GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO III **N.º 10** ABRIL - 1942

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 5$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / LARGO DO PÔÇO NOVO / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

FUNDADA POR

B. CARAÇA, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO: *Faculdade de Ciências*, Rua da Escola Politécnica — Lisboa

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO: *Soc. Ind. de Tipografia*, Rua Almirante Pessanha, 5 — Lisboa

LEVI-CIVITA

por A. DE MIRA FERNANDES

Morreu Levi-Civita. Perde a ciência, no domínio matemático, um dos seus mais ilustres cultores dêste século, notável pela originalidade e mérito da sua criação científica, pela perfeição e brilho da sua obra escrita e (dizem os que o ouviram) pelos seus elevados dotes de professor eminente. Êste conjunto de virtudes, nem sempre coexistentes nos grandes mestres, teve-o Levi-Civita em memorável grau. Nos seus escritos, mesmo naqueles que, sendo notas originais sôbre temas novos, ou sôbre doutrinas em gestação, se destinam, principalmente, a afirmar autoria, perante um meio limitado de especialistas, não faltam nunca a clareza inexcedível e a minúcia indispensável à compreensão dos simples iniciados. Por isso, êles têm, para os que não são leigos, a sedução própria do seu teor e da sua forma; e, para os que principiam, mesmo sem grande devoção, um poder aliciante a que dificilmente se resiste.

Com estas características espirituais, não podiam deixar de ser modelos de perfeição os seus trabalhos de exegése e de crítica, se o tentasse o empreendimento. E em boa hora o tentou.

Desde os seus princípios, as doutrinas relativistas tiveram em Levi-Civita um dos mais estrenuos e categorisados divulgadores, um dos mais devotados e conscientes comentaristas. Foi em Março de 1919 que êle fêz, no Seminário Matemático da Universidade de Roma, uma notável exposição dos conceitos einsteinianos, [1] subordinada a êste título (que eu traduzo livremente): *Como poderia um conservador atingir os umbrais da nova mecânica?* Na mesma ordem de idéias e com maior desenvolvimento, publicou, em 1928, o livro *Fondamenti di meccanica relativista.* [2] Em ambos estes trabalhos, o *processo* apologético é o mesmo e bem o inculca o título da conferência de Roma, da qual extraio estes dois períodos incompletos: [1]

Je me propose de montrer, à travers quelques formules classiques simples et concises, comment un désir légitime de généralisation formelle d'une part et de synthèse de concept de l'autre, rendent plausibles quelques modifications de lois générales, quantitativement, très légères, spéculativement considérables... Il en ressort une explication toute naturelle de plusieurs faits expérimentaux... devant lesquels les anciennes méthodes, auxquelles on doit pourtant l'essor merveilleux de notre science, restaient impuissantes malgré les plus grands efforts.

E é assim, sem sobressaltos nem agressivas imposições de doutrina, que êle conduz os conservadores ao limiar da relatividade geral.

Na mesma ordem de idéias, e ainda como exemplos da sua *maneira* de reduzir e generalizar, *more geometrico,* podem citar-se os seus comentários às equações relativistas da mecânica atómica [3] e à teoria unitária do espaço físico. [4]

Da sua obra didática, todos conhecem as *Lezioni di Meccanica Razionale,* em colaboração com U. Amaldi, onde figuram muitas concepções originais, entre as quais se destacam os métodos de investigação das soluções particulares dos sistemas dinâmicos; e as *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto.*

E aqui tomamos contacto, neste breve comentário à obra do insigne Professor, com um dos mais notáveis padrões da sua glória. Se é certo ter sido Christoffel, pouco tempo depois de criada a geometria de Riemann, quem primeiro advertiu que as derivadas parciais das grandezas, que hoje chamamos componentes dum tensor, não são, em geral, componentes doutro tensor (circunstância fundamental na estruturação do Cálculo diferencial absoluto), a verdade é que a criação da Análise tensorial se deve, quási integralmente a Ricci Curbastro. Desde 1887 até ao fim da vida, foi essa a sua grande tarefa, da qual é notável resumo a memória *Méthodes de Calcul Différentiel Absolu et leurs applications,* publicada, em francês, em 1901, nos *Mathematische Annalen* (tomo 54), a convite de Klein, e redigida pelo mesmo Ricci e por Levi-Civita, [5] seu discípulo. Da obra de Ricci, a quem êle atribuíu sempre todos os direitos de

(1) *L'Enseignement mathématique*—ano XXI, Junho de 1920.

(2) Bolonha—*N. Zanichelli.*

(3) *Diracsche und Schrödingersche Gleichungen (Berichte der Preussischen Akademie)* (1933).

(4) *Berichte,* etc. (1929).

(5) Existe uma reprodução da livraria Blanchard, Paris, 1923.

autoria do novo algoritmo, dizia Levi-Civita, referindo-se à utilização que dela fêz, desde o princípio, a teoria da relatividade: *Um exemplo tão conspícuo de especulações abstractas que conseguiram ser, num dado momento, essenciais para o progresso da filosofia natural, talvez só possa encontrar-se na teoria das cónicas de Apolonio, que tornou possível a descoberta das leis de Kepler.* [1]

Mas o que é de Levi-Civita e veio trazer nova luz, descobrir novos horizontes e permitir largas generalizações dos métodos do cálculo absoluto, é o conceito de *transporte paralelo.* [2] Formulada, mais tarde, por Weyl, sob forma intrínseca, utilizada sistemàticamente por Schouten e Struik, na classificação dos espaços lineares, aproveitada nas suas últimas conseqüências pela geometria de Cartan, a noção de transporte é uma das mais fecundas da geometria diferencial. A sua criação seria bastante para tornar imperecível a memória do ilustre Professor.

Mas há, na obra de Levi-Civita, outros monumentos de alta valia. O problema da *regularização,* na teoria das equações diferenciais (principalmente, os seus comentários à obra de Painlevé e Sundman, respeitante ao problema dos três corpos); a teoria das características dos sistemas diferenciais, aplicada à propagação das ondas e à interpretação da dualidade onda-corpusculo da mecânica atómica; as teorias da luz, do potencial, dos invariantes adiabáticos; a aerodinâmica, a teoria ergódica; quási todos os domínios da Análise, da Mecânica, da Física Matemática foram enriquecidos, nalgum incidente ou nalgum capítulo fundamental, pela originalidade dos seus conceitos, pela nitidez da sua exposição, ou pela agudeza da sua crítica. Na sua obra, não se encontra nunca (e o deslise podia ser involuntário) o disfarce duma obscuridade, ou a imposição insegura duma idéia. Não se sabe que mais deva admirar-se nos seus escritos: se a capacidade de criar, se o dom de esclarecer; nem que mais deva louvar-se no seu discurso: se a segurança e clareza do raciocínio, se o poder de intuïção. Familiar de quási todos os domínios do pensamento matemático, revela-se na sua obra o prazer de relacionar doutrinas aparentemente estranhas, num salutar anseio de unidade do conhecimento; e o desejo de iluminar, com a certeza duma verdade incontroversa, a possível dúvida duma idéia nova.

Dèscance em paz o grande Mestre.

[1] Conferência feita em Barcelona, em Janeiro de 1921.
[2] *Nozione di parallelismo in una varietá qualunque* — Palermo — 1917.

LES ORIGINES DES NOTIONS MATHÉMATIQUES

Da conferência realizada no Instituto Francês de Lisboa, em Janeiro de 1942, pelo Prof. M. Fréchet

Monsieur le Ministre, Monsieur le Directeur, Mesdames, Messieurs.

Je ressens très vivement l'honneur qui m'a été fait en m'invitant à parler devant vous et j'en remercie M.le Directeur de l' Institut français. Je ne dois pas, toutefois oublier que cette invitation n'a été rendue possible que par l'initiative de l'Institut de Haute Culture du Portugal qui m'avait spontanément proposé de venir ici faire des conférences devant les trois Universités portugaises et qui a ainsi rendu ce voyage possible.

Votre Institut de Haute Culture est une très importante création qui joue ici le même rôle que le Conseil Supérieur des Investigations Scientifiques en Espagne et le Conseil Supérieur des Recherches Scientifiques en France ainsi que les Institutions analogues dans d'autres pays. Il faut reconnaître que la création de ces Institutions a contribué dans une large mesure à améliorer grandement l'état d'esprit du grand public vis à vis de la recherche. On considérait qu'un professeur d'Université pouvait si cela lui faisait plaisir faire de la recherche en dehors de son enseignement, mais qu'il suffisait de l'encourager par de bonnes paroles. Grâce à l'action de ces Institutions nouvelles, on admet maintenant de plus en plus que si un professeur de Faculté doit avant tout comme auparavant, se consacrer à son enseignement, il ne remplit pas tout son devoir s'il ne contribue pas lui-même au progrès de la Science. Comme auparavant, le professeur doit conserver à l'enseignement un niveau correspondant à celui des élèves, et par suite, s'abstenir de faire allusion aux recherches les plus récentes devant les étudiants qui *commencent* leurs études, si ces récents résultats ne simplifient pas ou ne rectifient pas les résultats anciens. Mais on admet aussi que seul le professeur qui fait des recherches a établi sa supériorité intellectuelle par rapport à la moyenne de ses étudiants, que seul il est capable de se rendre plainement compte de la valeur de ce qu'il enseigne.

Parlant des pays dont je connais le mieux l'organisation universitaire je puis dire qu'en France, en Allemagne, en Italie, par exemple il y a bien longtemps qu'aucune personne ne peut être nommé professeur d'Université ou maître de conférences, sans avoir apporté une contribution originale aux progrès de la Science. Mais c'est grâce à la création récente de corps analogues à l'Institut de Haute Culture que la notion s'est répandue dans ces pays que cela ne suffit pas et que le professeur, une fois nommé doit *continuer* à faire des recherches.

Je sais d'ailleurs et je l'en félicite que le Gouvernement portugais ne s'est pas contenté de créer l'Institut de Haute Culture mais qu'il l'honore de sa confiance et est disposé á lui fournir tous les moyens dont il a besoin.

Mesdames, Messieurs.

Je ne connaissais pas le Portugal et je suis très heureux d'avoir eu cette occasion de contempler vos magnifiques paysages, de jouir de l'affabilité de ses habitants. Mais fallait-il, pour ce plaisir égoïste, quitter ma famille restée á Paris à un moment aussi difficile, où tant d'incertitudes l'entourent, où tant de dangers la menacent? Je n'aurais pu m'y décider si je n'avais eu la persuasion d'accomplir en même temps un devoir. En venant ici, je crois ajouter un témoignage de plus, bien faible, bien modeste mais réel cependant de la vitalité de la France, de sa présence partout où l'on travaille, de la continuation de son activité partout où celle-ci n'est pas entravée par les circonstances.

Certes nous avons traversé des heures désespérées, où tout paraissait s'éffondrer, où un abîme semblait s'ouvrir devant nous. Mais si la France a eu bien souvent des heures de grandeur et de gloire, elle avait aussi connu plusieurs fois des heures d'angoisse. Sans remonter inutilement trop haut, sa situation en 1815, en 1870, n'était pas moins grave que maintenant. Et pourtant, chaque fois nous nous sommes relevés, nous avons retrouvé notre prospérité, nous avons reconquis notre place dans le monde. Cette fois encore, la France renaît à l'espoir, elle vit, elle travaille. Elle est prête à reconnaitre que d'autres nations ont apporté d'immenses contributions aux progrès de l'humanité. Mais elle croit y avoir aussi participé et elle veut montrer par mille moyens et en particulier par la mission qui m'a été confiée, qu'elle n'entend renoncer á aucune activité féconde.

. . . .

...je vais vous exposer mes vues personnelles sur les origines des notions mathématiques. Peut être certains esprits, d'avance d'accord avec moi, risqueraient-ils de considérer mon exposé comme superflu, comme ne faisant que répéter des vérités évidentes. Je crois donc nécessaire de rappeler que des vues très différentes ou même opposées ont été soutenues par des esprits aussi éminents, disons par des génies, tels que Descartes et Kant et au sujet desquelles je vous renvoie aux citations figurant sur ce tableau.

Dans ce qui suit, j'aurai à employer quelques termes techniques dont je n'aurai pas le temps de rappeler les définitions. Je supplie ceux de mes auditeurs qui auraient oublié ces définitions de ne pas croire qu'ils seront arrêtés par une telle lacune. Ces termes techniques qui jouent un rôle essentiel dans mes autres conférences, ne sont ici que pour illustrer ma Thèse, à titre d'exemples qui peuvent être négligés sans que cesse d'être intélligible la ligne générale de mes explications.

Je commencerai pour vous en faciliter l'orientation, par un bref résumé de ma conférence.

Conférence du professeur Fréchet

M. Fréchet a rappelé qu'un certain nombre des plus illustres mathématiciens et philosophes, entre autres Descartes et Kant — mais non tous — ont soutenu que les notions mathématiques fondamentales étaient latentes dans notre esprit indépendamment de toute expérience.

M. Fréchet a défendu une thèse différente, en montrant par de nombreux exemples qu'on peut classer les notions mathématiques en deux grandes catégories: Les unes (comme le nombre entier, la droite, l'aire, le volume, la symétrie, le moment d'une force...) nous sont imposées par la technique par l'observation du monde sensible; mais ce sont des notions abstraites et simples que nous substituons à des réalités trop complexes pour donner prise à la Logique. Cette substitution ne sera d'ailleurs utile que si l'objet réel possède d'une façon suffisamment approchée les propriétés de son image mathématique.

Les notions mathématiques de la seconde catégorie reposent sur des artifices issus du génie de l'homme. Sans être indispensables, elles lui permettent des raisonnements directs plus simples (grâce, par exemple, à l'introduction des nombres négatifs des nombres imaginaires, etc.). Ou bien elles ramènent certaines démonstrations à d'autres, (grâce aux transformations par inversion, par dualité, etc.). Ou bien encore, elles évitent de répéter dans plusieurs applications de raisonnements identiques, et sont par exemple à la base de la théorie vectorielle, de celle des groupes abstraits, de l'Analyse générale, etc.

. . . .

A QUADRATURA DO CÍRCULO

(De Marcel Boll — Les étapes des Mathématiques — Paris, 1942 — p. 79-80)

Os geómetras da antigüidade foram todos atingidos pela fúria da quadratura; e *Aristófanes* [1], no século V a. C., já os metia a ridículo!

Uma história dos *quadradores* foi publicada em 1754: «homens, na maioria apenas iniciados na geometria, que tentam quadrar o círculo e teimam em manter paralogismos absurdos para uma solução do problema».

A situação não mudara em 1831: «Sem cessar, novos *quadradores* assaltam as agremiações científicas e sustentam os seus erros com uma teimosia e uma jactância invencíveis».

Segundo uma maliciosa observação de *Francisco Arago* [2], a quadratura do círculo é uma doença que grassa sobretudo na primavera [3].

Todos os anos, *de pauvres esprits*, que não possuem decerto as primeiras noções das coisas de que falam [4], anunciam às academias e ao público que encontraram (!) a *razão exacta* da circunferência para o seu diâmetro! Bem entendido, esta *razão exacta* difere dum inventor para outro e está errada geralmente a partir do segundo decimal [5].

A *Academia das Ciências* [6] tomou, de há muito, a decisão de não se ocupar mais das memórias que tratam dêste problema, como das que prosseguem na investigação do moto contínuo.

Haverá mal nisso?

Não, evidentemente. Ela bem sabe que assumindo esta atitude não se arrisca a perder nenhuma descoberta séria.

A opinião dos seus membros resume-se mais ou menos no seguinte: «comparámos a probabilidade de que um sábio ignorado descubra um resultado contrário àquilo que é sabido de há muito, com a probabilidade de que exista mais um louco na Terra; a segunda probabilidade pareceu-nos maior» [7].

(tradução de A. S. C.)

[1] *Aristófanes* (450-386? a. C.) o mais célebre poeta satírico grego. (N. T.).

[2] *Francisco Arago* (1786-1853) um dos mais ilustres sábios franceses do século XIX, deixou uma obra notável na física e na astronomia. Foi o primeiro aluno da École Polytechnique que votou contra o consulado vitalício de Napoleão Bonaparte. (N. T.).

[3] O tradutor deveria ter posto outono em vez de primavera, se tomasse em consideração a mudança de coordenadas geográficas. (N. T.).

[4] O caso é igual ao dos que inventam sistemas de jôgo para *vencer* na roleta e no *trente-et-quarante*.

[5] *Pierre Boutroux*, L'idéal scientifique des mathématiciens, 1920.

[6] Deve esclarecer-se que o autor do texto se refere à Academia das Ciências de Paris. (N. T.).

[7] *Henri Poincaré*, La science et l'hypothèse, 1902.

APLICAÇÃO DO CÁLCULO DAS PROBABILIDADES À RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE BIOLOGIA

por A. QUINTANILHA (I), H. B. RIBEIRO [Centro de Estudos Matemáticos] (II), L. W. STEVENS (III)

I

Nos Basidiomicetos, fungos superiores de cuja genética nos vimos ocupando, desapareceram todos os vestígios de órgãos sexuais. A conjugação é *somàtogâmica*, quere dizer, realiza-se por fusão de filamentos somáticos que misturam os seus protoplasmas e formam a primeira parelha de núcleos. Êste primeiro *dicárion* multiplica-se agora por divisões conjugadas, dando origem a um *micélio secundário*, que vai produzir mais tarde, nas formas superiores, as frutificações ou chapéus. Aqui os *basidios*, células que vão dar os esporos, possuem dois núcleos de sexo diferente provenientes, por divisões sucessivas e conjugadas daquele primeiro dicárion que jà vimos como se formava. Num dado momento estes dois núcleos conjugam-se e dão origem a um núcleo único diploïde, isto é, com um número duplo de cromosomas. A isto se reduz, nos Basidiomicetos, o acto sexual — uma *plàsmogamia* (fusão de plasmas) seguida mais tarde de uma *càriogamia* (fusão nuclear). Agora cada um dêstes núcleos diploides divide-se duas vezes seguidas e produz os quatro núcleos haploides (com o número simples de cromosomas) dos quatro esporos que se vão formar.

Estes esporos são os órgãos de multiplicação dos Basidiomicetos; levados pelo vento ou pelas águas vão germinar, como as sementes das plantas superiores, e produzir uma nova geração de indivíduos.

Se semearmos agora os esporos isoladamente verificamos que em certas espécies estas culturas *monospóricas* produzem *micélios secundários*, com basídios binucleados e um ciclo sexual completo.

Chamamos a estas espécies *homotálicas* e verificamos que elas se conduzem, sob êste ponto de vista, como as plantas superiores com flores hermafroditas, ou com flores masculinas e femininas no mesmo pé. Em ambos os casos um indivíduo proveniente da germinação de um esporo, ou de uma semente, pode produzir sòzinho uma nova geração, após a realização de um acto sexual.

Em outras espécies porém estas culturas monospóricas nunca frutificam. Para se obterem micélios secundários e frutificações, para que o acto sexual se realize, é indispensável conjugar dois indivíduos provenientes cada um de seu esporo. A estas espécies chamamos *heterotálicas*. Elas comportam-se como as plantas superiores *dióicas*, isto é, com flores masculinas e femininas em pés diferentes, e necessitando por isso da cooperação de dois indivíduos para a realização do acto sexual.

Já vimos que nos Basidiomicetos não existem órgãos sexuais; os indivíduos que nas espécies heterotálicas se vão conjugar somos incapazes de os distinguir morfològicamente um do outro; e todavia não é possível obter frutificações pela conjugação de dois quaisquer indivíduos escolhidos ao acaso. Tudo se passa como se, apesar da ausência de órgãos sexuais, continuassem a existir sexos diferentes, não morfològicamente, mas fisiològicamente, e fôsse necessário, para obter cruzamentos férteis, escolher dois indivíduos não pertencendo ao mesmo sexo.

Assim, nas espécies heterotálicas de Basidiomicetos, não basta observar uma colecção de culturas monospóricas para dizer se são ou não do mesmo *sexo*; é necessário cruzar cada indivíduo com todos os outros. Aquêles que derem cruzamentos férteis, ou *reacção positiva*, como se diz vulgarmente, pertencem a sexos diferentes; os do mesmo sexo só dão cruzamentos estéreis, isto é, *reacção negativa*.

Feitos todos os cruzamentos possíveis entre os n indivíduos de uma colecção de culturas monospóricas verifica-se que, para certas espécies heterotálicas, existem dois grupos e só dois, digamos a e b, de tal modo que qualquer cruzamento entre um indivíduo do grupo a com um outro do grupo b é sempre fecundo; mas são estéreis todos os cruzamentos entre indivíduos do mesmo grupo.

