GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXVII **N.° 101-102** JAN.-JUNHO 1966

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

G A Z E T A D E M A T E M Á T I C A

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo *prévio* entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2.

A natureza, a extensão e a origem da colaboração pedida para o n.° 100 (especial) da «Gazeta de Matemática» provocaram um atraso do mesmo. Contando neste momento cerca de 200 páginas impressas em breve será distribuído aos nossos assinantes.

Deste facto resultou a decisão de, para efeitos de cobrança, se ter considerado o referido n.° 100 como duplo integrado no ano de 1965 e decidido prosseguir na emissão do n.° 101-102 que será o primeiro do ano de 1966.

ANO XXVII – N.os 101-102 GAZETA DE MATEMÁTICA JAN./JUNHO – 1966

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

O problema de Cauchy para a equação não linear das ondas em espaços de Hilbert

por **Luis Adauto Medeiros**

§ 1 – Introdução

O objectivo dêste artigo é fazer um resumo dos resultados sûbre o problema de CAUCHY para a equação das ondas, que obtivemos nos dois últimos anos, nos Departamentos de Matemática das Universidades de Yale e de Chicago. Nesta introdução, faremos um breve histórico do problema a resolver, das dificuldades obtidas, assim como dos problemas surgidos.

Tomaremos como ponto de referência o trabalho [1] (*) de BROWDER, aonde encontra-se um método abstrato para a integração da equação não linear das ondas. O trabalho de BROWDER tem como origem o de JÖRGENS [4], que estuda um problema análogo, limitando-se ao espaço Euclidiano R^3 e usando métodos analíticos concretos para a obtenção de seus resultados. Em suma, podemos sintetizar as idéias como segue. Nas aplicações dos Métodos Matemáticos à Física, surge a necessidade de resolver o problema de CAUCHY para a equação não linear das ondas, como por exemplo

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + k u^3 = 0,$$

aonde Δ é o operador de LAPLACE, t o tempo, k é uma constante e u uma função numérica real, definida no $R^3 \times [0, T]$. Com o objetivo de abranger uma classe mais vasta de equações do tipo (1), JÖRGENS em [4], estudou o problema de CAUCHY para equações da forma

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + F'(|u|^2) u = 0,$$

sendo F uma função numérica real com derivada F'.

Tomando as equações da forma (2) como modêlo, BROWDER em [1], deu uma formulação abstrata do problema de CAUCHY para equações do tipo (2). De maneira mais explícita, demonstrou a existência e unicidade da solução do problema de CAUCHY, para a classe de equações operacionais

$$(3) \qquad \frac{d^2 u}{d t^2} + A u + M(u) = 0$$

(*) Números entre colchetes referem-se à bibliografia.

Resumo da tèse de doutoramento apresentada ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas do Brasil, Rio de Janeiro, GB.

em um espaço de HILBERT H. Em (3), A é um operador de H, com domínio $D(A)$ denso em H, limitado inferiormente por $k > 0$ e self adjunto. O têrmo $M(u)$ é uma aplicação, não necessariamente linear, de $D(A^{1/2})$ em H, satisfazendo a certas restrições (cf. § 4, $M1$, $M2$, $M3$, $M4$). BROWDER aplicou o cálculo operacional para operadores self adjuntos em espaços de HILBERT, para obter os seus resultados. As derivadas que aparecem em (3), são no sentido da topologia definida pela norma de H. Como aplicação de seus resultados abstratos, considerou o caso em que $H = L^2(R^N)$, (espaço de HILBERT das classes de funções integráveis à LEBESGUE no espaço euclidiano real R^N, de dimensão N), A é uma realização self adjunto em $L^2(G)$ de um operador diferencial parcial do tipo elítico e $M(u) = F'(|u|^2)u$. Quando êstes resultados são particularizados para $N = 3$, A é o operador de LAPLACE no R^3, obtém-se os resultados de JÖRGENS.

Tomaremos como modêlo para o nosso trabalho, as equações do tipo (3) e apresentaremos, nesta fase de nosso estudo, como única inovação, a perturbação no coeficiente de (3), isto é, estaremos interessados em equações da forma

$$(4) \qquad \frac{d^2 u}{d t^2} + A(t)\,u + M(u) = 0$$

onde $A(t)$, para t em R^+, (coleção dos números reais não negativos), é uma família de operadores de H, satisfazendo a certas condições que fixaremos a seguir (cf. § 2). No parágrafo 5 será dada uma aplicação para o caso em que A é uma realização autoadjunta em $L^2(G)$, (G uma região limitada do R^N) de um operador elítico de segunda ordem, com coeficientes variáveis. Note-se que o resultado pode ser aplicado a operadores de ordem $2m$, trazendo um pouco mais de trabalho nos cálculos de verificação de algumas hipóteses.

O método usado por BROWDER em [1], não se adapta naturalmente ao caso de coeficientes dependendo do tempo. Por esta razão, procuramos transformar a equação (4) em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, mediante as mudanças de variáveis $v = \frac{du}{dt}$ e a seguir $x = A(t)^{1/2}u$ $y = v$. Consequentemente, uma primeira etapa do problema seria a de precisar as condições a serem assumidas sôbre a família $A(t)$ para que êste método tivesse sucesso. Nos casos mais frequentes de realização de operadores diferenciais parciais, com condições de DIRICHLET nulas sôbre a fronteira de G, sabe-se que o domínio de $A(t)$, o qual representaremos por $D(A(t))$, não varia com $t \in R^+$. Daí resulta que, do ponto de vista das aplicações, é natural supormos que $D(A(t))$ não varia com o tempo t. Além desta observação, notemos que a mudança de variáveis mencionada anteriormente, envolve a raiz quadrada positiva de $A(t)$. Consequentemente, impondo a $A(t)$ as necessárias condições que assegurem a existência da sua raiz quadrada positiva $A(t)^{1/2}$, apresentam-se como problemas naturais, os seguintes:

1. Caracterizar o domínio da raiz quadrada positiva $A^{1/2}$ de um operador self adjunto A, limitado inferiormente por uma constante positiva,

2. Dada uma família $\{A(t)\}$, $t \in R^+$, de operadores de H, determinar as condições a serem impostas a $A(t)$, de tal modo que se $D(A(t))$, fôr constante, então $D(A(t)^{1/2})$ também será constante.

3. Se para cada $t \in R^+$ a função $v = A(t)u$ de $D(A(t)) \to H$ fôr fortemente diferenciável para todo $u \in D(A(t))$, resultará daí que

$\omega(t) = A(t)^{1/2} z$ será diferenciável, no mesmo sentido, para todo $z \in D(A(t)^{1/2})$?

No parágrafo 2 encontram-se as respostas às questões 1 e 2 enquanto no parágrafo 3 encontra-se a resposta à questão 3.

De posse dos resultados obtidos nos parágrafos 2 e 3, voltaremos no parágrafo 4 ao problema de CAUCHY para a equação (4). Através da mudança de variáveis mencionada anteriormente, reduz-se o problema de CAUCHY para (4) ao caso de uma equação de primeira ordem, em um espaço de HILBERT $\mathcal{H}$, soma direita de H com H. Para integrar a equação transformada de (4) em $\mathcal{H}$, usamos os métodos de KATO [5], BROWDER [7] e o teorema do ponto fixo de PICCARD-BANACH.

O parágrafo 5 contém um exemplo não trivial de uma equação das ondas com têrmo não linear, com operadores de segunda ordem com coeficientes dependendo do tempo.

É importante observar que equações operacionais de segunda ordem do tipo (3), também foram estudadas por SEGAL [7], BROWDER e STRAUSS [8]. Recentemente, MAMEDOV, [6], anunciou certos resultados sôbre as soluções das equações do tipo (4) com diferentes hipóteses sôbre $A(t)$ e sôbre a parte não linear.

Aproveitamos esta oportunidade para agradecer ao Prof. FELIX E. BROWDER, da Universidade de Chicago, por nos ter proposto esta questão e por suas valorosas sugestões nas fases decisivas dêste trabalho.

Ao Prof. LEOPOLDO NACHBIN, do Conselho Nacional de Pesquisas e da Universidade do Brasil, desejamos deixar explícita a nossa gratidão pessoal por sua constante assistência e encorajamento, particularmente quando fomos estagiário no Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas, durante os anos 1959-1961.

Também agradecemos ao Prof. FRANK J. HAHN da Yale University, pelas discussões estimulantes que tivemos.

§ 2 — Sôbre o domínio da raiz quadrada de um operador

Neste parágrafo fixaremos a notação, certas hipóteses sôbre a família $\{A(t)\}$, $t \in R^+$ e responderemos as questões 1 e 2 sôbre a raiz quadrada $A(t)^{1/2}$, propostas anteriormente. Não faremos as demonstrações, pois uma exposição completa será publicada em Notas de Matemática, coleção publicada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas.

Seja H um espaço de HILBERT complexo, com produto escalar (1) e norma $\| \ \|$. Consideremos uma família $\{A(t)\}$. $t \in R^+$, de operadores $A(t)$ de H. Inicialmente assumiremos o seguinte:

Hipótese I — Para cada t em R^+, o operador $A(t)$ possui domínio $D(A(t))$ denso em H, é self adjunto e limitado inferiormente por uma função contínua positiva $k(t)$, isto é, $(A(t)u \mid u) \geqq k(t)(u \mid u)$ para cada u em $D(A(t))$.

Pela Hipótese I, o inverso $A(t)^{-1}$ de $A(t)$ existe para cada t, é definido em H e limitado por $k(t)^{-1}$. No que segue, necessitaremos considerar o produto $A(s)A(t)^{-1}$, para $t, s \in R^+$, o que será possível sòmente se $A(t)$ tiver domínio constante relativamente a t, isto é, $D(A(t)) = D(A(0))$ para cada $t \in R^+$.

Hipótese II — Quando $t \in R^+$, o domínio de $A(t)$ é constante.

Daí resulta que $A(t)A(s)^{-1}$ é sempre definido e limitado para todo par t, s em R^+.

Hipótese III — Os operadores limitados $A(t)A(s)^{-1}$ serão supostos uniformemente limitados, isto é, existe uma constante M tal que $\| A(t)A(t_0)^{-1} \| \leqq M$ para todo $t, t_0 \in R^+$.

Hipótese IV — Os operadores limitados $A(t)A(t_0)^{-1}$ satisfazem a uma condição de LIPSCHITZ, isto é, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\|A(t)A(t_0)^{-1} - A(s)A(t_0)^{-1}\| \leqq k\,| - s|$$

para todo $t, t_0, s \in R^+$.

Pela Hipótese I, para cada $t \in R^+$, existe a raiz quadrada positiva $A(t)^{1/2}$ de $A(t)$, que é self adjunta e limitada inferiormente por $k(t)^{1/2}$ onde $k(t)$ é o limite inferior de $A(t)$ o que é uma simples consequência do teorema espectral. Também como consequência do teorema espectral, tem-se que $D(A(t)) \subseteq D(A(t)^{1/2})$, para cada t. Da Hipótese I, resulta que $(A(t)u|u) = \|A(t)^{1/2}\| \geqq k(t)(u|u)$ para todo u em $D(A(t))$. Portanto, $(A(t)u|u)$ induz em $D(A(t))$ uma estrutura métrica mais fraca do que a original de H, dada por $(|)$. Por um argumento análogo ao usado por FREDERICKS para obter extensões self adjuntas dos operadores simétricos semi limitados, nós podemos obter o domínio de $A(t)^{1/2}$ a partir do domínio de $A(t)$, mais precisamente, demonstra-se que $D(A(t)^{1/2})$ é o completado de $D(A(t))$ com relação a métrica induzida em $D(A(t))$ pelo produto escalar $[u|v] = (A(t)u|v)$, para $u, v \in D(A(t))$. Desta forma, demonstramos os seguintes fatos:

PROPOSIÇÃO 1. *Suponhamos que* $\{A(t)\}$ *satisfaz às Hipóteses I e II.*

Então, se existirem duas funções contínuas positivas $c(t)$ *e* $c'(t)$, *para* $t \in R^+$, *de tal modo que*

$$(5) \qquad c'(A(0)u|u) \leqq (A(t)u|u) \leqq \leqq c(t)(A(0)u|u)$$

para todo $u \in D(A(0))$, *daí resulta que* $D(A(t)^{1/2})$ *será constante.*

TEOREMA 1. *Suponhamos que* $\{A(t)\}$ *seja uma família de operadores de* H, *satisfazendo as condições I, II, III e IV. Daí resulta que* $D(A(t)^{1/2})$ *é constante.*

§ 3 — Diferenciabilidade da raiz quadrada de $A(t)$

Seja $A(t)$, $t \in R^+$, uma família de operadores de um espaço de BANACH B, com domínio constante $D(A(0))$. Diz-se que $A(t)$ é fortemente continuamente diferenciável com relação a t, quando o vetor $v(t) = A(t)u$ for contínuamente diferenciável em relação a norma de B, para todo u em D, isto é, quando

$$\lim_{\substack{t \to \xi \\ t \neq \xi}} (t - \xi)^{-1}(A(t)u - A(\xi)u)$$

existe no sentido da norma de B.

Seja $A(t)$ uma família satisfazendo às I, II, III, IV, V. Então pelo Teorema 1, segue-se que $A(t)^{1/2}$ possui domínio constante. Se considerarmos a família $\{A(t)^2\}$ em lugar de $\{A(t)\}$ com hipóteses semelhantes sôbre $A(t)^2$, concluiriamos que $A(t)$ possui domínio constante. Nas aplicações, temos a seguinte situação: $A(t)$, $A(t)^2$ e $A(t)^{1/2}$ possuem domínio constante e $A(t)$ é fortemente continuamente diferenciável. Representando por $A'(t)$ a derivada forte de $A(t)$ e por $C(t)$ o comutador de $A(t)$ e $A'(t)$ isto é, $C(t) = A(t)A'(t) - A'(t)A(t)$ também nas aplicações êste operador possui domínio constante e satisfaz a certas condições (cf. γ_1, γ_2), as quais tomaremos como hipóteses no caso abstrato. Desta forma, admitiremos que os operadores $A(t)^2$ e $C(t)$ satisfaçam às seguintes condições:

γ_1) $C(t)$ possui domínio constante e $D(C(t)) \supseteq D(A(t)^2)$, isto é, o domínio do quadrado de $A(t)$ está contido no domínio do comutador de $A(t)$ e $A'(t)$.

γ_2) Existe uma constante $\gamma, 0 \leqq \gamma < 1$ e uma função contínua positiva $h(t)$, tal que

$$\| C(t)\, u \| \leqq h(t) \{ \| A(t)^2 u \|^\gamma \| u \|^{1-\gamma} + \| u \| \}$$

para todo $u \in D(A(t)^2)$.

Daí resulta que quando $A(t)$ satisfaz à à Hipótese I e $A(t)^2$, $A(t)^{1/2}$, $A(t)$, $C(t)$ possuem domínio constante, então, vale o seguinte teorema:

Teorema 1. *Se* $\mathrm{A}(\mathrm{t})$ *for fortemente contìnuamente diferenciável para* $\mathrm{t} \in \mathrm{R}^+$ *e o comutador* $\mathrm{c}(\mathrm{t})$ *de* $\mathrm{A}'(\mathrm{t})$ *e* $\mathrm{A}(\mathrm{t})$ *satisfaz às condições* γ_1) *e* γ_2), *daí resulta que* $\mathrm{A}(\mathrm{t})^{1/2}$ *é também fortemente contìnuamente diferenciável.*

A demonstração do Teorema 1 baseia-se essencialmente em uma representação integral da potência fracionária de $A(t)$, isto é, na representação

$$A(t)^\alpha u = \frac{\cos(\pi\alpha/2)}{\pi} \int_0^\infty x^\alpha \{ (A(t) + i x I + \\ + (A(t) - i x I)^{-1} \} u\, dx$$

que é válida para todo $0 < \alpha < 1$ e u em $D(A(t)^\alpha)$. As Hipóteses γ_1 e γ_2, aparecem como condições suficientes para demonstrarmos a convergência de certa integral que aparece nos cálculos.

§ 4 — O problema de Cauchy

Seja $A(t)$ a família de operadores fixada no parágrafo 2. Vamos representar por $C^2(R^+, H)$ o conjunto das funções vetoriais, i. e., $u: R^+ \to H$, que são duas vezes fortemente contìnuamente diferenciáveis em H, com relação a t. Suponhamos $D(A(0)^{1/2})$ topologizado pela norma $\|u\|_{W_0} = \|A(0)^{1/2} u\|$. Seja $M(u)$ uma aplicação de $D(A(0)^{1/2})$ em H, (não necessariamente linear) satisfazendo as seguintes condições:

M_1) Para cada constante positiva C, existe uma constante positiva $k(C)$ tal que

$$\| M(u) \| \leqq k(C), \| M(u) - M(v) \| \leqq \\ \leqq k(C) \| u - v \|_{W_0}$$

para todo par $u, v \in D(A(0)^{1/2})$ e tal que $\|u\|_{W_0} < C$, $\|v\|_{W_0} < C$.

M_2) Existe um número real k_0 tal que para tôda $u: R^+ \to D(A(0)^{1/2})$ fortemente contìnuamente diferenciável com $\frac{du}{dt}$ uniformemente contínua, tem-se

$$Re \int_0^t (M(u)) \mid \frac{du}{dt}(s))\, ds \geqq \\ \geqq -k_0 \left(1 + \int_0^t \| A(s)^{1/2} u(s) \|^2 ds \right)$$

para todo $t > 0$, onde $Re\ z$ significa a parte real de z.

M_3) Para qualquer constante $C > 0$, $k(C) > 0$ tal que para tôda função $v: R^+ \to D(A(0)^{1/2})$ contìnuamente diferenciável tem-se:

$$\left\| \frac{d}{dt} M(v(t)) \right\| \leqq k(C) \left\| A(t)^{1/2} \frac{dv}{dt}(t) \right\|$$

desde que $\| A(0)^{1/2} v(t) \| < C$.

M_4) Para qualquer constante positiva $C > 0$, existe $k(C) > 0$ tal que para qualquer par de funções u, v de R^+ em $D(A(0)^{1/2})$, contìnuamente diferenciável, tem-se:

$$\left\| \frac{d}{dt} \{M(u(t)) - M(v(t))\} \right\| \leq k(C)$$
$$\{\| A(t)^{1/2} u(t) - A(t)^{1/2} v(t) \|\} + \| A(t)^{1/2} u'(t) - - A(t)^{1/2} v'(t) \|\}$$

para todo t em $[0, T]$, sendo

$$\| u'(t) \|^2 + \| A(0)^{1/2} u(t) \|^2 < C, \ \| v'(t) \|^2 + + \| A(0)^{1/2} v(t) \|^2 < C$$

Quanto ao comportamento de $A(t)^{1/2}$, assumiremos o seguinte:

Hipótese V — O operador $A(t)^{1/2}$ é fortemente contìnuamente diferenciável para todo $t \in R^+$ e $\frac{d A(t)^{1/2}}{dt} A(t)^{-\frac{1}{2}}$ é limitado por uma função contínua positiva.

Denomina-se equação não linear das ondas, com coeficientes dependendo do tempo, a tôda equação operacional que pode ser escrita sob a forma

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + A(t) u + M(u) = 0 \tag{6}$$

onde $u \in C^2(R^+; H)$, $A(t)$ e $M(u)$ como fixados anteriormente.

Nós consideraremos o problema de Cauchy

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + A(t) u + M(u) = 0 \tag{7}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \Psi \tag{8}$$

para $t \in R^+$.

Diz-se que $u : R^+ \to H$ é uma solução estrita do problema de CAUCHY (7) + (8), se $u = u(t) \in D(A(0))$, $u' = u'(t) \in D(A(0)^{1/2})$ para todo $t \in R^+$ e $A(t) u(t)$, $u''(t)$, $A(t)^{1/2} u(t)$ e $A(t)^{1/2} u'(t)$ forem contínuas sôbre todo intervalo $[0, T]$ de R^+ e as equações (7) + (8) são satisfeitas.

O Teorema 1 que segue, garantirá a existência de soluções estritas para o sistema (7) + (8) e os Teoremas 2 e 3 garantirão a dependência contínua das soluções em relação aos dados iniciais e consequentemente a unicidade da solução.

TEOREMA 1. *Seja* $\{A(t)\}$, t *em* R^+, *uma família de operadores em um espaço de* HILBERT H, *satisfazendo as Hipóteses I, II, III, IV, V, e* $M(u)$ *uma aplicação de* $D(A(0)^{1/2})$ *em* H, *satisfazendo as hipóteses* M_1, M_2, M_3, M_4. *Então, o sistema* (7) + (8) *possui uma solução estrita* $u = u(t)$ *definida sôbre o* R^+, *para todo* $\varphi \in D(A(0))$ *e* $\Psi \in D(A(0)^{1/2})$ *tais que*

$$\| \varphi \|^2_{W_0} + \| \Psi \|^2 < C \tag{9}$$

onde $C > 0$ é uma constante.

TEOREMA 2. *Admitindo as hipóteses do Teorema 1, para cada* $T > 0$, *se* u, u_1 *forem soluções de* (7) + (8), *correspondentes aos dados iniciais* $[\varphi, \Psi]$, $[\varphi_1, \Psi_1]$, *respectivamente, satisfazendo a condição* (9), *então*

$$\| A(t)^{1/2} u(t) - A(t)^{1/2} u_1(t) \|^2 + \| u'(t) - - u_1'(t) \|^2 \leq k(T, C) \{\| \varphi - \varphi_1 \|^2_{W_0} + \| \Psi - \Psi_1 \|^2\}$$

para todo t em $[0, T]$.

O teorema que segue dará o comportamento da derivada segunda em relação aos dados iniciais. Na demonstração dêste teorema, há necessidade de restringir mais a família $\{A(t)\}$. De maneira mais precisa, vamos admitir que $A(t)$ seja duas vezes contìnuamente diferenciável e que as seguintes condições sejam satisfeitas:

a) $(A'(t) u \mid u) < 0$ para todo $t \in R^+$ e $u \in D(A'(t))$.

b) $\left| \frac{d}{dt} (A'(t) u \mid v) \right| \leq c(t) E(u, v)$

c) $|(A''(t) u \mid v)| \leq k(t) E(u, v)$

para todo $t \in R^+$, $u \in D(A'(t))$, $u \in D(A''(t))$, sendo $c(t)$, $k(t)$ funções contínuas positivas e

$$E(u, v) = \| A(t)^{1/2} u \|^2 + \| A(t)^{1/2} v \|^2 .$$

Teorema 3. *Admitindo as hipóteses do Teorema 1 sôbre* A(t) *e mais as hipóteses a), b), c) anteriores, se* $\varphi \in D(A(0))$ *e* $\psi \in D(A(0)^{1/2})$ *forem tais que*

$$\| A(0) \varphi \|^2 + \| \varphi \|^2_{W_0} + \| \psi \|^2 < C ;$$
$$\| A(0) \varphi_1 \|^2 + \| \varphi_1 \|^2_{W_0} + \| \psi_1 \|^2 < C$$

então as soluções u *e* u_1 *do sistema* (7) + (8) *correspondentes a* $[\varphi, \psi]$, $[\varphi_1, \psi_1]$ *respectivamente, satisfazem à condição seguinte:*

$$\| u''(t) - u_1''(t) \|^2 + \| A(t)^{1/2} u'(t) - A(t)^{1/2} u_1'(t) \|^2 \leqq$$
$$\leqq k(C, T) \{ \| \varphi - \varphi_1 \|^2_{W_0} + \| A(0) \varphi - A(0) \varphi_1 \|^2 +$$
$$+ \| \psi - \psi_1 \|^2 + \| \psi - \psi_1 \|^2_{W_0} .$$

Como um corolário do Teorema 2, resulta que as soluções do sistema (7) + (8) com a condição (9) são unìvocamente determinadas pelos dados iniciais $[\varphi, \psi]$.

§ 5 — Aplicações

Seja G um domínio limitado do espaço euclidiano real R^N de dimensão N, cuja fronteira ∂G suporemos regular. Suponhamos que H seja o espaço de Hilbert $L^2(G)$ das classes de equivalença de funções integráveis à Lebesgue sôbre G. Seja $A(t)$ o operador diferencial formal

$$A(t) = - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] + c(x, t)$$

sendo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$. Supõe-se os coeficientes suficientemente regulares com relação a x e t. Admite-se, ainda mais, que existam duas funções contínuas positivas $c_0(t)$ e $c_1(t)$, $t \in R^+$, tais que

$$c_1(t) | \xi |^2 \geqq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geqq c_0(t) | \xi |^2$$

para todo $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N)$ onde $|\xi|^2 = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_N|^2$.

Vamos representar por $A_2(t)$ a realização de $A(t)$ em $L^2(G)$, sob condições de Dirichlet nulas sôbre a fronteira de G, isto é, o domínio de $A_2(t)$ é o conjunto das funções $u \in W^{2,2}(G)$ (espaço de Sobolev das funções de $L^2(G)$ cujas derivadas generalizadas de ordem $|\alpha| \leqq 2$ pertencem a $L^2(G)$), tais que $D^\alpha u |_{\partial G} = 0$ para todo $|\alpha| < 2$ (cf. Browder [2]). Desta forma, $D(A_2(t)) \subseteq W^{2,2}(G)$ e como uma aplicação de $D(A_2(t))$ em $L^2(G)$, o operador $A_2(t)$ satisfaz às hipóteses dos Teoremas 1, 2, 3 do parágrafo 4.

Consequentemente, os Teoremas 1, 2, 3 do parágrafo 4 generalizam os resultados contidos em Browder [1], para o caso de equações não lineares com coeficientes variáveis.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. E. Browder *On non linear wave equations.* Math. Zeitschrift **80** (1962) 249-264.

[2] F. E. Browder *On spectral theory of elliptic differential operators* I. Math. Annalen **142** (1961) 22-130.

[3] F. E. Browder and W. A. Strauss *Scattering for non linear wave equations* Pacif. J. of Math. **13**, n.º 1 (1963) 23-43.

[4] K. Jörgens *Das Afangswertproblem in Grössen fur eine Klasse nichlinearen wellengleichungen,* Math. Z. **77** (1961) 295-308.

[5] T. Kato *Integration of the equations of evolution in Banach spaces,* J. M. S. of Japan, **5** (1953) 208-304.

[6] Jo D. Mamedov *Certain properties of solutions of non linear hyperbolic equations in Hilbert spaces.* Doklady Akad. Nauk. S. S. S. R. (English Translation) **5** n.º 5 Sept. Oct. 1965.

[7] I. Segal *Non linear semi groups.* Annals of Math. **78** n.º 2 (1963) 339-364.

[8] W. A. Strauss *Scattering for hyperbolic equations.* Trans. Am. Math. Soc. **108**, n.º 1 (1963) 13-37.

An absolutely independent axiom system for groups

por José Morgado

1. Introduction

The notion of an *absolutely independent axiom system* was introduced by Frank Harari in [1]. Following Harari, one says that an axiom A of the form «p implies q» *never holds* in a model M, if the hypothesis p occurs at least once in M and, furthermore, whenever p is true, q is false (one admits the possibility of taking p as an universally true statement). Let S be an axiom system and $A \in S$; if there is a model in which. A never holds and every axiom in $S - \{A\}$ holds, then A is said to be *very independent*. The axiom systema S is said to be a *very independent axiom system*, if each of its axioms is very independent. One says that S is an *absolutely independent axiom system*, if for every subset S' of S there is some model in which each axiom belonging to S' never holds and each axiom belonging to $S - S'$ holds.

In general, the usual axiom systems are not absolutely independent.

Harari gave in [1] an absolutely independent axiom system for equivalence relations and conjectured that some, but not many, others might exist.

J. W. Ellis presented another independent axiom system in [2], which selects the subgroups among the subsets of a group.

In [3], R. A. Jacobson and K. L. Yocom stated that a groupoid $< G, * >$ satisfying the following axioms

(i) *there is an element* e *such that* $x * e = x$ *for all* $x, x \neq e$;

(ii) *for all* $x, y, z, z \neq e$, $x * (y * z) = (x * y) * z$;

(iii) $x * w = y$ *has a unique solution* w *for all* $x, y, x \neq y$,

is a group.

Next, they proved that these axioms constitute an absolutely independent axiom system. (It is supposed that G contains at least three elements).

Neverthless, the axioms (ii) and (iii) are too strong.

The purpose of this note is to weaken the axioms (ii) and (iii) and to obtain another absolutely independent axiom system for groups.

2. A definition of a group

We are going to state the following

Theorem. *Let* $< G, * >$ *be a groupoid satisfying the conditions:*

A: *There is in* G *some element* e *such that*

$$x * e = x \text{ for every } x \in G - \{e\};$$

B: *If* $x \in G$, $y \in G - \{e\}$ *and* $z \in G - \{e\}$, *then*

$$x * (y * z) = (x * y) * z;$$

C: *There is in* G *some element* a *such that, if* $b \in G - \{a\}$, *then each of the equations*

$$b * x = a \text{ and } a * y = b$$

is soluble in G.

Then the groupoid $< G, * >$ is a group.

PROOF. We have to prove that:

— there is in G some element e such that $x * e = x$ *for every* $x \in G$;

— *for every* $c \in G$ there is an element $c' \in G$ such that $c * c' = e$;

— one has $x * (y * z) = (x * y) * z$ *for all* $x, y, z \in G$.

It is immediate that it suffices to prove the following:

1) *If* $c \in G - \{e\}$, *then there is some* $c' \in G$ *such that* $c * c' = e$.

2) *Oue has* $e * e = e$.

Let us show that the equation $c * z = e$, with $c \neq e$, has at least one solution in G.

If $a = e$, the conclusion follows immediately from the solubility of the equation $b * x = a$ for every $b \neq a$ (condition C).

If $a \neq e$ and $c = a$, the conclusion follows immediately from the solubility of the equation $a * y = b$ for every $b \neq a$ (condition C.

Now, let $a \neq e \neq c \neq a$. Let x and y be elements of G such that $c * x = a$ and $a * y = e$, respectively. One has clearly $x \neq e$ and $y \neq e$, since $x = e$ implies

$$a = c * x = c * e = c \text{ (by condition A)}$$

and $y \neq e$ implies

$$e = a * y = a * e = a \text{ (by condition A)},$$

against the assumptions that $c \neq a$ and $a \neq e$.

Consequently, by condition B, one has

$$e = a * y = (c * x) * y = c * (x * y),$$

that is to say, the element $z = x * y$ is a solution of the equation $c * z = e$, which proves 1).

It is easy to see that

3) *if* $b \neq e$ *and* $b * b' = e$, *then* $b' * b = e$.

In fact, from $b \neq e$ and $b * b' = e$, it follows, by condition A, that $b' \neq e$. Hence, by 1), it results that there is some element b'' in G such that $b' * b'' = e$ and, by condition A, $b'' \neq e$.

If $b' * b \neq e$, then, by condition A,

$$(b' * b) * e = (b' * b) * (b' * b'') = b' * b.$$

Since $b \neq e$, $b' \neq e$ and $b'' \neq e$, it follows, by conditions B and A,

$$b' * b = ((b' * b) * b') * b'' = (b' * (b * b')) * b'' = \\ = (b' * e) * b'' = b' * b'' = e.$$

This contradiction proves 3).

Now, we can state the following:

4) *If* $x \in G - \{e\}$, *then* $e * x = x$.

In fact, let x' be an element of G such that $x * x' = e$.

Then, since $x \neq e$ and $x' \neq e$, one has, by condition B and 3),

$$e * x = (x * x') * x = x * (x' * x) = x * e = x,$$

as wanted.

Finally, let us see that $e * e = e$.

Indeed, let $x \in G - \{e\}$ and let x' be an element of G such that $x * x' = e$. Since $x' \neq e$, one has, by condition B and 4),

$$e * e = e * (x * x') = (e * x) * x' = x * x' = e$$

which proves 2) and, consequently the theorem holds.

It is clear that, if the groupoid $<G,*>$ is a group, then the conditions A, B and C hold. Thus, we can say that a group is a groupoid satisfying the conditions A, B, C.

3. Absolute independence of the axiom system S A, B, C

Let us consider the following axioms:

$\overline{A}$: *If* x, y G *and* x y, *then* x y x;

$\overline{B}$: *If* x, y, z, e ∈ G *and* y ≠ e ≠ z, *then*

$$x*(y*z)=(x*y)*z;$$

$\overline{C}$: *If* a, b G *and* a b, *then at least one of the equations*

$$b*x=a \quad \textit{and} \quad a*y=b$$

is not soluble in G.

One sees that the axiom $\overline{A}$ (resp. $\overline{B}, \overline{C}$) holds in $<G,*>$, if and only if the axiom A (resp. B, C) never holds in $<G,*>$.

In order to state the absolute independence of the axiom system S, let us consider the following eight groupoids $<G,*>$ where G is the set of all integers and, in each case, the operation $*$ is defined as it follows:

I) $x*y=x+y$ for all $x, y \in G$;

II) $x*y=y$ for all $x, y \in G$;

III) $x*y=x-y$ for all $x, y \in G$;

IV) $x*y=x$ for all $x, y \in G$;

$$\text{V)}\begin{cases} x*y=x+1 \text{ for every } x \in G \text{ and } y \in G-\{0\}, \\ x*0=x \text{ for every } x \in G; \end{cases}$$

VI) $x*y=|x|+|y|+1$ for all $x, y \in G$;

$$\text{VII)}\begin{cases} x*y=0 \text{ for every } x \in G-\{0\} \text{ and } y \in G, \\ 0*0=1, \\ 0*y=y \text{ for every } y \in G-\{0\}; \end{cases}$$

VIII) $x*y=x+1$ for all $x, y \in G$.

In the first groupoid, the axioms A, B and C hold, i. e., this groupoid is a group; it is easy to see that the axioms $\overline{A}$, B and C hold in the grouproid II), the axioms A, $\overline{B}$ and C hold in the groupoid III), the axioms A, B and $\overline{C}$ in the groupoid IV), the axioms A, $\overline{B}$ and $\overline{C}$ in the groupoid V), the axioms $\overline{A}$, B and $\overline{C}$ in the groupoid VI), the axioms $\overline{A}$, $\overline{B}$ and C in the groupoid VII) and, finally, the axioms $\overline{A}$, $\overline{B}$ and $\overline{C}$ in the groupoid VIII).

The cases I), II), III) and IV) prove that the system S is *very independent.*

The element e, which exists in the cases I), III), IV) and V), is the integer O.

In summary, for each subset S' of S, there is some model in which each axiom belonging to S' never holds and each axiom belonging to $S-S'$ holds, that is to say, S is *an absolutely independent axiom system* for groups.

BIBLIOGRAPHY

[1] Frank Harari, *A very independent axiom system*, Amer. Math. Monthly, **68** (1961), pp. 159-162.

[2] J. W. Ellis, *Another very independent axiom system*, Amer. Math. Monthly, **68** (1961), pp 992.

[3] R. A. Jacobson and K. L. Yocom, *Absolutely independent group axioms*, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), pp. 756-758.

Note on the definition of a group

by José Morgado

In [1], one deals with the following question:

Is a semigroup (1) G which has a local left identity element (i. e., for each element a in G, there is an element e_a in G, dependent on a, such that $e_a a = a$) and a left inverse element a'_e for each element a in G, such that $a'_e a = e_a$, necessarily a group?

It is shown that such a semigroup need not be a group and it is proved that, if G is a *commutative* semigroup satisfying the conditions

(i) *for each* a *in* G, *there is an element* e_a *in* G *such that*

$$e_a a = a,$$

(ii) *for each* e_a *in* G *such that* $e_a a = a$, *there is an element* a'_e, *dependent on* e_a, *such that*

$$a'_e a = e_a,$$

then G is a group.

Next, it is asserted that commutativity is essential to the result.

This is not true.

In fact, if one analyzes the proof given in [1], one sees that the commutativity was not used in full.

In [2], in the section *Advanced Problems and Solutions*, P. J. Sally proposes the following exercise:

Show that the necessary and sufficient condition for a semigroup G *satisfying* (i) *and* (ii) *to be a group is that every local left identity is in* $C(G)$, *the center of* G *with respect to the semigroup structure.*

In [3], it was published a solution for this exercise.

Or, the condition ennunciated by P. J. Sally is too strong.

In fact, one can state the following

Theorem: *Let* G *be a semigroup satisfying the conditions* (i) *and* (ii). *Then* G *is a group, if and only if the following holds:*

(iii) *If* e_a *and* e_b *are local left identities relative to* a *and* b, *respectively, then*

$$e_a e_b = e_b e_a;$$

(iv) *If* e_a *and* i_a *are local left identities relative to* a, *there is some left inverse* a'_i *of* a, *relative to* i_a, *such that*

$$e_a a'_i = a'_i e_a.$$

Proof. Indeed, if G is a group, one has

$$e_a = i_a = e_b$$

and conditions (iii) and (iv) hold.

Conversely, let us suppose that conditions (iii) and (iv) hold.

In order to conclude that G is a group, it suffices clearly to prove that *all the local left identities are equal.*

First, let us observe that *for each element* $a \in G$, *there is only one local left identity.*

(1) I. e., an associative groupoid.

From

$$e_a a'_i = a'_i e_a ,$$

it follows

$$e_a a'_i a = a'_i e_a a ,$$

that is to say,

$$e_a i_a = a'_i a = i_a .$$

Analogously, by (iv), one has

$$i_a a'_e = a'_e i_a ,$$

for some left inverse a'_e of a, relative to e_a; and from this it follows

$$i_a e_a = e_a . \tag{1}$$

Since, by (iii), one has $i_a e_a = e_a i_a$, one concludes that $i_a = e_a$, as it was claimed.

In particular, from (1) it results

$$e_a e_a = e_a . \tag{2}$$

Now, we are going to see that

$$e_a = e_b .$$

In fact, from (2) it follows

$$e_a (e_a e_b) = (e_a e_a) e_b = e_a e_b$$

and

$$e_b (e_b e_a) = (e_b e_b) e_a = e_b e_a ;$$

and, from (iii), it follows

$$e_a (e_a e_b) = e_b (e_a e_b) = e_a e_b .$$

This means that both e_a and e_b are local left identities relative to the element $e_a e_b$, and, therefore, $e_a = e_b$, as it was to be proved.

BIBLIOGRAPHY

[1] W. E. Deskins and J. D. Hill, *On the definition of a group*, Amer. Math. Monthly, **68** (1961), pp. 795-796

[2] P. J. Sally, Jr., *Problem 5066*, Amer. Math. Monthly, **70** (1963), pp. 96-97.

[3] E. A. Schreiner, *Semigroup with Left Inverses and Identities*, Amer. Math. Monthly, **70** (1963), p. 1113.

Sôbre funções de variação total limitada

por *Maria Eulalia Coutinho* *

1. Em [1], pg. 602, (teor. 84), mostra-se que, se f é uma função de variação total limitada definida em um intervalo compacto I de R cujos valores são elementos de um espaço métrico, então existem os limites de f à esquerda e à direita de todo ponto x_0 do interior de I.

Em [2], pg. 110, demonstra-se o seguinte teorema: seja $f: A = [a, b] \times [c, d] \subseteq R^2 \to R$ uma função de variação total limitada em A tal que, para algum $(x', y') \in A$, as funções $x \to f(x, y')$ de $[a, b]$ em R e $y \to f(x', y)$ de $[c, d]$ em R, são de variação total limitada em $[a, b]$ e $[c, d]$ respectivamente. Então, qualquer que seja o ponto (x_0, y_0) do interior de A, existem os quatro limites «angulares» de f quando (x, y) tende para (x_0, y_0). (i. e. existem os limites em cada um dos quadrantes determinados pelas rectas $x = x_0$ e $y = y_0$.

Para esta demonstração é utilizada a de-

(*) Estudante do 3.º ano do Curso de Matemática e bolsista do Instituto de Física e Matemática, Recife.

composição de Jordan de f em diferença de funções crescentes.

O prof. RUY LUIS GOMES sugeriu-nos estudar a extensão destes resultados ao caso em que f é uma função definida num rectângulo compacto de R^2 com valores num espaço de BANACH.

O objectivo desta nota é, portanto, estabelecer o seguinte

TEOREMA: *Seja* $\mathrm{f}: \mathrm{A}=[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \times[\mathrm{c}, \mathrm{d}] \subseteq \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{F}$, *onde* F *é um espaço de* BANACH, *uma função de variação total limitada em* A *tal que, para algum* $(\mathrm{x}', \mathrm{y}') \in \mathrm{A}$, *as funções* $\mathrm{g}:[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \rightarrow \mathrm{F}$ *e* $\mathrm{h}:[\mathrm{c}, \mathrm{d}] \rightarrow \mathrm{F}$, *definidas por* $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}')$ *e* $\mathrm{h}(\mathrm{y})=\mathrm{f}(\mathrm{x}', \mathrm{y})$, *são de variação total limitada em* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *e* $[\mathrm{c}, \mathrm{d}]$ *respectivamente* (1). *Então, para todo ponto* $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ *do interior de* A (2) *existem os limites de* f *quando* (x, y) *tende para* $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ *nos casos seguintes:*

I) $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in]\mathrm{x}_0, \mathrm{b}[\times] \mathrm{y}_0, \mathrm{d}[$

II) $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in]\mathrm{x}_0, \mathrm{b}[\times] \mathrm{c}, \mathrm{y}_0[$

III) $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in]\mathrm{a}, \mathrm{x}_0[\times] \mathrm{c}, \mathrm{y}_0[$

IV) $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in]\mathrm{a}, \mathrm{x}_0[\times] \mathrm{y}_0, \mathrm{d}[$

2. Diremos que a função $f:[a, b] \times [c, d]=A \subseteq R^2 \rightarrow F$, onde F é um espaço de BANACH, é de variação total limitada em A, se existe um real $M \geqq 0$ tal que, quaisquer que sejam as sequências finitas estritamente decrescentes (ou, o que resulta equivalente, quaisquer que sejam as sequências finitas estritamente crescentes), $(s_i)_{0 \leq i \leq n}$, $(t_j)_{0 \leq j \leq m}$ de pontos de $[a, b]$ e $[c, d]$ respectivamente, se tem

$$\sum_{i,j}\|f(s_{i+1}, t_{j+1})-f(s_{i+1}, t_j)- -f(s_i, t_{j+1})+f(s_i, t_j)\| \leqq M$$

onde a soma é estendida a todos (i, j) tais que $0 \leqq i \leqq n-1$, $0 \leqq j \leqq m-1$.

Ora, dizer que as funções $g:[a, b] \rightarrow F$ e $h:[c, d] \rightarrow F$, definidas por $g(x)=f(x, y')$ e $h(y)=f(x', y)$, são de variação total limitada, é dizer que existe $N \geqq 0$ tal que as desigualdades

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1}\|f(s_i, y')-f(s_{i+1}, y')\| \leqq N$$

$$\sum_{0 \leq j \leq m-1}\|f(x', t_j)-f(x', t_{j+1})\| \leqq N$$

são válidas quaisquer que sejam as sequências finitas estritamente decrescentes $(s_i)_{0 \leq i \leq n}, (t_j)_{0 \leq j \leq m}$ de pontos de $[a, b]$ e $[c, d]$ respectivamente.

Utilizaremos no que se segue o seguinte

LEMA: *Sob as hipóteses do teorema, as funções* $\mathrm{x} \rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ *de* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *em* F *e* $\mathrm{y} \rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{s}, \mathrm{y})$ *de* $[\mathrm{c}, \mathrm{d}]$ *em* F, *são de variação total limitada em* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *e* $[\mathrm{c}, \mathrm{d}]$ *respectivamente quaisquer que sejam* $\mathrm{t} \in [\mathrm{c}, \mathrm{d}]$ *e* $\mathrm{s} \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

Com efeito, $\|f(s_{i+1}, t)-f(s_i, t)\|$ pode escrever-se como

$$\|f(s_{i+1}, t)-f(s_{i+1}, y')-f(s_i, t)+ +f(s_i, y')+f(s_{i+1}, y')-f(s_i, y')\|,$$

que não excede

$$\|f(s_{i+1}, t)-f(s_{i+1}, y')-f(s_i, t)+ +f(s_i, y')\|+\|f(s_{i+1}, y')-f(s_i, y')\|.$$

(1) Pode acontecer que f seja de variação total limitada sem que alguma das funções g ou h o seja. Por exemplo, seja $g:[a, b] \rightarrow R$ uma função que não é de variação total limitada; ponhamos $f(x, y)=g(x)$ pora todo $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. A variação total de f é nula.

(2) Se (x_0, y_0) é um vértice de A, mostra-se que existe o limite em um dos quadrantes; se (x_0, y_0) pertence ao interior de um lado, existem os limites nos dois quadrantes correspondentes.

Daqui resulta que a soma

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} \| f(s_{i+1}, t) - f(s_i, t) \|$$

não excede

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} \| f(s_{i+1}, t) - f(s_{i+1}, y') -$$
$$- f(s_i, t) + f(s_i, y') \| + \sum_{0 \leq i \leq n-1} \| f(s_{i+1}, y') -$$
$$- f(s_i, y') \| \leqq \sum_{i,j} \| f(s_{i+1}, t_{j+1}) - f(s_{i+1}, t_j) -$$
$$- f(s_i, t_{j+1}) + f(s_i, t_j) \| +$$
$$+ \sum_{0 \leq i \leq n-1} \| f(s_{i+1}, y') - f(s_i, y') \|,$$

onde os t_j determinam uma partição finita de $[c, d]$ na qual figuram t e y'.

Temos, portanto,

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} \| f(s_{i+1}, t) - f(s_i, t) \| \leqq M + N,$$

o que prova o lema para a função $x \rightarrow f(x, t)$.

Conclusão análoga para a função $y \rightarrow f(s, y)$.

3. Vamos agora proceder à demonstração do teorema enunciado.

Seja (x_0, y_0) um ponto do interior de A; mostremos que, sob as hipóteses do teorema, existe $\lim\limits_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ no caso I. Para que tal limite exista, é necessário e suficiente que a oscilação de f no ponto (x_0, y_0), com respeito ao rectângulo $]x_0, b[\times]y_0, d[$ seja nula. (ver [3], pg. 52, 3.14.6.).

Suponhamos que esta oscilação é positiva. Isto significa que existe algum $\varepsilon > 0$ tal que,

(1) *em qualquer rectângulo*

$$]x_0, x''[\times]y_0, y''[\subseteq]x_0, b[\times]y_0, d[$$

há pontos (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *para os quais se tem*

$$\| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \| > \varepsilon .$$

Ponhamos (³)

$$f(x_i, y_j) = z_{i,j}; \quad \Delta_y z_{0,j} = z_{0,j} - z_{0,j+1};$$
$$\Delta_x z_{j,0} = z_{j,0} - z_{j+1,0}$$

$$\Delta^2_{yx} z_{0,j} = z_{j,j} - z_{j,j+1} - z_{0,j} + z_{0,j+1}$$
(relativa ao rectângulo 2)

$$\Delta^2_{yx} z_{j,0} = z_{j+1,j} - z_{j,0} - z_{j+1,j+1} + z_{j+1,0}$$
(relativa ao rectângulo 1).

Então de (1) resulta que

$$\varepsilon < \| z_{11} - z_{22} \| = \| (z_{11} - z_{12} - z_{01} + z_{02}) +$$
$$+ (z_{12} - z_{10} - z_{22} + z_{20}) + (z_{01} - z_{02}) +$$
$$+ (z_{10} - z_{20}) \| \leqq \| \Delta^2_{yx} z_{01} \| + \| \Delta^2_{yx} z_{10} \| +$$
$$\| \Delta_y z_{01} \| + \| \Delta_x z_{10} \| .$$

Consideremos agora o rectângulo

$$]x_0, x'''[\times]y_0, y'''[$$

com

$$x''' \leqq x_2, \ y''' \leqq y_2 .$$

De (1) resulta ainda que existem pontos $(x_3, x_3), (x_4, x_4)$ deste rectângulo, tais que

$$\varepsilon < \| \Delta^2_{yx} z_{03} \| + \| \Delta^2_{yx} z_{30} \| + \| \Delta_y z_{03} \| + \| \Delta_x z_{30} \| .$$

Repetindo o processo, conseguimos $2n$ pontos (x_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, 2n$, tais que

$$\varepsilon < \| \Delta^2_{yx} z_{0,2k-1} \| + \| \Delta^2_{yx} z_{2k-1,0} \| +$$
$$+ \| \Delta_y z_{0,2k-1} \| + \| \Delta_x z_{2k-1,0} \|,$$

para $k = 1, 2, \cdots, n$ e, portanto,

(³) Esta notação nos foi sugerida pelo prof. Rivaldo Alves Corrêa, pelo que agradecemos.

$$n\varepsilon < \sum_{1\le k\le n} \|\Delta^2_{yx} z_{0,2k-1}\| +$$
$$+ \sum_{1\le k\le n} \|\Delta^2_{yx} z_{2k-1,0}\| + \sum_{1\le k\le n} \|\Delta_y z_{0,2k-1}\| +$$
$$+ \sum_{1\le k\le n} \|\Delta_x z_{2k-1,0}\| \le M + 2N,$$

em virtude das hipóteses do teorema e do lema demonstrado.

Em resumo, ter-se-ia

$$(2) \qquad n\varepsilon < M + 2N \quad \text{para todo } n,$$

o que é absurdo.

De modo análogo se conclui que existe

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

em cada um dos casos II, III e IV.

Observação: Se alguns dos pontos tomados (x_i, y_i) têm a mesma abcissa, tem-se, como $z_{i+1,i+1} = z_{i,i+1}$,

$$\|z_{i,i} - z_{i,i+1}\| \le \|z_{i,i} - z_{i,i+1} - z_{0,i} + z_{0,i+1}\| + \|z_{0,i} - z_{0,i+1}\| = \|\Delta^2_{yx} z_{0j}\| + \|\Delta_y z_{0j}\|$$

e, por consequência, o resultado (2) não é alterado.

Anàlogamente para o caso de alguns dos (x_i, y_i) terem a mesma ordenada.

REFERÊNCIAS

[1] L. Schwartz, «*Cours d'Analyse*», II.º volume.

[2] T. H. Hildebrandt, «*Introduction to the Theory of Integration*» (1963), Academic Press.

[3] J. Dieudonné, «*Foundations of Modern Analysis*», (1960), Academic Press.

Natureza da Investigação Operacional (*)

por ***Fernando de Jesus***

1. Generalidades sobre a natureza da ciência e metodologia

1.1. Caracterização da ciência

A extensiva bibliografia referente à definição ou caracterização da ciência é de tal modo vasta e abarca pontos de vista tão diversos e não raras vezes contraditórios, que se torna extremamente difícil apresentar uma definição adequada. Verifica-se, no entanto, que grande parte das dificuldades provém do facto de o significado do termo «ciência» não ser constante pois tem-se modificado com o decorrer dos séculos e não temos a certeza de que amanhã a designação tenha o mesmo sentido que hoje possui.

Não se podendo pois apresentar uma definição inatacável de ciência, é preferível mencionar algumas das características essenciais do que se designa por ciência.

Num conceito dinâmico, consideraremos *a ciência como um processo de investigação*, isto é, um processo para: (*a*) responder a questões, (*b*) resolver problemas, (*c*) desenvolver processos mais eficientes para responder a questões e resolver problemas. Posteriormente faremos a distinção entre questões e problemas.

A par da investigação científica é costume

(*) Palestra proferida no dia 8 de Janeiro de 1966 perante o Grupo de Investigação Operacional do Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

porém considerar a investigação não científica, mas a distinção entre estes dois tipos de investigação é extremamente difícil e prende-se de perto com o complexo problema da limitação da ciência. No entanto, é ideia geralmente aceite que, através da investigação científica, o Homem tem mais possibilidades de obter respostas correctas para as questões e melhores soluções para os problemas. Isto não significa que os melhores resultados sejam sempre obtidos através da ciência mas que há mais possibilidades de os alcançar com o emprego de um processo científico de investigação. Esta superioridade da investigação científica deriva do facto de ser *controlada. Um processo é controlado na medida em que é eficientemente dirigido para a obtenção de objectivos desejados.*

O controle da investigação é exercido em vários graus, sendo o controle perfeito um ideal de que nos aproximamos cada vez mais com o avanço da ciência mas que nunca se atinge. Toda a investigação apresenta aspectos controláveis e incontroláveis e por consequência há muitas gradações de investigação além da investigação científica e da não científica.

O controle, embora necessário, não é porém suficiente para distinguir a investigação científica da não científica. A ciência caracteriza-se também pelos objectivos de *autoperpetuação* e *auto-aperfeiçoamento*, isto é, propõe-se aumentar sem limites o nosso conhecimento e a nossa eficiência para responder a questões e resolver problemas.

1. 2. Experimentação e investigação

Fala-se muitas vezes de experimentação como sinónimo de investigação científica, mas o certo é que nem toda a investigação envolve experimentação. Esta, no sentido que lhe era atribuído no século XIX, incluía a manipulação física de objectos, acontecimentos e suas propriedades. A manipulação física era considerada idêntica ao controle.

Pode na verdade fazer-se investigação controlada sem recorrer à manipulação física, como acontece, por exemplo, em astronomia. O controle pode obter-se pela manipulação conceptual de representações simbólicas (modelos) dos fenómenos que são objecto da investigação científica.

Ainda que o controle não seja sinónimo de manipulação física, alguns cientistas consideram útil a distinção entre investigações em que o controle se realiza dessa maneira (como num laboratório) e aquelas em que o controle não envolve manipulação física. Reservam a utilização do termo «*experimentação*» para a investigação que inclui manipulação física e o emprego do termo «*investigação*», para englobar a experimentação e qualquer outro tipo de investigação controlada.

Com o desenvolvimento recente das técnicas de *delineamento de experiências*, a manipulação física não é hoje tão necessária para a experimentação como era antigamente; ela pode ser substituída efectivamente por técnicas de classificação e casualização.

1. 3. Instrumentos científicos, técnicas e métodos

O progresso científico apresenta um aspecto bidimencional. Por um lado, tem-se alargado constantemente a gama de questões e problemas aos quais a ciência tem sido aplicada; por outro, a ciência tem aumentado continuamente a eficiência com que a investigação pode ser conduzida. Os resultados da investigação científica são pois (1) um corpo organizado de conhecimentos que nos permite controlar melhor o ambiente em que vivemos e (2) um corpo de processos que nos habilita a aumentar o conjunto de conhecimentos.

Ocupar-nos-emos exclusivamente dos processos pelos quais a ciência gera um corpo de conhecimentos — o processo de investigação.

Os processos que caracterizam a ciência são geralmente designados por *instrumentos*, *técnicas* e *métodos*. Embora haja tendência para a utilização indistinta destes termos, eles não possuem o mesmo significado.

Por *instrumento científico* deve entender-se o instrumento físico ou conceptual que é utilizado na investigação científica. Exemplos de tais instrumentos são os símbolos matemáticos, os computadores electrónicos, microscópios, termómetros, tabelas de logaritmos e de números aleatórios, etc..

A *técnica científica* é o modo de utilizar os instrumentos científicos. Por exemplo, os vários tipos de amostragem são técnicas científicas que utilizam uma tabela de números aleatórios, um instrumento científico; a utilização do cálculo diferencial é uma técnica para achar o extremo de uma função.

O *método científico* é o modo pelo qual se seleccionam técnicas na ciência. Enquanto as técnicas utilizadas pelo investigador são resultados das suas decisões, o modo pelo qual essas decisões são tomadas é o resultado das suas *regras de decisão*. Os métodos são regras de escolha; as técnicas são as próprias escolhas. Por exemplo, de um conjunto de modos alternativos de medir uma propriedade (comprimento, dureza, inteligência, etc.), a selecção do processo mais adequado envolve a utilização de um método.

O estudo dos métodos científicos constitui a *metodologia*. O objectivo da metodologia é o aperfeiçoamento dos processos e critérios empregados na investigação científica.

1. 4. Ciência pura e aplicada

A distinção entre ciência pura e aplicada embora seja difícil — se não impossível — ocupa actualmente papel relevante nas discussões sobre ciência.

A investigação pura é frequentemente caracterizada como a que conduz a resultados que não são imediatamente utilizáveis fora do domínio da ciência. Nesta exposição distinguiremos investigação pura de investigação aplicada, baseando-nos na diferença entre procurar «*responder a uma questão*» e «*resolver um problema*».

Entende-se que um indivíduo tem *um problema* se deseja atingir determinado objectivo, possui modos alternativos de o alcançar e ignora qual a melhor alternativa. Assim, para resolver um problema, deve proceder-se a uma investigação a fim de obter elementos que permitam escolher o melhor processo de atingir os objectivos que definem o problema. Na resolução do problema pode-se responder a questões no intuito de melhor prosseguir um conjunto especificado de objectivos. Se o interesse por uma questão não envolve a utilização da resposta na prossecução de um objectivo específico, então não existe um problema.

Quando às questões, no sentido em que foram definidas, se dão respostas por métodos científicos, considera-se que se faz investigação pura. Quando os problemas são resolvidos por investigação científica e algum dos objectivos envolvidos é de natureza não científica, a investigação diz-se aplicada. O que acabámos de dizer não significa que todos os problemas pertençam ao domínio da investigação aplicada. Problemas metodológicos, por exemplo, são do domínio da ciência pura porque os objectivos envolvidos são de natureza científica.

1. 5. As fases da investigação

As fases da investigação científica tradicionalmente apontadas são:

1) observação
2) generalização
3) experimentação

admitindo-se geralmente que estas fases se podem realizar simultâneamente ou por outra ordem.

Estas três fases de um processo de investigação científica são as geralmente aceites pelos cientistas que se dedicam à investigação pura. Do ponto de vista da investigação aplicada, é necessário adoptar uma nova sequência de fases:

1) formulação do problema
2) construção do modelo
3) obtenção de uma solução a partir do modelo
4) testar o modelo e a solução dele derivada
5) controlar a solução
6) pôr a solução em prática.

Muito do que vamos dizer adiante situa-se em torno da discussão de cada uma destas fases da investigação aplicada. Na prática, estas diferentes fases raramente se sucedem na ordem indicada. Muitas podem ser simultâneas e, em numerosos estudos, por exemplo, a fase que consiste em formular o problema só fica completa quando a investigação está virtualmente terminada.

O processo de investigação é usualmente cíclico. Por exemplo, se, ao testar o modelo, se conclui que ele é deficiente, a formulação do problema e a construção do modelo podem ser revistas e modificadas. Por outras palavras, as diferentes fases influenciam-se mutuamente durante o trabalho de investigação.

2. Caracterização da investigação operacional

Tendo-se verificado que é impossível dar uma definição precisa do âmbito de qualquer disciplina científica, prefere-se modernamente caracterizar um ramo da ciência indicando a faceta sob a qual encara a unidade e complexidade do real. Dentro desta orientação, vamos caracterizar a investigação operacional [1].

Devemos já sublinhar que a I. O. *é* o que o seu próprio nome implica: *investigação* (*aplicada*) *das operações*.

Outro ponto a relevar é que a I. O. envolve um ponto de vista particular das operações e um tipo especial de investigação aplicada.

Entende-se por *operação* o conjunto de actos requeridos para obter determinado resultado, isto é, uma operação é um complexo de actos inter-relacionados, executados simultâneamente ou em sequência, que conduzem à obtenção de determinados objectivos.

No entanto, frize-se, o objecto de estudo da I. O. *não* é constituído por *todos* os tipos de operações. Exemplificando: a I. O. não estuda as operações de um indivíduo que trabalha com uma máquina mas sim o *sistema homem-máquina*.

A I. O. ocupa-se dos sistemas formados por duas ou mais partes cujos actos constituem uma operação. Grande número de sistemas que interessam à I. O. envolve comunicação entre algumas das partes e certas conexões. A comunicação e as conexões caracterizam um tipo de sistema a que se dá o nome de *sistema estruturado* ou *organização*.

Mais rigorosamente, uma organização é um sistema formado por duas ou mais partes cujos actos constituem uma operação e que apresenta quatro características essenciais:

1) Alguns dos seus componentes são seres humanos.
2) A responsabilidade das escolhas de um conjunto de actos está dividida entre dois ou mais indivíduos e (ou) grupos de indivíduos.
3) Os subgrupos funcionalmente distintos são conhecedores das escolhas de cada

[1] Daqui em diante utilizaremos apenas as iniciais I. O. para designar a investigação operacional.

um dos outros por meio de comunicação ou observação.

4) Um subgrupo (ou grupo total) de indivíduos no sistema tem função de controle: compara os resultados obtidos com os resultados desejados e faz ajustamentos no sistema por forma a reduzir as diferenças observadas.

Se alguma das condições 2, 3 e 4 não é satisfeita o sistema *não está organizado*. Se qualquer destas condições, embora satisfeita, não o é eficientemente, o sistema diz-se *desorganizado*.

Pode dizer-se que *a classe de fenómenos que são objecto de estudo da I. O. é constituída pelas operações das organizações*, mas, com o objectivo de restringir ainda mais o domínio da I. O., temos de referir os tipos de problemas, envolvendo operações das organizações, que são seu objecto de estudo. Nesse sentido, vamos indicar os quatro tipos de alterações que se verificam numa actividade organizada.

1) *Conteúdo da organização:* aumento, diminuição ou modificação das pessoas e (ou) equipamento.
2) *Estrutura da organização:* alterações na divisão do trabalho, envolvendo homens e (ou) equipamento.
3) *Comunicação:* alterações na geração, recolha, tratamento e transmissão da informação.
4) *Controle:* alterações no modo por que os recursos disponíveis são usados.

No estudo das alterações 1), 2) e 3) intervêm várias disciplinas tais como a psicologia, a engenharia, a cibernética e a economia.

Embora em certos estudos de I. O. seja necessário determinar quais as modificações a efectuar no conteúdo e estrutura da organização e na comunicação, para atingir determinados fins, é o controle das operações que constitui o *domínio de aplicação da investigação operacional.*

Uma organização com bom pessoal e equipamento e dispondo de estrutura e comunicações eficientes pode, porém, ser ineficiente se não fizer a utilização óptima dos seus recursos (homens, máquinas, matérias e dinheiro), isto é, se as operações da organização não forem controladas eficientemente.

O controle obtém-se mediante a *decisão correcta* dos responsáveis pela direcção das operações. Neste contexto, decidir consiste em escolher e utilizar recursos, edificar uma estrutura, criar um sistema de comunicações e um processo de controle. *Fornecer às autoridades responsáveis pelo controle das operações de uma organização os resultados que sirvam de base a uma decisão correcta, eis pois o importante objectivo da I. O.*

Embora o controle se interesse pelo conteúdo, estrutura e comunicações, estes factores não são objecto de estudo da I. O. mas sim as decisões pelas quais eles são seleccionados, concebidos e utilizados.

3. Metodologia da investigação operacional

Como características gerais da metodologia da I. O. apontam-se: o *carácter interdisciplinar*, o *estudo dos sistemas como um todo* e o *recurso ao método científico*.

3.1. Carácter interdisciplinar

A divisão da ciência em disciplinas foi feita pelo Homem, não pela Natureza. Ora os diversos ramos da ciência não podem ser individualizados por uma categoria de fenómenos que constituem o seu objecto de estudo mas distinguem-se, sim, pelos aspectos parcelares sob os quais os encaram. Por exemplo, um acto de comunicação pode apresentar aspectos físicos, químicos, biológicos, psicológicos, sociológicos e económicos.

Na linguagem corrente fala-se de problemas físicos, químicos, médicos, biológicos, sociais, políticos e económicos, como se eles se apresentassem diferenciados na Natureza. Na realidade, trata-se simplesmente de problemas e os adjectivos que os qualificam limitam-se a indicar a disciplina sob cuja faceta são estudados.

Dado um problema, não é geralmente fácil prever qual das disciplinas científicas fornecerá a melhor solução e se é possível obter esta no quadro restrito de uma só disciplina. Por esse facto, esboça-se actualmente a tendência para se encararem os fenómenos na multiplicidade dos seus aspectos. Isto não significa que se deixe de caminhar para a especialização, absolutamente indispensável ao progresso do conhecimento, mas sim que a investigação dos fenómenos reais tende progressivamente a assumir um carácter interdisciplinar. A adopção desta nova atitude científica implica que a investigação dos fenómenos reais tem de ser realizada por equipas de cientistas com diferentes especializações.

Ora uma das características metodológicas importantes da I. O. reside precisamente no seu *carácter interdisciplinar*, *dando-lhe a possibilidade de encarar os problemas reais sob a multiplicidade dos seus aspectos.*

As equipas de investigação operacional têm assim uma particularidade notável: agregam especialistas de diversas disciplinas que actuam tendo em vista o estudo unificado das operações.

3.2. Estudo dos sistemas como um todo

É evidente que a actividade de uma parte qualquer de uma organização influi sobre a actividade de cada uma das suas outras partes. Portanto, quando o investigador operacional se debruça sobre aspectos relativos ao controle de uma organização deve ter em conta todas as interacções significativas existentes no sistema que influenciam o fenómeno sob observação. Por outras palavras, *o estudo do sistema como um todo* envolve a consideração de todos os objectivos relevantes e todas as classes de acções que integram a operação.

Este processo de investigação é diferente do normalmente adoptado no quadro de outras disciplinas, o qual consiste em simplificar um problema muito complexo, isolando-o de certos factores que dificultam o seu tratamento. A I. O. adopta orientação oposta: considera deliberadamente todas as componentes significativas que intervêm na operação, cobrindo toda a área sob controle e não apenas uma parcela.

O estudo do sistema como um todo tem ainda um reflexo importante na I. O.. Esta é fortemente orientada pelos problemas e não pelas técnicas que tem à sua disposição, isto é, a I. O. tem provocado o desenvolvimento de técnicas ajustáveis ao tratamento eficiente dos problemas e não simplificado os problemas para lhes aplicar técnicas disponíveis.

3.3. Recurso ao método científico

Sendo a I. O. um tipo de investigaçã aplicada, é evidente que ela se processará de acordo com as fases já descritas anteriormente:

1) formular o problema
2) construir o modelo
3) obter uma solução a partir do modelo
4) testar o modelo e a solução dele derivada
5) controlar a solução
6) pôr a solução em prática.

Vamos focar, sucintamente, cada uma destas fases do método científico.

Na *formulação do problema* há a distinguir dois aspectos: o problema da entidade que tem de tomar decisões e o problema de investigação pròpriamente dito. Este é uma transformação do primeiro, envolvendo inicialmente a definição de uma base científica para encontrar uma política (sucessão de decisões) como solução.

O problema da entidade que pretende tomar decisões raramente é apresentado com clareza à equipa de I. O. e, portanto, na maior parte dos casos, é esta que tem de observar o sistema considerado, seus fins e as diferentes possibilidades existentes. É necessário também identificar todos os participantes susceptíveis de serem afectados pelas decisões, assim como determinar as operações em que eles intervêm e os seus objectivos.

O problema para a equipa de I. O. consiste depois, fundamentalmente, em determinar a política mais eficiente (*política óptima*) para a entidade que tem de tomar decisões. Consequentemente, a equipa tem de definir a medida ou quantificação da eficiência que vai tomar. Na definição de políticas óptimas assume papel relevante a *teoria da decisão*.

O *modelo* é um esquema simplificado para a interpretação da realidade. Em consequência da complexidade do mundo real, é necessário formular hipóteses simplificadoras que levem à compreensão de um certo fenómeno. A mera acumulação de observações não pode fornecer explicação satisfatória do fenómeno e, portanto, o investigador tem necessidade de sistematizar e racionalizar os factos conhecidos, seleccionando os aspectos mais importantes e desprezando os que considera irrelevantes.

É este processo de abstracção, acompanhado de uma generalização, que conduz à construção do modelo que vai permitir representar, com certo grau de aderência, o fenómeno real.

Os investigadores operacionais constroem e utilizam os chamados *modelos operacionais* no estudo das operações das organizações. Os modelos podem ser *icónicos, analógicos* e *simbólicos*.

Os modelos *icónicos* são representações, geralmente reduzidas, de estados, objectos ou acontecimentos. Estes modelos representam o fenómeno real apenas com uma transformação de escala. Podem considerar-se modelos icónicos, por exemplo, os mapas de estradas, as fotografias aéreas, os diagramas de fluxos que mostram o processamento de material ou informação, etc..

Quando num mapa se pretende mostrar o relevo, não se recorre geralmente a um mapa tridimensional; utilizam-se para esse efeito curvas de nível.

Querendo-se indicar o estado das estradas, podem usar-se cores e uma legenda explicativa. Nestes, como noutros casos, emprega-se uma propriedade para representar outra e o modelo assim construído diz-se *analógico*.

Um sistema eléctrico pode ser representado por um sistema hidráulico onde o fluxo de água representa a corrente eléctrica. A régua de cálculo é também um modelo analógico em que as quantidades são representadas por distâncias proporcionais aos seus logarítmos. Os gráficos em que são representadas certas propriedades, tais como custos, tempo, números de pessoas e percentagens, constituem também exemplos de modelos analógicos.

Os modelos *simbólicos* são aqueles em que as propriedades do fenómeno real são expressas simbòlicamente. Como se sabe, a matemática assume papel relevante na construção dos modelos simbólicos que se utilizam em diversas ciências. São os chamados *modelos matemáticos*.

Os modelos icónicos são os mais concretos dos três tipos de modelo mas, em geral, são os mais difíceis de manipular para a determinação do efeito de variações no fenómeno real. Os modelos analógicos são geralmente mais fáceis de manipular e como consequência possuem um carácter mais abstracto. Os modelos simbólicos são os mais abstractos e gerais e são normalmente os mais fáceis de manipular.

Em I. O. utilizam-se os três tipos de modelos, sendo frequente o emprego de modelos icónicos e analógicos como fase intermédia na construção de modelos simbólicos.

Os modelos matemáticos utilizados em I. O. apresentam-se frequentemente com uma expressão matemática complicada. No entanto, a estrutura de um modelo matemático operacional é relativamente simples. Com efeito, designando E uma medida de eficiência, C_i variáveis controláveis ou de acção e I_j variáveis incontroláveis, E é função de C_i e I_j, isto é, a forma básica de um modelo matemático operacional é:

$$E = f(C_i, I_j).$$

Em certos casos, é necessário acrescentar a este modelo básico um conjunto de restrições sobre os valores possíveis de C_i.

Os modelos operacionais são de explicação-previsão não só porque mostram como as coisas se passam, como os diversos factores reagem entre si, como a medida de eficiência varia em função das variáveis de acção, mas também porque não se limitam a verificar o passado, devendo aplicar-se ao futuro para permitirem a tomada de uma decisão.

Os modelos operacionais também se classificam em exactos (ou deterministas) e estocásticos. Um modelo exacto utiliza-se quando o acaso desempenha um papel pouco importante; o modelo estocástico contém explìcitamente variáveis aleatórias.

Quanto à forma das relações que os integram, os modelos matemáticos podem ser lineares ou não lineares. No primeiro caso todas as relações são lineares, no segundo pelo menos uma não é linear.

A consideração da variável tempo conduz a uma nova classificação dos modelos em estáticos e dinâmicos. O modelo é estático quando todas as variáveis que nele intervêm se referem ao mesmo instante t; é dinâmico quando as relações compreendem variáveis desfasadas.

A gama diversíssima de modelos matemáticos de que dispõe a investigação operacional é constituída fundamentalmente pelos modelos aplicáveis ao estudo dos problemas básicos que se põem à entidade controladora das operações de uma organização e que serão descritos sucintamente no n.º 5: existências, repartição, filas de espera, ordenação, substituição, concorrência e pesquisa.

Construído o modelo que representa a operação, segue-se a terceira fase do processo de investigação: *obtenção de uma solução a partir do modelo.*

Sendo

$$E = f(C_i, I_j)$$

o modelo matemático que representa a operação, põe-se o problema de obter os valores de C_i que optimizam E. A solução aparece na forma

$$\begin{aligned} C_1 &= f_1(I_j) \\ C_2 &= f_2(I_j) \\ &- - - - - - - \end{aligned}$$

$f_1, f_2 \cdots$ são as chamadas *regras de decisão.*

Existem dois processos principais para derivar uma solução óptima (ou vizinha da solução óptima): o processo *analítico* e o processo *numérico.*

O processo analítico consiste na obtenção da solução por via dedutiva, utilizando diversos ramos da análise matemática e da álgebra. O processo numérico consiste na utilização de técnicas que permitem obter ìndutivamente a solução, quer ensaiando diversos valores nas variáveis de acção quer adoptando processos iterativos.

Entre os processos de análise numérica assume posição relevante a *simulação* que abrange um conjunto de técnicas, utilizáveis sobretudo quando há dificuldades para formular o modelo, obter soluções a partir do modelo ou testar o modelo e a solução dele derivada.

Na quarta fase do processo de investigação põe-se o problema de *testar o modelo e a solução dele derivada.*

Dado que o modelo é uma representação simplificada da operação, ele será bom se possui suficiente aderência à realidade, isto é, se apesar do seu carácter incompleto, serve para explicar a realidade, fazer previsões e tomar decisões com certo grau de precisão. Utilizam-se largamente em I. O. técnicas estatísticas para testar os modelos e as suas soluções.

Na fase de *controle da solução de um modelo,* há que atender ao facto de ela só permanecer como solução quando as variáveis incontroláveis mantêm os seus valores e não há modificações das relações entre as variáveis. Para controlar uma solução é necessário (*a*) definir para cada variável e relação uma variação significativa, (*b*) construir um processo para detectar a ocorrência de tais variações significativas e (*c*) especificar como deve ser modificada a solução se ocorrem tais variações.

Um dos problemas mais delicados que finalmente se põe à equipa de I. O. é o de conseguir *pôr a solução em prática.*

As soluções são geralmente executadas por pessoal cujos conhecimentos matemáticos são muito reduzidos e, por consequência, se a equipa de investigação operacional quer assegurar o cumprimento das suas recomendações deve apresentar as soluções em termos muito simples.

Como já dissemos, na prática, estas diferentes fases de investigação raramente se sucedem na ordem indicada. Muitas podem ser simultâneas e em numerosos estudos, por exemplo, a fase que consiste em enunciar o problema só fica terminada quando o próprio estudo está virtualmente terminado. Normalmente as diferentes fases influenciam-se mutuamente durante o trabalho de investigação.

4. Breve história da investigação operacional

4.1. Período anterior à II Grande Guerra

Embora o termo «*investigação operacional*» seja relativamente recente, a utilização de métodos científicos na preparação das decisões que competem a uma autoridade executiva remonta a datas longíquas. Recordemos que já no século III A. C., Hierão, tirano de Siracusa, pedia ao sábio Arquimedes que indicasse a mais eficiente utilização das armas da época a fim de romper o cerco imposto pela frota romana.

Mais perto de nós, PASCAL, FERMAT e sobretudo JACQUES BERNOULLI são os percursores da teoria da decisão, criando um novo ramo da matemática — o cálculo das probabilidades — cujo desenvolvimento teve grande influência nos progressos recentes da I. O..

Em 1885, surgem os trabalhos pioneiros de TAYLOR sobre a organização científica do trabalho; em 1917, aparecem as contribuições de ERLANG sobre as comunicações telefónicas e, em 1930, LEVINSON aplica os métodos científicos a problemas de mercado.

No domínio das aplicações militares, devem referir-se os trabalhos importantes de LANCHESTER (1916), que traduziu em fórmulas matemáticas algumas complexas estratégias militares, e as contribuições de EDISON sobre as técnicas a serem adoptadas pelos navios mercantes para se defenderem dos submarinos.

4.2. Período 1939-45

Foi no entanto durante a Segunda Guerra Mundial que a I. O., já assim designada, recebeu um impulso extraordinário.

Desde 1939 que um pequeno grupo de técnicos dedicados à I. O. trabalhou, em Inglaterra, na crítica dos métodos de emprego dos primeiros radares. E, nas horas cruciais de 1940, o Estado Maior inglês recorreu a uma equipa de investigadores — o grupo Blackett — para conseguir o aproveitamento óptimo do sistema defensivo britânico. Citam-se como resultados notáveis obtidos por estes cientistas, os seguintes: duplicação da eficiência dos ataques aéreos aos submersíveis, nova disposição dos combóios de navios por forma a minimizar as perdas, organização dos bombardeamentos aéreos sobre a Alemanha, etc..

Paralelamente, nos E. U. A., desde a sua entrada na guerra, grupos de I. O. foram incubidos pelo exército, marinha e força aérea de estudarem cientìficamente cada uma destas armas. Métodos e formação de ataque dos submersíveis inimigos, técnicas de bombardeamento aéreo por esquadrilhas, meios de defesa contra os ataques aéreos dos japoneses, eis alguns dos assuntos estudados, tendo-se obtido uma sensível melhoria dos resultados e uma diminuição importante das perdas inevitáveis.

4.3. Período do após-guerra

No fim da guerra, os grupos de I. O. gozavam de merecido prestígio. Tinha ficado demonstrado, durante as hostilidades, que as equipas constituídas por especialistas das mais diversas disciplinas eram capazes de resolver complexos problemas, envolvendo muitas variáveis, e os métodos que tinham permitido obter uma maior eficiência das armas e uma valiosa economia em vidas humanas e material, eram susceptíveis de ser aplicados, em tempo de paz, na obtenção de uma maior eficiência económica.

Terminado o conflito, numerosas empresas progressistas aplicaram nas suas organizações os métodos da I. O. que a tão bons resultados tinham conduzido no período das hostilidades. Na Inglaterra, por exemplo, as primeiras organizações a introduzirem a I. O. nos seus serviços foram a «British Transport Commission», o «National Coal Board», «Courtaulds, Ltd». e a «British Iron and Steel Federation». Também nos E. U. A., na França e, pouco a pouco, em todos os países abertos ao progresso científico, os meios industriais, comerciais e o próprio sector público foram-se interessando pela I. O..

Nos Estados Unidos, onde existiam já, antes de 1941, numerosos gabinetes ou empresas de organização científica, a introdução da I. O. nos meios de negócios foi rápida e pode dizer-se que, embora existam nesse país milhares de especialistas, eles não chegam actualmente para satisfazer a procura das empresas.

Em França, a adopção da I. O. começou a ser feita pelas grandes empresas nacionalizadas (S. N. C. F., E. D. F., etc.) e ràpidamente se difundiu. Existem também, neste país, alguns grupos de consultores que se dedicam ao estudo científico dos problemas postos pela indústria e as maiores empresas dispõem das suas próprias equipas de I. O.

Nos países socialistas, a I. O. encontra-se também muito difundida. Na U. R. S. S., por exemplo, a I. O. é largamente utilizada no planeamento económico.

O desenvolvimento progressivo das aplicações da I. O. nos diversos sectores da actividade económica é, ao mesmo tempo, causa e efeito do número crescente de livros e revistas especializadas que se publicam hoje em todo o mundo. Simultâneamente, têm-se fundado numerosas sociedades científicas que agrupam os técnicos e as empresas interessadas na I. O. Entre as mais importantes citam-se: *Operational Research Society* (Inglaterra), fundada em 1948, que publica desde 1950 a revista *Operational Research Quarterly*; a *Operations Research Society of America,* fundada em 1952, publicando o *Journal of the O. R. S. A.*; em França, a *Société Française de Recherche Opérationnelle,* [1] criada em 1956, edita a *Revue Française de Recherche Opérationelle.*

Em 1 de Janeiro de 1959, fundou-se a *Federação Internacional das Sociedades de Investigação Operacional* que agrupa, actualmente, as sociedades da Alemanha, Argentina, Austrália, Bélgica, Canadá, Dinamarca, Espanha, França, Holanda, Índia, Inglaterra, Itália, Japão, Noruega, Suécia e Suiça. A federação começou a publicar, em 1962, a revista bibliográfica *International Abstracts in Operations Research* que regista as publicações de livros e artigos que dizem respeito à I. O. ou disciplinas afins.

5. Descrição sumária da forma e conteúdo dos problemas que se apresentam à investigação operacional

5.1. Generalidades

Embora não exista uma classificação única dos tipos de problemas que podem ser resolvidos por meio da I. O., veremos que há certas formas básicas que se encontram nas mais diversas situações reais.

Consideraremos a seguir sete formas básicas que, isoladamente ou em combinação, abrangem a maior parte dos problemas que se põem à entidade executiva de uma organização. A classificação adoptada é a seguinte:

1. Existências
2. Repartição
3. Filas de espera
4. Ordenação
5. Substituição
6. Concorrência
7. Pesquisa.

Relativamente a cada uma destas sete formas, faremos algumas observações sobre o modo de tratar esses problemas, sem no entanto entrarmos em detalhes técnicos.

Finalmente, agrupando os problemas em termos do seu conteúdo, daremos uma ideia da gama de situações concretas a que a I. O. tem sido aplicada.

5.2. Formas de problemas

5.2.1. Problemas de existências

Existências são recursos provisòriamente inactivos. Homens, material, máquinas e dinheiro são os principais recursos de que dispõem as autoridades executivas.

Para existir um problema de existências deve haver dois tipos de custos associados com os recursos inactivos: (1) um custo que cresce com o aumento das existências e (2) um custo que decresce com esse aumento.

Um custo crescente é, sem dúvida, o custo corrente das existências que inclui custos de armazenagem, custos de obsolência e deterioração, impostos, seguros, etc.. Há custos que decrescem quando aumentam as existências como, por exemplo, os custos de rotura, que estão associados com a impossibilidade de satisfazer a procura ou com as demoras em a satisfazer.

Pode definir-se um problema de existências como aquele em que está envolvido pelo menos um custo de cada tipo e onde a soma

[1] Esta Sociedade juntou-se recentemente à «Association Française de Calcul et Traitement de l'Information» e passaram a constituir a «Association Française d'Informatique et de Recherche Opérationelle».

desses custos é influenciada ou pela procura de artigos, ou pela frequência de reaprovisionamento, ou ainda por ambas. A questão consiste em seleccionar a quantidade ou frequência de reaprovisionamento, ou ambas, por forma a minimizar a soma dos custos relevantes.

Os problemas de existências aparecem nos mais variados contextos e existem técnicas matemáticas muito desenvolvidas para o seu tratamento. O cálculo infinitesimal, o cálculo das probabilidades e a álgebra linear estão na base dessas técnicas. Em casos mais complicados, quando é possível construir o modelo mas é difícil obter a solução, utilizam-se técnicas de simulação que, em geral, envolvem o emprego de um computador electrónico.

5. 2. 2. Problemas de repartição

Estes problemas agrupam-se em *três categorias* principais. Um problema de repartição da *primeira categoria* define-se pelas seguintes condições:

1. Há um conjunto de tarefas (de qualquer tipo) a cumprir.
2. Há recursos disponíveis suficientes para cumprir todas as tarefas.
3. Pelo menos uma das tarefas pode ser cumprida de diferentes maneiras, utilizando combinações e quantidades diferentes de recursos.
4. Algumas das maneiras de executar as tarefas são melhores do que outras (por exemplo, mais baratas ou mais lucrativas).
5. Não há recursos disponíveis suficientes para fazer cada uma das tarefas da melhor maneira possível.

O problema consiste em repartir os recursos pelas tarefas por forma a maximizar a eficiência total; por exemplo, minimizar o custo total ou maximizar o lucro total.

No problema de repartição mais simples, pertencente a esta categoria, cada tarefa requer um e um só recurso e há o mesmo número de tarefas e recursos. É o chamado *problema de afectação* porque envolve a afectação de um recurso a cada tarefa.

Suponha-se, por exemplo, que numa empresa há n lugares vagos $J_1, \cdots, J_n$ e n candidatos $I_1, \cdots, I_n$. Admitindo que, por meio de um teste, é possível obter quantitativamente a eficiência a_{ij} do indivíduo I_i para o lugar J_j, pretende-se afectar os indivíduos às tarefas por forma a maximizar a eficiência total. Representando por x_{ij} uma variável que toma o valor 1 ou 0, consoante o indivíduo I_i é afectado ou não à tarefa J_j, o problema traduz-se matemàticamente do seguinte modo:

maximizar

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$$

com as restrições

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

$$x^2{}_{ij} = x_{ij}$$

Quando algumas das tarefas requerem mais do que um recurso e se os recursos podem ser utilizados para mais de uma tarefa, o problema de repartição complica-se. Um dos problemas mais frequentes nesta categoria é o *problema do transporte*. Considere-se, por exemplo, um certo produto P que é produzido em cada uma das m fábricas $F_1, \cdots, F_m$ e seja a_i a produção anual de F_i. Suponha-se também que o produto P é procurado em cada um dos n mercados $M_1, \cdots M_n$, sendo b_j a procura anual em M_j. Pretende-se determinar a repartição óptima dos «recursos» $a_1, a_2, \cdots, a_m$ pelas «tarefas» $b_1, b_2, \cdots, b_n$ por forma a minimizar o custo total de transporte. Designando por x_{ij} a quantidade de P transportada de F_i para M_j e por c_{ij} o correspondente custo unitário de transporte, o problema do transporte traduz-se matemàticamente do seguinte modo:

minimizar

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

com as restrições

$$\sum_j x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

A *segunda categoria* de problemas de repartição abrange os que compreendem mais tarefas a cumprir do que os recursos disponíveis consentem. Assim, tem de se proceder a uma selecção das tarefas e à determinação da forma como devem ser executadas. Este problema é frequente, por exemplo, nas refinarias de petróleo. Dada a procura para uma gama variada de produtos (que não podem ser todos produzidos ao mesmo tempo) e os seus preços de venda, determinar a combinação de produtos que deverão ser fabricados e as respectivas quantidades por forma a maximizar o lucro.

A *terceira categoria* de problemas de repartição engloba aqueles em que é possível controlar a quantidade de recursos e, assim, determinar que recursos deverão ser acrescentados, onde ou que recursos deverão ser dispensados. Por exemplo, a necessidade de localizar uma nova fábrica ou armazém cria um problema deste tipo. De um grupo de fábricas, determinar as que devem fechar em períodos de contracção da procura. Dentro de uma fábrica, o problema pode surgir quando se trata de determinar que tipos de máquinas se devem introduzir ou retirar da linha de produção.

A maior parte das técnicas matemáticas utilizadas no tratamento de problemas de repartição agrupa-se na teoria da *programação matemática* — linear, não linear, estocástica, paramétrica e dinâmica — cujo desenvolvimento é recente.

5. 2. 3. Problemas de filas de espera

Um dos problemas de filas de espera estudado pelas equipas de I. O. durante a Segunda Guerra Mundial foi o da aterragem de aviões de bombardeamento regressados à base depois de um *raid*. Quando os aviões, em grande número, regressavam das missões efectuadas, chegavam à base, simultâneamente, com escassas reservas de combustível e alguns com avarias importantes. A necessidade urgente de todos aterrarem provocava problemas de congestionamento e obrigava os serviços de terra a acelerar o ritmo das aterragens, procurando desimpedir as pistas num tempo mínimo.

Em tempo de paz, também surgem problemas idênticos a todo o momento: nos correios, nos bancos, nos restaurantes, no trânsito, etc.

Em geral, uma *fila de espera* (ou *bicha*) aparece sempre que a procura de um serviço, por uma série de unidades (pessoas, máquinas, etc.), é superior às possibilidades de o satisfazer, sendo necessário diferir os serviços por um sistema de filas ou de ordenação entre essas unidades.

Em todo o problema de filas de espera há a considerar a *entrada*, que é a forma (aleatória, periódica, etc.) como chegam as unidades ao *local de serviço*, a *disciplina* ou regra segundo a qual se ordenam as unidades para aguardar a prestação do serviço, o *mecanismo* do serviço ou a maneira deste se realizar e a *saída* ou forma como as unidades abandonam o local de serviço.

No domínio da economia da empresa os problemas de espera são frequentes. Exemplifiquemos: Considere-se um conjunto de máquinas numa unidade industrial e admitamos que, de tempos a tempos, uma máquina requer reparação. Supondo aleatórios o tempo de funcionamento normal de uma máquina e o tempo de reparação, põe-se o problema de estudar o número de máquinas na fila para reparação, de forma a ver-se qual é o número mínimo de operários necessários, a fim de que as filas de espera sejam mínimas e também o número de operários inactivos.

A teoria matemática das filas de espera está muito desenvolvida, fazendo larga utilização do cálculo das probabilidades, de equações diferenciais, integrais e equações de diferenças. Em certos problemas mais complicados há necessidade de recorrer a técnicas de simulação.

5. 2. 4. Problemas de ordenação

Nos problemas de espera, a ordem segundo a qual as unidades são seleccionadas para serem servidas supõe-se definida. Nos problemas de ordenação pretende-se seleccionar uma disciplina da fila por forma a minimizar uma medida apropriada da operação.

Considere-se o seguinte exemplo de problema de ordenação: Suponhamos que há dois produtos A e B a fabricar, que cada um requer operações em duas máquinas, 1 e 2, e para ambos os produtos as operações na máquina 1 devem preceder as da máquina 2. Admitamos ainda que A requer duas horas na máquina 1 e dez horas na máquina 2, e que B necessita de seis e quatro horas, respectivamente. Cada possibilidade pode determinar-se por meio de um gráfico de Gantt:

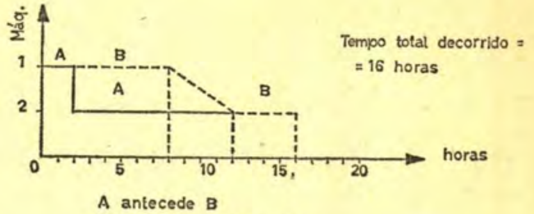

Fig. 1

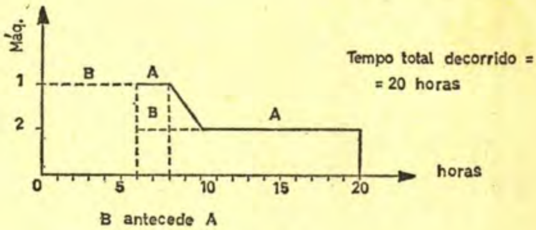

Fig. 2

É claro que a comparação das duas sucessões (AB e BA) mostra que há uma diferença de quatro horas no tempo total decorrido na operação. Neste caso deve optar-se, evidentemente, pela ordenação AB.

Infelizmente, na maior parte dos problemas de ordenação é difícil achar a solução óptima e só os mais simples se podem resolver pela análise matemática. Em quase todos os problemas reais é necessário proceder a uma simulação, e mesmo assim a quantidade de trabalho é muitas vezes proibitiva e sòmente é possível obter soluções aproximada.

Uma variante notável dos problemas de ordenação é constituída pelos *problemas de escolha do itinerário*.

Suponhamos que um caixeiro viajante tem um certo número de cidades a visitar, conhece a distância (ou tempo, ou custo) da deslocação entre qualquer par de cidades. O problema consiste em escolher um percurso que começa na cidade onde habita, passe uma só vez por cada uma das cidades a visitar e termine no ponto de partida, por forma a minimizar a distância (ou tempo ou custo).

Com duas cidades não há escolha a fazer. Com três, uma das quais a cidade onde reside (A), há dois itinerários possíveis (ABC e ACB). Para quatro cidades há seis percursos possíveis. Mas para onze cidades há aproximadamente 3 700 000 itinerários possíveis.

Um problema de escolha do itinerário, exemplificado acima pelo chamado «problema do caixeiro viajante», pode aparecer em contextos muito diferentes.

Técnicas recentes permitem abordar também uma variante de problema de ordenação que consiste em realizar nas melhores condições possíveis um conjunto de operações ordenáveis. Por vezes trata-se da minimização do prazo de execução do conjunto das operações; por vezes trata-se da minimização dos custos das operações.

Essas técnicas são designadas pelas iniciais P. E. R. T. *(Program Evaluation and Review Technique)* e constituem um modelo em que se associam a teoria dos gráficos e a teoria das probabilidades.

O P. E. R. T. aplica-se, por exemplo, aos seguintes problemas de ordenação: todos os tipos de construção e manutenção, planeamento do orçamento e lançamento de novos produtos.

5. 2. 5. Problemas de substituição

Os problemas de substituição são de dois tipos: os que envolvem artigos que se deterioram gradualmente com o tempo e os que se referem a artigos cuja eficiência desaparece completamente depois de um certo período de uso. Entre os artigos que se deterioram gradualmente com o tempo figuram as máquinas, vagões, barcos, etc.. A sua eficiência vai decrescendo com o tempo e pode ser levada ao nível inicial por meio de certa actuação. Entre os artigos que pràticamente mantêm o seu nível de eficiência durante um certo tempo e depois se inutilizam completamente figuram os que, em geral, são pequenos e baratos: lâmpadas eléctricas, molas de automóveis, etc.

Em relação aos bens que se deterioram gradualmente, é evidente que, sem uma conservação preventiva ou correctiva, a diminuição da sua eficiência traduz-se geralmente numa utilização a custos crescentes. Para manter a sua eficiência há que proceder à conservação, que também envolve um custo. Além disso, certos bens tornam-se obsoletos. Assim, quanto mais longa é a vida do equipamento maior é o custo de conservação ou maiores são as perdas devidas ao decrescimento da eficiência absoluta e relativa.

Por outro lado, a substituição frequente do equipamento envolve custos de investimento crescentes. O problema consiste, pois, em determinar quando se deve proceder à substituição por forma a minimizar a soma dos custos de conservação e investimento.

Os modelos matemáticos para resolver problemas deste tipo são, na maior parte dos casos, simples. Presentemente a programação dinâmica é uma técnica muito aplicada.

Para os artigos que mantêm o seu nível de eficiência durante um certo tempo e depois se inutilizam completamente, o problema consiste geralmente em optar por uma substituição de grupo, por uma substituição individual ou por uma substituição mista.

Há duas políticas extremas: substituir os artigos sòmente quando se inutilizam e substituir todos os artigos antes que qualquer deles se inutilize. No primeiro caso, há a vantagem de minimizar o número de artigos necessários para a substituição mas, como as inutilizações são relativamente frequentes, os custos associados às substituições são elevados. No segundo caso, o número de artigos necessários não é minimizado mas os custos de substituição são mais baixos.

O problema deve resolver-se escolhendo uma política que minimize a soma dos custos dos artigos, inutilizações e operações de substituição.

A análise matemática e processos de simulação figuram entre as técnicas utilizadas na resolução destes problemas.

5. 2. 6. Problemas de concorrência

Um importante elemento que surge, tanto nos problemas económicos como nas questões militares de táctica e estratégia, é a concorrência. Muitas vezes a decisão tomada por um indivíduo é afectada pelas decisões tomadas por um ou mais indivíduos. Essas decisões interdependentes podem ser cooperativas ou concorrentes; são as últimas que se encontram mais estudadas.

Procuremos um exemplo:

Suponhamos que existem duas empresas A e B que partilham um determinado mercado e que têm de tomar em cada trimestre — portanto um grande número de vezes — uma decisão quanto ao emprego dos seus orçamentos de publicidade. Por hipótese, admitiremos que a publicidade faz deslocar os lucros de uma empresa para a outra por forma que o ganho de uma é a perda da outra. Considere-se ainda que existem duas estratégias extremas para cada empresa: a primeira estratégia consiste em despender totalmente o orçamento em publicidade nos jornais; a segunda em gastar totalmente o orçamento em cartazes. Cada empresa toma a sua decisão antes de conhecer a da outra e portanto são possíveis quatro eventualidades.

O comportamento das empresas será o seguinte: a empresa A procurará adoptar a estratégia que torne o seu lucro máximo, enquanto que a empresa B vai tentar tornar mínimo o lucro de A. Estamos assim perante um caso típico de estratégias concorrentes.

A *teoria dos jogos* permite formular a maior parte dos problemas de concorrência mas só possibilita a obtenção de soluções nos casos mais simples. Grande parte das situações reais tem de utilizar um tipo de simulação a que se dá o nome de *jogo*.

O jogo militar, por exemplo, tem uma longa história e tem sido uma maneira de treinar os homens para o combate (concorrência). No entanto, só recentemente é que essas técnicas foram aplicadas a problemas industriais e governamentais (por exemplo, em diplomacia).

Num jogo, o contexto da situação da concorrência é simulado mas os agentes que tomam as decisões são reais.

A teoria dos jogos tem sido aplicada na indústria, por exemplo, para o estudo da política de preços, estratégias de publicidade, introdução de novos produtos no mercado, etc..

5. 2. 7. Problemas de pesquisa

Considere-se o problema de detectar submarinos na rota de um barco ou combóio durante tempo de guerra. Utilizaram-se para esse efeito dirigíveis e pequenos balões que se deslocavam lentamente sobre a água, a baixa altitude, o que lhes dava grande probabilidade de detectar os submarinos. Porém, como estes engenhos se moviam lentamente, não tinham possibilidades de cobrir uma área vasta e portanto podiam escapar-lhes alguns. Se fosse utilizado para o mesmo efeito um avião rápido, é evidente que a área sob observação poderia ser aumentada mas diminuiria a precisão das observações, em consequência da velocidade do aparelho e do seu vôo a maior altitude. Neste caso, o aumento de área observada não compensava o acréscimo dos erros de observação.

Numa questão deste tipo há duas espécies de erros que se podem cometer: erros devidos à inadequada área de observação (erros de amostragem) e erros de observação. Há, evidentemente, custos associados a ambos os tipos de erros e à obtenção de informações.

Dispondo-se de uma quantidade fixa de recursos (tempo, dinheiro ou investigadores) deve tomar-se uma decisão sobre a grandeza e composição da amostragem. A selecção de uma grandeza e composição de amostragem apropriadas, com recursos fixos, é o problema de pesquisa com restrições. No problema sem restrições deve também determinar-se os recursos a utilizar no processo. Quanto mais recursos se empregam maior é o custo da pesquisa mas menor é o custo esperado do erro.

É fácil reconhecer que o exame de contas por sondagem é um processo de pesquisa e dá origem a problemas do tipo que descrevemos acima. Muitos processos contabilísticos podem interpretar-se como pesquisas. Mais geralmente, todos os processos de estimação e previsão são problemas de pesquisa.

Diversos investigadores operacionais têm aplicado a teoria da pesquisa a problemas de exploração de recursos naturais com o objectivo de determinarem áreas de exploração e como explorá-las. Esses processos foram, por exemplo, aplicados à pesquisa de níquel e carvão.

As técnicas aplicáveis à resolução destes problemas assentam na teoria da amostragem, da estimação e na teoria psicológica da percepção.

5. 2. 8. Problemas mistos

É necessário pôr em evidência que nem todos os problemas que são objecto de estudo da I. O. pertencem a *um* dos sete tipos acima estudados. Com efeito, em grande número de casos, os problemas abrangem vários aspectos que cabem dentro das diversas categorias analisadas. Embora se possa decompor o seu estudo, a própria metodologia da I. O. obriga a uma análise global que permita descobrir as inter-relações existentes no fenómeno.

Também é importante para o investigador saber que há problemas que não cabem dentro de nenhuma destas categorias e que portanto permitem abrir novas vias de investigação.

5. 3. Conteúdo dos problemas

5 3. 1. Compras

A I. O. tem sido utilizada para determinar as políticas de compra de matérias primas cujos preços são estáveis ou variáveis. As soluções deste tipo de problemas indicam quanto se deve comprar, quando e onde.

A I. O. tem sido empregada também para formular estratégias de exploração de depósitos naturais de matérias primas e preparar planos para a exploração de tais recursos, depois de localizados; utiliza-se igualmente na compra de bens de equipamento no sentido de seleccionar o tipo de equipamento, determinar quando deve ser comprado ou alugado, se é preferível ser usado ou novo, etc..

5. 3. 2. Produção

No que se refere a problemas de produção, a I. O. tem sido aplicada em diversos domínios: no planeamento e localização de fábricas e determinação da medida em que devem ser automatizadas; estudo das fontes de energia para um complexo de fábricas, determinação das espécies de energia e quantidades óptimas a fornecer; determinação de quais as fábricas de um complexo industrial que devem ser fechadas, sob que condições e em que ordem.

A I. O. tem sido largamente utilizada no delineamento de políticas de produção (quantidades, processos, tipos de produtos, etc.), de sistemas de controle de qualidade, de conservação preventiva e correctiva, assim como em diversos estudos referentes à estabilização da produção e do nível do emprego.

5. 3. 3. Comercialização

A I. O. tem sido aplicada vantajosamente na localização de pontos de distribuição, seu dimensionamento, quais as quantidades que devem ter em depósito e os clientes que devem servir; na determinação da amplitude de um orçamento de vendas e na repartição das suas rubricas pelas vendas directas, promoção de vendas e publicidade; na determinação do número de vendedores de uma empresa, do número e qualidade dos clientes que lhes devem ser afectados, da frequência com que devem visitar cada cliente e que tempo deve ser gasto na prospecção de clientes; na determinação dos tipos de produtos que os consumidores necessitam e das variedades de tamanhos, modelos, cores, etc., preferidos; na adaptação dos modelos, embalagens, etc. Tem-se utilizado também a I. O. para determinar se os serviços de assistência referentes a determinado artigo devem ficar a cargo da fábrica ou de outros indivíduos, que tipo de garantia e durante quanto tempo deve ser oferecida; e ainda na localização de retalhistas, repartição do seu espaço interno pelo armazém e vendas, determinação dos casos em que devem ser dirigidos pela fábrica ou por outros indivíduos, etc.

5. 3. 4. Investigação e desenvolvimento

A I. O. foi aplicada recentemente na determinação do orçamento para investigação e desenvolvimento e na averiguação de como deve ser dividido entre a investigação fundamental e aplicada. Tem sido também utilizada na determinação do número de investigadores, áreas de investigação e sua organização.

5. 3. 5. Sequência e localização de pontos de estrangulamento

Dado que em muitas operações complexas a tarefa total se decompõe num grande número de actividades, acontece que algumas delas têm de esperar que outras se completem para poderem então começar, verificando-se que surgem também actividades que são paralelas.

Estabelecidas as ligações e dependências entre as actividades, é possível determinar o *caminho crítico*, isto é, a sucessão de actividades de que vai depender o tempo de realização do projecto. Deslocando recursos pode-se minimizar esse tempo utilizando os métodos do P. E. R. T. que constitui, actualmente, um dos modelos matemáticos mais aplicados na I. O.

5. 3. 6. Pessoal

A I. O. tem sido usada não só na determinação óptima da composição de idades e especializações dos operários, no estudo das causas de acidentes e modos de os evitar, causas de absentismo, etc., mas também no recrutamento do pessoal, sua distribuição pelas tarefas e na medição da sua eficiência.

5. 3. 7. Finanças e contabilidade

Neste domínio, a I. O. tem sido aplicada no delineamento de processos de contabilidade e exame de contas que minimizem a soma dos custos dos processos e dos erros; na processação automática de dados; no controle da contabilidade manual, e, em geral, no controle das operações de escritórios; no estudo da política de crédito para uma empresa e dos processos para estimar os riscos do crédito.

A I. O. é usada também na determinação das necessidades de capital a longo prazo e no estudo da composição das carteiras de títulos.

*

* *

É fácil concluir da procedente enumeração de problemas que a maior parte deles tem sido estudada, desde há muitos anos, sem o recurso à I. O. Este facto vem sublinhar um importante aspecto que, aliás, já aflorámos: a I. O. *não* se distingue pela natureza dos problemas que investiga mas sim *como* os aborda.

A aproximação interdisciplinar, a análise dos sistemas como um todo e a adopção do método científico são os traços fundamentais que têm garantido à I. O. a resolução eficiente dos problemas reais.

6. Relação entre a investigação operacional e outras ciências da direcção

6. 1. Generalidades

Estudada a natureza da I. O. e descritos sucintamente os problemas que constituem o seu objecto de estudo, vamos ver agora quais são as relações existentes entre a I. O. e outras ciências da direcção.

Antes, porém, sublinhemos mais uma vez que as três características metodológicas fundamentais da investigação operacional são: o carácter interdisciplinar, o estudo dos sistemas como um todo e a adopção do método científico. Este simples conhecimento permitirá distinguir a I. O. de outras ciências da direcção; no entanto, deve frizar-se que, em certos casos, aquelas três características não consentem uma delimitação nítida entre as diversas disciplinas.

Para definirmos as tarefas da direcção, retomemos o conceito de sistema estruturado ou organização, que apresentámos no n.º 2. Resumidamente, podemos dizer que uma organização é um sistema formado por duas ou mais partes cujos actos constituem uma operação e que apresenta quatro características essenciais: deve possuir conteúdo, estrutura, rede de comunicações e dispositivos de controle.

a) *Conteúdo*

Entre os componentes da organização encontram-se homens e máquinas. A maior parte das organizações converte recursos em bens e serviços que, por vários meios, vão satisfazer necessidades de outrem. Em síntese, uma organização contém: homens, máquinas, matérias e dinheiro.

b) *Estrutura*

A actividade do sistema divide-se, funcionalmente, em diferentes grupos responsáveis por um certo número de subactividades intervenientes todas no interesse geral da organização.

c) *Comunicações*

Os elementos humanos do sistema são informados quer por observação directa quer por comunicação proveniente de outros indivíduos. É a rede de comunicações que mantém a coesão do conjunto e assegura o contacto com meio exterior.

d) *Controle*

O sistema deve ter a possibilidade de comparar os resultados obtidos com os resultados desejados e precisa de evoluir no sentido da redução das diferenças observadas. É pois necessário que possa modificar o conteúdo, a estrutura, as as comunicações e mesmo os seus próprios controles afim de atingir mais eficientemente os seus objectivos. Quer dizer, o sistema deve ser evolutivo e auto-organizador.

Vejamos agora como as ciências da direcção contribuem, em cada um destes aspectos, para melhorar o funcionamento do sistema.

6.2. Conteúdo

Em relação ao emprego do pessoal, o primeiro componente de uma organização, existem três questões fundamentais:

Em primeiro lugar, tem de se proceder à selecção do melhor, cuidando posteriormente da sua formação profissional. Neste aspecto intervém a *psicologia* e deve referir-se que, nos últimos anos, as questões relativas à formação do pessoal tendem a formar uma especialização a que se consagram cada vez mais os consultores externos ao sistema.

Em segundo lugar, há que tirar o maior partido da actuação do pessoal, melhorando o seu comportamento. Está aberta a via ao *estudo do trabalho,* realizado em grande parte por empresas especializadas.

Em terceiro lugar, tenta-se alterar o ambiente de trabalho, modificando os meios materiais, psicológicos e sociais em que vivem os homens. O comportamento do pessoal é indirectamente influenciado por certas medidas, tais como o subsídio de férias, cantinas, etc. A *psicologia industrial e social* tem estudado diferentes meios para a modificação do ambiente de trabalho.

O segundo componente de uma organização são as máquinas. A concepção, construção e conservação destas pertence a técnicos de diferentes especialidades (*engenharia civil, engenharia mecânica, engenharia química, engenharia electrotécnica,* etc.). A adaptação das máquinas aos homens é objecto de estudo da *engenharia humana (ergonomia).*

O equipamento com que uma organização opera pode ser ineficiente; vários ramos da engenharia podem porém auxiliar a direcção, planeando ou seleccionando novo equipamento ou modificando o antigo. O planeamento do equipamento e o seu controle constituem objecto de estudo da *engenharia de sistemas.*

O terceiro componente de um sistema são as *matérias.* Os estudos neste domínio exigem geralmente especialistas metalúrgicos, químicos, físicos, engenheiros ou estatísticos que se debruçam sobre o estudo da influência das matérias no conjunto do sistema.

Finalmente, o *fluxo monetário* através do sistema é um factor de primacial importância, em cujo estudo assume grande evidência a *contabilidade,* encarada quer sob o aspecto de fonte geradora de informação quer sob o ângulo de instrumento de controle.

A I. O. raramente é utilizada na análise do conteúdo das organizações.

6.3. Estrutura

A reorganização é o método de ataque à ineficiência da estrutura da organização e consiste, fundamentalmente, na modificação da composição dos subgrupos e (ou) suas responsabilidades. Os *estudos de reorganização (*ou *organização)* apresentam em larga medida um carácter qualitativo e o corpo de conhecimentos e técnicas em que se baseiam é conhecido por *teoria da organização* embora ainda esteja longe de uma sistematização ou quantificação. Em 1959, Haire construiu uma teoria quantitativa das estruturas mas na prática é difícil aplicá-la.

Os estudos sobre a reorganização da estrutura dos sistemas baseiam-se, na prática, sobretudo na apreciação qualitativa pessoal e na experiência; frequentemente estes estudos são realizados por empresas especializadas e neles não intervém geralmente a I. O.

6.4. Comunicações

O estudo das comunicações tem um carácter essencialmente qualitativo, embora haja uma teoria matemática da comunicação baseada nos trabalhos de HARTLEY e SHANNON; esta, porém, não inclui os importantes aspectos psicológicos e sociais da comunicação. No domínio do estudo das alterações na geração, recolha, tratamento e transmissão da informação, também raramente se utiliza a I. O.

6. 5. Controle

Uma organização com bom pessoal e equipamento e dispondo de estrutura e comunicações eficientes pode, porém, ser ineficiente se não fizer a utilização óptima dos seus recursos (homens, máquinas, matérias e dinheiro), isto é, se as operações da organização não forem controladas eficientemente.

O controle consiste, como se disse, em comparar os resultados obtidos com os resultados desejados e em fazer ajustamentos no sistema por forma a reduzir as diferenças observadas. Note-se que estas duas fases do controle equivalem a reconhecer a necessidade de uma decisão e a tomá-la.

Neste contexto, *decidir* consiste em escolher e utilizar recursos, edificar uma estrutura, criar um sistema de comunicações e um processo de controle. Mas fàcilmente se reconhece que a questão importante não reside no conteúdo da decisão mas sim na sua estrutura, quer dizer, na via seguida para a sua preparação. *É na preparação da decisão que intervém a investigação operacional.*

Como dissémos no n.º 2, embora o conteúdo, a estrutura e a comunicação estejam envolvidas no controle, não são pròpriamente estes factores o objecto de estudo da I. O., mas sim as decisões pelas quais eles são seleccionados, concebidos e utilizados. A I. O. procede ao controle a partir dos dados fornecidos pelos especialistas do conteúdo, da estrutura e das comunicações e por sua vez estes especialistas poderão trabalhar mais eficientemente se utilizarem os resultados fornecidos pela I. O..

7. A Investigação Operacional e a Economia

7. 1. Generalidades

Dada a complexidade dos fenómenos que são objecto de estudo da economia e nos quais intervêm factores da mais diversa natureza, são evidente as vantagens que resultarão do emprego da I. O. no estudo desses fenómenos. Assim, assistimos actualmente a um esforço de remodelação e aperfeiçoamento dos esquemas tradicionais quer da teoria económica quer da econometria, com o recurso, sobretudo, aos novos modelos matemáticos utilizados na I. O. (teoria dos jogos, programação matemática, teoria das filas de espera, teoria da substituição e renovação, etc.).

Apelidar, porém, de I. O. os temas clássicos da economia e da econometria reformulados por meio dos novos modelos é, infelizmente, uma tendência errada que leva a confundir domínios diversos. Nem a I. O. é um capítulo da economia nem esta um capítulo da primeira; por exemplo, não se passará a chamar I. O. à táctica militar só pelo facto daquela lhe ser aplicável.

Não podemos ir até ao ponto de predizer, como alguns autores pretendem, o desaparecimento da I. O. e a sua integração nas diferentes disciplinas, mas o que acontecerá certamente é a disseminação dos modelos matemáticos operacionais pelos vários ramos da ciência.

A I. O., encarando as operações das organizações como um todo e na multiplicidade dos seus aspectos, tem potencialidades que lhe garantem não só a existência mas também a possibilidade de contribuir com novos conhecimentos para o enriquecimento das outras disciplinas, em particular a economia. Por seu lado, o «desenvolvimento operacional» de cada um dos ramos da ciência permitirá que a aproximação interdisciplinar da I. O. seja cada vez mais frutuosa.

7. 2. Aplicações da Investigação Operacional à Economia

Como dissémos anteriormente, a reformulação da teoria económica e da econometria por meio dos modelos matemáticos utilizados na I. O. é um dos aspectos que mais deve interessar o economista moderno.

A utilização destes modelos tem provocado o acréscimo de operacionalidade dos modelos económicos e econométricos, permitindo resolver problemas que até há poucos anos não tinham encontrado solução satisfatória.

A teoria dos jogos, por exemplo, veio possibilitar o tratamento de situações de conflito de interesses tão frequentes na economia: monopólio bilateral (monópólio-monopsónio), duopólio e oligopólio, combinações ou coalizações, como, por exemplo, quando os salários são determinados por uniões ou federações de trabalhadores e patrões; etc..

A programação matemática, em especial a programação linear, provocou uma verdadeira revolução na análise económica e na econometria. A teoria da empresa, as relações interindustriais, a teoria do equilíbrio geral e a economia do bem-estar são exemplos de domínios profundamente remodelados com o recurso à programação linear.

Os aperfeiçoamentos da teoria económica e da econometria, no sentido de um acréscimo de operacionalidade, têm-se reflectido, evidentemente, na política económica. Ao nível da macro ou da microeconomia os modelos operacionais têm demonstrado a sua eficácia na tomada de decisões económicas.

BIBLIOGRAFIA

Ackoff, R. L. (ed.), *Progress in operations research*, Vol. I, New Yerk, 1961.

Ackoff, R. L., (C. W. Churchmann e E. L. Arnoff), Introduction to operations research (tradução francesa com o título *Éléments de récherche opérationnelle*) Paris, 1961.

Ackoff, R. L., (S. K. Gupta e J. S. Minas), *Scientific method: optimizing applied research decisions* New York, 1962.

Ackoff, R. L., (P. Rivett), *A manager's guide to operational research* London, 1963.

Faure, R. (J. P. Boss. e A. Le Garff), *La recherche opèrationnelle*, Paris, 1961.

Jesus, F., *A investigação operacional na empresa* (curso realizado no CEGOC), Lisboa, 1965.

Shuchmann, A. (ed.), *Scientific decision making in business*, New York, 1963.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência e 2.º ponto de informação (1.ª chamada) — 15-6-1965.

I

5643 — 1) Considere $\varphi(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ e resolva os seguintes problemas:

a) Trace a imagem de $\varphi(x)$.

b) Calcule $P\varphi(x)$.

c) Prove que $\varphi(x) = \sum_1^\infty n^2 x^{n-1}$ para $|x| < 1$.

2) Demonstre que θ, no termo complementar da fórmula de Taylor

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a+\theta h),$$

tende para $1/3$ quando $h \to 0$ se $f'''(x)$ é contínua para $x = a$ e $f'''(a) \neq 0$. Generalize este resultado.

Sugestão: Escreva a terceira fórmula de Taylor para $f(x)$ e relacione-a com a segunda.

3) Pode utilizar a regra de Cauchy para calcular $\lim\limits_{x=0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{e^x - 1}$ e $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$? Existem estes limites? Justifique as respostas.

R: 1) a) Domínio: $]-\infty, 1[,]1, +\infty[$.
Ponto de descontinuidade: $x = 1$
Intersecções com os eixos: $(0,1)$ e $(-1,0)$
Intervalos de monotonia, extremos:

$$\varphi'(x) = \frac{2x + 4}{(1-x)^4}$$

$$\varphi'(x) \geqq 0 \Longleftrightarrow 2x + 4 \geqq 0 \Longleftrightarrow x \geqq -2$$
cresc. em $[-2, +\infty[$
$$\varphi'(x) \leqq 0 \Longleftrightarrow 2x + 4 \leqq 0 \Longleftrightarrow x \leqq -2$$
decr. em $]-\infty, -2]$
mínimo $(-2, -1/27)$.

Convexidade, concavidade, pontos de inflexão

$$\varphi''(x) = \frac{6x + 18}{(1-x)^5}$$

$\varphi''(x) \geqq 0 \Longleftrightarrow -3 \leqq x < 1$ *convexa em* $[-3, 1[$
$\varphi''(x) \leqq 0 \Longleftrightarrow x > 1 \vee x < -3$ *côncava em* $]-\infty, -3]$ *e* $]1, +\infty[$

ponto de inflexão $(-3, -1/32)$.

Assíntotas: $X = 1$ e $Y = 0$.

b) *Fazendo* $1 - x = t$, *vem*

$$P\frac{1+x}{(1-x)^3} = P\frac{t-2}{t^3} = P\frac{1}{t^2} - 2P\frac{1}{t^3} =$$
$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

c)
$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^3}$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n \quad |x| < 1$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_1^\infty n\, x^{n-1} \quad |x| < 1$$
$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_2^\infty \binom{n}{2} x^{n-2} \quad |x| < 1$$
$$\frac{x}{(1-x)^3} = \sum_2^\infty \binom{n}{2} x^{n-1} \quad |x| < 1.$$

Então,

$$\varphi(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_2^\infty \binom{n}{2} x^{n-2} + \sum_2^\infty \binom{n}{2} x^{n-1} =$$
$$= 1 + \sum_2^\infty \binom{n+1}{2} x^{n-1} + \sum_2^\infty \binom{n}{2} x^{n-1} =$$
$$= 1 + \sum_2^\infty \left[\frac{(n+1)\,n}{2} + \frac{n\,(n-1)}{2}\right] x^{n-1} =$$
$$= 1 + \sum_2^\infty n^2 x^{n-1} = \sum_1^\infty n^2 x^{n-1}.$$

2) *Como*

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a + \theta_1 h),$$

vem

$$\frac{h^2}{2!} f''(a + \theta h) = \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a + \theta_1 h)$$

ou

$$f''(a + \theta h) - f''(a) = \frac{h}{3} f'''(a + \theta_1 h),$$

donde

$$\theta \cdot \frac{f''(a + \theta h) - f''(a)}{\theta h} = \frac{1}{3} f''(a + \theta_1 h).$$

Tomando limites para $h = 0$, *vem imediatamente* $\lim\limits_{h=0} \theta = 1/3$.

A generalização é imediata: quando $f^{(n+1)}(x)$ *é contínua e diferente de zero para* $x = a$, $\lim\limits_{h=0} \theta = 1/n+1$.

3) *Como* $\lim\limits_{x=0} \dfrac{(x^2 \operatorname{sen} 1/x)'}{(e^x - 1)'} = \lim\limits_{x=0} \dfrac{2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x}{e^x}$ *não existe e* $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x + \operatorname{sen} x)'} = \lim\limits_{x=\infty} \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ *também não existe, não se pode aplicar a regra de Cauchy.*

Os limites existem porque

$$\lim_{x=0} \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{e^x - 1} = \lim_{x=0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) \left(\lim_{x=0} \frac{x}{e^x - 1}\right)$$

e como $\lim\limits_{x=0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$ *e*

$$\lim_{x=0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x=0} \frac{1}{e^x} = 1,$$

vem

$$\lim_{x=0} \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{e^x - 1} = 0;$$

e

$$\lim_{x=\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x=\infty} \frac{x\left(1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)} = 1.$$

II

5644 — 1) Mostre que, se a equação

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0$$

tem uma raíz positiva x_0, a equação

$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

tem também uma raiz positiva inferior a x_0.

2) Seja $g(x,y) = \dfrac{x y (2 x^2 - 3 y^2)}{x^2 + y^2}$, $g(0,0) = 0$. Calcule $g''_{xy}(0,0)$ e $g''_{yx}(0,0)$. Pode concluir do resultado que $g''_{xy}(x,y)$ e $g''_{yx}(x,y)$ não são contínuas em $(0,0)$? Porquê?

R: 1) *Como* $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0$ *tem as raízes* $x = 0$ *e* $x = x_0 > 0$, *o teorema de Rolle ensina que* $n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ *tem pelo menos uma raiz entre* 0 *e* x_0.

2)

$$g'_x(0,0) = \lim_{x=0} \frac{g(x,0) - g(0,0)}{x} = 0$$

$$g'_y(0,0) = \lim_{y=0} \frac{g(0,y) - g(0,0)}{y} = 0$$

$$g'_x(0,y) = \lim_{x=0} \frac{g(x,y) - g(0,y)}{x} = -\frac{3 y^3}{y^2}$$

$$g'_y(x,0) = \lim_{y=0} \frac{g(x,y) - g(x,0)}{y} = \frac{2 x^3}{x^2}$$

$$g''_{xy}(0,0) = \lim_{y=0} \frac{g'_x(0,y) - g'_x(0,0)}{y} =$$

$$= \lim_{y=0} -\frac{3 y^3}{y^3} = -3$$

$$g''_{yx}(0,0) = \lim_{x=0} \frac{g'_y(x,0) - g'_y(0,0)}{x} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{2 x^3}{x^3} = 2.$$

As derivadas $g''_{xy}(x,y)$ *não são contínuas em* $(0,0)$ *porque, se o fossem, o teorema de Schwartz garantia a sua igualdade.*

III

5645 — 1) Dada a tabela $\dfrac{x \mid x_0 \, x_1 \cdots x_n}{y \mid y_0 \, y_1 \cdots y_n}$, com $x_i = x_0 + i h$ e $y_i = F(x_i)$, demonstre que $F^{(n)}(\xi) = \Delta^n y_0 / h^n$, com ξ entre x_0 e x_n.

2) Considere o sistema de m equações lineares a n incógnitas $A X = B$ não homogéneo e suponha que A e $[A \mid B]$ tem a mesma característica $r < n$. Fazendo $d = n - r$, construam-se as soluções $X_1, X_2, \cdots X_{d+1}$ que se obtêm tomando para as incógnitas secundárias os elementos das linhas da matriz $(d+1) \times d \left[\begin{array}{c} O \\ \hline I_d \end{array}\right]$.

Prove que $X_1, X_2, \cdots X_{d+1}$ são linearmente independentes e que $Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_{d+1} X_{d+1}$ é solução de $A X = B$ se e só se $\sum_1^{d+1} \lambda_i = 1$.

R: 1) *Para a tabela dada, a função* $F(x) - I(x)$, *onde* $I(x)$ *é o polinómio interpolador de Gregory-Newton, anula-se nos* $n+1$ *pontos* $x_i \, (i = 0, 1, \cdots n)$.

A aplicação repetida do teorema de Rolle dá $F^{(n)}(\xi) - I^{(n)}(\xi) = 0$, *com* ξ *entre* x_0 *e* x_n. *Como* $I^{(n)}(\xi) = \dfrac{\Delta^n y_0}{h^n}$, *vem imediatamente* $F^{(n)}(\xi) = \dfrac{\Delta^n y_0}{h^n}$.

2) *As soluções* $X_1, X_2, \cdots X_{d+1}$ *são visìvelmente independentes pois na matriz*

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{d+1} \end{bmatrix}$$

as linhas $2, \cdots d+1$ *são independentes porque passam pela matriz* I_d *de característica* d. *Como em* X_1 *há pelo menos um elemento significativo nas primeiras* r *colunas, é claro que a característica da matriz é* $d+1$.

Ora

$$A Y = B \Rightarrow \lambda_1 A X_1 + \cdots + \lambda_{d+1} A X_{d+1} =$$

$$= B \Rightarrow \lambda_1 B + \cdots + \lambda_{d+1} B = B \Rightarrow \sum_1^{d+1} \lambda_i = 1$$

$$\sum_1^{d+1} \lambda_i = 1 \Rightarrow A Y = \lambda_1 A X_1 + \cdots + \lambda_{d+1} A X_{d+1} =$$

$$= (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{d+1}) B = B$$

o que prova que Y *é solução de* $A X = B$ *se e só se* $\sum_1^{d+1} \lambda_i = 1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência e 2.º ponto de informação 2.ª chamada — 18-6-1965.

I

5646 — 1) Dada a função $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{x^{2n+1} + x^2}{x^{2n} + 1}$, estude a sua continuidade e derivabilidade. Apresente a imagem de $f(x)$.

2) Calcule $P \dfrac{\text{arc sen } x}{\sqrt{1+x}}$.

3) Supondo que o intervalo de convergência absoluta de $s(x) = \Sigma a_n x^n$ é $]-\lambda, \lambda[$ e que a série converge para $x = \lambda$, pode garantir-se que $S(x) = = \Sigma a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ também converge para $x = \lambda$? Tem-se $S'(\lambda) = s(\lambda)$? Justifique as respostas.

A série $\Sigma \dfrac{\text{sen } n^2 x}{n^2}$, convergente para todo o x real, pode derivar-se termo a termo em $]-\infty, +\infty[$? Porquê?

R: 1) *Tem-se*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (|x| < 1) \\ x & (|x| > 1) \\ 1 & (x = 1) \\ 0 & (x = -1) \end{cases}.$$

A função é descontínua para $x = -1$, *pois* $f(-1+0) = 1$ *e* $f(-1-0) = -1$, *e é também descontínua para* $x = -\infty$ *e* $x = +\infty$ *pois* $f(-\infty)$ *e* $f(+\infty)$ *não são finitos.*

É claro que $f'(x) = \begin{cases} 2x & (|x| < 1) \\ 1 & (|x| > 1) \end{cases}$.

Em $x = 1$ *não há derivada porque*

$$f'_d(1) = \lim_{x=1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x=1+0} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$f'_e(1) = \lim_{x=1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x=1-0} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Em $x = -1$ *vem*

$$f'_d(-1) = \lim_{x=-1+0} \frac{f(x) - f(-1)}{x-1} = \lim_{x=-1+0} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

$$f'_e(-1) = \lim_{x=-1-0} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x=-1-0} \frac{x}{x+1} = +\infty.$$

2) $$P \frac{\textit{arc sen } x}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x}\,\textit{arc sen } x - 2P \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= 2\sqrt{1+x}\,\textit{arc sen } x + 4P \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} =$$
$$= 2\sqrt{1+x}\,\textit{arc sen } x + 4\sqrt{1-x}.$$

3) *Como a série das derivadas* $s(x) = \Sigma a_n x^n$ *é convergente para* $x = \lambda$, *então ela é uniformemente convergente em* $[0, \lambda]$ *e como neste intervalo a série das primitivas* $S(x) = \Sigma a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ *tem sempre um ponto de convergência ela também é uniformemente convergente em* $[0, \lambda]$. *Tem-se então* $S'(\lambda) = s(\lambda)$.

A série das derivadas é $\Sigma \cos n^2 x$, *divergente. Portanto, a série proposta não pode ser derivada termo a termo.*

II

5647 — 1) Considere uma curva dada pelas equações paramétricas $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$. Mostre que só pode haver assíntotas não paralelas aos eixos para os valores $t = t_0$ tais que $\lim\limits_{t=t_0} \varphi(t) = \lim\limits_{t=t_0} \psi(t) = \infty$. Sendo $Y = mX + p$ a assíntota, como calcula m e p neste caso? Como se acham as assíntotas paralelas aos eixos? Justifique as respostas.

2) Seja $g(x, y) = \begin{cases} y & (x = y^2) \\ 0 & (x \neq y^2) \end{cases}$.

Prove que:

a) $g(x, y)$ é contínua em $(0, 0)$;

b) $g'_x(0, 0) = g'_y(0, 0) = 0$;

c) $g(x, y)$ não é diferenciável em $(0, 0)$.

Em face do resultado obtido na alínea *c*), que pode dizer da continuidade de $g'_x(x, y)$ e $g'_y(x, y)$ em $(0, 0)$? Porquê?

R: 1) *Se* $\lim\limits_{t=t_0} \varphi(t) = \lim\limits_{t=t_0} x$ *é finito ou* $\lim\limits_{t=t_0} \psi(t) = = \lim\limits_{t=t_0} y$ *é finito, não pode haver assíntotas oblíquas porque para estas tem de ser* $\lim x = \lim y = \infty$.

$$m = \lim_{t=t_0} \frac{y}{x} = \lim_{t=t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}$$
$$p = \lim_{t=t_0} (y - mx) = \lim_{t=t_0} [\psi(t) - m\varphi(t)].$$

Assíntotas paralelas a Oy: $\lim\limits_{t=t_0} \varphi(t)$ *finito e* $\lim\limits_{t=t_0} \psi(t) = \infty$

Assíntotas paralelas a Ox: $\lim\limits_{t=t_0} \varphi(t) = \infty$ *e* $\lim\limits_{t=t_0} \psi(t)$ *finito.*

2) a) $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon = \delta : \begin{Bmatrix} |x| < \varepsilon \\ |y| < \varepsilon \end{Bmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow |g(x, y)| < \delta$

o que indica que $\lim\limits_{\substack{x=0 \\ y=0}} g(x, y) = 0 = g(0, 0)$.

b) $$g'_x(0, 0) = \lim_{x=0} \frac{g(x, 0) - g(0, 0)}{x} = 0$$

$$g'_y(0, 0) = \lim_{y=0} \frac{g(0, y) - g(0, 0)}{y} = 0.$$

c) *Se a função for diferenciável em* $(0, 0)$ *verifi-*

ca-se a relação $g(x,y) - g(0,0) = x\,g'_x(0,0) + y\,g'_y(0,0) + \varepsilon\sqrt{x^2+y^2}$ *com* $\lim\limits_{\substack{x=0\\y=0}} \varepsilon = 0$ *ou*

$$g(x,y) = \varepsilon\sqrt{x^2+x^2} \quad \textit{com} \lim_{\substack{x=0\\x=0}} \varepsilon = 0\,.$$

Ora

$$\varepsilon = \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x = y^2) \\ 0 & (x \neq y^2) \end{cases}$$

e $\lim\limits_{\substack{x=0\\y=0}} \varepsilon$ *não existe. A função* $g(x,y)$ *não é diferenciável e por isso pode garantir-se que* $g'_x(x,y)$ *e* $g'_y(x,y)$ *não são contínuas em* $(0,0)$ *(se alguma delas o fosse, a função era diferenciável).*

III

5648 — 1) De um polinómio $I(x)$, de grau inferior a $n+1$, conhecem-se os valores $I(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$. Utilize a decomposição da fracção racional $\dfrac{I(x)}{(x-x_0)(x+x_1)\cdots(x-x_n)}$ em elementos simples para deduzir a expressão de $I(x)$. O que é o polinómio $I(x)$ e sob que forma se apresenta?

2) Demonstre que matrizes ortogonais dão produto ortogonal. Sendo A ortogonal, mostre que o sistema de equações $AX = B$ é possível determinado e $x_j = a_{hj}\,b_h$ $(h = 1, \cdots n)$.

Discuta o sistema

$$\begin{cases} x \operatorname{sen}\alpha + y\cos\beta + z = 1 \\ x + y \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + z = \cos\beta \\ x + y\cos\beta + z\operatorname{sen}\alpha = 1\,. \end{cases}$$

R: 1) *Fazendo* $\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ *e* $\varphi_i(x) = \varphi(x)/x - x_i$, *vem* $\dfrac{I(x)}{\varphi(x)} = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{y_i}{\varphi_i(x_i)(x-x_i)}$, *donde* $I(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)}\,y_i$. $I(x)$ *é o polinómio interpolador de* LAGRANGE.

2) $$|A| = \begin{vmatrix} sen\,\alpha & cos\,\beta & 1 \\ 1 & sen\,\alpha\, cos\,\beta & 1 \\ 1 & cos\,\beta & sen\,\alpha \end{vmatrix} = $$
$$= cos\,\beta\,(sen\,\alpha - 1)\,(sen\,\alpha + 2)\,(sen\,\alpha - 2)\,.$$

a) *Quando* $cos\,\beta \neq 0 \wedge sen\,\alpha \neq 1$, *isto é*, $\beta \neq 2\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$ *o sistema é* possível determinado *e a regra de* CRAMER *fornece a sua solução.*

b) *Quando* $cos\,\beta = 0 \wedge sen\,\alpha = 1$, *isto é*, $\beta = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \wedge \alpha = n + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$ *vem* $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ *mas, como* $\Delta = |1| \neq 0$, *vem* $r = 1$. *Os determinantes característicos são* $\Delta'_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ *e* $\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. *O* sistema é impossível.

c) *Quando* $cos\,\beta = 0 \wedge sen\,\alpha \neq 1$, *isto é*, $\beta = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$ *vem* $|A| = \begin{vmatrix} sen\,\alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & sen\,\alpha \end{vmatrix} = 0$ *mas* $\begin{vmatrix} sen\,\alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ *e* $r = 2$. *O característico é* $\Delta'_3 = \begin{vmatrix} sen\,\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & sen\,\alpha & 1 \end{vmatrix} = 2\,(sen\,\alpha - 1) \neq 0$ *e o* sistema é impossível.

d) *Quando* $cos\,\beta \neq 0 \wedge sen\,\alpha = 1$, *isto é*, $\beta \neq 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \wedge \alpha = 2n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$, *vem* $|A| = \begin{vmatrix} 1 & cos\,\beta & 1 \\ 1 & cos\,\beta & 1 \\ 1 & cos\,\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta = |1| \neq 0$, $r = 1$ *e os característicos são* $\Delta'_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & cos\,\beta \end{vmatrix} = cos\,\beta - 1$ *e* $\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
Com $cos\,\beta = 1$, *o sistema é* duplamente indeterminado *e, com* $cos\,\beta \neq 1$, *o* sistema é impossível.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — MATEMATICAS GERAIS — Exame final — Época de Julho (1.ª chamada) — Prova escrita — 9-7-1965.

5649 — 1) Designando por $w_0, w_1, \cdots w_{n-1}$ as raízes de índice n da unidade, calcule $w_0^p + w_1^p + \cdots + w_{n-1}^p$, sendo p inteiro positivo múltiplo de n.

R: $w_k = cis\,\dfrac{2k\pi}{n} \Rightarrow w_k^p = cis\,\dfrac{2kp\pi}{n}$ *e, com* $p = \dot{n}$, *vem* $w_k^p = cis\,2l\pi = 1$, *o que implica* $w_0^p + w_1^p + \cdots + w_{n-1}^p = n$.

2) Dada a fracção racional $u(x) = \dfrac{3x+4}{x(x+1)(x+2)}$, decomponha-a em elementos simples e aproveite o resultado para calcular $P\,u(x)$ e achar a soma da série $\sum\limits_{1}^{\infty} u(n)$.

Sendo f e g dois polinómios reais quaisquer, qual é a condição que garante a convergência da série $\Sigma f(n)/g(n)$? Porquê?

R:

$$\frac{3x+4}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a_0}{x} + \frac{b_0}{x+1} + \frac{c_0}{x+2} =$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$P\,\frac{3x+4}{x(x+1)(x+2)} = 2\,log\,|x| - log\,|x+1| -$$

$$- log\,|x+2| = log\,\frac{x^2}{|(x+1)(x+2)|}.$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)} = \sum_1^{\infty}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \sum_1^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$S = \frac{5}{2}.$$

Sendo p *o grau de* f(n) *e* q *o grau de* g(n), *a condição que garante a convergência de* $\Sigma f(n)/g(n)$ *é* $q \geqq p+2$.

3) Considere a função $f_n(x) = \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - x\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, onde n designa um número natural, e prove que possui apenas um máximo no seu campo de existência.

Sendo M_n o máximo de $f_n(x)$ e x_n o maximizante, calcule $\lim_{n=\infty}(x_n, M_n)$.

R:
$$f_n'(x) = \frac{1/n}{1+x/n} - log\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+x} - log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$f_n'(x) \geqq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{n+x} - log\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n+x} \geqq log\left(1+\frac{1}{n}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x \leqq \frac{1}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n$$

$$f_n'(x) \leqq 0 \Longleftrightarrow x \geqq \frac{1}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n$$

$$x_n = \frac{1}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n$$

$$M_n = log\left[\frac{1}{n\,log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right] - \left[\frac{1}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\right] \times$$

$$\times\, log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

$$\lim_{n=\infty} x_n = \lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\right] =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1 - n\,log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1 - n\left(\frac{1}{n} - \lambda\frac{1}{n^2}\right)}{\eta\,\frac{1}{n}} = \lim_{n=\infty}\frac{\lambda}{\eta} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n=\infty} M_n = \lim_{n=\infty}\left\{log\left[\frac{1}{n\,log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right] - 1 + \right.$$

$$\left. + n\,log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} = 0$$

e portanto $\lim_{n=\infty}(x_n, M_n) = (1/2, 0)$.

4) Ache o termo geral do desenvolvimento em série de MAC-LAURIN de $y = x^2\sqrt[4]{1+x}$ e aproveite o resultado para calcular $y^{(5)}(0)$.

$$R:\ \sqrt[4]{1+x} = (1+x)^{1/4} = \sum_0^{\infty}\binom{1/4}{n}x^n =$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!}\,x^n \quad para\ |x|<1$$

$$y = x^2\sqrt[4]{1+x} = \sum_0^{\infty}\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!}\,x^{n+2}$$

$$para\ |x|<1$$

$\frac{y^{(5)}(0)}{5!}x^5 \Longrightarrow n+2=5 \Longrightarrow n=3$ *e, portanto,*

$$\frac{y^{(5)}(0)}{5!} = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!} \Longrightarrow y^{(5)}(0) = \frac{105}{16}.$$

5) Sendo $f(x, y, z)$ homogénea de grau m, utilize o teorema de EULER e as operações de JACOBI para provar que

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2}\end{vmatrix} = \frac{(m-1)^2}{z^2}\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f'_y \\ f'_x & f'_y & \dfrac{mf}{m-1}\end{vmatrix}.$$

R: *O teorema de* Euler *dá*

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = m f$$
$$x f''_{x^2} + y f''_{xy} + z f''_{xz} = (m-1) f'_x$$
$$x f''_{yx} + y f''_{y^2} + z f''_{yz} = (m-1) f'_y$$
$$x f''_{zx} + y f''_{zy} + z f''_{z^2} = (m-1) f'_z .$$

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2}\end{vmatrix} = \frac{1}{z}\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ z f''_{zx} & z f''_{zy} & z f''_{z^2}\end{vmatrix}$$

e, multiplicando a 1.ª linha deste determinante por x , *a segunda por* y *e adicionando à 3.ª, vem*

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2}\end{vmatrix} = \frac{1}{z}\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ (m-1) f'_x & (m-1) f'_y & (m-1) f'_z\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{m-1}{z^2}\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & z f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & z f''_{yz} \\ f'_x & f'_y & z f'_z\end{vmatrix}.$$

Multiplicando a 1.ª coluna deste determinante por x , *a segunda por* y *e adicionando à 3.ª, vem*

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2}\end{vmatrix} = \frac{m-1}{z^2}\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & (m-1) f'_x \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & (m-1) f'_y \\ f'_x & f'_y & m f\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(m-1)^2}{z^2}\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f'_y \\ f'_x & f'_y & \dfrac{m f}{m-1}\end{vmatrix}.$$

6) Designando ψ o número de inversões da permutação $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ em relação à permutação principal $(1, 2, 3)$, prove que não existe nenhuma matriz real de terceira ordem tal que todos os produtos $(-1)^{\psi} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} a_{3\beta_3}$ sejam positivos (sugestão: forme o produto de todas estas expressões e investigue o seu sinal).

Determine a expressão geral das matrizes permutáveis com $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

R: *Os produtos* $(-1)^{\psi} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} a_{3\beta_3}$ *são* $a_{11} a_{22} a_{33}$, $a_{12} a_{23} a_{31}$, $a_{13} a_{21} a_{32}$, $-a_{13} a_{22} a_{31}$, $-a_{12} a_{21} a_{33}$ *e* $-a_{11} a_{23} a_{32}$.

O produto de todas estas expressões é

$$-(a_{11}^2 a_{12}^2 a_{13}^2 a_{21}^2 a_{22}^2 a_{23}^2 a_{31}^2 a_{32}^2 a_{33}^2) < 0$$

e, portanto, os produtos da forma $(-1)^{\psi} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} a_{3\beta_3}$ *não podem ser todos positivos.*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-c & 2b-d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+b & -a+b \\ 2c+d & -c+d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a-b & 2b-d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+b & -a+b \\ 2c+d & -c+d \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a-c = 2a+b \\ 2b-d = -a+b \\ a+c = 2c+d \\ b+d = -c+d \end{cases}$$

e este sistema é equivalente a $\begin{cases} b = -c \\ b+a-d = 0 \\ c+d-a = 0 \end{cases}$, *indeterminado de grau 2. A solução é* $\begin{cases} b = d-a \\ c = a-d \end{cases}$ *e, portanto, as matrizes permutáveis com a matriz dada são da forma* $\begin{bmatrix} a & d-a \\ a-d & d \end{bmatrix}$.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Julho (2.ª chamada) — 13-7-1965.

5650 — 1) Demonstre que $(A-B) \cup B = A \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow A \supseteq B$.

R: *Fazendo* $p = x \in A$ *e* $q = x \in B$, *tem de se provar que*

$$\{[(p \wedge \sim q) \vee q] \Longleftrightarrow p\} \Longleftrightarrow (q \Longrightarrow p)$$

para o que basta construir a seguinte tabela de verdade

p	q	¦[(p ∧ ~ q) ∨ q] ⟺ p¦		⟺	(q ⟹ p)
0	0	0	0 0 1 0	1	1
0	1	0	1 1 0 0	1	0
1	0	1	1 0 1 1	1	1
1	1	0	1 1 1 1	1	1

2) Dada a família (C_a) de curvas de equações $y = e^x - a(x+1)$, onde a é um parâmetro real,

mostre que as curvas de (C_a) passam todas por um mesmo ponto. Ache as equações das assíntotas e prove também que estas passam por um mesmo ponto.

Para que valores de a as curvas de (C_a) têm um mínimo m_a? Calcule em função de a o mínimo m_a e o minimizante x_a.

R: *Tomando duas curvas quaisquer de* (C_a), *por exemplo, as que correspondem a* $a=0$ *e* $a=1$, *vem*

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = e^x - (x+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = e^x \\ x+1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = e^{-1} \\ x=-1, \end{cases}$$

isto é, as curvas passam todas pelo ponto $(-1, e^{-1})$.

Como $\lim\limits_{x=-\infty} e^x = 0$, *as assíntotes são as rectas* $Y = -a(X+1)$ *que passam todas pelo ponto* $(-1,0)$.

Notando que $(y' = e^x - a$, *a função só pode possuir extremos quando* $a>0$. *Nessa hipótese* $y'=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_a = \log a$ *e, como* $y''>0$, *trata-se de um minimizante. Tem-se* $x_a = \log a$ e $m_a = -a \log a$.

3) Sabendo que $4xy'' + 2y' - y = 0$ $(y=f(x))$, ache a série $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ $(a_0=1)$ tal que $f(x) = \sum\limits_0^\infty a_n x^n$. Qual é o intervalo de convergência desta série?

R:
$$y = \sum_0^\infty a_n x^n$$
$$y' = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$$
$$y'' = \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2}$$
$$4x \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} + 2\sum_1^\infty n a_n x^{n-1} - \sum_0^\infty a_n x^n = 0$$
$$4\sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-1} + 2\sum_1^\infty n a_n x^{n-1} - \sum_0^\infty a_n x^n = 0$$
$$a_{n+1}[2(n+1)(2n+1)] = a_n$$
$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{a_{n-1}}{(2n+2)(2n+1)2n(2n-1)} = \cdots = \frac{a_0}{[2(n+1)]!} = \frac{1}{[2(n+1)]!}$$
$$y = \sum_0^\infty \frac{x^n}{(2n)!}$$

e o intervalo de convergência é $]-\infty, +\infty[$.

4) Calcule: *a*) $P\cos(\log x)$

b) $\lim\limits_{x=0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}}$

R: a) $P\cos(\log x) = x\cos(\log x) + P\operatorname{sen}(\log x) =$ $= x\cos(\log x) + x\operatorname{sen}(\log x) - P\cos(\log x)$

ou

$$2P\cos(\log x) = x\cos(\log x) + x\operatorname{sen}(\log x)$$
$$P\cos(\log x) = \frac{x}{2}[\cos(\log x) + \operatorname{sen}(\log x)]$$

b) *Como* $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ *e*

$$\lim_{x=0}\frac{\operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen}} = \lim_{x=0}\frac{\cos x}{1-\cos x} = \infty$$

tem-se uma indeterminação do tipo 1^∞.

Calculemos

$$\lim_{x=0}\log\left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}}\right] = \lim_{x=0}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) =$$
$$= \lim_{x=0}\frac{\log\operatorname{sen} x - \log x}{\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x=0}\frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} =$$
$$= -\lim_{x=0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = -1.$$

Logo,

$$\lim_{x=0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}} = e^{-1}.$$

5) Quais são as funções $f(x,y)$ que satisfazem à condição $f'_x(x,y) = g(y)$? Mesma questão para $f'_y(x,y) = g(x)$. Justifique as respostas.

As funções $f(x,y) = x^2+y^2$ e $g(x,y) = x^2 + 2bxy + y^2$ $(b \neq 0)$ têm derivadas idênticas ao longo da curva $C)$ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Ache a equação da curva $C)$ na forma $F(x,y)=0$.

R:

$$f'_x(x,y) = g(y) \Rightarrow f(x,y) = g(y)x + \varphi(y)$$
$$f'_y(x,y) = g(x) \Rightarrow f(x,y) = g(x)y + \psi(x).$$
$$2x\varphi'(t) + 2y\psi'(t) = (2x+2by)\varphi'(t) + (2y+2bx)\psi'(t)$$

ou

$$y\varphi'(t) + x\psi'(t) = 0,$$

isto é,

$$F(x,y) \equiv xy - k = 0.$$

6) Verifique que no sistema

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+3y=0 \\ x+2y=2 \\ 3x+4y=k \end{cases}$$

as três primeiras equações são independentes e mostre que, qualquer que seja k, a quarta equação é composição linear das três primeiras. Ache essa composição linear.

R: *Na matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & k \end{bmatrix}$$

tem-se $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ *e portanto, as três primeiras linhas (equações) são independentes. Como a matriz é do tipo* (4×3) *e a sua característica é* 3, *forçosamente a quarta linha é composição linear das três primeiras.*

Para achar essa composição linear tome-se

$$\Delta_{4t} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & a_{1t} \\ 2 & 3 & 0 & a_{2t} \\ 1 & 2 & 2 & a_{3t} \\ \hline 3 & 4 & k & a_{4t} \end{vmatrix} = 0$$

e designemos por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *e* $\lambda_4 = \Delta$, *respectivamente, os complementos de* a_{1t}, a_{2t}, a_{3t} *e* a_{4t}. *Tem-se*

$$\lambda_1 = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & k \end{vmatrix} = -k-2,$$

$$\lambda_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & k \end{vmatrix} = k-2,$$

$$\lambda_3 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & k \end{vmatrix} = -k \quad e \quad \lambda_4 = 2$$

$$\begin{cases} 1\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + 1\cdot\lambda_3 + 3\cdot\lambda_4 = 0 \\ 1\cdot\lambda_1 + 3\cdot\lambda_2 + 2\cdot\lambda_3 + 4\cdot\lambda_4 = 0 \\ 0\cdot\lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + 2\cdot\lambda_3 + k\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\lambda_1 [1\ 1\ 0] + \lambda_2 [2\ 3\ 0] + \lambda_3 [1\ 2\ 2] + \lambda_4 [3\ 4\ k] = 0$$

donde

$$[3\ 4\ k] = \left(\frac{k}{2}+1\right)[1\ 1\ 0] + \left(1-\frac{k}{2}\right)[2\ 3\ 0] + \frac{k}{2}[1\ 2\ 2]$$

ou

$$f_4 = \left(\frac{k}{2}+1\right) f_1 + \left(1-\frac{k}{2}\right) f_2 + \frac{k}{2} f_3 .$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final—Época de Outubro (prova escrita)— 1-10-1965.

I

5651 — 1) Mostre que o conjunto constituído pelas raízes cúbicas da unidade é um grupo multiplicativo.

R: *As raízes cúbicas da unidade são* $w_0 = 1$, $w_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *e* $w_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Em relação à operação multiplicação pode construir-se a tabela*

	w_0	w_1	w_2
w_0	w_0	w_1	w_2
w_1	w_1	w_2	w_0
w_2	w_2	w_0	w_1

donde se conclui fàcilmente que se trata de uma lei de composição interna, associativa, comutativa, possuindo um elemento neutro $(w_0 = 1)$ *e existindo inverso para cada um dos elementos:* $w_0^{-1} = w_0$, $w_1^{-1} = w_2$, $w_2^{-1} = w_1$.

2) Seja $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ $(x \geqq 0)$, onde n é um número natural.

Compare os máximos M_n e M_{n-1} das duas funções $f_n(x)$ e $f_{n-1}(x)$ e calcule $\lim_{n=\infty} \frac{M_n}{M_{n-1}}$.

R: *Tem-se* $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{n!} e^{-x}(n-x)$ *e como*

$$f_n'(x) \geqq 0 \Longleftrightarrow x \leqq n$$
$$f_n'(x) \leqq 0 \Longleftrightarrow x \geqq n$$
$$f_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = n\,,$$

e evidente que $x=n$ *é um maximizante e* $M_n = \frac{n^n}{n!}e^{-n}$.

Vem então $M_{n-1} = \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-(n-1)}$ *e* $\frac{M_n}{M_{n-1}} = $ $= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\frac{1}{e}$. *Como* $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \uparrow e$ *é* $M_n < M_{n-1}$ *e* $\lim_{n=\infty}\frac{M_n}{M_{n-1}} = 1$.

3) Calcule $P\,\frac{1}{x^4-5x^2-36}$.

R: *Como* $x^4-5x^2-36=(x-3)(x+3)(x^2+4)$, *tem-se*

$$\frac{1}{x^4-5x^2-36} = \frac{a_0}{x-3} + \frac{b_0}{x+3} + \frac{S_0}{x^2+4}$$

$$a_0 = \left[\frac{1}{(x+3)(x^2+4)}\right]_{x=3} = \frac{1}{108}\,,$$

$$b_0 = \left[\frac{1}{(x-3)(x^2+4)}\right]_{x=-3} = -\frac{1}{108}$$

e, fazendo $\Delta = x^2+4$, *tome-se*

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{-13+\Delta}$$

donde resulta $S_0 = -1/13$.

Tem-se então

$$P\,\frac{1}{x^4-5x^2-36} = \frac{1}{108}\,log\left|\frac{x+3}{x-3}\right| - \frac{1}{26}\,arctg\,\frac{x}{2}$$

4) A função $f(x)$ definida por $\sum_1^\infty \frac{1}{n^4+x^2}$ é contínua em $]-\infty,+\infty[$? Porquê?

Sendo $F(x)$ a primitiva de $f(x)$ que se anula para $x=0$, pode garantir-se que

$$F(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n^2}$$

em $]-\infty,+\infty[$? Porquê?

R: *Como* $\forall\, x \in\,]-\infty,+\infty[\ \frac{1}{n^4+x^2} \leqq \frac{1}{n^4}$ *e* $\sum_1^\infty \frac{1}{n^4}$ *é convergente, a série* $\sum_1^\infty \frac{1}{n^4+x^2}$ *é uniformemente convergente em* $]-\infty,+\infty[$ *e portanto pode garantir-se que* $f(x)$ *é contínua.*

A série das primitivas $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\,arctg\,\frac{x}{n^2}$ *converge para* $x=0$ *e portanto converge uniformemente em* $]-\infty,+\infty[$. *Pode pois garantir-se que* $F'(x) = f(x)$.

5) Suponha $f(x,y)$ diferenciável no círculo de centro $P(a,b)$ e seja $Q(a+h,b+k)$ um ponto da respectiva circunferência. Tome

$$\varphi(t) = f(a+ht,\,b+kt)$$

e, utilizando para esta função o teorema dos acréscimos finitos em $[0,1]$, prove que $f(a+h,b+k) - f(a,b) = hf_x'(a+\theta h,b+\theta k) + kf_y'(a+\theta h,b+\theta k)$ com $0<\theta<1$.

R: $\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(\theta)$ *e portanto* $f(a+h,b+k) - f(a,b) = h\,f_x'(a+\theta h,b+\theta k) + k\,f_y'(a+\theta h,b+\theta k)$.

6) Demonstra-se que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2\cdots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2\cdots x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2\cdots x_n^n \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (x_1-x_0)(x_2-x_0)\cdots(x_n-x_0) \\ (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ (x_n-x_{n-1})\,. \end{array}$$

Utilize este resultado e a teoria dos sistemas lineares para provar que, dados $n+1$ pares de valores (x_i,y_i) $(i=0,1,\cdots,n)$ com $x_i \neq x_j$, existe um e um só polinómio interpolador $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$.

Empregando determinantes, indique as fórmulas que permitem obter $a_0, a_1, \cdots a_n$ em funcão dos valores x_i e y_i.

R: *Como* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2\cdots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2\cdots x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2\cdots x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$, *em virtude de se ter* $x_i \neq x_j$, *o sistema de* $n+1$ *equações a* $n+1$ *incógnitas* $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$

$$y_i = a_0 + a_1x_i + \cdots + a_nx_i^n \quad (i=0,1,\cdots n)$$

é possível determinado e portanto existe um e um só polinómio interpolador.

Para obter as fórmulas que dão $a_0, a_1, \cdots a_n$ *basta utilizar a regra de Cramer:*

$$a_i = \frac{\Delta(i/y)}{\Delta} \quad (i=0,1,\cdots n)$$

onde $\Delta(i/y)$ *se obtém de* Δ *substituindo a sua i-ésima coluna pela coluna dos termos conhecidos* y_i.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — Matemáticas Gerais — 1.º ponto de informação e 1.º exame de frequência — 1.ª chamada — 16-2-1966.

I

5652 — 1) Prove que é válido o argumento

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow [q \vee (r \vee s)] \\ \underline{\sim [p \wedge (r \vee s)]} \\ \therefore p \Rightarrow q \end{array}$$

2) Sendo a, b, c e d números racionais e admitindo que λ é irracional, prove que

$$a + b\lambda = c + d\lambda \Rightarrow a = c \wedge b = d .$$

R: 1) *Façamos uma demonstração pelo método de redução ao absurdo:*

1.	$p \Rightarrow [q \vee (r \vee s)]$	*prem.*
2.	$\sim [p \wedge (r \vee s)]$	*prem.*
3.	$\sim (p \Rightarrow q)$	*prem. adicional*
4.	$\sim p \vee [q \vee (r \vee s)]$	*1 e equiv.*
5.	$\sim p \vee \sim (r \vee s)$	*2 e equiv.*
6.	$p \wedge \sim q$	*3 e equiv.*
7.	p	*6 e simplif.*
8.	$\sim\sim p$	*7 e equiv.*
9.	$\sim (r \vee s)$	*5,8 e silog. disjuntivo*
10.	$(\sim p \vee q) \vee (r \vee s)$	*4 e equiv.*
11.	$\sim p \vee q$	*9,10 e silog. disjuntivo*
12.	$p \Rightarrow q$	*11 e equiv.*

2) $a + b\lambda = c + d\lambda \Rightarrow (a - c) + (b - d)\lambda = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a - c = 0 \wedge (b - d)\lambda = 0 \Rightarrow a = c \wedge b = d$.

II

5653 — 1) Seja A um conjunto linear limitado e designem m e n números reais com $n > 0$. Mostre que $B = \{m + nx : x \in A\}$ é limitado e

$$\sup B = m + n \sup A , \quad \inf B = m + n \inf B .$$

2) Verifique a proposição $\overline{\lim}\, u_n + \underline{\lim}\, v_n \leq$ $\leq \overline{\lim}\, (u_n + v_n) \leq \overline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n$, tomando

$$u_n = (-1)^n \frac{1 - 2n}{1 + n} \quad \text{e} \quad v_n = n^2 \log \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right].$$

R:

1) *Sendo* A *limitado, tem-se* $\forall x \in A \quad |x| \leq K$ *e portanto* $\forall x \in A \quad |m + nx| \leq |m| + nK$ *e o conjunto* B *é limitado.*

Com $L = \sup B$ *vem*

$$\forall x \in A \quad x \leq L$$

$$\forall \delta > 0 , \exists x' \in A \quad x' > L - \frac{\delta}{n} ,$$

o que implica

$$\forall x \in A \quad m + nx \leq m + nL$$

$$\forall \delta > 0 \, \exists x' \in A \quad m + nx' > (m + nL) - \delta ,$$

isto é, $m + nL$ *é* $\sup B$. *Raciocínio idêntico se adopta para mostrar que* $\inf B = m + n \inf A$.

2) $\overline{\lim}\, u_n = 2$, $\underline{\lim}\, v_n = -1$, $\overline{\lim}\, v_n = 1$

$$\overline{\lim}\, (u_n + v_n) = 1$$

e de facto

$$2 + (-1) \leq 1 \leq 2 + 1 .$$

III

5654 — 1) Estude, dos pontos de vista da convergência absoluta e da convergência uniforme, a série $\sum \frac{x^n}{n\, 3^{n-1}}$.

2) Considere as funções reais de variável real que satisfazem à relação $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todos os valores de x e y.

a) Calcule $f(0)$ e mostre que $f(x)$ é ímpar.

b) Mostre que, sendo $f(x)$ contínua para $x = 0$, ela é contínua para todo o valor de x.

R: 1) *Como*

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\, 3^n}}{\dfrac{x^n}{n\, 3^{n-1}}} \right| = \lim \frac{n}{3(n+1)} |x| = \frac{|x|}{3} ,$$

a série é absolutamente convergente para $|x| < 3$ *e divergente para* $|x| > 3$. *Para* $x = 3$ *a série diverge e para* $x = -3$ *a série converge simplesmente. A série é uniformemente convergente em qualquer intervalo* $[-3, a]$ $(a < 3)$.

2) a) *Fazendo* $x = y = 0$, *vem* $f(0) = 2f(0)$, *donde* $f(0) = 0$. *Então, tomando* $y = -x$, $f(x - x) =$ $= f(x) + f(-x)$ *ou* $f(0) = 0 = f(x) + f(-x)$, *o que significa que* $f(x)$ *é ímpar.*

b) *Sendo* $\lim_{x=0} f(x) = f(0) = 0$ *e como* $f(x - a) =$ $= f(x) - f(a)$, *tem-se* $x \to a \Rightarrow f(x - a) \to 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) \to f(a)$.

Enunciados e soluções dos N.os 5643 a 5654
de Fernando de Jesus

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — Exame final de Cálculo Infinitesimal — 11-6-65.

5655 — Enuncie condições que garantam que a equação diferencial $y' = f(x, y)$ tenha uma e uma só solução satisfazendo a condição $y(x_0) = \alpha$. Justifique que são satisfeitas tais condições se f for função de classe C' num conjunto fechado de R^2.

Determine pelo método de Picard (até termos em x^4) a solução da equação $y' = x - y$ que satisfaz a condição $y(0) = 1$. Confronte com o resultado obtido pelos métodos elementares e por desenvolvimento em série de Taylor.

Como aplicaria o método de Picard à pesquisa de uma solução aproximada da equação $\frac{d^2y}{dt^2} = A\cos y + B \operatorname{sen} y$ (A, B constantes) satisfazendo a condição inicial $y(0) = 0 = y'(0)$?

5656 — Considere a secção feita no elipsóide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ pelo plano $x + y = 1$ e determine o ponto da curva mais próximo e o ponto mais afastado da origem do referencial (suposto ortonormado).

5657 — Diga como se generaliza o conceito de integral-R a domínios não limitados e enuncie e demonstre algum critério de convergência de integrais impróprios que tenha estudado.

Determine o volume do conjunto de R^3 definido por

$$\left\{(x, y, z) : x^2 + 4z^2 \leqslant \frac{1}{y^2} \wedge y \geqslant 1\right\}.$$

5658 — Dado o campo vectorial $\vec{F} = y\vec{e}_1 + z\vec{e}_2 + x\vec{e}_3$, calcule, usando a definição de integral de superfície, o fluxo de rot $\vec{F}$ através das superfícies

$$S_1 \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z = 1 \\ z \geqslant 0. \end{cases}$$

Seria de prever a relação que existe entre os dois fluxos? Porquê?

Enunciados dos n.os 5655 a 5658 de F. R. Dias Agudo

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

159 — P. L. Hennequin et A. Tortrat — **Théorie des Probabilités et quelques Applications** — Masson et C.ie — Paris.

Este livro escrito com o objectivo de ser utilizado no 3.º ciclo francês e na investigação, é um tratado de introdução à teoria das probabilidades, no sentido em que não pretende cobrir um campo actualmente extremamente vasto, pois que compreende não só o núcleo desta teoria mas também todas as suas múltiplas ramificações e aplicações. Como introdução, o livro limita-se portanto a alguns objectivos fundamentais e a definir algumas vias de progresso.

Nestes termos aqui se encontra um desenvolvimento notável em extensão e em outros aspectos da teoria da medida que está na base de todos estes processos, da teoria da integração das funções de valores reais (ou complexos) sobre o espaço abstracto dos probabilistas e sobre os espaços topológicos.

Dedica em seguida um longo capítulo às leis de probabilidade em R ou R^n e as funções características, a sua unicidade, composição e convergência, apresentando numerosos exemplos assim como o carácter absolutamente contínuo e *singular* de algumas delas. O estudo das probabilidades *condicionadas* desenvolve-se principalmente nos domínios das probabilidades condicionadas, regulares e das medidas compactas ou perfeitas. O estudo da convergência das sucessões de variáveis aleatórias é mais clássico, aproximando-se do estudo da convergência das leis de probabilidade sobre um espaço topológico ou métrico, do tipo polaco. Depois de apresentar algumas noções gerais de estatística faz-se o estudo das leis limites de KOLMOGOROV-SMIRNOV e das leis finitas de que elas derivam, exemplo de problema concreto muito importante em estatística: desvios entre duas amostragens ou entre uma amostragem e a lei de que ela deriva, ou de que se supõe derivar.

Enfim, a teoria das cadeias de MARKOFF discretas, com algumas aplicações, desenvolve-se em pormenor e atinge determinados resultados recentemente obtidos e ligados à teoria do potencial.

Em princípio, a exposição basta-se a si própria, fazendo no entanto em alguns pontos referências a tratados ou artigos originais. Destina-se tanto a físicos como a matemáticos, numa linguagem simples e acessível, e com espírito suficientemente aberto por forma a tornar-se atraente ao leitor neste apaixonante capítulo dos conhecimentos humanos.

Índice das matérias

J. G. T.

160 — P. MEDGYESSY — **Decomposition of Superpositions of Distribution Functions** — Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences. Budapest.

Em estatística matemática, física, biologia, etc. ocorre muito frequentemente o seguinte problema: como resultado final de uma determinada série de experiências, obtem-se uma curva a partir de uma sobreposição de funções de distribuição (denominadas «componentes») de um determinado tipo; apenas esta curva pode ser utilizada para a determinação de certos parâmetros desconhecidos (com significado físico, etc.) das componentes (esta determinação de parâmetros tem o nome de «decomposição»). Por exemplo, admite-se que a curva da distribuição de intensidade das secções de um espectro atómico seja a secção do gráfico de uma superposição de funções de densidade normal (admite-se que o gráfico da distribuição de intensidades seja composto de curvas «em sino» de Gauss). Assim, partindo da curva da distribuição de intensidades há necessidade de determinar a localização dos máximos, calcular os comprimentos de onda, etc, problemas que ocorrem na investigação das características do espectro, a partir das curvas componentes (que por vezes se entrelaçam prejudicando a sua compreensão).

Este livro apresenta pela primeira vez um tratamento sistemático, utilizando a teoria das probabilidades, deste problema de interesse básico e prático; contém numa grande extensão, os resultados de investigações pessoais do Autor. Através de exemplos, fornece um método exacto ou aproximado de decomposição de numerosos tipos de sobreposições.

Está escrito, antes de mais, para leitores que trabalham no campo das ciências experimentais; por esta razão são apresentadas em Apêndices várias questões que exigem maior pormenor de conhecimentos preliminares. O livro é de igual interesse (principalmente nestes pormenores) para especialistas da teoria das probabilidades.

J. G. T.

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

Editor — GAUTHIER-VILLARS, Paris

L. CHAMBADAL, J. L. OVAERT — *Cours de Mathématiques, Notions fondamentales d'Algèbre et d'Analyse.*
I. I. HIRSCHMAN et D. V. WIDDER — *La transformation de convolution.*
P. LEVY — *Processus Stochastiques et mouvement Brownien.*

Mémorial des Sciences Mathématiques

J. ANASTASSIADIS — *Définition des fonctions Euleriennes par des Équations Fonctionnelles.*
W. J. TRJITZINSKY — *La Régularité Moyènne dans la Théorie Métrique.*
P. HUMBERT et S. COLOMBO — *Le Calcul Symbolique et ses applications à la Physique Mathématique — 2ème Edition revue et augmentée.*

Monographies Internationales de Mathématiques Modernes

1 — MARKOUCHEVITCH — *Fonctions d'une Variable Complexe — Problèmes Contemporains.*
2 — BOGOLIOUBOV et I. MITROPOLSKI — *Les Méthodes Asymptotiques en Théorie des Oscillations non Linéaires.*
3 — LINNIK — *Décomposition des Lois de Probabilités.*
4 — J. MIKUSINSKY et R. SIKORSKI — *Théorie Élémentaire des Distributions.*
5 — I. M. GELFAND, D. A. RAIKOV et G. E. CHILOV — *Les anneaux normés commutatifs.*
6 — A. GELFOND et Y. LINNIK — *Méthodes élémentaires dans la théorie analytique des nombres.*

Editor — MASSON ET C.ie, Paris

J. BASS — *Cours de Mathématiques — Troisième Édition Revue et Corrigée.*
— *Exercices de Mathématiques.*
M. BOUIX — *Les Fonctions Géneralisées ou Distributions.*
M. A. TONNELAT — *Les Vérifications Experimentales de la Relativité Générale.*
A. HOCQUENGHEM & P. JAFFARD — *Mathématiques. Tome I. Éléments de calcul différentıal et intégral.*

Editor — LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD — Paris

MARCEL DOLIGEZ — *Gravitation — Contribution à la théorie corpuscular de la gravitation.*
H. LAURENT — *Théorie des Jeux de Hasard.*

Editor — AKADÉMIAI KIADÓ — BUDAPEST

Deuxième Congrès Mathématique Hongrois.
MEDGYESSY — *Decomposition of Superpositions of Distribution Functions.*

Editor — IZDATELHSTVO AKADEMII NAUK SSSR — MOSKVA

LAWRENTJEW, JUSCHKEWITSCH, GRIGORJAN — LEONHARD EULER.

Editor — DUNOD, Paris

CLAUDE BERGE — *Espaces topologiques — fonctions multivoques.*
A. DONEDDU — *Cours de Mathématiques Supérieures. Tome 1. Algèbre et géométrie.*
LUCIENNE FELIX — *Exposé moderne des mathématiques élémentaires.*
C. PISOT et M. ZAMANSKY — *Mathématiques générales — algèbre — analyse.*

Editor — AKADEMIE-VERLAG, Berlin

A. I. LURJE — *Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie.*

Editor — VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN, Berlin

M. A. NEUMARK — *Normierte Algebren.*
OTAKAR BORŮVKA — *Grundlagen der Gruppoid-und Gruppentheorie.*

Mathematische Monographien

GERHARD RINGEL — *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen.*

Mathematische Forschungsberichte

A. N. KOLMOGOROFF und W. M. TICHOMIROW — *Arbeiten zur Informationstheorie III.*
A. W. POGORELOW — *Einige Untersuchungen zur Riemannschen Geometrie im Grossen.*
H. HORNICH — *Existenzprobleme bei Linearen Partiellen Differentialgleichungen.*

INSTITUTO DE MATEMATICA — UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Bahia Blanca — Argentina

MARIA LAURA MOUSINHO LEITE LOPES — *Conceitos Fundamentais da Geometria.*

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos

Assinatura relativa a 1967 (4 números) 50 escudos

Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.os 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.os 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local de cobrança As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 15, da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.os 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.os 16 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.os 51 a 75 cada número simples	17$50
N.os 78 a 99 » » duplo	35$00
N.os 76-77	C0$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º—LISBOA-2 — Telefone 369449