dots, a^n \in R^m$  ( $n > m$ ), define-se o cone gerado por estes vectores como o conjunto de todos os pontos que são combinação linear deles com coeficientes não negativos:

$$C(a^1, \dots, a^n) = \left\{ x \mid x \in R^m, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a^i, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Mostre que  $C$  é um conjunto convexo.

b) Mostre que dos programas lineares com restrições

$$Ax = b, x \geq 0$$

e

$$A^T y \geq 0, b^T y < 0$$

com  $x \in R^n$ ,  $y \in R^m$  e  $n > m$ , um e só possui soluções admissíveis.

## III

Resolva o programa linear seguinte:

$$Q(x) = 250x_1 + 45x_2 \stackrel{!}{=} \text{Max} \\ 150x_1 + 25x_2 \leq 10000$$

$$x_1 + 0,2x_2 < 72$$

$$x_1 < 50$$

$$x_2 < 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM ECONOMIA  
— 4.º Ano — Econometria — Teste de Frequência — 15-6-1974.

## I

5827 — Considere o seguinte modelo simplificado relativo a uma macro-economia:

$$C_i = \alpha_1 + \alpha_2 Y_i + \alpha_3 C_{i-1} + \alpha_4 i + u_i$$

$$I_i = \beta_1 + \beta_2 (C_i - C_{i-1}) - \beta_3 r_{i-1} + v_i$$

$$Y_i = C_i + I_i + G_i$$

onde:

$C_i$  = consumo nacional no ano  $i$ ;

$I_i$  = investimento líquido do ano  $i$ ;

$Y_i$  = rendimento nacional no ano  $i$ ;

$G_i$  = despesas públicas em bens e serviços no ano  $i$ ;

$r_{i-1}$  = taxa de juro no ano  $i-1$ ;

$i = 2, 3, \dots, n$  os sucessivos anos para os quais se dispõem de dados estatísticos;

$u_i$  e  $v_i$  são termos estocásticos e

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$  são os parâmetros desconhecidos.

a) Indique quais as variáveis endógenas e quais as predeterminadas no modelo acima;

b) Exprima as equações deste modelo sob a forma de um sistema de equações lineares em que o vector das incógnitas traduz as variáveis endógenas; qual a condição para que este sistema seja solúvel e possua uma solução única?

c) Se se pretender estimar os parâmetros  $\beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$  da 2.ª equação, que método se deverá utilizar? Enuncie a condição que deve assumir relativamente à distribuição dos termos estocásticos para que os estimadores sejam centrados.

## II

No quadro seguinte encontram-se indicados e calculados vários valores que relacionam os custos de produção ( $x$ ) e os volumes de vendas ( $y$ ) de uma certa empresa; admite-se que o volume de vendas é uma função linear dos montantes gastos com a produção ( $y = \alpha + \beta x$ ):

$x_i$	$y_i$	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i^2$	$\hat{y}_i$	$e_i$	$e_i^2$
3	2	-4	-7	28	16	9	2,40		0,16
5	6	-2	-3	6	4	25	5,70		0,09
7	9	0	0	0	0	49	9,00		0,00
9	13	2	4	8	4	81	12,30		0,49
11	15	4	6	24	16	121	15,60		0,36
$\Sigma$ 35	45	0	0	66	40				1,10

Calcule:

a) Os estimadores  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  obtidos pelo método dos menores quadrados;

b)  $\Sigma e_i$ ;

c) Os estimadores da variância dos erros, pelos métodos dos menores quadrados e da máxima verosimilhança;

d) A covariância entre  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ ;

e) Sabendo que  $\Sigma (y_i - \bar{y})^2 = 110$ , o coeficiente de correlação  $r$ ;

f) Sabendo que  $\int_{-\infty}^{3,18} f_{13}(x) dx = 0,975$ , construa intervalos de confiança de 95% para  $\alpha$  e  $\beta$ ;

g) Com base nos valores que calculou na alínea f), se a empresa antevê que o seu orçamento das despesas de produção se elevará a 14 durante o ano subsequente, determine quais os limites que se poderão prever para o volume de vendas.