É isso que está representado no quadro I, onde os sinais (+) representam cruzamentos ferteis e os sinais (−) cruzamentos estéreis.

	a	b
a	−	+
b	+	−

Quadro I

Tudo se passa aqui como se um grupo representasse o sexo masculino e o outro o sexo feminino, mas ambos desprovidos dos órgãos que poderiam permitir o reconhecimento morfológico do sexo.

Nem sempre porém as coisas se passam com esta simplicidade. Há outras espécies, igualmente heterotálicas, onde, feitos todos os cruzamentos possíveis de uma colecção de n indivíduos dois a dois, se verifica que, em vez de dois grupos a e b, como no exemplo anterior, existem quatro grupos, a, b, c e d, de modo que a é complementar de b, e c complementar de d (cf. quadro II).

	a	b	c	d
a	−	+	−	−
b	+	−	−	−
c	−	−	−	+
d	−	−	+	−

Quadro II

Agora tudo se passa como se existissem *quatro sexos diferentes e complementares dois a dois*. Os micélios secundários e as frutificações que se obtêm pelos cruzamentos de a com b, ou de c com d, têm exactamente o mesmo aspecto; e na geração imediata voltam a aparecer os mesmos quatro grupos, qualquer que seja o cruzamento de onde se partiu.

As espécies com dois grupos sexuais chamam-se heterotálicas bipolares; as que possuem quatro grupos são heterotálicas tetrapolares. Tanto numas como noutras há factores mendelianos responsáveis por êste fenómeno de compatibilidade e incompatibilidade, um par (Aa) nas espécies bipolares, dois pares (Aa, Bb) nas espécies tetrapolares. A disjunção faz-se, naturalmente, no momento da divisão de redução, quando os basídios vão produzir os esporos; de modo que os dois *sexos* das formas bipolares são respectivamente A e a, e os quatro *sexos* das formas tetrapolares são representados pelas fórmulas AB, ab, Ab, aB. Só são possíveis as combinações entre *sexos complementares*, isto é, que não possuam qualquer factor comum: $A \times a$ nas formas bipolares; $AB \times ab$ e $Ab \times aB$ nas formas tetrapolares.

Esta interpretação genética, introduzida por Kniep, explica perfeitamente todos os resultados experimentais, bem como o facto de, em cada geração, os esporos de cada *sexo* estarem representados por números rigorosamente iguais.

Para os que se ocupam da genética, e até da sistemática, dos Basidiomicetos tem grande importância o conhecimento da conduta sexual das diferentes espécies, se são homotálicas ou heterotálicas, bipolares ou tetrapolares. Para isso fazem-se culturas monospóricas e no caso destas não passarem expontâneamente ao estado de micélios secundários, sabemos que se trata de uma espécie heterotálica. Neste caso procedemos a todos os cruzamentos possíveis de cada uma das n culturas primárias com tôdas as outras o que nos dá $\frac{n^2-n}{2}$ cruzamentos. Observados agora os resultados, separados e agrupados por afinidades os cruzamentos positivos e negativos, se obtivermos um quadro do tipo I (cf. pág. 3) estamos em presença de uma espécie bipolar; se, pelo contrário, chegarmos a um quadro do tipo II (cf. pág. 3) trata-se de uma espécie tetrapolar.

Tudo isto parece muito simples, assim, teòricamente explicado. Na prática, porém, as coisas são por vezes bastante mais complicadas. Há muitas espécies onde nunca ninguém conseguiu fazer germinar os esporos; e outras onde a percentagem de esporos germinados é tão insignificante que se torna dificílimo obter um número razoável de culturas *garantidas monospóricas*. Por outro lado os resultados observados dos cruzamentos nem sempre correspondem rigorosamente à expectativa teórica. Há casos, por exemplo, em que dois micélios de sexos complementares dão um cruzamento negativo, ou porque um dos inóculos morreu ao ser repicado, ou porque se desenvolvem mal nos meios de cultura empregados, etc., etc. Neste caso um quadro de bipolaridade em que certos cruzamentos positivos falharam pode levar à conclusão errada de que estamos em presença de uma espécie tetrapolar.

Mas pode ainda um cruzamento, entre micélios que possuem um factor comum ($AB \times aB$, p. ex.), e que devia por isso ser negativo, dar origem a um micélio muito difícil de distinguir dos micélios secundários normais. É o caso das *copulações ilegítimas*, que estudamos com particular atenção e cujo mistério conseguimos decifrar. Neste caso vamos marcar com um sinal positivo uma reacção que devia ter sido negativa e que na realidade é diferente dos micélios secundários normais, mas por vezes muito difícil de distinguir. Se numa espécie tetrapolar aparecerem várias destas copulações ilegítimas o quadro de tetrapolaridade pode tomar o aspecto de um quadro bipolar.

Finalmente pode ainda acontecer que entre as n culturas monospóricas que conseguimos isolar faltem completamente os representantes de um grupo sexual, ou mesmo de dois ou três, nas espécies tetrapolares. Se esta falta dos representantes de um ou mais grupos vem associada com falhas nas reacções positivas, ou com copulações ilegítimas, fàcilmente se compreende quanto todos estes factores podem dificultar a interpretação dos resultados.

Quanto mais pequeno fôr n maior é a probabilidade de que todo um grupo sexual não esteja representado. Mas à medida que n aumenta, cresce muito ràpidamente o número de cruzamentos a efectuar e a observar $\left(\frac{n^2-n}{2}\right)$, isto é, a soma de trabalho para o estudo de uma espécie.

Os únicos casos que até agora nos apareceram foram os de, em espécies tetrapolares, faltarem todos os representantes de um grupo, entre os primeiros n esporos isolados. Convinha pois conhecer rigorosamente qual a probabilidade de que tal facto se dê para cada valor de n, afim de reduzir ao mínimo esta probabilidade sem aumentar desnecessàriamente o trabalho a efectuar.

Foi êste o problema que pusemos ao sr. dr. Hugo Ribeiro e que êle quis ter a gentileza de resolver pelo que aqui lhe testemunhamos todo o nosso reconhecimento.

II

Utilisando um esquema usual em Cálculo das Probabilidades, o problema proposto toma a forma seguinte: determinar a probabilidade $P_{n,4}$ para que em n lançamentos de um dado tetraédrico regular cada uma das faces assente, pelo menos uma vez, no plano sôbre o qual se lança o dado. E êste é um problema elementar, «de provas repetidas», de solução bem conhecida.

Há porém, no nosso caso, uma outra exigência a que tal solução não satisfaz: a expressão analítica da relação que liga $P_{n,4}$ a n deverá ser tal que permita uma avaliação efectiva de n dado $P_{n,4}$. Somos assim conduzidos a procurar uma tal expressão abordando directamente o problema da seguinte maneira:

O problema equivale ao da determinação da probabilidade $P_{n,4}$ para que tomada ao acaso uma entre as 4^n aplicações (ou funções unívocas) dum conjunto de n elementos num (A, B, C, D) de quatro elementos A, B, C e D, nessa aplicação figure pelo menos uma vez cada um dos quatro elementos A, B, C, D (valores da função). Determinemos $1-P_{n,4}$, isto é a probabilidade para que pelo menos um dos elementos A, B, C, D não figure na aplicação tomada ao acaso. Um tal acontecimento é a soma dos seguintes quatro incompatíveis dois a dois: 1) A não figure; 2) B não figure mas A figure; 3) C não figure mas figurem A e B; 4) D não figure mas figurem A, B e C. As probabilidades em 1) e 2) são respectivamente, como é fácil de ver, $\frac{3^n}{4^n}$ e $\frac{3^n}{4^n}\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)$. A probabilidade em 3) é

$\frac{3^n}{4^n}\cdot\left[1-\left\{2\cdot\frac{2^n}{3^n}\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^n}\right\}\right]$ porque um tal acontecimento é o produto lógico dos dois seguintes: C não figure na aplicação (de probabilidade $\left.\frac{3^n}{4^n}\right)$ e A e B figurem (de probabilidade a calcular, com a hipótese de que C não figura, por $1-p$ sendo p a soma das probabilidades dos 3 acontecimentos incompatíveis dois a dois: B não figure mas sim A, A não figure mas sim B, nem A nem B figurem). A probabilidade em 4) é $\frac{3^n}{4^n}\cdot P_{n,3}$ onde $P_{n,3}$ é a probabilidade para que, tomada ao acaso uma entre as 3^n aplicações dum conjunto de n elementos num (A, B, C) de três elementos, nessa aplicação figure, pelo menos uma vez, cada um dos três elementos A, B, C.

Tem-se, pois,

$$1-P_{n,4}=\frac{3^n}{4^n}+\frac{3^n}{4^n}\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)+\frac{3^n}{4^n}\left[1-\left\{2\cdot\frac{2^n}{3^n}\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^n}\right\}\right]+\frac{3^n}{4^n}P_{n,3}.$$

E haverá agora que calcular $P_{n,3}$ (o que se fará procedendo anàlogamente ao que se acaba de referir) obtendo-se

$$1-P_{n,3}=\frac{2^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{2^n}{3^n}\left[1-2\cdot\frac{1}{2^n}\right]$$

donde $P_{n,3}=1-\frac{2^n-1}{3^{n-1}}$.

Tem-se finalmente

$$1-P_{n,4}=\frac{3^n-3.2^{n-1}+1}{4^{n-1}}=\frac{3^n}{4^{n-1}}-\frac{3}{2^{n-1}}+\frac{1}{4^{n-1}}$$

ou

$$P_{n,4}=\frac{4^{n-1}-3^n+3.2^{n-1}-1}{4^{n-1}}.$$

O dr. José da Silva Paulo que quis fazer o favor de efectuar os cálculos determinou

$$P_{11,4}\approx 0{,}834,\quad P_{21,4}\approx 0{,}990,\quad P_{31,4}\approx 0{,}999.$$

O professor Quintanilha considera, além do caso que deu origem ao problema anterior, dois outros para os quais convém indicar aqui os resultados que se obtêm, aliás de modo imediato. Um é o das formas bipolares, em há dois grupos igualmente numerosos. Aqui a probabilidade de que faltem os elementos de um grupo é $\frac{1}{2^{n-1}}$. O outro caso é o das formas tetrapolares, em que há 4 grupos A, B, C, D igualmente numerosos onde A é complementar de B e C complementar de D. Aqui a probabilidade de que faltem simultâneamente os elementos de A e B ou de C e D é também $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Já depois de redigida esta pequena nota, e por amável interferência do Eng. Fernando Carvalho Araújo, soubemos que uma expresssão analítica muito geral, igualmente utilisável na resolução do problema, fôra posta em relêvo já em 1937 pelo matemático inglês W. L. Stevens; e tivemos o prazer de discutir a questão com o próprio autor e verificar que da sua igualdade resulta, de facto, em particular, a relação a que chegámos.

Procurámos, então, obter também (o que desde início se nos afigurara tarefa simples) uma igualdade para o caso geral, seguindo o caminho muito elementar e muito directo que tinhamos já tomado para $s=4$.

O resultado a que chegámos é o seguinte:

$$1-P_{n,s}=\left(\frac{s-1}{s}\right)^n\sum_{i=0}^{s-1}\left[1-\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\left(\frac{s-1-j}{s-1}\right)^n\tau_j\right]$$

com

$$\tau_j=\begin{cases}1 & \text{se } j\neq i\\ 1-\left(\dfrac{s-1-i}{s-1-j}\right)^n & \text{se } j=i.\end{cases}$$

Estamos muito agradecidos a W. L. Stevens pela prontidão com que acedeu a publicar, aqui os seus resultados.

III

Consideremos a série das potências de ordem s dos números naturais começando em zero e as diferenças sucessivas destas potências.

Expressões gerais

$$\begin{array}{lllll}
0^s & & & & \\
 & \Delta(0^s) & & & \\
1^s & & \Delta^2(0^s) & & \\
 & \Delta(1^s) & & \Delta^3(0^s) & \\
2^s & & \Delta^2(1^s) & & \cdots\ \Delta^r(0^s) \\
 & \Delta(2^s) & & \Delta^3(1^s) & \\
3^s & & \Delta^2(2^s) & & \cdots\ \Delta^r(1^s) \\
 & \Delta(3^s) & & \Delta^3(2^s) & \\
4^s & & \Delta^2(3^s) & & \\
 & \Delta(4^s) & & & \\
5^s & & & &
\end{array}$$

Exemplo, $s=5$

$$\begin{array}{rrrrrr}
0 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
1 & & 30 & & & \\
 & 31 & & 150 & & \\
32 & & 180 & & 240 & \\
 & 211 & & 390 & & 120 \\
243 & & 570 & & 360 & \\
 & 781 & & 750 & & \\
1024 & & 1320 & & & \\
 & 2101 & & & & \\
3125 & & & & &
\end{array}$$

As quantidades na margem superior da tabela podem chamar-se «diferenças iniciais das potências de ordem s de zero» e obedecem à equação operacional $n^s = E^n(0^s) = (1+\Delta)^n(0^s) = (0^s) + n\Delta(0^s) + + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2(0^s) + \cdots + \frac{n!}{(n-r)!\,r!}\Delta^r(0^s) + \cdots + \Delta^n(0^s)$ para todos os valores de n e s ($\Delta^p(0^s)=0$ se $p>s$).

Consideremos agora o seguinte problema: Dados s elementos diferentes e n classes, de quantas maneiras poderemos distribuïr os s elementos pelas n classes, de tal modo que r das classes fiquem ocupadas e $n-r$ desocupadas?

Seja u_{rs} o número de maneiras de distribuïr os s elementos por um certo e determinado grupo de r classes. É evidente que $u_{0s}=0$, e $u_{ps}=0$ quando $p>s$.

Então o número de maneiras de distribuïr os s elementos por quaisquer r classes é dado por $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}u_{rs}$ visto $n!/(n-r)!\,r!$ ser o número de alternativas para a escolha de r classes dentro das n consideradas.

Contudo o número total de maneiras de colocarmos s elementos em n classes, sem restrições, é n^s porque cada elemento se pode colocar em qualquer das n classes.

Somando para todos os valores possíveis de r teremos $u_{0s} + nu_{1s} + \frac{n(n-1)}{2}u_{2s} + \cdots + \frac{n!}{(n-r)!\,r!}u_{rs} + + \cdots + u_{ns} = n^s$ equação que é satisfeita para todos os valores de n e s.

Comparando-a com a equação anterior vê-se que $u_{rs} \equiv \Delta^r(0^s)$.

Se supozermos ainda que cada elemento tem a mesma probabilidade, de cair em qualquer das n classes, então todos estes arranjos são igualmente provaveis e a lei de distribuïção de r, número de classes ocupadas, obtém-se dividindo por n^s os têrmos da equação achada.

O têrmo geral será $\frac{1}{n^s}\cdot\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\Delta^r(0^s)$.

As quantidades $\frac{1}{r!}\Delta^r(0^s)$ foram tabeladas por Stevens (1937) e a tabela foi reimpressa por Fisher e Yates.

Exemplo: Um fungo é caracterizado por 4 tipos sexuais igualmente provaveis. Qual a grandeza da amostra a escolher que nos garanta uma confiança razoável no aparecimento dos 4 tipos sexuais?

Teremos $n=4$, $r=4$

Probabilidade $P = \frac{4!}{4^s}\cdot\frac{\Delta^4(0^s)}{4!}$.

Da tabela obtém-se

S	$\frac{\Delta^4(0^s)}{4!}$	P
10	34105	73,48 %
15	423.5595	94,67 %
20	4.52321×10^5	98,73 %
	etc.	

Referências

W. L. Stevens (1937), *The Significance of Grouping* Annals of Eugenics 8, pp. 57-69.

R. A. Fisher & F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* Oliver and Boyd, Edinburgh, Scotland.

RESOLUÇÃO GRÁFICA DA EQUAÇÃO ALGÉBRICA DO 2.º GRAU A UMA INCÓGNITA

por JOSÉ DA SILVA PAULO

Vários são os métodos, e bem conhecidos, geralmente usados para a resolução gráfica da equação do 2.º grau a uma incógnita. Quási todos os livros elementares tratam o assunto, mas os mé-

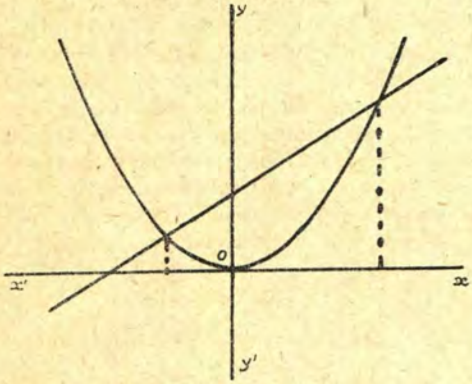


Figura 1

todos geralmente usados sómente têm aplicação no caso em que as raízes da equação são reais.

Nesta nota exporemos dois dêles e apresentaremos outros dois aplicáveis ao caso das raízes da equação serem números complexos.

Consideremos a equação algébrica do 2.º grau reduzida à forma 1) $x^2+px+q=0$ e façamos 2) $y=x^2$ e 3) $y=-px-q$; é evidente que os valores de x que satisfazem simultâneamente a 2) e 3) são as raízes de 1); de modo que esta última equação se pode resolver gràficamente determinando as abscissas dos pontos de encontro da parábola 2) com a recta 3) fig. 1.

É êste um dos métodos que dá as raízes reais da equação 1), se esta as tiver. Assim, se a recta encontra a parábola em dois pontos, 1) terá duas raízes reais, ambas positivas, ambas negativas, uma positiva e uma negativa, ou uma nula e outra não nula, conforme os dois pontos são ambos do 1.º quadrante, ambos do 2.º, um do 1.º e outro do 2.º, ou em que um dos pontos é a origem; se a recta é tangente à parábola, 1) terá uma raíz dupla, positiva, negativa ou nula; e finalmente se as linhas 2) e 3) não se encontram, a equação 1) terá raízes que são números complexos, os quais não podem ser determinados gràficamente por êste processo.

Vejamos agora um outro método que se baseia em propriedades das cordas de uma circunferência.

Recorda-se que «se duas ou mais cordas de uma circunferência, se encontram num ponto do interior do círculo, cada uma delas é dividida pelo ponto de intersecção em dois segmentos cujo produto é constante».

Consideremos ainda a equação 1) e dois eixos coordenados rectangulares (fig. 2). Marquemos sôbre um dêles (o dos xx por exemplo) um segmento $\overline{OC}=-p/2$ e sôbre o outro os segmentos $\overline{OE}=|q|$ e $\overline{OD}=\pm 1$, tendo em conta o sinal de p e tomando $\overline{OD}$ o sinal $+$ ou $-$, conforme q fôr positivo ou negativo (no caso da figura supõe-se $q<0$).

Determinemos uma circunferência que passe pelos pontos D e E (levantando a perpendicular ao meio de DE) e cujo centro O' tenha a abscissa de C, isto é, $-p/2$; esta circunferência, no caso geral, e se as raízes de 1) forem reais, encontrará o eixo dos xx em dois pontos A e B cujas abs-

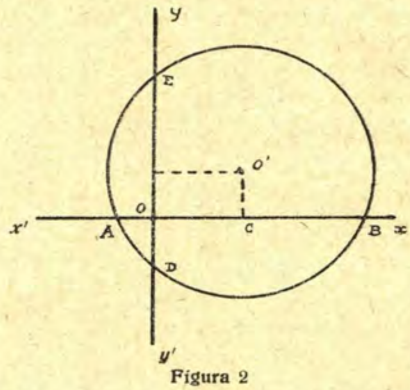


Figura 2

cissas são as raízes de 1). Efectivamente é $\overline{OC}=(\overline{OA}+\overline{OB}):2$ ou seja $\overline{OA}+\overline{OB}=2\overline{OC}=-p$ e $\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{OD}\times\overline{OE}=|q|\times(\pm 1)=q$, donde $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, abscissas de A e B, são as raízes de 1) pois a sua soma é $-p$ e o seu produto q.

É claro que, como no método anterior, 3 casos podem apresentar-se: 1.º) a circunferência de centro O', corta em dois pontos o eixo dos xx (situados ambos para o mesmo lado de Oy, ou um de um lado e outro do outro); 2.º a circunferência é

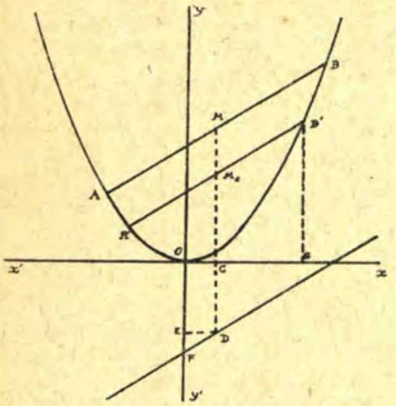


Figura 3

tangente a Ox; 3.º) não encontra Ox, e assim terá 1) duas raízes reais (ambas positivas, ambas negativas ou uma positiva e uma negativa), uma raiz dupla, ou raízes que são números complexos, e neste último caso ainda o método não permite determinar o seu valor. Note-se que o método ainda se emprega com uma pequena variante no caso de haver uma raiz nula.

Dêste modo se quisermos resolver gràficamente a equação 1) quando as suas raízes são imaginárias teremos que recorrer a outros métodos. O primeiro que apresentamos encontramo-lo no livro «Graphic Algebra» de Schultz, e consiste no seguinte: A equação 1) no caso de as suas raízes serem números complexos da forma $a \pm bi$ pode escrever-se, como é obvio, sob a forma 4) $x^2-2ax+a^2+b^2=0$. Consideremos agora a parábola 5) $y=x^2$ e a recta 6) $y=2ax-(a^2+b^2)$.

É claro que neste caso não se encontram as linhas 5) e 6) por as raízes de 4) serem imaginárias.

Tracemos uma corda qualquer AB da parábola 5) mas paralela à recta 6), (fig. 3). Esta corda terá por equação 7) $y=2ax+r$, sendo r a ordenada na origem, e notando que AB deve ter o o mesmo coeficiente angular, $2a$, que 6). As abscissas dos pontos extremos A e B são os valores de x soluções comuns a 7) e 5) ou seja $x_1=a+\sqrt{a^2+r}$ e $x_2=a-\sqrt{a^2+r}$; e o ponto médio M de AB terá a abscissa $x_3=(x_1+x_2):2=a$. Determinemos o ponto da recta 6) cuja abscissa é a, isto é o ponto D, e calculemos a sua ordenada. Da figura B tira-se que $\overline{EF}=a\,.\,2a=2a^2$, visto $2a$ ser a tangente do ângulo FDE igual ao que a recta 6) forma com a parte positiva do eixo dos xx; então a ordenada de D é em valor absoluto $a^2+b^2-2a^2=b^2-a^2$, como fàcilmente se vê.

Tracemos finalmente a corda $A'B'$ da parábola 5) paralela à recta 6) e cuja ordenada na origem é em valor absoluto b^2-a^2 ou seja o comprimento do segmento OE; a equação desta corda é $y=2ax+b^2-a^2$ e as suas extremidades terão por abscissas os valores $a+b$ e $a-b$. Como o ponto M_1, médio da corda $A'B'$, tem a abscissa $\overline{OC}=a$, o segmento $\overline{CG}$ é então igual a b, determinando-se assim gràficamente o valor das raízes $a \pm bi$ da equação 4), pelo conhecimento de a e b.

O outro método, que a seguir expomos, muito mais simples que êste, não o vimos ainda tratado em qualquer livro, e isto possìvelmente porque se baseia no problema bem conhecido da determinação do afixo dum complexo de que se conhece a norma a^2+b^2, e a parte real a.

Da comparação de 1) e 4) conclue-se que 8) $a=-p/2$ e 9) $a^2+b^2=q$.

Tomemos para variáveis a e b; nestas condições a equação 8) representa, em coordenadas rectangulares, uma recta paralela ao eixo dos bb

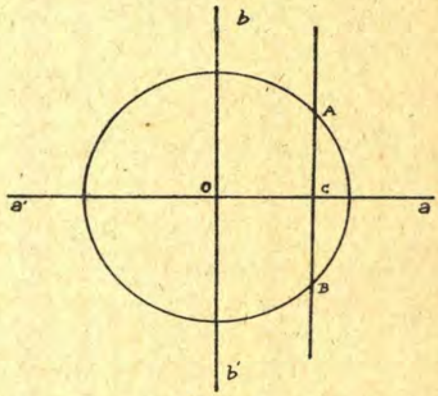


Figura 4

(fig. 4) e 9) representa uma circunferência de raio $\sqrt{q}$ e centro na origem. Os pontos, A e B, de encontro da recta e da circunferência tem por coordenadas, respectivamente, (a, b) e $(a, -b)$, coordenadas que são exactamente a parte real e o coeficiente da parte imaginária dos números complexos $a \pm bi$ raízes de 4).

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1941)

Licenciaturas em ciências fisico-quimicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo. — Outubro de 1941.

Ponto n.º 2

892 — Determine os valores de x que satisfazem à inequação $(2x^2-10x+14):(x^2-3x+2)>1$. R: *A inequação proposta é equivalente à seguinte* $(x^2-7x+12):(x^2-3x+2)>0$; *e como as raizes do trinómio numerador são* 4 *e* 3 *e as do denominador* 1 *e* 2, *as soluções da desigualdade são os valores* $x>4$, $x<1$ *e* $2<x<3$.

893 — Enuncie os teoremas que permitem deduzir o sinal do valor numérico do trinómio ax^2+bx+c para os diferentes valores de x.

894 — Escreva o têrmo médio do desenvolvimento de $\left[\left(\frac{2-i}{3i}\right)^{1/4}-\frac{i}{2}\left(\frac{2-i}{3i}\right)^{1/4}\right]^8$. R: *O têrmo médio é* ${}^8C_4\left(\frac{i}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{2-i}{3i}\right)\cdot\left(\frac{2-i}{3i}\right)=70\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{4-4i+1}{-9}=$ $=-\frac{35\,.\,(5-4i)}{72}$.

895 — Calcule, por logarítmos, a área de um paralelogramo cujos lados têm por comprimento $18^m,329$ e $7^m,623$, sendo $136°\,37'\,16''$ o ângulo de dois lados consecutivos. R: *Se tomarmos o lado maior para base a altura do paralelogramo será* $h=7,623 \text{ sen } 136°\,37'\,16''$, *e a área* $A=18,392\times$ $\times 7,623 \text{ sen } 43°\,22'\,44''$ *donde* $\log A=\log 18,392+$ $+\log 7,623+\log \text{sen } 43°\,22'\,44''=1,26463+0,88213+$ $+\bar{1},83684=1,98360$ *donde* $A=96,094 \text{ m}^2$.

896 — Sendo x um dos ângulos cujo seno é y escreva a expressão dos ângulos que tem êsse mesmo seno. R: *Se* x *é dado em radianos a expressão geral dos arcos com o mesmo seno que* x *é* $u=n\pi+(-1)^n x$.

897 — Verifique a identidade: $\text{tg}^2 a-\text{tg}^2 b=$ $=\text{sen}(a+b)\,\text{sen}(a-b):\cos^2 a\cos^2 b$. R: *O primeiro membro da igualdade é* $\text{tg}^2 b-\text{tg}^2 a=\text{sen}^2 a:$ $:\cos^2 a-\text{sen}^2 b:\cos^2 b=(\text{sen}^2 a\cos^2 b-\text{sen}^2 b\cos^2 a):$ $:\cos^2 a\cos^2 b=[(\text{sen}\, a\cos b+\text{sen}\, b\cos a)(\text{sen}\, a\cos b-$ $-\text{sen}\, b\cos a)]:\cos^2 a\cos^2 b=\text{sen}(a+b)\,\text{sen}(a-b):$ $:\cos^2 a\cos^2 b$.

898 — Figure um diâmetro AB da circunferência de centro O e o raio OC perpendicular a AB. Una A com C. Prolongue OC marcando $\overline{CD}=\overline{AC}$. Una D com A e com B. Determine: 1.º o valor do ângulo ACO; 2.º o valor do ângulo ADB. R: *O ângulo* ACO *mede* 45º *por ser um ângulo inscrito e o arco compreendido entre os seus lados medir* 90º. *O ângulo* ADB *é o dôbro do ângulo* ADC *e êste é um ângulo da base do triângulo isósceles* ACD. *Como o ângulo oposto à base dêste triângulo mede* 45º *a soma dos outros dois, que é igual à medida do ângulo* ADB, *é* 135º.

O ângulo ADB é o ângulo interno dum octógono regular 135°

899 — ¿Que entende por números primos e por números primos entre si? Demonstre recorrendo ao método da decomposição em factores primos, que, sendo a primo com b, também a^n é primo com b. R: *Numeros primos são aquêles que só admitem como divisores o próprio número e a unidade; primos entre si são os números cujo máximo divisor comum é a unidade. Se* a *é primo com* b *nas suas decomposições em factores primos não existem factores comuns. Se* n *é um inteiro positivo a elevação de* a *à potência* n *não introduz na decomposição de* a^n *factores primos diferentes dos de* a; *logo* a^n *é primo com* b *se* n *fôr um inteiro positivo.*

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 2

900 — Enuncie as relações que permitem determinar a natureza das raízes da equação do segundo grau a uma incógnita, sem a resolver. Aplique-as à equação $2x^2-4x-1=0$. R: *A equação proposta tem o descriminante* $16+4\,.\,2\,.\,1>0$. *As raizes são por isso reais; são de sinais contrários em vista de ser negativo o seu produto; e a maior é positiva por a soma das raizes ser positiva.*

901 — Transforme a expressão $(x:2-y:3)^4$ num polinómio ordenado segundo as potências decrescentes de x. R: $(x:2-y:3)^4=(x:2)^4-$ $-4\,(x:2)^3(y:3)^2+6\,(x:2)^2(y:3)^2-4\,(x:2)(y:3)^3+$ $+(y:3)^3$.

902 — Simplifique a fracção $\frac{x^2+x:2-1:2}{x^2-3x:2+1:2}$. R: *As raizes dos polinómios numerador e denominador são respectivamente* $-1, +1/2$; *e* $1, 1/2$. *Logo a fracção pode escrever-se*

$$\frac{(x+1)(x-1:2)}{(x-1)(x-1:2)}=\frac{x+1}{x-1}.$$

903 — Calcule por logarítmos o valor da expressão $\sqrt{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}:2\,\text{tg}^2\beta/2$ para $\alpha=101°\,20'\,10''$ e $\beta=121°\,8'\,20''$. R: *A expressão proposta é um*

número complexo pois cos β ***é negativo; os alunos do curso liceal não sabem calcular o logaritmo de um número negativo.***

904 — Calcule a superfície lateral de um cone recto de base circular, conhecido o raio da base igual a 10,23 metros e a altura igual a 51,34 metros. R: *A geratriz do cone é* $\sqrt{10{,}23^2+51{,}34^2}=52{,}34$ *e a área lateral do cone é então* $A=\pi\times 52{,}34\times 10{,}23=1682{,}78$ metros.

905 — Sendo dada a base dum triângulo, o ângulo oposto e a razão dos lados dêste, construir o triângulo. (Lembra-se a relação existente entre os lados do ângulo dum triângulo e os segmentos intersectados no terceiro pela bissectriz). R: ***Divide-se o segmento*** AB ***da base na razão dos dois lados, determinando-se o ponto*** D ***por onde passa a bissectriz do ângulo oposto à base. Então o segmento*** AD ***deve ser visto do vértice*** C ***do triângulo sob o ângulo cuja medida é metade da do ângulo em*** C; ***e o mesmo acontece com o segmento*** DB. ***O ponto*** C ***é, por isso, o ponto de encontro dos dois arcos de circunferência, lugares geométricos dos pontos dos quais se vêem os segmentos*** AD ***e*** DB ***sob os ângulos dados.***

906 — Diga o que é uma progressão aritmética e uma progressão geométrica. Dê um exemplo de uma e outra. R: ***Uma progressão aritmética é uma sucessão de números em que é constante a diferença de cada um para o anterior; e uma progressão geométrica, uma sucessão de números em que é constante a razão de um têrmo para o anterior. Exemplos: da primeira a sucessão dos números inteiros; da segunda a sucessão das potências de*** 2.

Soluções dos n.os 892 a 906 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia

Ponto n.º 1

907 — Determine o parâmetro m de modo que as raízes da equação $x^2-2mx+2-m=0$ sejam *reais* e *positivas*. R: ***Se designarmos por*** Δ, P ***e*** S ***respectivamente o discriminante da equação, o produto e a soma das suas raízes,*** m ***deverá satisfazer simultâneamente às relações:*** $\Delta>0$, $P>0$ ***e*** $S>0$ ***ou*** $m^2+m-2>0$, $2-m>0$ ***e*** $m>0$ ***ou, finalmente,*** $0<m<2$ ***e*** $m<-2$ ***ou*** $m>1$. ***O parâmetro*** m ***deverá então ser considerado de modo a satisfazer simultâneamente às 3 relações anteriores e é, por isso, qualquer número real do intervalo restrito*** $(1,2)$ ***isto é,*** $1<m<2$.

908 — Sendo $x_1=2$ e $y_1=7$ uma solução da equação $2x+3y=c$, determine c e calcule *tôdas* as soluções inteiras e positivas da referida equação. R: ***Por definição de raiz ter-se-á*** $2\times 2+3\times 7=c$ ***donde*** $c=25$. ***Por outro lado as soluções inteiras e positivas da equação, são dadas pelas expressões*** $x=2+3\theta$ ***e*** $y=7-2\theta$ ***onde*** θ ***designa um*** inteiro ***que satisfaça às relações*** $2+3\theta>0$ ***e*** $7-2\theta>0$ ***ou seja*** $\theta=0,1,2,3$. ***As soluções inteiras e positivas são por isso*** $x=2;5;8;11$ ***e*** $y=7;5;2;1$.

909 — Escreva o têrmo médio do desenvolvimento de $\left(\sqrt[4]{\frac{x}{2}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$ e simplifique o resultado obtido. R: ***Como o desenvolvimento contém 9 termos, será o quinto o têrmo médio, isto é,***

$$T_{4+1}=\binom{8}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4\left(\sqrt[4]{\frac{x}{2}}\right)^4=\frac{8.7.6.5}{2.3.4}\cdot\frac{2^4}{x^2}\cdot\frac{x}{2}=\frac{560}{x}.$$

910 — A base de um triângulo isósceles mede 90059 cm e a altura correspondente mede 362,777 metros. Calcule um dos ângulos iguais do referido triângulo. (Empregue logaritmos). R: ***Designemos por*** c ***a altura do triângulo, por*** b ***a semi-base do triângulo e por*** C ***o ângulo oposto a*** c. ***Tem-se*** $c=b.\mathrm{tg}\,C$ ***donde*** $\mathrm{tg}\,C=c/b$ ***e portanto*** $\log\mathrm{tg}\,C=\log c+\mathrm{colog}\,b=2{,}55964+\bar{3}{,}34650=\bar{1}{,}90614$ ***donde*** $C=38^\circ\,51'\,23'',07$.

911 — Determine todos os ângulos, compreendidos entre 0 e 4π radianos, cuja tangente é igual à unidade. R: ***O ângulo*** α ***do 1.º quadrante cuja tangente é igual à unidade é*** $\pi/4$ ***radianos. A expressão geral de todos os ângulos que têm a mesma tangente que o ângulo*** α ***é*** (1) $x=k\pi+\alpha$ ***em que*** k ***designa um inteiro qualquer. Como pelo enunciado do problema,*** $0<x<4\pi$ ***deverá*** k ***satisfazer à dupla relação*** $0<k\pi+\pi/4<360^\circ$ ***isto é*** $k=0,1,2,3$. ***Dêste modo a fórmula*** (1) ***fornece-nos as 4 soluções do problema*** $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{5\pi}{4}$, $x_3=\frac{9\pi}{4}$ ***e*** $x_4=\frac{13\pi}{4}$.

912 — Supondo α um ângulo do 2.º quadrante que satisfaz à condição $\mathrm{sen}\,\alpha=0{,}5$, calcule $\mathrm{tg}\,\alpha$. R: ***Da fórmula fundamental da trigonometria deduz-se, atendendo a que se trata dum ângulo do 2.º quadrante:*** $\cos\alpha=-\sqrt{1-(0{,}5)^2}=-\sqrt{3}/2$. ***Da definição da tangente resulta fàcilmente:***

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1/2}{-\sqrt{3}/2}=-\sqrt{3}/3.$$ $m-\frac{1}{\sqrt{3}}$

913 — $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais de um quadrilátero $[ABCD]$ irregular, convexo, inscrito numa circunferência. Demonstre que os triângulos $[AMB]$ e $[DMC]$, em que M designa o ponto de intercepção das referidas diagonais, são semelhantes. R: ***Com efeito:*** $\widehat{D}=\widehat{A}$ ***por serem ins-***

critos no arco $\widehat{BC}$ *e* $\widehat{B}=\widehat{C}$ *por serem inscritos no arco* $\widehat{AD}$. *Os triângulos* [AMB] *e* [DMC] *tendo assim dois ângulos iguais, cada um a cada um, são semelhantes,* c. q. d.

914 — O volume de uma pirâmide recta de base quadrada e cuja altura é tripla da aresta da base, é igual a 27 centímetros cúbicos. Calcule o perímetro da base da referida pirâmide. R: *Designemos por* V, h, l, *respectivamente, o volume da pirâmide, a sua altura e a aresta da base. Tem-se* $V=\frac{1}{3}l^2.h$ *e em virtude do enunciado:* $27=\frac{1}{3}l^2.3.l$ *donde* $l=\sqrt[3]{27}=3$. *O perímetro da base é pois* $P=4\times 3=12$ cm.

Soluções dos n.ºs 907 a 914 de J. Calado.

I. S. C. E. F. — 9 de Outubro de 1941

Ponto n.º 5

915 — *a)* Defina semelhança de triângulos e dê as suas propriedades mais importantes.

b) Resolva o seguinte problema: dado um triângulo ABC, considera-se no seu interior um ponto P tal que unindo (por segmentos de recta) P com A, B e C se obtêm três triângulos de áreas iguais. Calcular o produto das alturas dêsses triângulos em função dos lados e de uma das alturas do triângulo dado. R: *b) Porque as áreas dos triângulos* PAB, PAC *e* PBC *são iguais, cada uma delas é um têrço da área do triângulo* ABC *e, por conseqüência* $3ah_1=ah$, $3bh_2=ah$, $3ch_3=ah$, *onde* h_1, h_2 *e* h_3 *são as alturas dos três triângulos obtidos relativas aos lados* a, b, c *respectivamente e* h *é a altura do triângulo dado relativa ao lado a.* *Multiplicando ordenadamente aquelas três igualdades, vem* $9abch_1h_2h_3=a^3h^3$ *donde* $h_1h_2h_3=\frac{a^2h^3}{9bc}$.

916 — Dada a equação $3x^2-4x+5=0$ e chamando α e β as suas raízes, formar, sem a resolver, outra equação cujas raízes sejam $z_1=2\alpha+\beta$ e $z_2=2\beta+\alpha$. R. *Tem-se* $z_1+z_2=3(\alpha+\beta)$ *e* $z_1z_2=$ $=2(\alpha^2+\beta^2)+5\alpha\beta=2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta$ *e* $z_1+z_2=4$ $z_1z_2=37/3$ *por ser* $\alpha+\beta=4/3$ *e* $\alpha\beta=5/3$. *E a equação pedida é* $3z^2-12z+37=0$.

917 — Calcular $x=a^{1/2}.b^{1/3}.c^{1/4}$ onde $a=0{,}03^{-4}$, $b=\text{sen}\,127^\circ 14'$, $c=\text{tg}\,71^\circ 47'$. R: $\log x=2\,\text{colog}\,0{,}03+$ $+\frac{1}{3}\log\text{sen}\,127^\circ 14'+\frac{1}{4}\log\text{tg}\,71^\circ 47'=3{,}0457574+$ $+\bar{1}{,}9670034+0{,}1206662=3{,}1334270$ *donde* $x=1359{,}64$.

918 — Defina simetria em relação a um eixo. Resolva o seguinte problema: dada, num plano, uma recta r) e dois pontos A e B, do mesmo lado dessa recta, determinar nela um ponto P tal que a soma $\overline{AP}+\overline{PB}$ seja mínima. R: *O ponto* P *é determinado pela intersecção da recta* r) *com a recta definida por um dos pontos dados e o simétrico do outro relativamente à recta dada.*

Razões: a menor distância entre B *e* A' *(simétrica de* A *em relação a* r) *é medida sôbre a recta* BA' *e* $\overline{A'P}=\overline{AP}$.

919 — Dum trapézio isósceles conhecem-se as duas bases e a altura; determinar os restantes lados e os ângulos internos do trapézio. Aplicação numérica: $b=7{,}2$ metros, $B=11{,}4$ metros, $h=5$ metros. R: *Seja* MNPQ *o trapézio,* $B=\overline{MN}$ *a base maior e* $b=\overline{QP}$ *a menor,* h *a altura e* R *a projecção de* Q *sôbre* MN. *Tem-se:* $\overline{MR}=\frac{1}{2}(B-b)$,

$$\text{tg}\,\widehat{M}=\frac{h}{\overline{MR}}=\frac{2h}{B-b},\quad \widehat{Q}=180^\circ-\widehat{M}\quad e\quad l=\overline{MQ}=$$

$$=\frac{\overline{QR}}{\text{sen}\,\widehat{M}}=\frac{h}{\text{sen}\,\widehat{M}}.$$ *Aplicação:* $\overline{MR}=2{,}1$ metros

$$\text{tg}\,\widehat{M}=\frac{10}{2{,}1}=4{,}791\quad\longrightarrow\quad\widehat{M}=77^\circ 10'\ \widehat{Q}=102^\circ 50'$$

$$l=\overline{MQ}=\frac{5}{\text{sen}\,77^\circ 10'}=5{,}128\text{ metros.}$$

920 — Dada uma fracção a/b, forma-se uma nova fracção, multiplicando cada um dos termos desta pela potência de expoente n do outro têrmo. Exprimir a nova fracção em função da primeira e estudar a variação do valor duma com a outra.

R: $\frac{ab^n}{ba^n}=\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{1-n}$

valores de n inteiro	$\frac{a}{b}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{1-n}$
$n>1$	cresc. decresc.	decresc. cresc.
$n=1$	cresc. decresc.	const. $=1$
$n\leq 0$	cresc. decresc.	cresc. decresc.

Soluções dos n.ºs 915 a 920 de A. Sá da Costa.

Instituto Superior Técnico

921 — Um veleiro faz uma viagem de um porto a outro e volta. Na ida, com vento favorável, a viagem demora menos vinte horas do que no regresso em virtude de o barco percorrer em cada hora mais cinco quilómetros. Calcular o tempo

600 = vt
600 = (v+5)(t-20)
t =

gasto na viagem sabendo que a distância entre os dois portos é de 600 quilómetros e que o barco se demorou trinta e seis horas no porto do destino. R: *Se forem* v *e* t *a velocidade, em* km/h, *e o tempo, em horas, gasto na ida, serão* $600=vt$ *e* $600=(v-5)(t+20)$ *as equações que resolvem o problema. Eliminando* v *entre as duas equações obtém-se a equação* $t^2+20t-2400=0$ *que admite a solução positiva* $t=40$. *O tempo gasto foi então* $40+60+36=136$ horas.

922 — A função de x definida pela equação $ab(x+2y)-20=2(a+b)xy$, a e b são constantes, toma os valores $5/3$ e -1 para $x=0$ e $x=2$, respectivamente. Calcular o valor da função para $x=3$. R: *Substituindo os valores de* y, *e os correspondente de* x, *na equação dada, obtêm-se o sistema* $ab=6$, $a+b=5$ *que admite a solução* $a=3$ *e* $b=2$, *donde* $y=(20-6x):(12-10x)$ *ou* $y=(10-3x):(6-5x)$ *e para* $x=3$ *vem* $y=-1/9$.

923 — Determinar os ângulos B e C de um triângulo rectângulo, sabendo que é $\sqrt{3}\,(\mathrm{tg}\,B-1)=1-\mathrm{tg}\,C$. R: *Se* B *e* C *forem os ângulos agudos de um triângulo rectângulo será* $B=90-C$ *e então é* $\sqrt{3}(\mathrm{cotg}\,C-1)=1-\mathrm{tg}\,C$ *ou* $\mathrm{tg}^2C-(1+\sqrt{3})\mathrm{tg}\,C+\sqrt{3}=0$, *equação cujas soluções são dadas por* $\mathrm{tg}\,C=1$ *ou* $\mathrm{tg}\,C=\sqrt{3}$; *a primeira dá para* C *o valor utilizável* $C=\dfrac{\pi}{4}$ *e a segunda* $C=\dfrac{\pi}{3}$.

924 — Dado um triângulo rectângulo de lados a, b e c, tirar, pelo vértice do ângulo recto, uma recta que divida o triângulo dado em dois triângulos cujas áreas estejam na razão m/n. R: *A recta tirada pelo vértice do ângulo recto dividirá a hipotenusa* a *em dois segmentos* x *e* $a-x$, *bases dos dois triângulos pedidos de altura comum* h *igual à altura, relativa à hipotenusa, do triângulo dado; e então será pelo enunciado* $xh:(a-x)h=m:n$ *ou* $nx=(a-x)m$ *e* $x=ma:(m+n)$.

925 — Numa pirâmide hexagonal regular, as faces laterais têm um ângulo igual a 77° e o lado oposto igual a 20 centímetros. Calcular o volume da pirâmide. R: *Se o ângulo dado fôr o ângulo da base do triângulo isósceles, que é cada uma das faces, a aresta lateral da pirâmide mede* 20 cm.; *então o lado da base, raio do circulo circunscrito ao exágono da base, medirá* $20.\cos 77^\circ=20.\mathrm{sen}\,13^\circ=20\times0{,}225=4{,}50$ cm., *e a altura da pirâmide terá por medida* $\sqrt{20^2-20^2.\mathrm{sen}^2\,13^\circ}=20.\cos 13^\circ=20\times0{,}974=19{,}48$ cm. *O volume da pirâmide é, neste caso,* $V=\dfrac{1}{3}\times3\times4{,}5\times3{,}82\times19{,}48=338{,}11$ cm³, *por o apótema da base medir* $4{,}5.\sqrt{3}/2=3{,}82$ cm. *É claro que podíamos considerar o ângulo dado como oposto à base do triângulo isósceles o que nos conduzia a outra solução.*

926 — Num losango, uma diagonal mede 6 centímetros e a outra é igual ao lado. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação do losango em tôrno da paralela à diagonal menor tirada por um dos vértices opostos. R: *O lado* l *do losango satisfaz à equação* $l^2=3^2+l^2/4$, *donde* $l=2\sqrt{3}$ cm. *O sólido gerado tem por volume o dôbro do volume do cone circular recto, de raio igual a* 6 cm. *(diagonal maior do losango) e altura* l, *menos quatro vezes o volume do cone cujo raio e altura são metade dos do cone anterior, ou seja:* $V=2.\pi.6^2.l/3-4.\pi.3^2.l/6=2\pi.l/3.(6^2-3^2)=36\pi\sqrt{3}$ cm³.

Soluções dos n.os 921 a 926 de J. da Silva Paulo.

Contém pontos da prova de matemática dos *exames de aptidão* de anos lectivos anteriores todos os números da «*Gazeta de Matemática*».

Curso dos Liceus — 7.º Ano

Ponto n.º 2

927 — Determine os valores de x que tornam própria a fracção $\dfrac{2x^2+2x-18}{x^2+5x-14}$. R: *Quem fêz o ponto deve ter querido enunciar o seguinte problema «resolver a desigualdade* $\dfrac{2x^2+2x-18}{x^2+5x-14}<1$», *mas esqueceu-se que para os valores de* x *que tornam o primeiro membro daquela expressão um número irracional menor que* 1 *não existe fracção e por isso não há fracção própria, mas simplesmente um número irracional. Resolvendo então a desigualdade, como ela é equivalente à seguinte* $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+5x-14}<0$ *e esta é verificada para os valores de* x *que tornam de sinais contrários o numerador e o denominador da fracção, tem-se que, os valores que satisfazem à desigualdade são* $-7<x<-1$ *e* $2<x<4$.

928 — Calcule m de modo que seja negativa a raiz da equação $(m^2+1)x-2m+5=0$. R: $x=(2m-5):(m^2+1)$, *e como* m^2+1 *é um número positivo, terá que ser* $2m-5<0$ *ou* $m<5/2$.

929 — Calcule k de modo que a equação $(k^2-k-6)x=k-3$ seja impossível. R: *Como* $x=(k-3):(k^2-k-6)$ *terá que ser* $k-3\neq0$ *e* $k^2-k-6=0$; *como as raízes da 2.ª equação são* $k_1=-2$ *e* $k_2=3$, *o valor pedido é* $k=-2$.

930 — Determine a equação de Diofanto cujas raízes são da forma $x=1-2n$ e $y=-1-3n$. R: *Como se sabe a equação terá a forma* $ax+by=c$; *os coeficientes* a *e* b *são respectivamente* 3 *e* -2, *como se conclue da forma das raizes, logo a equação será* $3x-2y=c$ *e como a equação admite as raizes* $x=1$, $y=-1$ *será* $c=5$, *donde a equação pedida* $3x-2y=5$.

931 — Quantos sistemas de valores inteiros e positivos verificam a equação $5x-7y=27$? R: *A equação admite soluções inteiras porque os coeficientes das incógnitas são primos entre si. Por outro lado admite uma infinidade de soluções inteiras e positivas porque os coeficientes das incognitas são de sinais contrários.*

932 — Calcule m e n na equação $x^2+mx-n=0$ de modo que as raizes sejam -2 e -1. R: *A soma das raizes* $-m$ *é igual a* -1, *donde* $m=1$; *o produto* $-n$ *é igual a* -2 *donde* $n=2$.

933 — Dada a equação $ax^2+bx+c=0$, forme outro cujas raízes obedeçam às relações $y'=2x'-x''$, $y''=2x''-x'$. R: $y'+y''=2x'+2x''-x'-x''=x'+x''=-b/a$, $y'\,y''=(2x'-x'')(2x''-x')=5x'\,x''-2(x'^2+x''^2)=5c:a-2(b^2-2ac):a^2=(9ac-2b^2):a^2$ *donde a equação* $a^2y^2+aby+9ac-2b^2=0$.

934 — Forme a equação biquadrada que admite a raiz $x'=1+2i$. R: *Se uma raiz é* $1+2i$ *uma outra é* $1-2i$; *por outro lado a equação biquadrada admitirá também as raizes* $-1-2i$ *e* $-1+2i$; *por isso a equação é* $x^4+6x^2+25=0$.

935 — Calcule n de modo que seja $(n+2)!=72.n!$ R: *Será* $(n+2)(n+1)\,n!=72.n!$ *ou* $(n+2)(n+1)-72=0$ *equação que admite as raizes* $n_1=7$ *e* $n_2=-10$ *das quais só a primeira serve ao problema.*

936 — Calcule m de modo que seja $({}^mC_4-{}^mC_3):({}^mC_4-{}^mC)=3/4$. R: *O problema é impossivel.*

937 — Determine o expoente da expressão $(x+1)^n$ sabendo que a soma dos coeficientes do seu desenvolvimento é 1024. R: *Como a soma dos coeficientes do desenvolvimento do binómio é* 2^n, *é* $n=10$.

938 — Calcule o 5.º têrmo do desenvolvimento de $(x/2-3/x^2)^{11}$. R: *O 5.º têrmo é dado por* ${}^{11}C_4(-1)^4.(3/x^2)^4.(x/2)^7=18365/64x$.

939 — Calcule dois números sabendo que a sua soma, está para o seu produto como 2 está para 45, e que o seu menor múltiplo comum é igual a 15 vezes o seu máximo divisor comum. R: *Sejam* a *e* b *os números,* D *e* M *o seu m. d. c. e o seu m. m. c. Então é* $a=D.p$, $b=D.q$, $M=ab:D=pqD$ *onde* p *e* q *são inteiros primos entre si. Daqui se conclue que* $15D=pqD$ *ou* $pq=15$; *e os únicos valores possiveis de* p *e* q *são* $p=1$ *ou* $p=3$ *e* $q=15$ *ou* $q=5$. *Resulta então que* $D(p+q):D^2pq=2/45$ *ou* $(p+q):Dpq=2/45$. *No primeiro caso será* $16:D.15=2:45$ *o que dá o valor* $D=24$ *e por isso* $a=24.1$ *e* $b=24.15=360$; *no segundo caso* $(3+5):D.15=2:45$ *e então* $D=12$, *donde* $a=3.12=36$ *e* $b=5.12=60$.

940 — Justifique os passos da demonstração do seguinte teorema: «O resto da divisão de um número escrito no sistema de numeração decimal por 6 pode obter-se dividindo por 6 a soma do valor do algarismo das unidades com o quadruplo da soma dos valores de todos os outros». *Passos:* 1) $N=mcdu$; 2) $N=m\,10^3+c\,10^2+d.10+u$; 3) $10^n=\dot{6}+4$; 4) $N=m(\dot{6}+4)+c(\dot{6}+4)+d(\dot{6}+4)+u$; 5) $N=\dot{6}+[u+4(d+c+m)]$; 6) $R[N:6]=R\{[u+4(d+c+m)]:6\}$. R: *Justificação:* 1) *Por hipótese;* 2) *Porque no sistema decimal o número* N *se pode escrever sob esta forma;* 3) *A justificação dêste passo requeria a demonstração de que qualquer potência de* 10 *é um multiplo de* 6 *aumentado de* 4; 4) *Por substituição de* 3) *em* 2) *quando se particularisa o valor de* n; 5) *Efectuando as operações do segundo membro de* 4); 6) *Porque, se uma de duas parcelas de uma soma é divisivel por um número, a soma e a outra parcela dão restos iguais quando divididas por êsse número.*

941 — Qual é a base do sistema de numeração em que 243 é o quadrado de 16? R: *O número não está escrito no sistema da base* 10 *pois que neste é* $16^2=256$, *e da comparação dos dois números se conclue que a base é maior que* 10. *Ora sendo a diferença entre os dois números* 13 *a diferença entre as bases é pequena. Suponhamos que a base é* 11 *então o número* 16 *no sistema da base* 10 *é* 17 *cujo quadrado é* 289, *número que escrito na base* 11 *é* 243.

942 — Decomponha o número 735 na soma de três múltiplos consecutivos de 7. R: $735=7[n+n+1+n-1]=7.3.n$ *ou seja* $n=35$ *e os números são* 238, 245 *e* 252.

943 — A que condição hão-de obedecer os números a e b para que se não altere o produto ab quando se juntam 2 unidades a a e se tiram 3 unidades a b. R: $ab=(a+2)(b-3)$ *ou* $ab=ab+2b-3a-6$ *ou* $2b-3a=6$.

944 — Que valores podem ter os algarismos a e b para que seja nulo o resto da divisão do número $8b5a$ (base 10) por 11. R: *Terá que ser* $b+a-13=\dot{11}$ *ou* $b+a=13$ *e* $b+a+11-13=\dot{11}$ *ou* $b+a=13$, *pois* a *e* b *são no máximo iguais a* 9. *Trata-se de determinar as soluções inteiras e posi-*

tivas ou nulas menores que 10 *daquelas equações, o que dá os pares de números*

$$\begin{cases} a=4,5,6,7,8,9 \\ b=9,8,7,6,5,4 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} a=1,2,0 \\ b=1,0,2 \end{cases}.$$

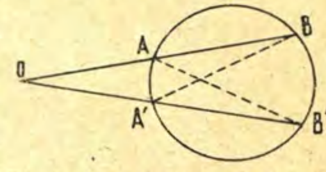
945 — Substitua a fracção 12/21 por outra equivalente sendo 24 a diferença entre os seus termos. R: $12/21=4/7=4n/7n$ *e como tem que ser* $7n-4n=24$ *é* $n=8$ *e a fracção pedida* $32/56$.

946 — Calcule o número da forma $N=4^n\times15$ sabendo que tem 28 divisores. R: *Como* $N=2^{2n}.3.5$ *o número de divisores de* N *é* $(2n+1).2.2=28$ *ou* $2n+1=7$, $n=3$ *e* $N=960$.

947 — Pretende demonstrar-se o seguinte teorema: «Para as secantes a uma circunferência saídas do mesmo ponto, é constante o produto de cada uma delas pela sua parte externa».

Dão-se os seguintes elementos para fazer a demonstração: *a)* a figura junta; *b)* os ângulos inscritos no mesmo arco são iguais; *c)* dois triângulos que têm ângulos iguais cada um a cada um são semelhantes; *d)* em triângulos semelhantes os lados opostos a ângulos iguais são directamente proporcionais; *e)* em qualquer proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Faça a demonstração do teorema enunciado pelo método sintético e dê as justificações dos respectivos passos.



Demonstração:

Hipótese: OB e OB' são duas secantes à mesma circunferência, concorrentes em O.

Tese: $OB\times OA=OB'\times OA'$.

Passos: 1) âng.BAB'=âng.$B'A'B$; 2) âng.ABA'=âng.$AB'A$; 3) $\triangle[OA'B]\sim\triangle[OAB']$; 4) $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}=\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$; 5) $\overline{OB}\times\overline{OA'}\times\overline{OB'}$ c. q. d.

R: *Justificação:* 1) *por* b); 2) *por* b); 3) *por* c); 4) *por* d); 5) *por* e).

Soluções dos n.os 927 a 947 de J. S. Paulo.

MATEMÁTICAS GERAIS—ÁLGEBRA SUPERIOR—COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **Alguns pontos do 2.º exame de freqüência, Junho de 1941.**

948 — Discuta o sistema $2x+\lambda y+1=0$, $x+8y+\lambda=0$, $x+2y+2=0$ e interprete geomètricamente os resultados no plano e no espaço. R: *O sistema é sempre incompatível qualquer que seja* λ *real. O sistema formado pelas duas primeiras equações é compatível ou incompatível conforme fôr* $\lambda\neq16$ *ou* $\lambda=16$. *O sistema formado pelas duas últimas equações é sempre compatível qualquer que seja* λ. *O sistema formado pelas 1.ª e 3.ª equações é compatível ou incompatível conforme fôr* $\lambda\neq4$ *ou* $\lambda=4$. ***Interpretação geométrica no plano:** as equações do sistema são as de três rectas concorrentes duas a duas se* $\lambda\neq4,16$, *a primeira e terceira são paralelas e a terceira é secante se* $\lambda=4$ *e a primeira e segunda são paralelas e a terceira é secante se* $\lambda=16$. ***Interpretação geométrica no espaço:** basta substituir no que atraz se disse recta ou rectas por plano ou planos paralelos ao eixo dos* zz.

949 — Calcule as coordenadas do traço da recta $r\equiv x=0$, $y=z-1$ no plano π que passa por $r_1\equiv2x-y+2z+1=0$, $y=2z$, à distância 2 do centro da esfera $\Sigma\equiv x^2+y^2+z^2-2y+4z-1=0$.
R: *Do feixe de planos cujo eixo é a recta* r_1 *há dois planos que distam* 2 *do centro* $(0,1,-2)$ *da esfera* Σ: π_1) $2x+y-2z+1=0$ *e* π_2) $2x-3y+6z+1=0$. *Os traços da recta* r) *em cada um dêstes planos são respectivamente* $(0,-1,0)$ *e* $(0,7/3,-4/3)$.

950 — Uma recta r passa pelo ponto $(1,2)$. Determine a equação de r sabendo que, se nesta equação se trocarem entre si o coeficiente de y e o têrmo conhecido, a nova equação representa a recta r' simétrica de r em relação ao eixo dos YY. Calcule a área do triângulo definido por r, r' e o eixo dos XX. R: *Sabe-se que a equação da recta simétrica da recta* $ax+by+c=0$ *em relação ao eixo dos* yy *é* $ax-by-c=0$. *Então, a recta simétrica de* r) $mx-y+(2-m)=0$ *é* r') $mx+y+(m-2)=0$. *Por outro lado* r') $mx+(2-m)y-1=0$. *Portanto, deverá ser* $2-m=1$ *ou* $m=1$. *Logo* r) $x-y+1=0$ r') $x+y-1=0$. *Os vértices do triângulo são os pontos* $(-1,0)$ $(1,0)$ $(0,1)$. *A medida da área do triângulo é* S *tal que*

$$2S=\begin{vmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=2,\ \textit{donde}\ S=1.$$

951 — Determine os valores de λ e μ para os quais o sistema $3x+2y+z=4$, $5x+\lambda y+5z=\mu$, $x-y+2z=2$; seja: *a)* determinado; *b)* indeterminado; *c)* incompatível. R: *A aplicação do teorema de Rouché conduz a: a) se* $\lambda\neq0$ *e* μ *qualquer, b) se* $\lambda=0$ *e* $\mu=8$, *neste caso o sistema é simplesmente indeterminado, c) se* $\lambda=0$ *e* $\mu\neq8$.

952 — Deduza a equação da perpendicular baixada do centro da circunferência $\Sigma\equiv2(x^2+y^2)-3x-2y-3=0$ e calcule a área do triângulo definido pelos pontos de intersecção da recta r com a circunferência e pelo centro desta. R: *Coordenadas do centro da circunferência* $(3/4, 1/2)$. *Equação da recta que passa pelo centro e é perpendicular à recta dada* $4x-2y-2=0$. *Pontos de intersecção da recta* r *com a circunferência* Σ, *soluções do sistema formado pelas duas equações,* $(1 \pm 2\sqrt{10}/5)$, $(1 \mp \sqrt{10}/5)$. *A área do triângulo é dada por*

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3/4 & 1/2 & 1 \\ 1+2\sqrt{10}/5 & 1-\sqrt{10}/5 & 1 \\ 1-2\sqrt{10}/5 & 1+\sqrt{10}/5 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{10}/4\,.$$

953 — É dado o triângulo de vértices $A(0,0)$, $B(8,4)$, $C(2,14)$ e o ponto D, meio de $\overline{AC}$. Tire-se por D uma paralela a AB e seja E o ponto onde ela encontra o lado $\overline{BC}$.

Verifique que o eixo radical das duas circunferências que têm por diâmetro respectivamente os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{AE}$, coïncide com a perpendicular a AB, passando por C. R: *Coordenadas dos pontos* D *e* E, $(1,7)$ $(5,9)$. *Coordenadas dos centros das circunferências de diâmetros* BD *e* AE, $(9/2, 11/2)$ $(5/2, 9/2)$. *Raios das circunferências* $\sqrt{58}/2$, $\sqrt{106}/2$. *Equações das circunferências* $x^2+y^2-9x-11y+36=0$, $x^2+y^2-5x-9y=0$. *Equação do eixo radical* $2x+y-18=0$. *Esta é satisfeita pelas coordenadas de* $C(2,14)$ *e é perpendicular à recta* AB *cuja equação é* $x-2y=0$.

954 — Forme o descriminante da equação $x^3-3x+\lambda-1=0$ e aproveite o resultado para determinar λ de modo que a equação tenha uma raiz múltipla. R: *O descriminante é* $\Delta=3\lambda^2-4\lambda-9$. *A equação terá uma raiz múltipla se* $3\lambda^2-4\lambda-9=0$ *isto é para* $\lambda=1/3\,(2\pm\sqrt{31})$.

955 — Dada a recta $y=1+x$ e a circunferência $x^2+y^2+x+y-2=0$ determine um ponto da circunferência que forme um triângulo rectângulo com os pontos de intersecção da recta com a circunferência. R: *As coordenadas dos pontos de intersecção da circunferência* Σ *com a recta* r *são fornecidas pela resolução do sistema formado pelas duas equações,* $(0,1)$ *e* $(-2,-1)$. *Visto que a recta* r *não passa pelo centro de* Σ, *o terceiro vértice do triângulo rectângulo é a intersecção de* Σ *com a recta que passa por* $(0,1)$ *ou por* $(-2,-1)$ *e pelo centro de* $\Sigma(-1/2,-1/2)$. *O problema admite duas soluções: as intersecções das rectas* $y=3x+1$ *e* $x=3y+1$ *com* Σ, *ou* $(-1,-2)$ *e* $(1,0)$.

956 — Dada a esfera $\Sigma \equiv x^2+y^2+z^2-2x+4z-2=0$ e a recta $r \equiv x=2y-1$, $y=z$ deduza as equações das esferas Σ_1 e Σ_2 passando respectivamente pelos pontos $P_1(0,0,0)$, $P_2(0,-1,0)$ e $P_3(-1,1,2)$, $P_4(1,1,0)$ e que com a esfera dada formem um sistema de eixo radical r. R: *A equação geral das esferas que passam por* P_1 *e* P_2 *é* $x^2+y^2+z^2+ax+y+cz=0$ *e a das esferas que passam por* P_3 *e* P_4 *é* $x^2+y^2+z_2+(\gamma-\delta-4)x+(2-\gamma)y+\gamma z+\delta=0$. *Para que o sistema* $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ *admita* r *como eixo radical é necessário e suficiente que* r *coïncida com a recta*

$$\begin{cases} ax+y+cz=-2x+4z-2 \\ (\gamma-\delta-4)x+(2-\gamma)y+\gamma z+\delta=-2x+4z-2 \end{cases}$$

donde $a=-4$, $c=15/2$, $\gamma=0$ *e* $\delta=1/2$. *Então será*

$$\Sigma_1)\ 2(x^2+y^2+z^2)-8x+2y+15z=0$$
$$\Sigma_2)\ 2(x^2+y^2+z^2)-9x+4y+1=0.$$

I. S. C. E. F. — 2.º exame de freqüência, 19-6-1941

957 — Fazer o estudo e o traçado da curva de equação $y=1+1/x+1/x^2$. R: *A equação pode escrever-se* $y=(x^2+x+1)/x^2$. *A função racional definida dêste modo é contínua nos intervalos abertos* $(-\infty, 0)$ *e* $(0, +\infty)$. *A origem é um ponto de descontinuïdade infinita de 1.ª espécie porque* $\lim\limits_{x\to-0} y=+\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to+0} y=+\infty$. *Admite como assíntotas as rectas* $x=0$, *em virtude do resultado anterior, e* $y=1$ *porque* $\lim\limits_{x\to-\infty} y=1-0$ *e* $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1+0$. *Tem-se sempre, para* x *real qualquer,* $y>0$. *O ponto* $(-2, 3/4)$ *é de mínimo e a função é crescente no intervalo aberto* $(-2, 0)$ *e decrescente nos intervalos abertos* $(-\infty, -2)$ *e* $(0, +\infty)$, *por ser* $y'=-(x+2)/x^3$ *e* $y''=(2x+6)/x^4$. *O ponto* $(-3, 7/9)$ *é de inflexão e a concavidade está voltada no sentido dos* yy *positivos nos intervalos abertos* $(-3, 0)$ *e* $(0, +\infty)$ *e no sentido dos* yy *negativos no intervalo aberto* $(-\infty, -3)$, *por ser* $y''=(2x+6)/x^4$ *e* $y'''=-6(x+4)/x^5$.

958 — Calcular três têrmos do desenvolvimento em série de potências da função $y=P(x)\,.\sec x$, onde $P(x)$ é um polinómio do 4.º grau que satisfaz à igualdade $P(x)+xP'(x)+x^2P''(x)+x^3P'''(x)+x^4P^{IV}(x)=65x^4+5x^2$. R: *Determinação de* $P(x)$. *Seja* $P(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ *será* $65a_0x^4+16a_1x^3+5a_2x^2+2a_3x+a_4=65x^4+5x^2$, *donde* $a_0=a_2=1$ *e* $a_1=a_3=a_4=0$. *Logo* $P(x)=x^4+x^2$. *A função dada* $y=(x^4+x^2)\,.\sec x$ *é par, o seu desenvolvimento em série de potências será, portanto, da forma* $y=a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots$. *Tem-se imediatamente* $x^4+x^2=y\,.\cos x$ *e, substituindo* y *e* $\cos x$ *pelos seus desenvolvimentos em série de potências,* $x^4+x^2=(a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)=a_0+(a_2-a_0/2!)x^2+(a_0/4!-a_2/2!+a_4)x^4+(-a_0/6!+$

$+a_2/4!-a_4/2!+a_6)\,x^6+\cdots$ *e identificando vem* $a_0=0\,,\ a_2=1\,,\ a_4=3/2\,,\ a_6=3/8\,,\ \cdots$. *Finalmente será* $y=x^2+x^4\,3/2+x^6\,3/8+\cdots$.

959 — Determine as raízes racionais da equação $3x^3+11x^2+17\,x+24=0$. R: *As raizes da equação proposta são* $-8/3$ *e* $-1/2+i\sqrt{11}/2$, *das quais só a primeira é racional.*

I. S. C. E. F. — 2.º exame de freqüência, 26-6-1941

960 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=e^{1-1/x}$. As ordenadas dos pontos notáveis (máximos e mínimos ou pontos de inflexão, se houver) serão calculados com um êrro inferior a 10^{-3}, utilisando o desenvolvimento em série de e^x. R: *A função é sempre positiva, definida e contínua nos intervalos* $(-\infty\,,0)$ *e* $(0\,,+\infty)$ *abertos. A origem é um ponto de descontinuïdade infinita de 1.ª espécie porque* $\lim\limits_{x\to+0} y=\left[e^{\lim\limits_{x\to 0}(1-x)/x}\right]^{-1}=0$ *e* $\lim\limits_{x\to-0} y=\infty$. *Além do eixo das ordenadas, a curva representativa da função admite como assíntota a recta* $x=e$, *porque* $\lim\limits_{x\to+\infty} y=e-0$ *e* $\lim\limits_{x\to-\infty} y=e+0$. *A função não admite máximos nem mínimos porque a 1.ª derivada* $y'=e^{1-1/x}/x^2$ *não se anula para os valores finitos de* x *e é definida para todos os valores de* x *pertencentes ao domínio da função. Note-se que* $y'(-0)=\infty$ *e* $y'(+0)=0$. *A função é monotónica crescente em todo o domínio de definição porque* y' *é sempre positiva. O ponto* $(1/2\,,y\,(1/2)=e^{-1})$ *é de inflexão porque* $y''=e^{1-1/x}(1-2x)/x^4$ *e* $y'''=e^{1-1/x}(1-6x+6x^2)/x^6$. *A concavidade está voltada no sentido dos* yy *positivos nos intervalos* $(-\infty\,,0)$ *e* $(0\,,1/2)$ *e no sentido dos* yy *negativos no intervalo* $(1/2\,,+\infty)$. *Cálculo de* $y\,(1/2)=1/e$, *ordenada do ponto de inflexão: Tem-se* $e^{-1}=1/2!-1/3!+\cdots+(-1)^n 1/n!+\cdots$. *Se considerarmos um, dois, três, quatro ou cinco têrmos, o êrro sistemático é inferior a* $1/3!$, $1/4!$, $1/5!$, $1/6!$ *ou* $1/7!$ *respectivamente. Então, basta tomar cinco têrmos para que o êrro sistemático seja inferior a* $1/7!=1/5.040<5/10.000$. *Portanto* $y\,(1/2)=e^{-1}\simeq 1/2-1/6+1/24-1/120+1/720=0{,}5-95/720\simeq 0{,}5-0{,}1319\simeq 0{,}368$.

961 — Determinar com um êrro inferior a 10^{-1} todos os valores reais de λ para os quais o sistema
$$\begin{cases} x+(\lambda-1)\,y=0\\ x+\lambda z=0\\ \lambda^2\,y+z=0\end{cases}$$
tem soluções não nulas. R: *É condição necessária e suficiente para que o sistema proposto de equações lineares e homogéneas, admita soluções não nulas, que a característica da matriz dos coeficientes do sistema seja inferior a* 3. *Esta característica não pode ser inferior a* 2 *porque na matriz pode formar-se o determinante* $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$. *Então, o sistema será simplesmente indeterminado se atribuirmos a* λ *os valores que satisfazem a*
$$\begin{vmatrix}1 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 0 & \lambda\\ 0 & \lambda^2 & 1\end{vmatrix}=\lambda^3+\lambda-1=0\,.$$
A aplicação do teorema de Descartes a esta equação e à sua transformada em $-\lambda$, *permite afirmar que ela admite apenas uma raiz irracional positiva e duas raizes complexas conjugadas. Como imediatamente se reconhece, a raiz real pertence ao intervalo aberto* $(0\,,1)$. *Para a sua determinação aproximada utilizemos o método de Rufini-Horner. A transformada da equação em* $\mu=10\lambda$ *é* $Q\,(\mu)=\mu^3+10\mu-100=0$ *cuja raiz irracional está compreendida entre* 0 *e* 10. *Notemos que* $Q\,(0)$, $Q(1)$, $Q\,(2)$ *e* $Q\,(3)$ *são números negativos e* $Q\,(4)$ *é positivo. Então, a raiz real de* $Q\,(\mu)=0$ *está compreendida entre* 3 *e* 4 *e a raiz da equação em* λ *está compreendida entre* $0{,}3$ *e* $0{,}4$. *Êstes dois números são valores aproximados a menos de* 10^{-1}, *o primeiro por defeito e o segundo por excesso, da raiz em causa.*

I. S. T. — Alguns pontos do 2.º exame de freqüência de 1940-41.

962 — Verificar a identidade $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n-1}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n+1}=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n^2}$ e, utilizando-a, provar que a série de têrmo geral $u_n=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n^2}$ é convergente. R: *Tomando tangentes dos dois membros da identidade vem*
$$\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]\Big/\left[1+\frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)}\right]=\frac{1}{2n^2}$$
e, efectuando as operações indicadas no 1.º membro, obtém-se uma identidade evidente. O têrmo geral da série dada pode decompor-se do modo indicado no enunciado e a soma dos n *primeiros termos da série é* $S_n=\operatorname{arc\,tg}1-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n+1}$. *Portanto, tem-se* $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\operatorname{arctg}1=\pi/4$, *resultado que prova a convergência da série.*

Pode provar-se a convergência da série sem recorrer à identidade. Com efeito, consideremos a série, manifestamente convergente, de têrmo geral $v_n=\operatorname{tg}u_n=\dfrac{1}{2n^2}$ *e determinemos* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u^n}{v^n}=1$. *As duas séries têm o mesmo caracter e a série de têrmo geral* u_n *é convergente.*

963 — Provar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = x_1\, x_2 \cdots x_n\,.$$

R: *Substituindo tôdas as colunas do determinante, excepto a 1.ª pela sua soma com esta multiplicada por* -1, *obtem-se fàcilmente o resultado pedido.*

964 — Achar o ponto da recta $\begin{cases} x=3 \\ y=z+5 \end{cases}$ que é eqüidistante de $A(1,2,3)$ $B(-4,0,6)$.

R: *O ponto cuja determinação se pede é a intersecção da recta dada com o lugar geométrico dos pontos do espaço eqüidistantes de* A *e* B. *Êste lugar é o plano perpendicular a* AB *e que passa pelo ponto médio do segmento* $\overline{AB}$. *A sua equação é* $5(x+3/3)+2(y-1)-3(z-9/2)=0$. *A resolução do sistema formado por esta equação e pelas equações da recta dada conduz ao ponto* $(3,22,17)$.

965 — Sendo $\begin{cases} x+ay+1=0 \\ z+1=0 \end{cases}$ as equações duma recta r determinar a de modo que, por r, passe um plano perpendicular a $\begin{cases} y=2x \\ 3y=2z. \end{cases}$ Determinar êsse plano. R: *A equação geral dos planos que passam pela recta* r *é* $x+ay+\lambda z+1+\lambda=0$. *As equações normais da segunda recta são* $x=y/2=z/3$. *A família de planos* $x+ay+\lambda z+1+\lambda=0$ *conterá um plano perpendicular à segunda recta se* $1=\dfrac{a}{2}=\dfrac{\lambda}{3}$ *ou* $a=2,\lambda=3$ *e a equação dêsse plano é* $x+2y+3z+4=0$.

966 — Achar os focos da curva $xy=4$.
R: *A curva dada é uma hipérbole equilátera cujas assíntotas são os eixos coordenados. A sua equação referida aos eixos de simetria é* $Ax^2+Cy^2+G=0$ *com* $A+C=0$, $AC=-1/4$ *e* $ACG=4$ *donde* $A=-C=1/2$, $G=-16$, *isto é* $x^2-y^2=32$. *Os focos são os pontos* $(\pm 8,0)$ *relativamente ao segundo sistema de referência e os pontos* $(\pm 4\sqrt{2}, \pm 4\sqrt{2})$ *relativamente ao primeiro referencial.*

967 — Determinar a parábola que encontra o eixo Oy nos pontos de ordenadas -1 e $1/4$ e tem a recta $2x+4y+1=0$ como diâmetro conjugado com Ox. R: *Seja* $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+G=0$ *a equação da parábola. A equação do diâmetro conjugado com* Ox $Ax+By+D=0$ *não deve ser distinta de* $2x+4y+1=0$, *logo, à parte um factor constante,* $A=2$, $B=4$, $D=1$. *Por se tratar duma parábola deverá ser* $B^2-AC=0$, *portanto* $16-2C=0$ *e* $C=8$. *Finalmente a equação deverá ser satisfeita pelas coordenadas dos pontos* $(0,1)$ *e* $(0,-1/4)$, *portanto, não serão distintas as equações* $8y^2+2Ey+G=0$, $8(y+1)(y-1/4)=0$ *donde* $E=3$ *e* $G=-2$. *Tem-se* $2x^2+8xy+8y^2+2x+6y-2=0$.

Soluções dos exercícios n.os 948 a 967 de A. Sá da Costa.

Contém pontos de segundos exames de freqüência de *Algebra Superior* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 2 e 6.

GEOMETRIA DESCRITIVA — GEOMETRIA PROJECTIVA

F. C. C. — 2.º exame de freqüência

Ponto I

968 — GEOMETRIA COTADA — Apoiar em duas rectas enviezadas a sua perpendicular comum. Uma das rectas é horizontal.

969 — PERSPECTIVA RIGOROSA — Determinar o ângulo de duas rectas enviezadas. Uma das rectas faz com o quadro um ângulo de 45º. R: *Rebata-se sôbre o quadro o plano que contém uma das rectas e é paralelo à outra.*

970 — POLIEDROS — Determinar a secção feita pelo 1.º plano bissector numa pirâmide pentagonal de base regular assente no plano horizontal de projecção. O vértice da pirâmide é um ponto de afastamento nulo e cota positiva. R: *O problema pode resolver-se:* a) *Mudando de plano vertical para qualquer plano de perfil, o que transforma o 1.º plano bissector num plano de tôpo;* b) *Determinando o traço de cada uma das arestas no 1.º plano bissector.*

Ponto II

971 — GEOMETRIA COTADA — Determinar os planos bissectores de dois planos de escalas de declive paralelas. R: *A introdução dum plano vertical de projecção de traço paralelo às escalas de declive, transforma os planos dados em planos de tôpo e permite resolver o problema fàcilmente.*

972 — PERSPECTIVA RIGOROSA — Determinar o ângulo duma recta projectante com o plano neutro. R: *O ângulo pedido é o da recta dada com o quadro.*

973 — TRIEDROS — É dada uma recta do plano horizontal de projecção que faz com a linha de terra um ângulo de 60°. Conduzir por um ponto a recta que faz com a linha de terra e a recta dada ângulos de 30° e 40°, respectivamente. R: *Conduz-se pelo ponto a recta paralela à aresta oposta à base de* 60°, *no triedro de que se conhecem as faces* (60°, 40° *e* 30°). *Tem duas soluções.*

Soluções dos n.os 968 a 973 de L. G. M. de Albuquerque.

F. C. L. — Alguns pontos

974 — Duas rectas, não de perfil, têm projecções de nome contrário coïncidentes. Prove que são complanas e determine a intersecção da linha de terra com o seu plano. R: *Dadas* a *e* b *è, por hipótese,* $a' \equiv b''$ *e* $a'' \equiv b'$. *O ponto* P *tal que* $P' \equiv P'' \equiv a'\,a'' \equiv b'\,b''$ *é o traço comum de* a *e* b *em* β_{24}*: as rectas concorrem em* $P \in \beta_{24}$ *definindo o plano* $\pi \equiv a\,,b$.

Um plano, por exemplo $\rho : \notin P ; \perp \varphi_0$ *determina* $A \equiv a\rho$ *e* $B \equiv b\rho$ *e, seguidamente,* $r \equiv AB$. *Obtidos* $Q \equiv r\beta_{24}$ *e* $t \equiv PQ \equiv \pi\beta_{24}$ *é* $M \equiv t\,.\,LT$ *a intersecção pedida.*

975 — Num plano oblíquo, e por um ponto dêle, conduzir uma recta cujas projecções sejam ortogonais entre si. R: *São dados* π *oblíquo e* $P \in \pi$, *pertende-se traçar* $s : \in P ; \in \pi$ *tal que* $s' \perp s''$.

Com a $\odot$ *de diâmetro* $\overline{P'P''}$ *coincidem as projecções duma elipse* $[e] \in \beta_{24}$. *Cada geratriz (exceptuadas a vertical e a de tôpo) da superfície cónica* $[\gamma]$ *de vértice* P *e directriz* $[e]$ *tem as suas projecções ortogonais entre si, visto que os ângulos inscritos numa semi-*$\odot$ *são rectos.*

As geratrizes de $[\gamma]$ *que passam pela intersecção de* $t \equiv \pi\beta_{24}$ *com* $[e]$ *são as rectas pedidas.*

O problema pode ter 2, 1, 0 *soluções.*

I. S. T. — Aulas práticas

976 — Dada a hipotenusa $\overline{BC}$ de um triângulo rectângulo, e uma recta PQ que passa pelo vértice A dêsse triângulo, determinar êste vértice. $B\,(-45\,,70\,,60)$; $C\,(+45\,,70\,,60)$; $P\,(-95\,,70\,,60)$; $Q\,(26\,,104\,,110)$.

Nota: A primeira coordenada é a abscissa relativamente a um ponto arbitrário de LT, a segunda é a ordenada ou afastamento e a terceira é a cota.

R: *Nas condições do enunciado* BC *e* PQ *são complanas. Rebata-se* BCQ, *em tôrno de* BC, *sôbre um dos planos projectantes desta recta. No rebatimento, a* $\odot$ *de diâmetro* $\overline{BC}$ *determina* A_r *em* PQ_r. *Inverta-se o rebatimento.*

O problema tem duas soluções.

Outra resolução: *A esfera* $[\varepsilon]$ *de diâmetro* $\overline{BC}$ *é o lugar dos pontos (exceptuados* B *e* C*) donde se vê aquêle segmento sob um ângulo recto. Os pontos de intersecção de* PQ *com* $[\varepsilon]$ *são os pontos pedidos.*

977 — Dados os pontos

$A\,(50\,,25\,,60)$; $B\,(12\,,18\,,40)$; $C\,(15\,,43\,,17)$

duma circunferência, determinar as projecções do polo da recta BC em relação à circunferência. R: *Rebata-se o plano* ABC *em tôrno duma das suas horizontais (ou rectas de frente) sôbre o plano de nível (ou de frente) correspondente. Obtidos* A_r, B_r *e* C_r *trace-se a* $\odot\,[ABC]_r$ *e as tangentes a esta* b_r *em* B_r *e* c_r *em* C_r. *O ponto* $P_r \equiv b_r\,c_r$ *é o rebatimento do ponto pedido. Inverta-se o rebatimento.*

Soluções dos n.os 974 a 977 de Luiz Passos.

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — 2.° exame de freqüência

Ponto n.° 1

978 — Calcule $\int x^5\, l^2 x\, dx$ (l logarítmo neperiano). R: *Integrando por partes obtêm-se:*

$$\int x^5\, l^2\, x\, dx = \frac{x^6}{6}\left[l^2\, x - \frac{1}{3}\, lx + \frac{1}{18}\right] + \text{const.}$$

979 — Estude a curva $x^3 - y\,(1+x)^2 = 0$ e faça a sua representação geométrica. R: *A curva tem existência real em todo o plano. Há duas assíntotas:* $x = -1$ *e* $y = x - 2$. *Passa na origem e não corta os eixos coordenados em qualquer outro ponto. Há um ponto de inflaxão na origem das coordenadas e um máximo em* $(-3, -27/4)$.

Ponto n.° 2

980 — Calcule $I = \int (x^2 - 1) \operatorname{arc\,sen} 2x\, dx$.

R: *Integrando por partes tem-se*

$$I = \frac{x^3 - 3x}{3} \operatorname{arc\,sen} 2x - \frac{2}{3}\int \frac{x^3 - 3x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx. \quad \textit{Mas}$$

$$\int \frac{x^3-3x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$$

e o primeiro dêstes integrais fàcilmente se calcula por partes e o segundo é imediato. Tem-se finalmente

$$I = \int (x^2-1) \operatorname{arc\,sen} 2x\, dx = \frac{x^3-3x}{3} \operatorname{arc\,sen} 2x - \frac{1}{36}\sqrt{1-4x^2}\,(17 - 2x^2) + C.$$

981 — Estude a curva $x^2y+y-x=0$ e faça a sua representação geométrica. R: *Como para* $x>0$ *é sempre* $y>0$ *e para* $x<0$ *é sempre* $y<0$, *os pontos da curva estão todos no 1.º e 3.º quadrantes. A curva passa na origem e não encontra os eixos coordenados em qualquer outro ponto. Há uma única assintota que é o eixo* OX. *Há um máximo em* $(1, 1/2)$ *e um máximo em* $(-1, -1/2)$. *Há três pontos de inflexão: na origem, em* $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$ *e em* $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4)$.

Soluções dos n.os 978 a 981 de J. Queiroz de Barros.

F. C. P. — 2.º exame de freqüência, Maio de 1941

Ponto n.º 1

982 — Integrar a equação $y'-\frac{2y}{x}=\frac{y^2}{x^2(x^2+4)}$. R: *É uma equação de Bernoulli. Temos* $y^{-2}y'-2\frac{y^{-1}}{x}=\frac{1}{x^2(x^2+4)}$. *Fazendo a mudança da variável dependente* $y^{-1}=z$, *vem a equação linear de 1.ª ordem:* $z'+2\frac{z}{x}=-\frac{1}{x^2(x^2+4)}$. *O integral geral da equação sem 2.º membro é:* $z=Cx^{-2}$. *Variando a constante temos:* $C=-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+k$. *Portanto* $z=kx^{-2}-\frac{x^{-2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$ e $y=\frac{2x^2}{2k-\operatorname{arc\,tg}x/2}$.

983 — Calcular $\iint_D \frac{y^2\,dx\,dy}{\sqrt{x}}$. O domínio D é limitado pelas linhas: $xy^2=4$; $y=2x$; $y=x/4$.

$$R:\ I=\int_0^1 y^2\,dy\int_{y/2}^{4y}\frac{dx}{\sqrt{x}}+\int_1^2 y^2\,dy\int_{y/2}^{4/y^2}\frac{dx}{\sqrt{x}}=$$

$$=\int_0^1 y^2\left[2\sqrt{x}\right]_{y/2}^{4y}dy+\int_1^2 y^2\left[2\sqrt{x}\right]_{y/2}^{4/y^2}dy=18/7.$$

984 — Determinar a curvatura da secção feita na superfície $z=(x-1)^{y-2}+(y+1)^{x-2}-2$, pelo plano $x-y-3z=0$ no ponto $(2,2,0)$. R: *Plano tangente à superfície no ponto* $(2,2,0): z=0$. *Tangente à secção plana no ponto* $(2,2,0): x-y=0, z=0$. *Curvatura da secção normal feita pelo plano normal que passa por* **t**. $C_n=\frac{r+2s+t}{2}$. *Pelo teorema de Meusnier temos:* $C=\frac{C_n}{\cos i}$ *sendo* $\cos i=\frac{1+1}{\sqrt{11}.\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{2}{11}}$. *Derivando* z *obtém-se* $p_1=0$, $q_1=0$ *e* $r_1=0$, $t_1=0$, $s_1=2$. *Portanto* $C_n=2$ *e* $C=2\sqrt{11/2}=\sqrt{22}$.

985 — Determinar a equação diferencial das linhas (L) tais que o quadrado da área do triângulo OM_1N_1, formado pela tangente em M e pelos eixos seja constante. Integrar a equação obtida e calcular a área limitada pela linha representada pela solução singular e pelas rectas $y=x$; $y=x/\sqrt{3}$ no 1.º quadrante. R: *Seja* $y=f(x)$ *a equação de linha. Equação da tangente em* $M: Y-y=y'(X-x)$. *Pontos de intersecção com os eixos coordenados:* $M_1(0, y-xy')$ *e* $N_1\left(x-\frac{y}{y'}, 0\right)$. *Temos a equação:* $\frac{1}{4}(y-xy')^2\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2=k$ *ou* $(y-xy')^2=\pm 2y'\sqrt{k}$. *Temos portanto uma solução:* $y=xy'+\sqrt{2cy'}$. *Integrando vem:* $y=c_1x+\sqrt{2cc_1}$. *Solução singular:* $yx=\frac{3}{2}C$. *A área pedida é:*

$$A=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4}c^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{3c}{\operatorname{sen}2\theta}\,d\theta=\frac{3c}{8}\log 3.$$

Soluções dos n.os 982 a 985 de Jaime Rios de Sousa.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — 19-VI-1941.

986 — Integrar a equação $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy(1+ay)=0$. R: *A equação proposta é de Bernoulli, como se reconhece imediatamente resolvendo-a em ordem a* $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{1-x^2}y-\frac{ax}{1-x^2}y^2$. *A substituição* $u=\frac{1}{y}$ *permite a sua redução à equação linear* $\frac{du}{dx}=\frac{x}{x^2-1}u-\frac{ax}{x^2-1}$ *cujo integral geral é* $u=e^{\int\frac{x\,dx}{x^2-1}}\left[a\int\frac{x}{1-x^2}\cdot e^{\int\frac{x\,dx}{1-x^2}}dx+C\right]$

$$u=\sqrt{x^2-1}\left[-2a(x^2-1)^{5/2}+C\right]$$
$$u=C\sqrt{x^2-1}-2a(x^2-1)^3.$$

O integral geral da equação proposta é pois $y=\left[C\sqrt{x^2-1}-2a(x^2-1)^3\right]^{-1}$.

987 — Transformar a equação $y'y'''-3y''^2=0$ tomando y para variável independente.

R: *Sabe-se que* $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\frac{d^3x}{dy^3}\cdot\frac{dx}{dy}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$$ *e a equação transformada*

é $\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^3x}{dy^3}=0$ *que será satisfeita se e só se*

$$\frac{dx}{dy}=0 \rightarrow x=c \quad e \quad \frac{d^3x}{dy^3}=0 \rightarrow x=ay^2+by+c\,.$$

O integral geral da equação proposta é

$$(x-c)(x-ay^2+by+c)=0\,.$$

988 — Determinar o raio de curvatura e a evoluta da curva $(4-x)y^2=x^3$.

989 — Por uma rotação da mesma curva, em tôrno da sua assíntota, qual é o volume gerado pela área plana limitada pela curva e pela assíntota? R: *A curva* $(4-x)y^2=x^3$ *admite como assintota a recta* $x=4$. *Se efectuarmos a substituïção* $X=4-x$, $Y=y$, *esta correspondente à mudança de origem para o ponto de coordenadas* $(4,0)$, *de encontro da assíntota com o eixo dos* xx, *com conservação das direcções dos eixos, e a equação transformada escreve-se* $XY^2=(4-X)^3$. *A rotação da curva em tôrno da assintota que coïncide com o eixo dos* yy *dá origem a uma superfície que admite o plano* Oxz *como plano de simetria e cuja equação é* $Y^2\sqrt{X^2+Z^2}=(4-\sqrt{X^2+Z^2})^2$. *O volume do sólido limitado pela superfície considerada terá medida finita se, e só se, fôr convergente*

$$I=\iint_A\left(\frac{(4-\sqrt{X^2+Z^2})^3}{\sqrt{X^2+Z^2}}\right)^{1/2}dX\,dZ$$ *sendo* A *a área limitada pela circunferência de equação* $X^2+Z^2=16$. *Em coordenadbs polares, escreve-se*

$$I=\int_0^4 d\rho\int_0^{2\pi}\frac{(4-\rho)^{3/2}}{\rho}\,d\theta=2\pi\int_0^4\frac{(4-\rho)^{3/2}}{\rho}\,d\rho$$ *e o integral é, manifestamente, divergente.*

Soluções dos n.os 986 a 989 de A. Sá da Costa.

Inst. Sup. Técnico — 2.º ex. de freq., 1941

990 — Verificar que, sendo $y=f(x)$ uma solução da equação 1) $y''+\frac{a}{x}y'+by=0$ será $Y=\frac{1}{x}f'(x)$ uma solução da equação 2) $y''+\frac{a+2}{x}y'+by=0$. Portanto a equação 1) sabe integrar-se quando a fôr um inteiro par e positivo. R: *Como* $y=f(x)$ *é solução da equação* 1) *tem-se* α) $f''+\frac{a}{x}f'+bf=0$.

Por outro lado substituindo $Y=\frac{1}{x}f'(x)$ *e as suas derivadas de* 1.ª *e* 2.ª *ordens no* 1.º *membro de* 2) *obtém-se* $\frac{1}{x}f'''+\frac{a}{x^2}f''-\frac{a}{x^3}f'+\frac{b}{x}f'$ *expressão que é o cociente por* x *de derivada de* α) *e portanto identicamente nula como queria provar-se.*

991 — Sendo P, Q e R funções homogéneas de x e y e P e R do mesmo grau de homogeneidade, integrar a equação $\frac{dy}{dx}=\frac{R+Qy}{P+Qx}$ fazendo a mudança de variável $y=zx$. R: *Fazendo* $y=zx$ *e designando por* n *o grau de homogeneidade de* P *e* Q *e por* m *o de* R, *isto é, supondo que* $P(x,y)=x^n p(z)$, $R(x,y)=x^n r(z)$ *e* $Q(x,y)=x^m q(z)$, *vem:*

$$\frac{dx}{du}+\frac{p(z)}{zp(z)-r(z)}x+\frac{q(z)}{zp(z)-x(z)}x^{m-n+2}$$

que é uma equação de Bernoulli e que portanto sabe integrar-se.

992 — Sendo $y=4x^2$, $z=f(x)$ as equações duma curva, determinar $f(x)$ de modo tal que as normais principais da curva sejam paralelas ao plano yz. R: *Como as equações do normal principal em* (x,y,z) *são* $\frac{X-x}{Bz'-Cy'}=\frac{Y-y}{Cx'-Az'}=\frac{Z-z}{Ay'-By'}$ *o paralelismo das normais principais ao plano* yz *exige ser* $Bz'-Cy'=0$. *Tem-se então:* $B=z'x''-z''x'=-z''$, $C=x'y''-x''y'=8$ *(atendendo a que* $x'=1, x''=0, y'=8x, y''-8$) *e* $Bz'-Cy'=-z'z''-64x$.

Há pois que integrar a equação diferencial ordinária de 2.ª ordem: $z'z''+64x=0$. *Tem-se.* $2z'z''=-128x$, $z'^2=-64x^2+c_1=-64x^2+64C_1$ *donde* $z'=\pm 8\sqrt{c_1-x^2}$ *e* $z=\pm 8\int\sqrt{c_1-x^2}\,dx=$

$$=\pm 8C_1\int\cos^2 t\,dt=8C_1\frac{t+\operatorname{sen}t\cos t}{2}+C_2=$$

$$=4C_1\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{C_1}}+\frac{x}{\sqrt{C_1}}\sqrt{1-\frac{x^2}{C_1}}\right)+C_2,$$

(fazendo $x=\sqrt{c_1}\operatorname{sen}t$). *E então*

$$z=f(x)=\pm\left(c_1\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{C_1}}+x\sqrt{C_1-x^2}\right)-C_2\,.$$

993 — Sendo $\alpha=(2x+3y)I+(3y+4z)J+(2-3y)K$ para que pontos do espaço se verifica o sistema $\begin{cases}\operatorname{div}.\alpha=\alpha\,|\,I\\ \operatorname{div}(x\alpha)=4?\end{cases}$. R: *Tem-se sucessivamente* $\operatorname{div}\alpha=7$, $\alpha|I=2x+3y$, $x\alpha=(2x^2+3xy)I+(3xy+4xz)J+(2xz-3xy)K$, $\operatorname{div}(x\alpha)=9x+3y$. *O sistema dado é pois* $\begin{cases}2x+3y=7\\9x+3y=4\end{cases}$ *ou* $\begin{cases}x=-3/7\\y=55/21,\end{cases}$ *equações duma recta paralela ao eixo* OZ.

Soluções dos n.os 990 a 993 de Manuel Zaluar.

Contém pontos de segundos exames de freqüência de *Cálculo infinitesimal e de Análise Superior* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*: 2 e 6.

MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. L. — 2.º exame de freqüência, 1-II-1941

994 — Determinar o centro de gravidade da superfície lateral dum cilindro de revolução em tôrno do eixo dos xx, limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x=h$, e cuja densidade é uma função linear da coordenada z, nula para $z=0$. R: *A equação da superfície é* $y^2+z^2=R^2$, *donde* $p=0$ *e* $q=-y/z$. *A densidade num ponto é* $\lambda=az$. *As coordenadas do centro de gravidade calculam-se pelas fórmulas.* $\xi=\dfrac{\iint_c \sqrt{1+p^2+q^2}\,\lambda x dx dy}{\iint_c \sqrt{1+p^2+q^2}\,\lambda dx dy}$, *e expressões análogas por* η *e* ζ *que se deduzem por substituïção de* x *por* y *e* z *respectivamente.*

Ora $\sqrt{1+p^2+q^2}=\dfrac{1}{z}\sqrt{y^2+z^2}=\dfrac{R}{z}$ *e portanto*

$$\xi=\frac{\int_0^h x\,dx\int_0^R dy}{\int_0^h dx\int_0^R dy}=\frac{h}{2},\quad \eta=\frac{\int_0^h dx\int_0^R y\,dy}{\int_0^h dx\int_0^R dy}=\frac{R}{2}\quad e$$

$$\zeta=\frac{\int_0^h dx\int_0^R z\,dy}{\int_0^h dx\int_0^R dy}=\frac{\int_0^R \sqrt{R^2-y^2}\,dy}{R}=$$

$$=\frac{1}{R}\left[\frac{y}{2}\sqrt{R^2-y^2}+\frac{R^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{y}{R}\right]_0^R=\frac{\pi R}{4}.$$

995 — Um ponto material pode mover-se sôbre a parábola $y^2=2px$ e é atraído por um ponto do plano da curva de coordenadas (p, b), com uma fôrça proporcional à distância. Calcular as posições de equilíbrio. R: *Componentes da fôrça:* $X=k(p-x)$ $Y=k(b-y)$. *a) Método das reacções:*

$$\begin{cases} k(p-x)+\mu\dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \\ k(b-y)+\mu\dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases}\quad \textit{ou seja}\quad \begin{cases} k(p-x)-2p\mu=0 \\ k(b-y)+2y\mu=0. \end{cases}$$

Mas $x=\dfrac{y^2}{2p}$ *e a 1.ª equação pode escrever-se* $k\left(p-\dfrac{y^2}{2p}\right)-2p\mu=0$ *donde* $\mu=\dfrac{2p^2-y^2}{4p^2}k$; *substituindo na 2.ª equação vem* $y=\sqrt[3]{2p^2b}$ *e portanto* $x=\dfrac{y^2}{2p}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4pb^2}$. *b) Método dos trabalhos virtuais:* $x=\dfrac{y^2}{2p}$ $\delta x=\dfrac{y}{p}\delta y$ *logo* $X\delta x+Y\delta z=0$ *ou*

$$k(p-x)\frac{y}{p}\delta y+k(b-y)\delta y=0,\quad \left(b-\frac{xy}{p}\right)\delta y=0.$$

Como δy *pode tomar qualquer valor, deve ser* $b-\dfrac{xy}{p}=0$ *ou atendendo ao valor de* x: $b-\dfrac{y^3}{2p^2}=0$ *donde* $y=\sqrt[3]{2p^2b}$.

996 — No movimento duma figura plana no seu plano, as velocidades, num dado instante, dos pontos $P_1(0,0)$ e $P_2(4,3)$ têm respectivamente por cosenos directores $\alpha_1=3/\sqrt{3}$, $\beta_1=2/\sqrt{3}$, $\alpha_2=3/\sqrt{10}$ e $\beta_2=-1/\sqrt{10}$. Determinar o centro instantâneo de rotação. R: *Tem-se* $\mathbf{v}_1=\rho_1(3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2)$ *e* $\mathbf{v}_{2}\rho=_{2}(3\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)$. *As normais a estas velocidades, tiradas respectivamente por* P_1 *e* P_2 *são:* $Q_1=P_1+$ $+\lambda i(3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2)=P_1+\lambda(-2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)$ *e* $Q_2=P_2+$ $+i\mu(3\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)=P_2+\mu(\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)=P_1+4\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2+$ $+\mu(\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)=P_1+(4+\mu)\mathbf{e}_1+(3+3\mu)\mathbf{e}_2$ *cujo ponto de encontro é dado pelos valores de* λ *e de* μ *que tornem* $Q_1\equiv Q_2$ *ou seja:* $-2\lambda=4+\mu$, $3\lambda=3+3\mu$ *donde* $\lambda=-1$ *e* $\mu=-2$. *O centro instantâneo de rotação é pois* $C=P_1-(-2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)$ *ou seja* $C(2,-3)$.

997 — É dada a parábola $y^2=2px$. Supondo que a área limitada pela parábola tem uma densidade de forma $\lambda=x+b$ determinar b de forma que o centro de gravidade da área referida limitada pela recta $x=p$ esteja no foco da parábola. R: *As coordenadas do foco são* $F(p/2, 0)$. *Como a curva é simétrica em relação ao eixo dos* xx, *o centro de gravidade está sôbre êste eixo e portanto* $\eta=0$. *Basta pois determinar o valor de* ξ *e igualá-lo a* $p/2$. *Temos então:* $\xi=\dfrac{\iint \lambda x\,dx\,dy}{\iint \lambda\,dx\,dy}=$

$$=\frac{\int_0^p (x^2+bx)\,dx\int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dy}{\int_0^p (x+b)\,dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy}=\frac{30p^2+42pb}{42p+70b}.\quad \textit{Logo}$$

$\xi=p/2$ *ou* $9p+7b=0$ *donde* $b=-9/7$.

Soluções dos exercícios 994 a 997 de F. V. A. de Veiga de Oliveira.

F. C. P. — 2.º exame de freqüência, 1940-1941

998 — Um ponto material pesado P está suspenso dum fio inextensível em cuja extremidade livre actua uma fôrça Φ que lhe imprime um movimento rectilíneo, vertical, ascendente, uniformemente acelerado. Pêso do ponto $p=500$ kg. A aceleração $a=2$ m/s².

1.º ¿ Como varia Φ com o tempo, na hipótese de ser nula a velocidade inicial do ponto?

2.º ¿ Como varia com o tempo a potência desenvolvida por Φ e qual o seu valor em kw, 10 segundos depois do instante inicial, na hipótese considerada na pregunta anterior?

999 — Um sistema material é constituído como a figura indica. Os discos D e D_1 são solicitários e concêntricos, e o movimento de D_1 sôbre Ox faz-se sem escorregamento. Os raios de D e D_1 são b e b_1 e tem lugar a relação $2b=b_1$. O é fixo e o resvalamento de D contra OA faz-se sem atrito. As fôrças actuantes são os pesos p e p' dos discos e da barra e uma fôrça F horizontal aplicada em C. O sistema é homogénio.

Dados numéricos: $p=p'=10$ kg. $b_1=1m$ $OA=$ $=2a=5m$.

a) Parametre o sistema.

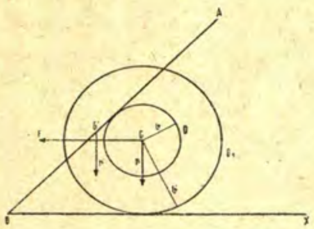
b) Escreva equações que traduzam condições necessárias e suficientes de equilíbrio do sistema considerado.

c) Calcule a fôrça F de modo que o equilíbrio tenha lugar quando a barra OA forma com Ox um ângulo de 60°.

d) Poderá calcular gràficamente a fôrça F? Justifique a resposta.

e) Verifique se as ligações são perfeitas

Suponha agora que o sistema parte, sem velocidade inicial, de uma posição que não seja de equilíbrio, abandonado à acção das fôrças anteriormente consideradas, incluindo F a que se atribuirá um valor constante.



f) Escreva a equação ou as equações que permitem estudar o movimento do sistema.

g) Escreva a equação que lhe permite calcular o valor comum das reacções que se desenvolvem entre a barra OA e o disco D.

I. S. T. — 2.º exame de freqüência, 25-6-1941

1000 — Um paralelogramo articulado $ABA'B'$ está em equilíbrio. Os dois vértices opostos B e B' são ligados por um fio flexível e inextensível. Sôbre os vértices opostos A e A' actuam duas fôrças iguais e opostas, F e $F'=-F$, que tendem a aproximar êsses dois vértices. Qual é a tensão do fio BB', em qualquer dos seu pontos?

1001 — Um fio flexível e inextensível homogéneo, cujas extremidades são dois pontos fixos A e B, está animado duma rotação uniforme em tôrno da recta AB. Dasprezando o pêso do fio, em face da fôrça centrífuga, qual é a figura de equilíbrio relativo?

1002 — Quando uma figura plana, possìvelmente deformàvel, se move em tôrno duma recta qualquer do seu plano, o seu momento cinético, em relação a essa recta, é o mesmo que seria se não houvesse deformação.

1003 — Verificar que o sistema das fôrças de inércia de transporte é conservativo, quando o movimento de transporte é uma rotação em tôrno dum eixo fixo. Achar o seu potencial.

Contém pontos de segundos exames de freqüência de *Mecânica Racional* e *Física Matemática* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 2 e 6.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. — 2.º exame de freqüência 21-5-1941

1004 — Tomam-se ao acaso dois números quaisquer entre 0 e $a>0$. Calcular a probabilidade de que o produto dêles seja inferior a ma^2 $(0<m<1)$. Aplicação numérica $m=1/4$. R: *Designemos por* x *e* y *os dois números em questão. Tem-se* $0<x<a$ *e* $0<y<a$. *Pretende-se determinar a probabilidade de que* $xy<ma^2$.

O mesmo problema pode receber estoutro enunciado: Determinar a probablidade de que um ponto (x, y) *tomado ao acaso no interior do quadrado de lados* $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$ *seja interior ao domínio* $0<x<a$, $0<y<a$, $xy<ma^2$, *isto é, o domínio do 1.º quadrante limitado pelas rectas* $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$ *e pela hipérbole* $xy-ma^2=0$. *A solução dêste problema é imediata — a probabilidade pedida é o cociente das áreas dos dois domínios, isto é,*

$$p=\frac{ma^2+\int_{ma}^{a}\frac{ma^2}{x}\,dx}{a^2}=m\,(1-\log m).$$

$m=1/4 \rightarrow p=(1+\log 4)/4=(1+1{,}3863)/4=0{,}5791$.

1005 — Calcular o valor médio da função $\sqrt{r^2-x^2}$ sendo $\frac{dx}{k}$ a probabilidade elementar da variável casual x definida no intervalo $(-r, r)$. R: *Cálculo de* k: $1=\int_{-r}^{+r}\frac{dx}{k}=2kr \rightarrow k=1/2r$. *Cálculo do valor médio:* $M\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)=\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=$ $=\frac{r}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi r}{2}$.

Soluções dos números 1004 e 1005 de M. Zaluar

Contém pontos de segundos exames de freqüência de *Cálculo das Probabilidades* o número 2 da «*Gazeta de Matemática*».

PEDAGOGIA

O cinema no ensino

Eis um assunto da maior importância e a que não tem sido prestada, entre nós, a atenção devida. Mas uma experiência já larga, realizada em alguns países, mostra como o cinema pode ser um poderosíssimo auxiliar do ensino, tanto das ciências físico-naturais como da própria matemática.

A School Science Review traz, no seu número de Outubro de 1941, uma lista de 18 filmes pedagógicos (zoologia, botânica, física, química, geologia, meteorologia) com indicações técnicas e críticas.

São citados os seguintes distribuïdores:

Kodak, Ltd., Wealdstone, Harrow, Hiddlesex.

G. B. Equipments, Ltd., Tower House, Woodchester, nr. Stroud, Glos.

Educational and General Services, Ltd., Little Holt, Merton Lane, London N. 6.

Film Center, Ltd., 34 Soho Square, London W. 1.

Damos estas indicações para uso de todos os que que se interessem pelo assunto (instituïções de ensino oficial ou particular).

A Sociedade Portuguesa de Matemática vai ocupar-se do estudo desta questão e pede a todos os interessados que se ponham em comunicação com ela, escrevendo para Comissão Pedagógica da Sociedade Portuguesa de Matemática, Faculdade de Ciências, Lisboa.

B. C.

Exames liceais

Os jornais de 21 de Fevereiro publicaram a seguinte nota:

«*As instruções dadas à comissão organizadora dos dos pontos.* — Pelo sr. Ministro da Educação Nacional foram dadas as seguintes instruções à Comissão organizadora dos pontos para exames liceais:

I. O ponto modêlo *traduz uma orientação geral a seguir pela Comissão, não um paradigma que seja forçoso adoptar em todos os pormenores. Pode, portanto, deixar de seguir-se quanto: 1) às cotações a atribuir a cada questão; e 2) ao número de questões a propor, à sua ordenação e ao processo da sua formulação.*

II. Pode a Comissão organizar os pontos com extensão menor do que a prevista no ponto modêlo: pode e a experiência mostra que em alguns casos deve».

MOVIMENTO MATEMÁTICO

Origem e objectivo desta Secção

Pensou-se há algum tempo em publicar um jornal — que teria por título *Movimento Matemático* — destinado a lançar uma campanha para uma reforma dos estudos matemáticos em Portugal e a fazer a propaganda das principais correntes do movimento matemático moderno.

Parece-me evidente a necessidade de publicar um tal jornal precisamente porque o nosso país anda longe das correntes vitais do pensamento matemático moderno e porque o nosso ensino das ciências matemáticas necessita de uma remodelação completa: remodelação dos programas de estudo, da organização da licenciatura em Ciências Matemáticas, da preparação dos professores do ensino secundário, das provas de doutoramento e dos métodos de recrutamento do pessoal docente universitário.

É indiscutível que assistimos hoje no nosso país a uma verdadeira efervescência de actividade no campo das ciências matemáticas. Demonstram esta afirmação o aparecimento sucessivo no curto prazo de cinco anos de 1.º) *Portugaliae Mathematica,* fundada em 1937; 2.º *Seminário Matemático de Lisboa* (1938) que toma em Novembro de 1939 o nome de *Seminário de Análise Geral;* 3.º) *Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia,* fundado pelo 1.º Grupo do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, (1938); 4.º) *Gazeta de Matemática,* Janeiro de 1939; 5.º) *Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa,* fundado pelo Instituto para a Alta Cultura em Fevereiro de 1940; 6.º) *Sociedade Portuguesa de Matemática,* Dezembro de 1940; 7.º) *Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto,* fundado pelo Instituto para a Alta Cultura em Fevereiro de 1942.

Anuncia-se para breve a publicação do *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática,* das *Publicações da Secção de Matemática da Faculdade de Ciências do Pôrto* e de uma colecção de *Estudos de*

Matemática; projecta-se a criação de um *Estúdio de Matemática* em Lisboa.

Tôdas estas organizações e publicações trabalham por um ressurgimento da cultura matemática portuguesa!

Se tudo isto é muito animador e nos permite ter esperanças num triunfo mais ou menos próximo, não devemos ter ilusões de espécie alguma sôbre as dificuldades que nos esperam!

Há que contar — isto é de todos os tempos! — com um recrudescimento da hostilidade da ignorância e da má fé; da hostilidade daquêles para quem a estagnação ou a decadência da nossa cultura matemática é a condição necessária para a realização de objectivos que nada têm que ver com as ciências matemáticas, daquêles que tremem perante a ideia da existência de uma juventude estudiosa consagrando inteiramente a sua vida e o seu entusiasmo a uma causa pela qual êles nunca lutaram — porque o esfôrço e a diligência no estudo revelam de uma maneira evidente os êrros do passado e as deficiências do presente —, da má fé daquêles que apregoam um interêsse e um entusiasmo pelo desenvolvimento da cultura matemática que são desmentidos categòricamente pela sua actuação presente, da má fé daquêles que consideram como revelações de inteligência e de capacidade a adoração da rotina que o uso consagrou e de que êles são por vezes os mais legítimos representantes; há que contar ainda com a ignorância (e que enciclopédica ignorância!) daquêles que afirmam que o nosso país está perfeitìssimamente ao corrente do movimento matemático moderno, que o nível dos nossos estudos matemáticos se pode pôr a par do dos países mais avançados, e finalmente há que contar com a indiferença (que estranha e cómoda indiferença!) daquêles que dizem que no nosso país não há nada a fazer, que os portugueses são incapazes de realizar um esfôrço persistente e continuado e que portanto são incapazes de contribuir para o progresso das ciências matemáticas!

Pensamos que o aparecimento destas manifestações, deve servir apenas para nos indicar que seguimos pelo bom caminho — porque a cada tarefa realizada a reacção deve aumentar — e que nunca devemos desviar a nossa atenção do trabalho metódico e persistente para controvérsias de carácter duvidoso.

É precisamente pelo estudo, pelo trabalho de investigação e pela propaganda das matemáticas, que se pode preparar o ressurgimento dos estudos matemáticos em Portugal, mas importa evidentemente orientar a nossa actuação pelas lições que nos são dadas pela nossa experiência e pela experiência das outras nações. Há que definir um rumo, e segui-lo enquanto a experiência mostrar que estamos no bom caminho!

O desenvolvimento rápido da *Gazeta de Matemática* — em particular a partir do início do presente ano lectivo — tornou possível o alargamento imediato da sua acção cultural e daí nasceu a ideia — para evitar uma dispersão de esforços que o momento actual não permite — de criar na *Gazeta* uma secção em que se desenvolveria a pouco e pouco o plano de acção que se pretendia realizar no Movimento Matemático. É esta a origem desta secção que se iniciou no n.º 9 da *Gazeta.*

Infelizmente a situação actual da *Gazeta* não permite ainda dar a esta secção todo o desenvolvimento que era necessário. Por isso temos que nos limitar a assinalar aos leitores dêste número as realizações e iniciativas de valor cultural sob o ponto de vista matemático de que temos conhecimento. Esperamos que em breve seja possível, por meio da colaboração efectiva de tôdas as pessoas interessadas no desenvolvimento da cultura matemática, lançar uma campanha para uma reforma dos estudos matemáticos em Portugal e fazer a propaganda das principais correntes do movimento matemático moderno.

ANTÓNIO MONTEIRO

Prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira

Já no primeiro número da *Gazeta de Matemática* tivemos ocasião de nos referir a êste prémio que se destina a galardoar, mediante concurso, o melhor trabalho de matemáticas puras elaborado em cada ano lectivo por um aluno dum dos estabelecimentos de ensino universitário em que são professadas.

Com êste prémio procura-se ainda estimular o interêsse dos professores em fomentar a realização de trabalhos pessoais durante os cursos. Dizem-nos que no ano lectivo passado, primeiro ano em que o prémio devia ser concedido, apareceu um único concorrente com um trabalho que não é de matemáticas puras. E o prémio não foi atribuído.

Ao prémio pode concorrer qualquer estudante universitário português, com menos de vinte e cinco anos de idade, que tiver freqüentado com aproveitamento durante pelo menos um ano estabelecimentos universitários em que as matemáticas puras sejam professadas.

Os concorrentes devem entregar, de 16 a 30 de Setembro, oito exemplares dos trabalhos nas secretarias dos respectivos estabelecimentos universitários.

O regulamento do prémio é de 2 de Abril de 1941 e pode ser consultado em qualquer das escolas referidas.

H. R.

Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto

A *Gazeta de Matemática* saúda com entusiasmo a criação do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto, (fundado pelo Instituto para a Alta Cultura no mês de Fevereiro de 1942). Trata-se de um acontecimento de grande importância para o desenvolvimento dos estudos matemáticos em Portugal. Os professores e assistentes da Secção de Matemática da F. C. do Pôrto tinham iniciado êste ano lectivo uma série de cursos e conferências subordinadas a um plano de conjunto, cujos objectivos foram claramente expostos aos leitores do nosso jornal pelo Prof. Dr. Ruy Luiz Gomes [1].

Um dos objectivos fixados foi o de: *criar um ambiente de trabalho, um «clima» e um estímulo, como resultante da cooperação de todos numa tarefa que transcende o interêsse imediato de cada um e traduz uma consciência colectiva: a de que pertencemos a uma Universidade* [2].

Palavras necessárias num meio, como o nosso, em que tantas vezes o *interêsse imediato de cada um* se sobrepõe injustificadamente à realização das tarefas culturais mais urgentes e mais necessárias; num meio em que a indiferença (e por vezes a hostilidade aberta ou mal dissimulada) perante o trabalho de investigação científica constitue um método de acção retardadora do progresso cultural do país.

Têm-se realizado regularmente na Faculdade de Ciências do Pôrto os cursos do Dr. António Almeida Costa sôbre a *Teoria dos Grupos e suas Aplicações à Física Quântica* (6.as feiras às 18 horas) e do Dr. Manuel Gonçalves Miranda sôbre *Cálculo Tensorial e algumas das suas Aplicações* (5.as feiras às 18 horas).

Nos dias 22 e 23 de Janeiro dêste ano realizaram-se a convite da Faculdade as conferências do Dr. Aurélio Marques da Silva respectivamente sôbre *A Materialização da Energia* e *A Fissão dos Núcleos*.

Anuncia-se para o dia 24 de Abril uma conferência do Prof. Bento de Jesus Caraça sôbre a *Noção de Infinito em Matemática*.

Iniciava-se portanto na Faculdade do Pôrto uma acção intensa de alargamento da cultura matemática quando o Instituto para a Alta Cultura fundou o Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto.

Há que felicitar o Instituto para a Alta Cultura e a F. C. do Pôrto por êste acontecimento.

A. M.

[1] Veja número 9, pág. 13.
[2] Id. pág. 14.

Sôbre o objectivo dos cursos promovidos pela Secção de Matemática da Faculdade de Ciências do Pôrto

A notícia publicada com êste título no último número da *Gazeta de Matemática* (n.º 9, pág. 13), foi redigida pelo Prof. Dr. Ruy Luiz Gomes. Por lapso de revisão faltou a indicação do nome do autor, pelo que lhe apresentamos as nossas desculpas.

Faculdade de Ciências de Coimbra

Chega-nos a agradável notícia de que por iniciativa dos professores e assistentes da Faculdade de Ciências de Coimbra se iniciou no dia 21 de Março uma série de conferências subordinadas ao título *Introdução Física e Filosófica à teoria dos Quanta*. Colaboram neste curso os professores Guido Beck, Pacheco de Amorim, Manuel dos Reis, Mário Silva, Vicente Gonçalves, Couceiro da Costa, Almeida Santos, Jorge Gouveia, António Júdice, Rodrigues Martins e Magalhães Vilhena. O programa de trabalhos é o seguinte:

A) *Introdução Física*. 1 — O problema da Física Teórica. 2 — Diferentes aspectos da mecânica clássica. 3 — Evolução da electrodinâmica clássica. 4 — Aparelhagem matemática da teoria dos Quanta. 5 — Mecânica Quântica. 6 — Electrodinâmica Quântica. 7 — Bases experimentais da física quântica.

B) *Introdução Filosófica*. 1 — Ciência e epistemologia. 2 — Conhecimento e realidade. 3 — Espaço e tempo. 4 — Causalidade e determinismo. 5 — Fundamento da Indução. 6 — Razão e experiência.

Não podemos como desejávamos precisar o programa que se refere à introdução matemática à teoria dos quanta, por falta de informações.

O trabalho em grupo começa a generalizar-se em Portugal, o que revela consciência dos métodos modernos de organização do trabalho científico.

A *Gazeta de Matemática* felicita vivamente a Faculdade de Ciências de Coimbra por esta iniciativa.

A. M.

Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa

I — Conferências de Álgebra e Topologia

As séries de conferências de Introdução à Topologia Geral e de Introdução à Álgebra Abstracta cujos objectivos é programas foram publicados e afixados (veja-se o número 9 da *Gazeta de Matemática)* têm continuado a realizar-se com tôda a regularidade às 3.as e 5.as feiras pelas 18 horas e aos sábados pelas

14,30 respectivamente, depois de terem sofrido uma breve interrupção com a visita do professor Maurice Fréchet. Na de «Introdução à Topologia Geral» realizaram-se as conferências seguintes: em Janeiro, no dia 10, sôbre os «Espaços de Kuratowski» por Hugo Ribeiro; em Fevereiro, nos dias 21 e 28 sôbre «Comparação de Topologias» por António Monteiro; em Março, no dia 7 sôbre «Relativização» por J. Sebastião e Silva, e nos dias 14 e 21 sôbre «Funções contínuas e Homeomorfia» por M. Zaluar Nunes.

Da série «Introdução à Álgebra Abstracta», foram feitas mais as seguintes conferências: em 8 de Janeiro, sôbre «Aplicações da teoria clássica de Galois», por J. Sebastião e Silva; nos dias 13 e 15 de Janeiro, 19, 24 e 26 de Fevereiro e 3 de Março, sôbre a «Teoria dos Grupos Abstractos» por J. Sebastião e Silva; nos dias 6 e 13 de Março, sôbre a «Noção do Corpo Abstracto e um estudo dos corpos quadráticos e cúbicos» por J. da Silva Paulo; e nos dias 17 e 19 de Março, sôbre «Corpos Algébricos» por A. Sá da Costa.

II — Colóquios do Seminário de Análise Geral

Começaram no dia 23 de Março, os seguintes colóquios do Seminário de Análise Geral:

1.º *Hugo Ribeiro*. *«Estruturas da Lógica Clássica e Intuïcionista»*. Às 2.as feiras, às 16,30 horas. 1.º Colóquio, dia 23.

2.º *J. Ribeiro de Albuquerque* e *Mário de Alenquer*. *«Teoria da medida de Jordan, Lebesgue, Carathéodory e Haar em espaços topológicos»*. Às 3.as feiras, às 16,30 horas. 1.º Colóquio, dia 24.

3.º *António Monteiro*. *«Caracterização cardinal, ordinal, topológica, projectiva e euclideana da linha recta»*. Às 5.as feiras, às 16,30. 1.º Colóquio, dia 26.

4.º *Hugo Ribeiro* e *M. Zaluar Nunes*. *«Fundamentos modernos do Cálculo das Probabilidades»*. Às 6.as feiras, às 16,30 horas. 1.º Colóquio, dia 27.

H. R.

Centro de Estudos de Física de Lisboa

Aproveitando a estadia do Prof. Guido Beck em Portugal o Centro de Física do I. A. C. que funciona anexo à Faculdade de Ciências de Lisboa convidou, com o apoio da direcção desta, o referido professor a realizar um curso sob a designação geral de «Introduction à la theorie des quanta».

Pareceu conveniente realizar algumas lições preparatórias para as pessoas que desejassem seguir êste curso e assim durante o mês de Janeiro efectuaram-se as seguintes lições:

As eqüações da dinâmica dum ponto (equação de Newton, equações de Lagrange, equações canónicas de Hamilton, equação de Hamilton-Jacobi às derivadas parciais), 2 lições por F. Veiga de Oliveira.

As equações de Maxwell. As fórmulas da transformação de Lorentz. As expressões relativistas da energia cinética dum ponto material. 1 lição por A. Marques da Silva.

Elementos da teoria das matrizes. Redução à forma canónica. 2 lições por M. Zaluar Nunes.

Espaço abstracto de Hilbert. Desenvolvimento em série de funções ortogonais e normais. 1 lição por António Monteiro.

Equação das cordas vibrantes, 1 lição por Armando Gibert.

Estudo dos polinómios de Legendre, polinómios de Hermite, funções esféricas, funções de Bessel, polinómios de Laguerre, 2 lições por Mário de Alenquer.

Havia um grande interêsse em seguir o curso do Prof. Guido Beck, interêsse plenamente justificado pela sua obra científica e pelas funções docentes que desempenhou: assistente nas Universidades de Viena e Leipzig, encarregado de curso na Universidade de Praga, professor de física matemática na Universidade de Kansas (América). O professor Guido Beck trabalhou com alguns dos maiores físicos contemporâneos: Heisenberg, Rutherford, Bohr, Irene Joliot-Curie.

O curso de «Introduction à la théorie des quanta» devia ter-se efectuado durante os meses de Fevereiro e Março. Actuações independentes da vontade do Prof. Guido Beck, do Centro de Física e da Faculdade de Ciências de Lisboa impediram a sua realização.

MANUEL VALADARES

Centro de Estudos Matemáticos Aplicados à Economia

Êste centro de estudos foi fundado em 1938 por iniciativa dos professores do 1.º grupo do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras.

Nesse ano de 1938 o dr. Manuel Zaluar Nunes realizou um curso prático livre de Cálculo das Probabilidades; e em 1938-39 realizaram-se colóquios sôbre Seguros com a colaboração dos actuários drs. Rinaldo Campeão, Noronha, Castanheira Nunes, entre outros.

A *Gazeta de Matemática* tem o prazer de noticiar que a actividade dêste Centro recomeçou agora por iniciativa da sua Secção de Economia Matemática. De facto, em 24 de Março, teve início um curso livre de Introdução à Economia Matemática, o qual é constituído pela exposição da economia matemática paretiana. O principal objectivo é chamar a atenção para êste assunto e generalizar o debate sôbre as questões tratadas.

As exposições são feitas pelo dr. Augusto de Macedo Sá da Costa e têm lugar às segundas e quartas-feiras, às 18 horas, no I. S. C. E. F.

Regosijamo-nos muito com esta actividade do Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia que tanto interêsse tem para os estudiosos da Economia e também para os estudiosos de Matemática. Uns e outros têm agora ocasião de se familiarizar com uma tão importante aplicação da Matemática, o que reforça decerto as esperanças na actividade do Centro e, por ela, no esclarecimento, entre nós, do papel da Matemática na Economia que é hoje uma Ciência que faz parte do centro de interêsse de todos.

H. B. R.

Professor Maurice Fréchet

Em 17 de Janeiro realizou-se a sessão em que o professor Maurice Fréchet foi recebido como sócio honorário da Sociedade Portuguesa de Matemática. O professor Pedro José da Cunha, presidente da Direcção, historiou as razões da concessão do título de sócio honorário ao professor Fréchet e o convite que o Instituto para a Alta Cultura dirigiu a êste professor para vir a Lisboa realizar uma série de conferências. O Dr. Zaluar Nunes leu um discurso do professor Mira Fernandes que não pôde comparecer, e o Dr. António Monteiro antigo discípulo do professor Fréchet em Paris e secretário geral da Sociedade enalteceu os méritos da obra científica e pedagógica daquêle professor que agradeceu, no final, as homenagens que acabavam de lhe prestar.

A. S. C.

Professor Francesco Severi

Por iniciativa do Instituto de Cultura Italiana em Portugal veiu a Lisboa, o prof. Francesco Severi, da Universidade de Roma e Presidente do Instituto Nacional de Alta Matemática, para participiar na comemoração do centenário de Galileo Galilei promovida pela Academia das Ciências de Lisboa.

«O TRANSFINITO»

O quinzenário cultural «Horizonte», orgão de estudantes das nossas escolas superiores publica no seu n.º 4 um artigo com pretensões filosóficas intitulado «O Transfinito». Foi com desagrado e pena que o li. Que verbalismo! Que enorme confusão esconde uma linguagem empolada mas desarticulada!

Começa o autor por analisar as atitudes do investigador e do «homem de senso comum» em face da proposição «o todo é maior que a parte» e depois de considerações bastante confusas, sôbre as preocupações de generalização do cientista *pretende* «demonstrar por uma anatomia cuidada de uma sucessão muito simples — a sucessão dos números inteiros — que tal sucessão é equivalente a outras nela contidas.

São de louvar as tentativas honestas de divulgação mas altamente condenáveis, por prejudiciais, artigos do género de «O Transfinito», e há assuntos que não se podem divulgar em poucas linhas.

¿Para quê tentar mostrar cultura que não existe de facto? ¿Para quê, termos «bombásticos» como «anatomia cuidada do infinito», «operar no finito e no transfinito» ou mesmo místicos como «as coisas *lá* comportam-se dum modo diverso do de *cá*», empregados sem serem convenientemente esclarecidos?

Termino pedindo ao autor leia com mais cuidado algum bom compêndio de Matemática Superior (que existe!) não se preocupando em reter as frases cujo estilo o entusiasmou mas sim em assimilar as idéias que nelas se contêm.

MANUEL ZALUAR

PROBLEMAS PROPOSTOS

1006—Mostre que a série $\sum^{\infty} (z^n+z^{-n})^{-1}$ converge em qualquer ponto z tal que $|z|\neq 1$.

1007—Prove que para n inteiro as funções de Bessel $J_n(z)$ verificam $J_n(y+z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(y)\,J_{n-m}(z)$.

1008—Ache o recíproco de $1+\rho^2$ no corpo definido por $f(\rho)=\rho^3-3\rho+1=0$.

1009—Ache a equação do grau 6 que define o corpo $R_a(\sqrt[3]{2},\sqrt{3})$ [R_a corpo dos racionais].

1010—São dados um plano ω e um ponto O dêsse plano. Pede-se a equação geral das superfícies Σ tais que, sendo M um ponto de Σ, MN a normal em $M(N\in\Sigma)$, MP a perpendicular a $\omega\,(P\in\Sigma)$, seja igual a uma constante dada a^2 a área do triângulo ONP. Com os mesmos dados fazer $N\hat{O}P=$const.

1011—Demonstrar que, dados os pontos M_1 e M_2 representativos dos complexos z_1 e z_2, se M_1 descreve uma recta paralela ao eixo Ox, o ponto M representativo do produto $z_1 z_2$ descreve uma recta paralela a OM_2.

1012—Se num determinante de Vandermonde $D(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ os elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ estão em progressão aritmética de razão r, o valor do determinante é:

$$D(a_1, a_2, \cdots a_n)=(n-1)!\,(n-2)!\cdots!\,3!\,2!\,1!\,r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Os problemas n.os 1011 e 1012 são propostos por um leitor que assina «um estudante de Matemáticas» do Pôrto.

Soluções recebidas

890—*O resto* R *da divisão do polinómio* $P=x^3+y^3+z^3+mxyz$ *por* $D=x+y+z$ *obtem-se substituindo, em* P, x *por* $-(y+z)$. *Então* $R=(m+3)(y^2z+z^2y)$. *A equação* $R=0$ *dá para* m *o valor* -3.

T. Ferreira Rato (de Cabo Verde). Recebemos ainda uma solução análoga de J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

891—$R=\pm(7x^2-2x-3/2)$.

Soluções dos mesmos autores.

A SITUAÇÃO FINANCEIRA DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Tem-se escrito nas colunas da «Gazeta de Matemática» que esta não constitui um empreendimento comercial. Pretende-se significar, com esta afirmação, que:

1.º todo o trabalho da direcção, redacção e administração da «Gazeta de Matemática» é gratuito;

2.º todo o rendimento líquido que venha a resultar da publicação da «Gazeta de Matemática» será aplicado, integralmente, no ulterior melhoramento da revista e na ampliação do número das suas páginas.

Por outro lado, tem-se afirmado aqui, várias vezes, que a transformação da «Gazeta de Matemática» num instrumento de trabalho cada vez mais aperfeiçoado, depende em grande parte da colaboração e do apoio prestado pelos leitores.

A administração da «Gazeta de Matemática» julga concorrer para a documentação da primeira afirmação e para o despertar dum maior interêsse nos leitores pela prestação da colaboração solicitada, ao decidir a publicação normal das contas que traduzem a situação financeira da revista.

Esta publicação será feita sem comentários para que o leitor livremente julgue e actue em conformidade. Deve acrescentar-se, contudo, tão convencidos estamos de que a publicação da «Gazeta de Matemática» corresponde a uma necessidade do meio, que outro resultado não esperamos da publicação das contas que não seja o de assistir em breve — por fôrça da actuação dos actuais e futuros leitores — à transformação da revista naquilo que todos pretendem que ela seja.

* * *

Sem esperar pela consolidação da actual situação financeira, deliberou-se ampliar para 24 ou 32 páginas o texto da «Gazeta de Matemática». Satisfaz-se, assim, uma necessidade já premente, em virtude da afluência de originais, da urgência de criar novas secções permanentes e do crescimento das actuais. Simultâneamente, realiza-se, dêste modo, um comêço de concretização da orientação que atraz se esboçou.

CONTA DE RECEITA E DESPESA

Receita		*Despesa*	
1940 Receita da venda avulso e por assinatura dos N.os 1 a 4	3.104$05	1940 Composição, impressão, papel e brochura do N.º 1	932$00
Deficit em 1940	2.911$70	Idem, idem do N.º 2	1.420$00
		Idem, idem do N.º 3	2.355$00
		Idem, idem do N.º 4	875$00
		Despezas de expedição, cobrança, propaganda, etc.	433$75
	6.015$75		6.015$75
1941 Receita da venda avulso e por assinatura dos N.os 1 a 8	7.897$30	1941 *Deficit em 1940*	2.911$70
Deficit em 1941	1.072$70	Composição, impressão, papel e brochura do N.º 5	1.282$00
		Idem, idem do N.º 6	1.600$00
		Idem, idem do N.º 7	1.100$00
		Idem, idem do N.º 8	1.100$00
		Despezas de expedição, cobrança, propaganda, etc.	976$30
	8.970$00		8.970$00
1942 Receita da venda avulso e por assinatura dos N.os 1 a 13	4.843$95	1942 *Deficit em 1941*	1.072$70
		Composição, impressão, papel e brochura do N.º 9	1.410$00
		Despezas de expedição, cobrança, propaganda, etc.	1.298$95
		MARÇO, 31 — *Superavit*	1.062$30
	4.843$95		4.843$95
1942, ABRIL, 1 — *Superavit*	1.062$30		

BALANÇO

31-MARÇO-1942

ACTIVO		PASSIVO	
Caixa		*Credores diversos*	
Numerário em cofre	1.062$30	Contas a liquidar	304$90
Assinantes		*Assinantes*	
Números entregues e não cobrados	807$00	Números a publicar e cobrados antecipadamente	2.637$00
Edições			
Existência da «Gazeta» N.os 1 a 9 pelo preço de custo	174$50		
Situação liquida	898$10		
	2.941$90		2.941$90

A. S. C. e O. M. R.

BIBLIOGRAFIA

Agros — Boletim dos estudantes de Agronomia. Ano 24 — n.º 6 — Novembro-Dezembro.

Guia de leitores — Notas críticas de Bibliografia Moderna — Fas. 1.

Horizonte — Quinzenário cultural. Ano 1 — — N.^{os} 1 a 4.

Inácio Francisco da Silva — *Sôbre a determinação da distância perièlica duma órbita parabólica.* — Revista da Faculdade de Ciências da U. L., Vol. II, n.º 7, 1941.

J. Vicente Gonçalves — *Sur la primitive des différentielles totales* (Coimbra, 1941); *Sur une classe de frontières de domaines* (Coimbra, 1941); *Sur quelques théorèmes classiques* (Coimbra, 1941).

Portugaliae Mathematica — Vol. 3 (1942), Fasc. 2. — Maurice Fréchet—*Les courbes d'inertie et l'ajustement.* Renato Caccioppoli *Esistenza e limitazione dello spettro in un problema ai limiti per un'equazione differenziale ordinaria non lineare.* Manuel Balanzat — *Sur quelques formules de la géométrie intégrale des ensembles dans un espace à* n *dimensions.* J. W. Tukey — *Some notes on the separation of convex sets.* Frederic Bohnenblust *A characterization of complex Hilbert spaces.* Sixto Ríos — *Sobre las singularidades de la integral de Laplace.* German Ancochea — *Sur quelques théorèmes de la théorie algèbrique des corps.* A. Mira Fernandes — *La condizione* (N) *di Lusin e le condizioni* (T) *ed* (S) *di Banach. Condizion* (S_1) *et* (S_2). J. Sebastião e Silva — *Les ensembles fermés et le problème de Wiener.* J. Albuquerque — *Sur les ensembles clairsemés.*

Correcção — Nas «Publicações periódicas» indicadas no n.º 9 foi por lapso omitido o trabalho de António Monteiro — *La notion de fermeture et les axiomes de séparation.*

Técnica — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. n.º 125 (Janeiro de 1942), n.º 126 (Fevereiro de 1042) e n.º 127 (Março de 1942).

O n.º 127 contém os enunciados dos pontos dos exames de aptidão ao I. S. T. nas épocas de Julho e Outubro de 1941.

Trabalhos do Seminário de Análise Geral — Publicados em 1940 e 1941. — Centro de Estudos Matemáticos (Instituto para a Alta Cultura).

¿O que pensa da «Gazeta de Matemática»?

O desejo de transformação progressiva da *Gazeta de Matemática,* freqüentemente manifestado pela sua redacção, é conseqüência imediata do reconhecimento das deficiências que a revista ainda apresenta.

O conhecimento do que pensam os leitores — verdadeiramente interessados pela revista — é um elemento indispensável para acertadamente orientar essa transformação.

A redacção da *Gazeta de Matemática* estudará com todo o interêsse quaisquer sugestões que os leitores lhe apresentem. Por isso, agradece e aguarda que o leitor responda à pregunta *¿o que pensa da «Gazeta de Matemática?* e a complete, respondendo a outra *¿em que medida poderá colaborar na «Gazeta de Matemática?*

Referências

A Direcção da «Gazeta de Matemática» agradece muito reconhecida as referências feitas por: «Diário de Lisboa», «Diário de Notícias», «Jornal do Comércio e das Colónias», «Diário da Manhã», «O Século», «Jornal de Notícias», «Gazeta de Coimbra», «O Primeiro de Janeiro» e «Diário de Coimbra».

«Gazeta de Matemática», n.º 11

O n.º 11 da «*Gazeta de Matemática*» (Julho de 1942) será publicado nos primeiros dias de Maio próximo.

Êste número conterá o seguinte:

1) Pontos de matemática dos exames de aptidão às escolas superiores, relativos ao ano lectivo de 1940-41, e respectivas resoluções;
2) Pontos de exames finais das cadeiras de matemática das escolas superiores, relativos ao ano lectivo de 1940-41, e respectivas resoluções;
3) *Galileo e Newton,* por Bento Caraça. *H. Lebesgue,* por José Vicente Gonçalves. *Jean Perrin,* por Manuel Valadares. *O Cálculo da soma duma série,* por A. Sá da Costa. *Sôbre a maneira de estabelecer a fórmula de Taylor,* por J. Sebastião e Silva.

além das secções permanentes: *Pedagogia, Movimento matemático, Problemas propostos, Resoluções de problemas propostos em números anteriores,* etc.

COLABORADORES

António Monteiro, A. de Mira Fernandes, A. Quintanilha, A. Sá da Costa, Bento Caraça, Hugo Ribeiro, Jaime Rios de Sousa, José Sebastião e Silva, José Silva Paulo, L. W. Stevens, Manuel Valadares, Manuel Zaluar, Ruy Luís Gomes

CEDERAM PONTOS OU RESOLUÇÕES

A. A. Ferreira de Macedo, A. Cortesão Pais, A. de Mira Fernandes, A. Sá da Costa, Bento Caraça, G. Ramos de Castro, Hugo Ribeiro, J. Rios de Sousa, J. F. Ramos e Costa, J. Vicente Gonçalves, J. Calado, J. César Oom, J. Pais Morais, M. Esparteiro, M. Gonçalves Miranda, Madureira e Sousa, Maria do Pilar Ribeiro, M. Zaluar, Pinto de Almeida, R. Sarmento Beires, Vítor Hugo de Lemos, Virgílio Barroso

A PUBLICAR NOS PRÓXIMOS NÚMEROS

«H. Lebesgue» — J. Vicente Gonçalves. «Galileo e Newton» — Bento Caraça. «Jean Perrin» — Manuel Valadares. «O cálculo da soma duma série» — A. Sá da Costa. «Uma maneira de encarar o sistema de projecções de Monge» — Luís Passos. «Sôbre a maneira de estabelecer a fórmula de Taylor» — J. Sebastião e Silva. «Pequeno estudo da velocidade areolar escalar» — P. B. Braumann

COLABORARAM GRÁFICAMENTE NESTE NÚMERO

Ruben Soares e Álvaro Amadeu Domingues, compositores e Joaquim de Jesus Fidalgo, impressor

GAZETA DE MATEMÁTICA

A «Gazeta de Matemática» publica quatro números por ano, em Janeiro, Abril, Julho e Outubro. Cada número terá um mínimo de 16 páginas e o preço de Esc. 5$00.

Pontos de Exame. Uma das secções permanentes da «Gazeta de Matemática» é constituida pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exame de freqüência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuïção normal dêstes pontos, pelos diferentes números da «Gazeta de Matemática» é a seguinte: número de Janeiro — pontos do 1.º exame de freqüência; número de Abril — pontos do 2.º exame de freqüência; número de Julho — pontos de exames de aptidão e finais; número de Outubro — pontos de exames de aptidão e finais. Como já está dito, esta é a distribuïção normal dos referidos pontos, por conseqüência, cada um dêstes números poderá publicar e publicará, em geral, outros pontos além dos indicados.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da «Gazeta de Matemática» aceita assinaturas de quatro números, ao preço de Esc. 18$00, para o que bastará dar a indicação do nome, morada, local da cobrança e do número em que deve ter início. A assinatura será renovada automàticamente no seu têrmo, salvo aviso prévio em contrário. Para simplificar o trabalho de cobrança, tôdas as assinaturas serão acertadas de modo tal que passem a ter início com o número de Janeiro de cada ano, pelo que, a primeira cobrança, das assinaturas com início em qualquer outro número, será de Esc. 4$50, Esc. 9$00 ou Esc. 13$50, correspondendo a 1, 2 ou 3 números.

Números atrazados. Os números atrazados são vendidos ao preço de capa: N.º 1 Esc. 3$00, N.º 2 Esc. 3$00, N.º 3 Esc. 6$50, N.º 4 Esc. 3$00, N.º 5 Esc. 4$00, N.º 6 Esc. 4$00, N.º 7 Esc. 6$00, N.º 8 Esc. 4$00, N.º 9 Esc. 5$00.

Inscreva-se desde já como assinante da «Gazeta de Matemática»; assim, concorrerá para o futuro melhoramento da revista, que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial.