

## O Problema da Formiga

Quem for a Lisboa, à exposição *Matemática Viva* que está no Pavilhão do Conhecimento, encontra um problema cuja solução discutimos aqui, e que interessa a uma imaginária formiga que vive no seu imaginário mundo. Ponha-se o leitor na pele da formiga e resolva o problema. Pode depois testar a sua solução, voltando à exposição.

### 1. No quadro de uma exposição

No Pavilhão do Conhecimento – Ciência Viva, no Parque das Nações, em Lisboa, há uma exposição permanente chamada *Matemática Viva*. Nesta exposição existe um módulo que se chama “O Problema da Formiga”, onde está um prisma recto de base quadrada (ver a fotografia em baixo), relativamente ao qual se põe o seguinte problema:

*“A superfície do bloco de madeira mostrado na fotografia é ‘o mundo’ onde vive uma formiga imaginária, que quando se desloca entre dois pontos quaisquer escolhe sempre, de entre todos os caminhos possíveis, o mais curto.*

*Uma ponta do fio está presa junto de um dos vértices – A – da base do paralelepípedo. Tente, com a ajuda do fio e para vários pares de pontos, encontrar os caminhos mais curtos, unindo os dois pontos de cada par. Descubra, em particular, um caminho mais curto, unindo o vértice – P – mais afastado de A e verifique, com a ajuda do fio, se a sua resposta está correcta. Para isso, comece por apertar com os dedos o fio (esticado) junto ao ponto P; se a sua resposta estiver correcta, deve poder chegar com esse bocado de fio a todos os outros pontos da superfície (porque estão mais perto de A)”.*

A exposição foi organizada pela Associação Atractor – Matemática Interactiva, que mantém uma página muito interessante na Internet. Em particular, o leitor pode encontrar quer o texto acima transcrito quer a fotografia em <http://www.atractor.pt/matviva/geral/PF/PF.html>.

Tive ocasião de resolver este problema, e apresentei a sua solução (em conjunto com um grupo de professores estagiários) de diferentes modos, incluindo um artigo [1] e um texto interactivo na própria página do Atractor – em <http://www.atractor.pt/matviva/geral/formiga/formi2/frames.html>.

Vou tornar a expor esta solução aqui brevemente, antes de expor também, pelo menos parcialmente, a solução de um outro problema que me foi proposto pelo Professor Arala Chaves (a quem agradeço aqui publicamente), membro da direcção da Associação Atractor. O que me foi proposto foi que estudasse analogamente o que aconteceria com outros “mundos da formiga”. Considerarei então o mesmo problema, tomando outros prismas de base poligonal regular em lugar do prisma de base quadrada representado na exposição e, posteriormente, tomando cilindros no mesmo lugar. Aqui exponho então, também brevemente, as soluções que encontrei para estes novos problemas.

Note-se que estas soluções utilizam o facto de a altura dos prismas ser muito superior às arestas das bases, ou ao raio da base, no caso do cilindro. Para unificar os diversos casos, suponho que todos os prismas estão inscritos



num cilindro cuja altura é pelo menos três vezes o raio da base, e que quer o cilindro quer os prismas são rectos: considerando que a sua base é horizontal, as geratrizes do cilindro, assim como as arestas não horizontais dos prismas, são verticais.

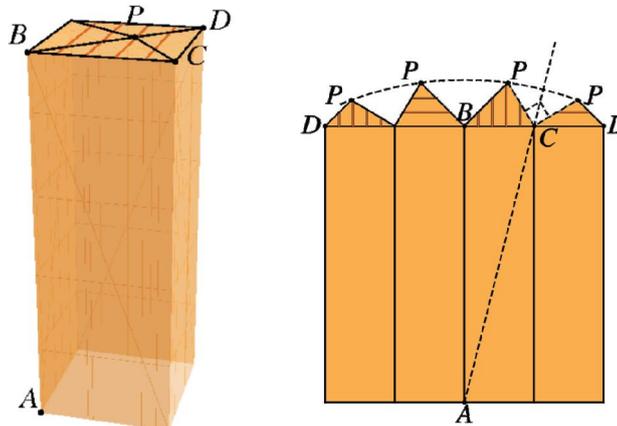


Figura 1: Planificação-solução do "Problema da Formiga"

Vamos chamar *geodésica* a um "caminho de formiga" – ou seja, a um caminho na superfície do prisma que liga dois pontos dados cujo comprimento é o menor possível entre os caminhos que ligam esses pontos. Interessamos conhecer o ponto  $P'$  mais afastado de  $A$  pelo caminho mais curto, isto é, o ponto  $P$  tal que uma geodésica de  $A$  a  $P$  é tão comprida quanto possível. Vou chamar  $d(A, X)$  ao comprimento de uma geodésica de  $A$  a  $X$  (é a distância no prisma de  $A$  a  $X$ ). Por vezes chama-se *antípoda* de  $A$  ao ponto  $P$  atrás referido, cuja distância a  $A$  é máxima. Para simplificar um pouco as coisas, vou chamar *prisma* ao que, em rigor, é a superfície do prisma, onde não incluo a base inferior (inacessível à formiga...).