### III

Num trabalho recente sobre a estrutura da produção agrícola angolana (Alves da Rocha, M. J. e Pereira de Sousa, A., Um caso de aplicação da função de produção de Cobb-Douglas na análise da agricultura tradicional, Simpósio de Planeamento Regional, 4-8 de Março de 1974), fizeram-se ajustamentos do tipo:

$$(*) \quad y = \alpha \cdot x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot x_3^{\beta_3}$$

às produções da mandioca e do milho em Angola, onde  $y$  representa o rendimento,  $x_1$  a área das culturas,  $x_2$  o número de trabalhadores e  $x_3$  o capital empregue nas explorações, em unidades adequadas.

Os autores obtiveram para os produtos em estudo os seguintes ajustamentos:

Mandioca:

$$y = 5,68756 \cdot x_1^{1,43721} \cdot x_2^{-0,475647} \cdot x_3^{-0,110413}$$

Milho:

$$y = 0,181138 \cdot x_1^{0,665497} \cdot x_2^{0,202881} \cdot x_3^{0,297387}$$

a) Deduza as equações normais para as regressões do tipo (\*); de acordo com o método dos menores quadrados utilizado, qual o número mínimo de observações que permitem estimar os parâmetros do modelo? Justifique a resposta. (Nota: os Autores citados usaram, respectivamente, 18 observações para a mandioca e 26 para o milho.)

b) Qual o significado dos expoentes negativos no caso do ajustamento da mandioca? Dê uma interpretação tão directa quanto possível, podendo utilizar argumentos de natureza económica.

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM ECONOMIA — 4.º Ano — Econometria — Exame Final — 1.ª Chamada — 27 de Julho de 1974.

5828—Considere o seguinte modelo que equaciona, de acordo com a teoria keynesiana, as relações entre o rendimento e o consumo de agregados económicos:

$$C_i = \alpha + \beta Y_i + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$Y_i = C_i + I_i$$

Suponha que as variáveis endógenas são  $C$  e  $Y$ , que  $I$  é uma variável exógena e  $u_i$  é um termo estocástico tal que  $E(u_i) = 0$ ,  $E(u_i u_j) = 0$ ,  $E(u_i^2) = \sigma^2 > 0$ ,  $E(u_i I_j) = 0$  e  $V(I_j) = \sigma_I^2 > 0$  para todos os  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

a) Existem variáveis com retardo neste modelo? E predeterminadas? Justifique.

b) Determine estimadores dos parâmetros cujas equações exprimem as variáveis endógenas como funções lineares da variável exógena. São estes estimadores centrados?

c) O facto de  $u_i$  e  $I_j$  não estarem correlacionados implica o mesmo relativamente a  $u_i$  e  $Y_j$ ? Dê uma

justificação matemática (analítica) e, se desejar também uma de ordem económica (descritiva).

d) Mostre que, designando por  $\hat{\beta}_n$  um dos estimadores de  $\beta$  calculado com base numa amostra qualquer de dimensão  $n$  virá, em geral, sob a condição de que  $\beta < 1$  (modelo keynesiano),  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta}_n > \beta$  ou, mais rigorosamente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\hat{\beta}_n > \beta) = 1$ .

II

No quadro seguinte encontram-se indicados valores observados que relacionam os custos de produção ( $x$ ) e os volumes de vendas ( $y$ ) de uma certa empresa; admite-se que o volume de vendas é uma função linear dos montantes gastos com a produção ( $y = \alpha + \beta x$ ):

$x_i$	3	7	5	9	11
$y_i$	2	9	6	13	15.

Calcule:

- a) Os estimadores  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  obtidos pelo modelo linear geral (forma matricial).
- b) Ainda através do modelo linear geral (forma matricial) determine os estimadores de  $V(\alpha)$ ,  $V(\beta)$  e  $Cov(\alpha, \beta)$ .
- c)  $\Sigma e_i$ ; justifique o resultado.

Indivíduos com os atributos 1, 4, 6:	3 indivíduos com os consumos 2, 4, 6 litros/mês
» » » » 1, 5, 6: 2	» » » » 1, 2 litros/mês
» » » » 1, 4, 7: 2	» » » » 3, 2 litros/mês
» » » » 1, 5, 7: 3	» » » » 4, 1, 1 litros/mês
» » » » 2, 4, 6: 8	» » » » 8, 4, 12, 7, 5, 4, 10, 4 litros/mês
» » » » 2, 5, 6: 3	» » » » 3, 3, 1 litros/mês
» » » » 2, 4, 7: 5	» » » » 10, 11, 6, 7, 8 litros/mês
» » » » 2, 5, 7: 2	» » » » 3, 5 litros/mês
» » » » 3, 4, 6: 1	» » » » 2 litros/mês
» » » » 3, 5, 6: 2	» » » » 1, 2 litros/mês
» » » » 3, 4, 7: 3	» » » » 4, 1, 7 litros/mês
» » » » 3, 5, 7: 2	» » » » 7, 4 litros/mês.

d) Sabendo que  $\Sigma (y_i - \bar{y})^2 = 110$ , o coeficiente  $r^2$ ; comente o resultado.

e) Sabendo que  $\int_{-\infty}^{5,84} f_{z_2}(x) dx = 0,95$ , construa intervalos de confiança de 99 % para  $\alpha$  e  $\beta$ .

f) Com base nos valores que calculou em e), se a empresa antevê que o seu orçamento das despesas de produção se elevará a 12 durante o ano subsequente, determine quais os limites que se poderão prever para o volume de vendas.

III

Uma empresa de estudos de mercado realizou um inquérito sobre o consumo de cerveja entre um grupo de consumidores escolhidos ao acaso, utilizando as características idade, sexo, raça, subdivididos pelos seguintes atributos:

- idade: menos de 18 anos — atributo 1
- de 18 a 50 anos — atributo 2
- mais de 50 anos — atributo 3
- sexo: masculino — atributo 4
- feminino — atributo 5
- raça: branca — atributo 6
- preta — atributo 7.

O consumo vem expresso em litros/mês. Os dados obtidos na amostra foram:

Construiu-se um modelo de regressão linear múltipla para estabelecer uma relação funcional entre o consumo ( $y$ ) e variáveis representativas destes grupos de atributos ( $x_1, x_2, \dots, x_{12}$ ). A matriz das observações e o vector dos valores da variável dependente são:

X												y
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	8
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	12
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	7
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	5
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	10
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	10
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	11
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	6
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	7
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	8
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7
0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	1	4

(36 observações).

a) Neste modelo não são considerados termos independentes; justifique a razão.

b) Sob a hipótese de os erros do modelo possuírem esperança matemática nula, variância constante e serem mutuamente independentes deduza os estima-

dores, pelo método dos menores quadrados dos coeficientes das variáveis independentes  $x_1, x_2, \dots, x_{12}$ , relativas aos conjuntos de atributos considerados.

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM ECONOMIA  
— 4.º Ano — Econometria — Exame Final — 2.ª chamada — 31-7-1974.

## I

5829 — Admite-se que o volume de vendas  $y$ , de uma empresa fabril se pode exprimir linearmente como função dos gastos de produção  $x$ , de tal modo que para os últimos 6 meses do ano o valor da função (volume de vendas) sofre o acréscimo de uma constante, isto é,

$$y = \alpha_1 + \gamma x \text{ durante os primeiros 6 meses do ano}$$

$$y = \alpha_2 + \gamma x \text{ durante os últimos 6 meses do ano} \\ (\alpha_1 < \alpha_2).$$

Para estimar  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\gamma$  introduziu-se uma variável fictícia  $z$ , de tal modo que

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 z,$$

com  $z = 0$  para os pares  $(x_i, y_i)$  dos primeiros 6 meses do ano e  $z = 1$  para os restantes.

a) Exprima os estimadores de  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\gamma$  em termos dos de  $\beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$  e enuncie as hipóteses que deve assumir relativamente à distribuição dos erros do modelo para que esses estimadores sejam os de menor variância na classe dos estimadores lineares;

b) Para as observações (fictícias):

$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{ccc} 7 & 8 & 6 \\ 10 & 12 & 11 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{observações efectuadas durante} \\ \text{os primeiros 6 meses do ano;} \end{array}$$

$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{cccc} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 13 & 12 & 14 & 15 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{idem, durante os últimos} \\ \text{6 meses,} \end{array}$$

construa a matriz das observações, de acordo com a técnica indicada acima, e escreva o sistema das equações normais de  $\beta$  (sem o resolver) sob a forma matricial.

## II

Obtida uma amostra de 8 famílias, observaram-se os valores (em milhares de escudos mensais) para os consumos  $C$ , e rendimentos  $Y$  dessas famílias, que se apresentam na tabela seguinte:

$Y_i$	$C_i$	$Y_i^2$	$Y_i C_i$	$C_i^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(C_i - \bar{C})^2$	$(Y_i - \bar{Y})(C_i - \bar{C})$	$e_i$	
1	1	1	1	1	36	16	24	-0,181	
3	2	9	6	4	16	9	12	-0,453	
4	4	16	16	16	9	1	3	0,911	
6	4	36	24	16	1	1	1	-0,361	
8	5	64	40	25	1	0	0	-0,633	
9	7	81	63	49	4	4	4	0,731	
11	8	121	88	64	16	9	12	0,459	
14	9	196	126	81	49	16	28	-0,449	
$\Sigma$	56	40	524	364	256	132	56	84	—

a) Admitindo que existe uma relação linear do tipo  $C = \alpha + \beta Y$ , entre  $C$  e  $Y$ , estime os parâmetros desconhecidos do modelo com base na amostra acima, pelo método dos menores quadrados;

b) Sabendo que  $\Sigma e_i^2 = 2,541$ , calcule os estimadores da variância dos erros, pelo método dos menores quadrados e da máxima verosimilhança, sob a hipótese de distribuição normal dos erros, e com base nisso a variância dos estimadores calculados em a);

c) Calcule o coeficiente de correlação  $r$ , entre os rendimentos e os consumos. Comente o resultado, relativamente à variação dos consumos provocada por variações dos rendimentos;

d) Supondo que os valores da amostra vinham todos multiplicados por 12, isto é, que os consumos e rendimentos se exprimiam em milhares de escudos anuais, qual o valor de  $r$  que se obteria? Justifique;

e) No modelo acima obviamente que  $\alpha$  representa o consumo autónomo e  $\beta = dC/dY$  a propensão marginal ao consumo; é claro que  $\beta < 1$ .

Sabendo que  $\int_{-\infty}^{1,44} f_{t_0}(x) dx = 0,9$  construa um intervalo de confiança de 80% para o consumo autónomo  $e$ , com base nele, estime qual a variação no consumo que se pode antever para uma família cujo rendimento mensal é de 16 contos. Dê uma justificação de natureza económica para os intervalos que obteve (para  $Y = 0$  e  $Y = 16$ , respectivamente).

III

Considere os seguintes modelos de regressão que relacionam uma variável independente com uma variável dependente:

- $y = \alpha + \beta x$ ;
- $y = \alpha \beta^x$ ;
- $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ ;
- $y = \alpha + \beta x + \text{sen } \frac{2\pi x}{12}$ .

a) Deduza as equações normais nos casos dos modelos 2. e 4. acima;

b) Qual o número mínimo de observações que permitiriam estimar o parâmetros nos vários casos considerados? Justifique as respostas;

c) Qual o significado no modelo 4. do aparecimento do termo não-linear  $\text{sen } \frac{2\pi x}{12}$ ? Dê uma interpretação tão directa quanto possível, podendo utilizar argumentos de natureza económica;

d) Dos modelos acima qual o que lhe parece mais adequado para o ajustamento dos seguintes dados do valor da produção mensal de artigos de vestuário de uma fábrica de confecções:

Mês	Valor
Fevereiro	148
Março	157
Abril	153
Maió	137
Junho	115
Julho	142
Agosto	163
Setembro	170
Outubro	168
Novembro	152
Dezembro	130
Janeiro	157
Fevereiro	178
Março	187
Abril	183
Maió	167
Junho	144
Julho	172
Agosto	193
Setembro	202
Outubro	198
Novembro	182
Dezembro	160
Janeiro	187
Fevereiro	208

Justifique a resposta, dizendo qual o processo analítico que utilizaria, num esquema numérico, para escolher a regressão mais adequada.



## À guisa de explicação...

A libertação do nosso País em Abril de 1974 criou novas condições e abriu perspectivas para uma alteração substancial das actividades culturais e de desenvolvimento do ensino, até então sempre sujeitas às mais diversas formas de repressão e obscurantismo.

No que respeita ao ensino da matemática e, particularmente, às duas revistas existentes, a «Gazeta de Matemática» e a «Portugaliae Mathematica», parecia fácil uma coordenação geral dos matemáticos portugueses no sentido do aproveitamento consequente das possibilidades que estas publicações ofereciam — tanto a professores como a alunos.

É certo que no último trimestre de 1973 tinham sido criadas condições para registar a Sociedade Portuguesa de Matemática (Estatutos de 1940), por intermédio da Federação Mundial dos Trabalhadores Científicos, como sociedade de estatuto internacional, na Organização Internacional do Trabalho (OIT), já que na gestão de Marcelo Caetano era impossível fazê-lo nos moldes da legislação então vigente, e para aumentar a difusão e a colaboração na «Portugaliae Mathematica», através da criação de uma Comissão Internacional de Redacção. Os documentos relativos a estas iniciativas serão publicados no próximo número da GM.

Os resultados destes esforços perderam, porém, todo o seu significado, uma vez criadas as referidas novas condições e perspectivas.

Apenas, porém, em Fevereiro de 1977 conseguiu a GM contactar o grupo de professores (FCL e outras Escolas) que se propunham constituir a nova Sociedade Portuguesa de Matemática e que a registaram em escritura pública com data de 10. X. 1977.

Simultaneamente, enviou a GM ao Instituto Nacional de Investigação Científica (INIC) um pedido de subsídio como consta do Doc. 1, a seguir publicado.

A Faculdade de Ciências do Porto apoiou esse pedido de subsídio (Doc. 2); e dele foi recebida a quantia de cem mil escudos, como consta dos Docs. 3 e 4.

Razões de saúde do signatário, seguidas de férias na Faculdade de Ciências de Lisboa impediram que a GM apresentasse à SPM a proposta contida no Doc. 5 antes da data neste indicada, 27. XI. 1977.

A GM aguarda ansiosamente com interesse a necessária contra-proposta, da parte da SPM, e o consequente prosseguimento das negociações, e da parte do INIC a concessão dos restantes duzentos mil escudos do subsídio solicitado, factores essenciais para a continuidade da sua publicação, nos termos e nos moldes em que a dignificação da actividade científica em Portugal exige.

Lisboa, 30 de Dezembro de 1977

Pela Gazeta de Matemática

*José Gaspar Teixeira*

DOC. 1

GAZETA DE MATEMÁTICA  
LISBOA

Lisboa, 14 de Fevereiro de 1977

Senhor Presidente do  
Instituto Nacional de Investigação Científica  
Lisboa

Ex.<sup>mo</sup> Senhor Presidente:

Como Director e Redactor da revista científica portuguesa «Gazeta de Matemática», tomo a liberdade de me dirigir ao Instituto Nacional de Investigação Científica, solicitando a atenção para os pontos que me permito expor:

1 — A revista Gazeta de Matemática, «jornal dos concorrentes ao exame de aptidão e dos estudantes de matemática das escolas superiores», iniciou a sua publicação em 1940, tendo, desde então, uma existência regular — quatro números anuais — e encontrando-se actualmente em publicação os fascículos 133-136.

Até 1947 a sua existência decorreu normalmente de acordo com os condicionalismos então inerentes à publicação de revistas científicas — ausência de qualquer financiamento da parte do Estado, gratuidade em todos os serviços excepto o de composição, impressão, papel e encargos de correio.

2 — Em 1947 a situação altera-se profundamente, devido ao facto de os seus principais colaboradores, professores do ensino oficial, terem sido visados pelas medidas que constituíram a grande ofensiva fascista contra a Universidade Portuguesa: tais colaboradores foram expulsos do ensino oficial, alguns sentiram-se forçados a sair do país, outros a mudar de profissão.

3 — A nova situação traduziu-se num conjunto de dificuldades aparentemente intransponíveis pois estavam praticamente fechadas as portas à difusão normal da revista nas Universidades e outras Escolas Oficiais. No entanto certas medidas foram tomadas tais como

3.1 — registo em propriedade privada, da revista (simultâneamente com outra revista, *Portugaliae Mathematica*).

3.2 — criação de uma tipografia — a Tipografia Matemática Ld.<sup>a</sup> — com o objectivo fundamental de garantir a publicação regular das duas revistas, *Gazeta de Matemática* e *Portugaliae Mathematica*.

Assim se explica a existência de uma sociedade industrial por acções, a Tipografia Matemática Ld.<sup>a</sup>, cujos sócios são uma sociedade editora — *Gazeta de Matemática* Ld.<sup>a</sup> — dois tipógrafos, dois professores universitários de física, sete

professores universitários de matemática e três economistas (antigos assistentes do I. S. C. E. F.).

Assim se explica que a Tipografia Matemática passasse a receber visitas da PIDE e a Gazeta de Matemática a ser referida, em certos meios, com insinuações incorrectas, por vezes provocatórias.

4 — As revistas continuam apesar de tudo a sua publicação regular. Simplesmente a Gazeta vê-se obrigada a alterar o conteúdo e a natureza dos seus artigos e a partir de 1967 por razões económicas juntar em volume de não menos 96 págs. os 4 fascículos de 24 págs.

Mesmo assim, a Gazeta de Matemática deve inteiramente a sua sobrevivência, no aspecto financeiro, ao crédito que lhe tem sido concedido pela Tipografia Matemática que, neste momento, ultrapassa de largo o capital investido na própria tipografia.

5 — No momento presente estuda-se o «regresso da Gazeta de Matemática às Escolas Officiais Portuguesas», querendo significar com isto a criação de um amplo Corpo Redactorial constituído por professores oficiais que levem às escolas portuguesas através deste órgão, no campo da matemática e da ciência em geral

- 5.1 — informações sobre as matérias curriculares
- 5.2 — informações sobre questões pedagógicas
- 5.3 — informações sobre o movimento matemático
- 5.4 — artigos de iniciação à pesquisa
- 5.5 — registo e referências bibliográficas.

6 — Para a prossecução destes objectivos e de outros que oportunamente seriam apresentados ao Instituto Nacional de Investigação Científica, mas principalmente para continuidade da sua existência, seria necessário a obtenção de um subsídio concedido à revista Gazeta de Matemática afim de

- 6.1 — liquidar a dívida acumulada à Tipografia Matemática Ld.<sup>a</sup>
- 6.2 — constituir um pequeno fundo de maneo para garantir a sua continuidade.

Tal subsídio consistiria em

- 6.3 — entrega imediata de 300 contos
- 6.4 — entrega de 60 contos anuais mais dois anos consecutivos para permitir a reinstalação da revista nas escolas secundárias, superiores e normais portuguesas.

7 — Como contra partida a estes auxílios financeiros poderia a Gazeta de Matemática

- 7.1 — fornecer um número razoável de colecções dos exemplares ainda não esgotados que o Instituto Nacional de Investigação Científica poderia, por sua vez, distribuir pelas Escolas, Bibliotecas e Instituições, como melhor entendesse.
- 7.2 — Um número a estabelecer, de cada fascículo a publicar, para ser distribuído com a mesma finalidade ou outra.

8 — Em Anexos permito me juntar

8.1 — 1 exemplar do Ano I, Vol. I — 2.<sup>a</sup> edição;

1 exemplar do Ano XX, Fasc. 76-77;

1 exemplar do Fasc. N.º 100;

1 exemplar do último volume publicado.

O N.º 100 inclui além de uma extensa coleção de artigos de vária índole o índice dos colaboradores e o índice dos artigos por assuntos.

8.2 — Lista de publicações ou entidades estrangeiras com as quais há intercâmbio ou a quem a revista é oferecida.

Grato pela atenção concedida a esta solicitação, peço-lhe Senhor Presidente, que aceite respeitosos cumprimentos.

*José Gaspar Teixeira*

DOC. 2

FACULDADE DE CIÊNCIAS — UNIVERSIDADE DO PORTO

Porto, 12 de Fevereiro de 1977

Ex.<sup>mo</sup> Senhor

Presidente do Instituto Nacional de Investigação Científica

Tendo conhecimento de que o Dr. Gaspar Teixeira se dirigiu a V. Ex.<sup>a</sup> solicitando um auxílio financeiro para a «Gazeta de Matemática», vimos afirmar a V. Ex.<sup>a</sup> que achamos da maior justiça a concessão de um tal auxílio, sem o qual se corre o risco de interromper a publicação de uma Revista que já prestou grandes serviços a estudantes e professores de Matemática, do nosso país.

Com os melhores cumprimentos

*Ruy Luís Gomes*

*José Morgado*

## DOC. 3

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA  
 INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA

O Presidente do Instituto Nacional de Investigação Científica por despacho de 5 de Abril de 1977 resolveu conceder à Revista «Gazeta de Matemática» o subsídio de 100 000\$00 (cem mil escudos) destinado a: garantir a continuidade da publicação da Revista «Gazeta de Matemática», liquidando parte dos encargos assumidos relativamente à Tipografia Matemática, de forma a permitir que num prazo relativamente curto se defina a orientação da Revista e a sua ligação à Sociedade Portuguesa de Matemática que o Instituto considera indispensável para continuar a subsidiá-la.

O Director da Revista «Gazeta de Matemática» compromete-se a aplicar o subsídio concedido nos termos que a seguir se indicam:

- a) Utilizar a verba concedida para os fins expressos pelo Presidente do Instituto Nacional de Investigação Científica.
- b) Enviar a este Instituto as contas da aplicação do subsídio concedido.

Lisboa, 5 de Abril de 1977.

*José Gaspar Teixeira*

## DOC. 4

GAZETA DE MATEMÁTICA, LDA.  
 LISBOA

A revista «Gazeta de Matemática» recebeu do Instituto Nacional de Investigação Científica a quantia de 100 000\$00, como subsídio, para amortização do seu débito à Tipografia Matemática, Lda.

Esta, por sua vez, deu-lhe o destino seguinte:

Salários relativos aos meses de Março e Abril de 1977:

Pessoal da oficina	65 370\$00
Pessoal de escritório	24 800\$00
Fornecedores	9 830\$00
	<hr/>
	100 000\$00

A dívida da Gazeta à Tipografia era de 189 592\$00, ficando portanto nesta data ainda em 89 592\$00.

Lisboa, 6 de Maio de 1977.

*José Gaspar Teixeira*

## DOC. 5

## DOCUMENTO APRESENTADO COMO POSSÍVEL BASE DE DISCUSSÃO

- 1 — A Gazeta de Matemática (GM) não é vendável, negociável sob forma equivalente ou outra qualquer, a qualquer entidade individual ou colectiva.
- 2 — A GM deve associar-se à Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), constituída por escritura pública no dia 10.X.1977, publicada no Diário da República de 24.XI.77, com a intenção e o espírito definido no art.º 1.º dos Estatutos da mesma SPM.
  - 2.1. Considera-se necessário expressar que este tipo de associação e colaboração tornou-se viável dentro do contexto criado pela libertação do País em 1974, e nunca seria possível com personalidades ou entidades colectivas que tivessem tomado, privada ou publicamente, posições atentórias das liberdades fundamentais, em especial, no campo da cultura e nomeadamente contra a antiga Sociedade Portuguesa de Escritores com a qual a GM tinha estreitos laços de amizade associativa e formas de realização de objectivos comuns.
- 3 — A GM, no presente momento, integra um património cultural e científico (insiste-se não negociável) expresso através dos seus 38 anos de existência e publicação regular e ininterrupta, além de um património material avaliado em cerca de quinhentos milhares de escudos.
- 4 — A GM, no momento presente, recebe do Instituto Nacional de Investigação Científica, segundo acordo oral estabelecido entre as duas Partes, um subsídio de trezentos milhares de escudos, a fim de poder solucionar problemas relativos a dificuldades financeiras e outras criadas ao longo dos seus muitos anos de difícil existência, devendo em contra partida fornecer ao mesmo INIC. ou a quem esta Entidade determinar....., exemplares da Revista para divulgação nas Escolas e outras instituições portuguesas, para expandir a informação e o conhecimento matemático.
- 5 — A SPM compromete-se, *em termos a definir*, a participar efectivamente na reestruturação da Revista em ordem à sua actualização e para uma eficiente divulgação e utilização da GM nas Escolas Portuguesas. Durante um período de dois anos esta associação SPM/GM contemplará um subsídio, se necessário, para publicação e difusão da Revista com o propósito de evitar o agravamento da sua situação financeira, segundo o estabelecido no acordo INIC/GM atrás referido.
- 6 — A SPM compromete-se, como sociedade científica, a promover a realização de algumas actividades análogas a outras já efectuadas na GM, como por exemplo:
  - a) realização de cursos para tradução de textos de matemática e física em línguas estrangeiras;
  - b) ordenação da biblioteca da GM, e criação de condições de consulta da mesma aos estudiosos;
  - c) fomentar a colaboração dos seus Membros em relação a outras revistas ou publicações de divulgação científica a editar pela Editora Gazeta de Matemática, Lda.; etc.

A Gazeta de Matemática

1.ª redacção em 27 de Novembro de 1977.

2.ª redacção incluindo emendas propostas pelo grupo do Porto, 9 de Dezembro de 1977.

---

---

ANGARIE ASSINANTES PARA  
A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento  
de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 120\$00