Começemos então por estudar as geodésicas de  $A$  a outros pontos. No que se segue, vou considerar uma planificação especial a que chamo *planificação-solução* do problema, que é apresentada na figura 1. Para tornar mais fácil a sua interpretação, considero que existem na face superior do prisma riscas paralelas a duas arestas. O leitor conhece certamente outras planificações do prisma, em que este "é cortado" ao longo de uma aresta vertical, como aqui, mas em que a base superior,  $S$ , é apresentada inteira. A aresta de corte vertical neste caso é a aresta que contém o ponto  $D$  que está diametralmente oposto a  $A$ . Chamo  $B$  ao outro extremo da aresta vertical que contém  $A$ ,  $C$  ao vértice de  $S$  que está representado na planificação à direita de  $B$  (e à esquerda de  $D$ ) e  $A$  à face vertical que contém  $A$  e  $C$  (e  $B$ , naturalmente).

A solução é baseada nesta planificação, em que  $S$  está cortada em quatro partes triangulares, congruentes duas a duas. Note-se que a semi-recta  $AC$  forma um ângulo de  $45^\circ$  com as duas semi-rectas de origem  $C$  que delimitam os triângulos com vértice neste ponto.

A primeira ideia que está por detrás desta solução é a de que qualquer trajecto da formiga na superfície do prisma (curto ou comprido) pode ser seguido numa planificação qualquer, embora na planificação possa haver discontinuidades que advêm dos cortes, uma vez que os pontos dos segmentos por onde cortamos as arestas são representados, pelo menos, duas vezes na planificação (no caso do ponto  $P$  em cima, são mesmo quatro os representantes). Com esta ressalva, isto é, descontando as distâncias no plano entre duas representações dos mesmos pontos, os caminhos têm o mesmo comprimento no prisma e na planificação. Consequentemente, um segmento de recta numa planificação pode não corresponder a uma geodésica no prisma, mas se uma geodésica do prisma corresponder a um caminho contido numa planificação, esse caminho tem de ser um segmento de recta. Por exemplo, na planificação do prisma em que a face  $S$  é "levantada" sobre a aresta  $[BC]$ , os segmentos de

<sup>1</sup>Nos casos que aqui consideramos, este ponto é único. Mas note-se que podia não o ser – não é único noutras superfícies.

recta que unem o representante de  $D$  a  $A$  não têm o mesmo comprimento. O mais curto, o que corresponde à geodésica, é o que não atravessa a aresta  $[BC]$ . Portanto a geodésica está contida na superfície lateral do prisma. Em baixo, onde está assinalado **2.**, ilustra-se esta afirmação, justificando-a melhor.

O que a *planificação-solução* apresentada em cima tem de especial é precisamente a propriedade seguinte:

**Teorema 1.** *Uma geodésica de  $A$  a um ponto  $X$  qualquer do prisma corresponde na planificação-solução a um segmento de recta que liga o representante de  $A$  a um dado representante de  $X$ . Reciprocamente, qualquer segmento de recta a ligar o representante de  $A$  a um representante de um dado ponto  $X$  corresponde no prisma a uma geodésica de  $A$  a  $X$ .*

Com este teorema vai ser fácil resolver o “Problema da Formiga”. Para justificar o teorema, por sua vez, vou considerar três casos distintos. Considero sucessivamente: 1) que  $X \in A$ ; 2) que  $X$  está na outra face vertical que contém  $C$  e 3) que  $X \in S$ . Note-se que nos dois primeiros casos, na planificação só existe um representante de cada ponto  $X$ . No terceiro caso, já há pontos do prisma com dois representantes na planificação e há um ponto, o antípoda de  $A$ , como veremos, com quatro representantes. Vamos, em cada caso, pensar nos diversos caminhos que ligam  $A$  ao ponto considerado e ver que o mais curto, ou os mais curtos, conforme o caso, são exactamente os que correspondem na planificação-solução aos segmentos de recta que ligam o representante de  $A$  a um dos representantes de  $X$ . Usamos os dois lemas que se seguem.

**Lema 2.** *Dados dois pontos distintos do plano,  $P$  e  $Q$ , e dada  $r$ , a mediatriz do segmento de recta  $[PQ]$ , um ponto  $X$  está do mesmo lado de  $r$  que  $P$  se e só se dista de  $P$  menos que dista de  $Q$ .*

**Demonstração.** Creio que o leitor sabe que  $r$  é o lugar geométrico dos pontos à mesma distância de  $P$  e  $Q$  e parto deste facto. Isto é, para um ponto  $X$  do plano, designando por  $\overline{XP}$  o comprimento do segmento de recta  $[XP]$ .

$$\overline{XP} = \overline{XQ} \Leftrightarrow X \in r$$

Suponhamos que  $X$  está do mesmo lado de  $r$  que  $P$  e seja  $Y$  o ponto de intersecção de  $[XQ]$  com  $r$  (faça um desenho, caro leitor, por favor). Então

$$\begin{aligned} \overline{XQ} &= \overline{XY} + \overline{YQ} \\ &= \overline{XY} + \overline{YP} \quad (\text{porque } Y \in r) \\ &> \overline{XP} \end{aligned}$$

porque o lado de um triângulo é sempre menor do que a soma dos outros dois. Reciprocamente, consideremos que  $\overline{XQ} > \overline{XP}$ . Então, nem  $X$  está em  $r$ , já que não é verdade que  $\overline{XQ} = \overline{XP}$ , nem está do mesmo lado de  $r$  que  $Q$ , porque então seria  $\overline{XP} > \overline{XQ}$ , como acabámos de ver. Portanto, está do mesmo lado de  $r$  que  $P$ .

O segundo lema diz que “não se pode ir depressa por desvios”.

**Lema 3.** *Se  $Y$  e  $Z$  estão numa geodésica  $g$  que liga  $A$  a  $X$ , a parte de  $g$  entre  $Y$  e  $Z$  é também uma geodésica a ligar estes pontos.*

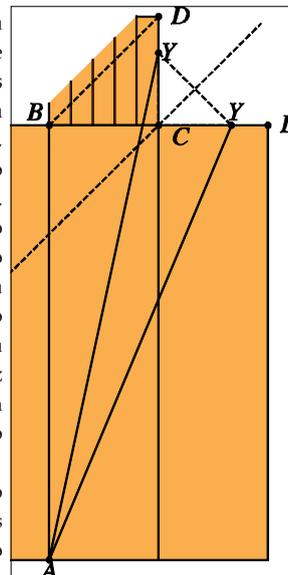
**Demonstração (sem as definições exactas...).** Suponhamos que, dos dois pontos, é o ponto  $Y$  que está mais próximo de  $A$  no caminho  $g$ , e seja  $g_1$  a parte de  $g$  entre  $A$  e  $Y$ ,  $g_2$  a parte entre  $Y$  e  $Z$  e  $g_3$  a parte entre  $Z$  e  $X$ .

Como o comprimento de  $g$ ,  $d(A, X)$  é a soma dos comprimentos de  $g_1$ , de  $g_2$  e de  $g_3$ , se existisse um caminho mais curto a ligar  $Y$  a  $Z$  e substituíssemos  $g_2$  por esse caminho, obteríamos um caminho mais curto de  $A$  a  $X$  do que a geodésica  $g$ . Mas isso não acontece por definição de geodésica.

Em presença destes lemas, tão fáceis, afinal, talvez o leitor se pergunte quantos lemas mais aí virão. Não, leitor, não vem mais nenhum, pelo menos para resolver este problema e o próximo, em que o mundo da formiga é um prisma hexagonal: o Teorema 1 é uma consequência bastante directa destes dois resultados, quando usados de certa maneira, que vamos ver caso a caso, utilizando a simetria da figura. É por causa da simetria que se consideram só os três casos referidos atrás, isto é, em que o ponto  $X$  pertence sucessivamente a uma das duas faces verticais que contém  $C$ , ou que está em  $S$ . Pela mesma razão, neste último caso admito que o ponto pertence ao triângulo  $[BCD]$ . A ideia por detrás disto é a de que se resolvem claramente de modo semelhante os restantes casos.

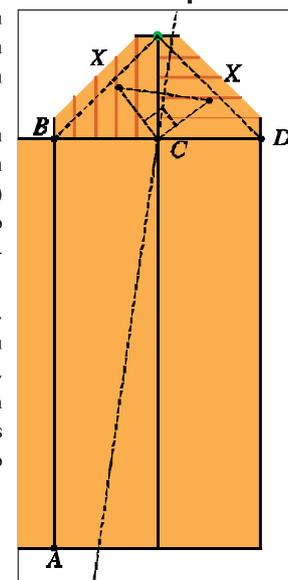
1. ( $X \in A$ ) Neste caso é bastante claro que não pode haver nenhum caminho no prisma entre os pontos  $A$  e  $X$  com menor comprimento do que o segmento de recta que une os seus representantes. Em particular, qualquer caminho que cruze alguma aresta do prisma é mais comprido do que este segmento.

2. ( $X$  está na face vertical que contém  $C$  diferente de  $A$ ) Aqui, o problema já se complica ligeiramente, porque não é imediato que um caminho que atravessa a aresta  $[BC]$ , cruza a base  $S$  e volta a atravessar a aresta  $[CD]$  não possa ser uma geodésica. Vamos supor por momentos que um tal caminho é realmente uma geodésica, e que  $Y$  é o ponto onde o caminho atravessa a aresta  $[CD]$ . Pelo Lema 3, então, a parte do caminho de  $A$  a  $Y$  também seria uma geodésica e, portanto, sendo tão curta quanto possível, corresponderia ao segmento de recta que une o representante de  $A$  ao representante de  $Y$  que está na aresta vertical da planificação ao lado. Mas então este segmento não podia ser mais comprido do que o segmento que liga o representante de  $A$  ao representante de  $Y$  que está à direita na mesma figura. Ora isso não acontece, já que  $r$ , a mediatriz do segmento que une os dois representantes (a tracejado na figura), separa  $A$  e o representante de  $X$  da direita do representante de  $X$  da esquerda, e isto significa que  $A$  está mais próximo do primeiro do que do segundo, pelo Lema 2. De facto,  $C$  está na mediatriz  $r$ , que está a  $45^\circ$  relativamente à horizontal (e à vertical). Portanto, essa mediatriz intersecta a recta  $AB$  num ponto à mesma distância de  $B$  que  $C$ . Mas nós assumimos que, em particular,  $AB > BC$ , pelo que  $A$  não está no mesmo lado da mediatriz que  $B$  e que o representante à esquerda de  $Y$ .



Então o caminho mais curto no prisma entre  $A$  e um ponto da superfície lateral está todo contido nesta superfície, já que é o que corresponde ao segmento de recta que une os pontos da planificação correspondentes. Em particular, o ponto pertencente à superfície lateral do prisma que está mais afastado de  $A$  é o ponto  $D$ ; por outro lado, é fácil ver que o ponto de  $S$  mais próximo de  $A$  é  $B$ .

3. ( $X \in S$ ) Aqui, não é difícil ver que uma geodésica de  $A$  a  $X$  só pode cruzar uma única aresta horizontal: em alguns casos, cruza a aresta  $[BC]$ , noutros, cruza a aresta  $[CD]$ . Para estudar os caminhos que atravessam a aresta  $[BC]$ , podemos utilizar a planificação em que a base  $S$  assenta inteira sobre esta aresta; podemos utilizar a planificação em que assenta inteira sobre a aresta  $[CD]$  para estudar os outros caminhos (num caso e noutra a geodésica vai corresponder a um segmento de recta). Então, para decidir quando é que é uma e quando é que é outra a aresta que é cruzada pela geodésica, represento na figura ao lado uma mistura das duas planificações, onde todos os pontos do triângulo  $[BCD]$  estão representados duas vezes. O ponto a verde, por exemplo, na planificação onde  $S$  está representada pelo quadrado à esquerda (inacabado, na figura) representa  $D$  e na planificação onde  $S$  está representada pelo quadrado à direita representa  $B$ . É importante notar que os representantes de  $X$  numa planificação e noutra diferem de uma rotação de  $90^\circ$  em torno de  $C$ .



A planificação-solução tem uma parte da primeira planificação e uma parte da segunda — a parte que é delimitada superiormente pela semi-recta de origem  $C$  que forma com a semi-recta  $AC$  um ângulo de  $45^\circ$  orientado no sentido directo (isto é, contrário ao dos ponteiros do relógio) e a parte delimitada pela que forma um ângulo de  $45^\circ$  orientado no sentido retrógrado (no sentido dos ponteiros do relógio), respectivamente. Vou chamar  $s_1$  à primeira destas semi-rectas e  $s_2$  à segunda.

Vejamos que isto confere com o que é afirmado no Teorema 1. No caso do ponto  $X$  da figura, por exemplo, o representante à esquerda é o que pertence à planificação-solução, porque está abaixo da semi-recta  $s_1$ , enquanto o representante à direita está acima da semi-recta  $s_2$ . De facto, ao rodarmos no sentido retrógrado o sistema constituído pelas duas semi-rectas com origem  $C$  que passam pelos representantes de  $X$  e pela mediatriz do segmento que liga estes representantes, a tracejado na figura ao lado, obtemos aquele que, na figura 1, é constituído pela recta  $AC$  e pelas semi-rectas  $s_1$  e  $s_2$ .

Mas note-se que isso acontece precisamente porque o representante de  $A$  está do mesmo lado da referida mediatriz que o de  $X$  da esquerda, isto é, pelo Lema 2, porque, dos dois representantes, é o da esquerda o que está mais próximo do ponto que representa  $A$ .

Os pontos que têm na figura 2 um representante à esquerda situado acima da semi-recta  $s_1$  têm o representante à direita colocado abaixo de  $s_2$ . É este, o da direita, o representante mais próximo do representante de  $A$ . Na planificação-solução estão representados unicamente pelo representante mais próximo, situado no triângulo colocado sobre a aresta  $[CD]$ . Finalmente, os pontos do prisma representados por elementos de  $s_1$  são os pontos representados por elementos de  $s_2$ , já que o ângulo formado por estas semi-rectas é de  $90^\circ$ . A cada segmento a ligar  $A$  a um destes representantes corresponde o segmento que liga  $A$  ao outro; os segmentos têm o mesmo comprimento, uma vez que  $A$  pertence à mediatriz do segmento que une os dois representantes – a recta  $AC$ . A cada um dos segmentos corresponde, portanto, uma geodésica.

Não seria muito difícil agora, com estes argumentos, obter uma verdadeira prova do Teorema 1. Em particular, é fácil ver que o ponto mais afastado de  $A$  na figura 1 corresponde a um dos vértices de um dos quatro triângulos. Portanto, ou é  $P$  ou é  $D$ . O Lema 2, aplicado aos representantes mais à direita de  $D$  e  $P$ , permite concluir que é  $P$ .

Se o leitor vive em Lisboa ou perto, ou tem ocasião de visitar Lisboa, sugiro-lhe que reserve algum tempo para visitar em especial a exposição *Matemática Viva*, que lhe asseguro valer a pena. Então detenha-se junto ao prisma e experimente a veracidade do que aqui é dito. Em particular, veja com os seus próprios olhos (e "com as mãos", uma a marcar o ponto, a outra a esticar o fio) que são quatro as geodésicas que ligam  $A$  a  $P$ , e que cada uma atravessa a sua aresta de  $S$ . Se é céptico, ou só metuculoso, e vai munido de uma fita métrica, aqui lhe digo como localizar  $P$  na diagonal  $[BD]$  de  $S$ : considere o ponto médio  $O$  da diagonal (o centro de  $S$ , portanto), considere o ponto  $P$  e o ponto  $C$ , e o triângulo  $t$  com estes três vértices. Vejamos que  $t$  é semelhante ao triângulo da face  $A$  de vértices  $B$ ,  $C$  e  $A$ . De facto, se imaginarmos que "levantamos" para a vertical a face  $S$  rodando-a  $90^\circ$  em torno da aresta  $[BC]$ , de modo a que fique no plano de  $A$ , e que depois a rodamos nesse plano  $45^\circ$  em torno de  $C$  no sentido retrógrado, vemos (agora com o espírito) que os lados de  $t$  ficam dois a dois paralelos aos deste triângulo. De facto, vemos que a semi-recta  $CP$  se vai sobrepor à semi-recta  $s$  de origem  $C$  que *não* contém  $A$  mas está contida na recta  $AC$ , que a diagonal  $[BD]$  fica horizontal e que o segmento  $[CO]$  fica vertical. É fácil seguir este raciocínio na figura 1, à direita. Então, para calcularmos a distância de  $B$  a  $P$  basta multiplicar o comprimento da diagonal de  $s$  pelo número  $k=1/2(1+a/h)$ , onde  $a$  é a aresta de  $S$  e  $h$  a altura do prisma.

Não lhe dou estes valores porque nunca fiz a experiência. Estou muito certo do que vai encontrar, sim, senhor leitor, porque isto é matemática...

## 2. Outros mundos da formiga (1): prismas hexagonais

Podemos aplicar o mesmo método noutros prismas [2], com bons resultados, como veremos. Aqui vou considerar com algum detalhe o que acontece num prisma recto de base hexagonal regular e mencionar brevemente o que se passa com os outros prismas com base em polígonos regulares com  $2n$  lados. Na verdade, pode aplicar-se o mesmo método no caso dos prismas construídos sobre polígonos com um número ímpar de lados, mas a notação complica-se um pouco.

Na figura 2 vê-se (parcialmente) uma planificação do prisma de base hexagonal que tem as propriedades descritas no Teorema 1. Vou chamar de novo  $S$  à face horizontal (hexagonal, agora),  $B$  ao vértice de  $S$  que está sobre  $A$  e  $D$  ao vértice que está diametralmente oposto a  $A$ . Chamo agora  $C_1$  e  $C_2$  aos dois vértices consecutivos intermédios, contados a partir de  $B$ .

Começo por desenhar um rectângulo  $R$  com as dimensões  $6$  por  $h$  ( $6$  é o perímetro do hexágono). Chamemos  $A$  ao ponto médio da base inferior e  $B$  ao ponto médio da base superior, uma vez que vão ser os únicos representantes destes pontos do prisma. Dividindo uma metade da base superior, a da direita, por exemplo, em três segmentos iguais, encontramos  $C_1$  e  $C_2$ .

A seguir, desenho três segmentos:  $d_1$ , o segmento correspondente à diagonal  $[BD]$  do prisma (que forma um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal),  $d_2$ , o segmento que se obtém rodando  $d_1$  em torno de  $C_1$  num ângulo igual, no

sentido retrógrado, e  $d_3$ , o segmento que se obtém rodando  $d_2$  em torno de  $C_2$  de novo num ângulo de  $60^\circ$  e de novo no mesmo sentido. Isto está representado na figura 2. Intersecto agora  $d_1$  com a semi-recta de origem  $C_1$  que forma com a semi-recta  $AC_1$  um ângulo a amplitude de  $30^\circ$ , no sentido directo, e intersecto  $d_2$  com a semi-recta que forma um ângulo de amplitude igual, mas no sentido retrógrado. Encontrei assim dois representantes de um ponto  $P_1$ . Depois, intersecto  $d_2$  com a semi-recta de origem  $C_2$  que forma com a semi-recta  $AC_2$  um ângulo igual no sentido directo e, finalmente, intersecto  $d_3$  com a semi-recta de origem  $C_2$  que forma com  $AC_2$  um ângulo igual, no outro sentido, assim encontrando dois representantes de um outro ponto,  $P_2$ .

Procedendo à esquerda da recta  $AB$  como ao espelho, determinam-se todos os pontos necessários para construir a planificação mostrada parcialmente na figura 2.

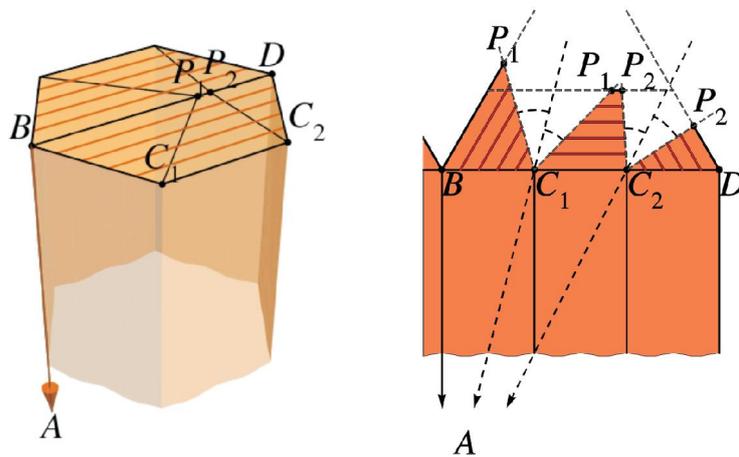


Figura 2: Planificação-solução do "Problema da Formiga" – que vive num prisma hexagonal

Para vermos que os pontos do rectângulo  $R$  distam do ponto  $A$  do plano o mesmo que os pontos que representam distam do ponto  $A$  do prisma, vou, em lugar de repetir integralmente o raciocínio de trás, limitar-me a explicar a figura ao lado, em que se vêem três representantes de um ponto dado de uma das arestas de  $S$  e as mediatrizes  $r_1$  e  $r_2$  dos segmentos com extremidade nestes representantes, dois a dois, sucessivamente, da esquerda para a direita. Pretendo ver através do Lema 2 que o primeiro representante está mais afastado de  $A$  do que o segundo, e este do que o terceiro. Para esse efeito, noto, primeiro, que o declive de  $r_1$  é menor ou igual a

$\text{tg}(90^\circ - \frac{90^\circ}{3}) = \sqrt{3}$ , altura do hexágono (seria igual se  $P$  fosse o vértice  $D$ ), o que significa que a

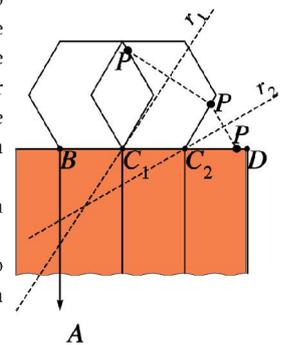
distância a  $B$  do ponto de intersecção de  $r_1$  com  $AB$  é menor ou igual a  $\sqrt{3}$ . Em seguida, noto que o declive de  $r_2$  é  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Isto significa que o ponto  $A$  está abaixo de ambas as rectas e permite tirar a

conclusão enunciada atrás.

Falta agora ver que  $A$  está mais próximo de  $B$  do que de  $P_1$ , de  $P_1$  do que de  $P_2$  e, finalmente, de  $D$  do que de  $P_2$ . Fica o leitor convidado a explicar isto, usando o Lema 2 na figura 2.

Portanto, o ponto do prisma mais afastado de  $A$  é  $P_2$  – mas desconhecemos se a formiga estará informada disto.

Na verdade, o problema não se pode considerar resolvido, porque estamos a presumir um facto que precisa de ser "confirmado": temos de ver que, de facto, ao efectuarmos a construção de trás, na diagonal  $[BD]$  obtemos



a sucessão de pontos, por esta ordem,  $B, P_1, P_2$  e finalmente  $D$ . Ao leitor interessado em fazer isto por ele próprio, agradeço e dou algumas sugestões para continuar. Ao outro, agradeço também, e convido-o a passar já à próxima secção, que acho que o vai interessar.

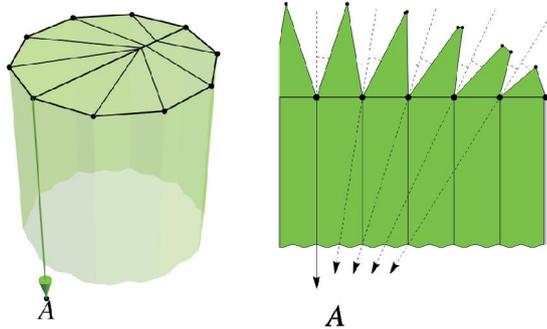


Figura 3: Planificação-solução do "Problema da Formiga" – num prisma dodecagonal

Simpático leitor:

Eu não encontrei nenhum argumento "sintético" (isto é, "não-analítico", no sentido de não precisar de coordenadas) para provar isto. Eis o que fiz e o que o convido a refazer:

Com base nos declives das rectas  $AC_1$  e  $AC_2$ , calculei o declive da recta que une  $C_1$  ao representante da esquerda de  $P_1$  e o declive da recta que une  $C_2$  ao representante da direita de  $P_2$ . Calculei depois a ordenada destes representantes, colocando os eixos com origem em  $B$  de tal modo que  $D$  pertença ao semi-eixo positivo dos  $xx$  e  $A$  ao semi-eixo negativo dos  $yy$ . Subtraí essas ordenadas a  $\sqrt{3}$ , ordenada do representante de  $D$  sobre  $d_1$ , e assegurei-me de que dava um número positivo para  $h > 3$  (número que vem a ser o comprimento do segmento  $[P_1, P_2]$ ).

Se quer verificar os seus resultados pelos meus, eu notei que a recta  $AC_1$  tem declive  $h$  e que a recta  $AC_2$  tem declive  $\frac{h}{2}$ , e obtive que a recta que une  $C_1$  ao representante da esquerda de  $P_1$  e a recta que une  $C_2$  ao representante da direita de  $P_2$  têm declives dados por  $\frac{\sqrt{3}h+1}{\sqrt{3}-h}$  e  $\frac{\sqrt{3}h-2}{h+2\sqrt{3}}$ , respectivamente, que, conseqüentemente, as ordenadas do representante de  $P_1$  e do representante de  $P_2$  são  $\frac{3h+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}h-2}$  e  $\frac{3h-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}h+4}$ , respectivamente, o que, depois de subtraídas sucessivamente a  $\sqrt{3}$ , nos dá o valor final de  $\frac{3h-4\sqrt{3}}{h(3h+\sqrt{3})-2}$  para o comprimento do segmento  $[P_1, P_2]$ .

Já não o convido, leitor, a confirmar que situação análoga se obtém no caso dos prismas rectos de base em polígonos regulares com  $2n$  lados, porque acho que isso iria extravasar o alcance que quero que tenha este texto. Em duas palavras, fui capaz de mostrar [2], usando argumentos menos elementares à mistura, que se pode obter em cada caso uma planificação nas condições do Teorema 1 e que é do tipo da figura 3, um rectângulo encimado por "uma série de  $2n$  dentes", quatro triangulares e os restantes quadrangulares. Note-se que os ângulos marcados na figura, todos congruentes, vão ficando sucessivamente mais pequenos à medida que  $n$  cresce.

### 3. Outros mundos da formiga (2): o cilindro

Vamos agora ver alguns pormenores de um processo para encontrar num cilindro "alto" o ponto  $P$  mais afastado (sempre do ponto de vista de uma formiga que lá vivesse) de um ponto  $A$  da sua base. Como dissemos atrás, admitimos que o raio da base do cilindro é 1 e que a altura é  $h \geq 3$ .

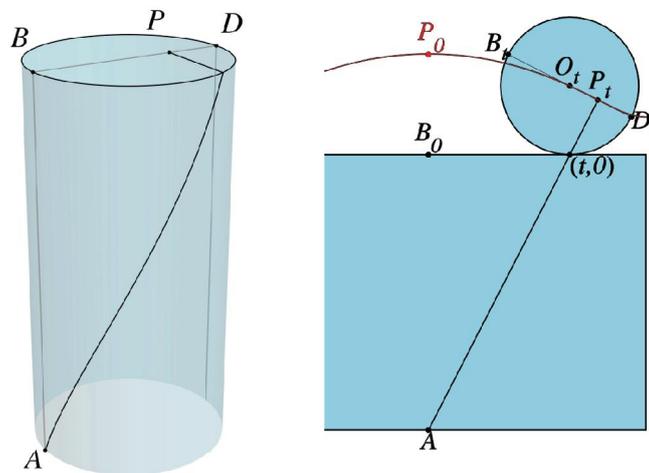


Figura 4: Ponto mais afastado de  $A$  num cilindro e respectiva geodésica

Pode provar-se que aqui não é possível construir uma planificação como as de trás. O que vamos fazer é trabalhar com muitas planificações (na verdade, um número infinito) ao mesmo tempo, "parando" em cada momento na planificação que mais convier aos nossos propósitos de então.

De facto, para cada ponto  $C$  da circunferência  $C$  que delimita a base superior,  $S$ , consideramos uma planificação,

obtida "levantando"  $S$  através de uma rotação de  $90^\circ$  (ou  $\frac{\pi}{2}$ , uma vez que vamos preferir esta unidade para medir

as amplitudes dos ângulos) em torno da recta horizontal  $r$  tangente a  $C$ , e depois "abrindo" a superfície lateral do cilindro pela aresta vertical que passa pelo ponto  $D$ , que está diametralmente oposto a  $A$ , até ficar sobre o plano que contém  $S$ , na sua nova posição.

O leitor pode, no entanto, pensar ao contrário: pode imaginar que "a tampa"  $S$  é levantada sobre  $B$ , o ponto da aresta superior que está na vertical de  $A$ , que é nesta posição que se corta e "espalma" a superfície lateral, e que depois se roda  $S$  sem a deixar deslizar sobre a aresta superior do rectângulo  $R$  em que a face lateral se transformou. Vou descrever nestes termos aquilo que concluí, estudando o problema com métodos um pouco menos elementares do que os de trás, que não vou tentar descrever.

- Para cada ponto situado no diâmetro  $[BD]$  suficientemente próximo de  $B$  (a uma distância inferior ou igual a  $\frac{h}{h-1}$ , mais precisamente) há uma única geodésica a ligar  $A$  a  $P$ . Esta geodésica é constituída pela geratriz  $[AB]$  e pelo segmento  $[BP]$ .

- Para cada ponto  $X$  que não esteja nessas condições, obtém-se uma geodésica se se levantar e rodar  $S$  conforme foi descrito atrás até que  $X$ ,  $A$  e o ponto de contacto estejam alinhados (como na figura 4, por exemplo). Mais precisamente, a geodésica é constituída pelas curvas que se obtêm reconstruindo o cilindro, a partir do segmento que une  $A$  ao ponto de contacto e do segmento que une este ponto a  $X$ , na face lateral e em  $S$ , respectivamente. Prova-se que para cada ponto só há uma "posição de alinhamento" (isto é, uma planificação onde ficam alinhados) e que nesta posição a recta  $AX$  intersecta o diâmetro  $[BD]$ , pelo que o ponto mais afastado está necessariamente neste diâmetro.

- O ponto  $P$  mais afastado, na sua posição de alinhamento, é o vértice de um ângulo recto formado pela recta  $AP$  com o diâmetro  $[BD]$ . Só existe um ponto em  $[BD]$  nestas condições.

A figura 4 mostra o ponto  $P$  mais afastado de  $A$ , a respectiva geodésica e a planificação correspondente à posição de alinhamento. A notação é baseada no processo de "levantar e rodar" atrás descrito: supõe-se que ao fim de um tempo  $t$ , que vai de  $0$  a  $\pi$ , o ponto de contacto vai de  $B$  a  $D$  com velocidade uniforme.  $B_t$  é a posição de  $B$  no instante  $t$ ,  $P_t$  a de  $P$ , etc. Portanto, em particular,  $P_0$  é a posição inicial de  $P$ .

Na figura, o diâmetro  $[B, D]$  forma com a vertical um ângulo de  $(\pi-t)$ rad, pelo que a recta  $AP_t$  forma com a horizontal um ângulo com a mesma amplitude. Podemos, assim, calcular o valor de  $\overline{B_0P_0} = \overline{B_tP_t}$ ; o ponto  $O_t$ , o ponto  $P_t$  e o ponto de coordenadas  $(t, 0)$  constituem os vértices um triângulo rectângulo semelhante ao triângulo cujos vértices são o ponto de coordenadas  $(t, 0)$ , o ponto  $B_0$  e o ponto  $A$ . Então  $t$  é a solução da equação

$$x \operatorname{sen}(\pi-x) = h \cos(\pi-x) \left( t > \frac{\pi}{2} \right) \text{ e } \overline{B_0P_0} = \cos(\pi-x).$$

É interessante notar que o caminho percorrido por  $B_t$  (ou por  $D_t$ ) quando  $t$  percorre os valores de  $0$  a  $\pi$  consiste em parte numa curva que creio que o leitor conhece, uma *ciclóide*. Os pontos que não estão em  $C$  percorrem o que se chama uma *ciclóide curta*, à excepção de  $O$ , que percorre um segmento de recta paralelo às bases de  $R$ .

Pode provar-se em particular que o ponto  $P_t$  da figura 4 é o ponto da "ciclóide curta de  $P$ " mais próximo de  $A$ . Isto, entre muitas outras coisas, é feito num trabalho muito interessante do Prof. Eduardo Marques de Sá, da Universidade de Coimbra [3], dedicado a estudar os pontos mais afastados de um ponto dado e as geodésicas em cilindros quaisquer, isto é, com uma altura superior ou não a três vezes o raio da base. É um trabalho feito com grande fôlego, com grande saber, em que vemos aparecer, por exemplo, uma outra ciclóide, cujo estudo das propriedades é um auxiliar precioso no estudo das propriedades do ponto que se procura, em função da altura do cilindro.

Não vou tentar expor esse trabalho, que talvez pertença a um mundo um pouco diferente daquele por onde viajámos. Deixo-o aqui, caro leitor, esperando que tenha gostado da viagem e que tenha aprendido alguma coisa com ela, o que é a melhor razão, afinal, para o turismo intelectual com que nos entretemos. **M**

#### Referências:

[1] Ferreira, D., Gageiro, C., Oliveira, A. Guedes de, Pereira, J., e Ribeiro, C., (2002). "Acerca de um Problema Encontrado numa Exposição de Divulgação Matemática", *Matemática Universitária* (Sociedade Brasileira de Matemática), 33, 1-11.

[2] Oliveira, A. Guedes de, (2007). "Farthest Point on the Surface of a Regular Prism and of the Cylinder", documento de trabalho.

[3] Sá, E. Marques de, (2008). "On the Intrinsic Geometry of a Right Circular Cylinder", manuscrito, em preparação.

OCTOBER 1-3 @ UNIVERSIDADE DO MINHO, BRAGA

# 3<sup>rd</sup> Iberian Mathematical Meeting

[www.imm3.spm.pt](http://www.imm3.spm.pt) ..... [imm10@math.uminho.pt](mailto:imm10@math.uminho.pt)

Organization:

