



## UM PERCURSO NA MATEMÁTICA RECREATIVA

Na passagem de testemunho do professor Jorge Nuno Silva, aproveito esta minha primeira contribuição com a *Gazeta* para mostrar o meu percurso na área da Matemática Recreativa, dando especial ênfase a contextos pouco usuais nesta área como são os comboios e o futebol!



HÉLDER PINTO  
Instituto Piaget,  
RECI e CIDMA-UA  
[helder.pinto@piaget.pt](mailto:helder.pinto@piaget.pt)

O meu nome é Helder Pinto, sou docente no Instituto Piaget e investigador na RECI e no CIDMA-UA, e fiquei com a responsabilidade de substituir o professor Jorge Nuno Silva na secção Recreio da nossa *Gazeta de Matemática*. Dada a gigantesca empreitada que me foi incumbida, tomo a liberdade de me apresentar aos leitores, para que conheçam o meu trajeto até ter sido convidado para esta tarefa.

Durante o meu percurso académico, percorri várias universidades portuguesas (licenciatura na Universidade do Porto, mestrado na Universidade de Coimbra e doutoramento na Universidade de Lisboa), tendo despertado desde cedo o meu interesse pela área da Matemática Recreativa, em particular, no Clube de Matemática da Escola Dr. Manuel Gomes de Almeida (Espinho), que eu e os meus colegas de estágio dinamizámos em 2004. Entre 2004 e 2007 fui bolseiro da Fundação Calouste Gulbenkian na Associação Atractor<sup>1</sup>.

Desde então, e em paralelo ao meu percurso na área da História da Matemática (área em que me doutorei em 2013, sob orientação do professor Luís Saraiva, e na qual colaborei ativamente no grupo *History and Pedagogy of Mathematics* (<http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/contact.htm>), nunca deixei de procurar problemas e desafios que possam ter um interesse extra em relação às tarefas matemáticas rotineiras. Uma outra característica que procuro num bom problema recreativo é que o seu enunciado seja entendível

por todos e que não seja preciso saber matemática para o compreender. Por exemplo, quando se pede “Determina as raízes do polinómio”, estão subjacentes vários conceitos na pergunta que não são do conhecimento de quem não estuda matemática formal... Às vezes, o problema não é só não saber a resposta, é nem sequer se perceber o que está a ser perguntado...

Recentemente, voltei a colaborar com um outro Clube da Matemática, desta vez o que é dinamizado *online* pela Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), que pode ser consultado aqui <https://clube.spm.pt/aaanumerosreais/>.

Por exemplo, no texto de abril de 2022, explico a razão de ser do estranho padrão de numeração que existe nos lugares dos comboios Intercidades em Portugal e que tanta confusão cria nos passageiros quando estão à procura do seu lugar. O leitor pode observar esse padrão na figura 1.

Deixo ao leitor o desafio de compreender/explicar como funciona este padrão, alertando para o facto de que o mesmo tem a sua justificação não só na matemática, mas também na história da evolução dos comboios...

Aliás, aproveito este espaço para agradecer à SPM ter-me ajudado no meu percurso, ao publicar, em 2010, com prefácio do professor Jorge Picado de Coimbra, o meu livro *Matemática & Comboios* (fig. 2), a minha primeira grande publicação nesta área, em que apresento 100 desafios matemáticos, todos ligados à temática ferroviária (locomo-



Figura 1: Exemplo de numeração de lugares numa carruagem Intercidades.

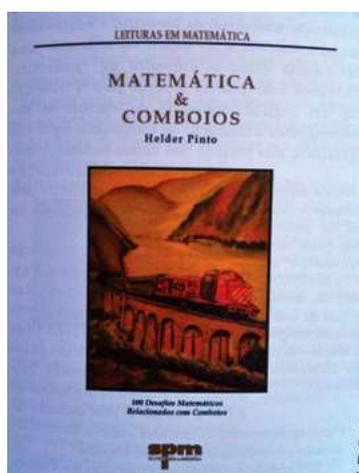


Figura 2: Capa do livro *Matemática & Comboios*, SPM, 2010.

tivas, carruagens, estações, linhas, passageiros, mercadorias, etc.).

Ainda a propósito desta obra, aproveito este espaço para agradecer também as palavras simpáticas do professor Filipe Oliveira:

“O grande defeito deste livro é o seu carácter extremamente... viciante. Esqueci-me, em casa do meu pai, de um número da *Gazeta de Matemática* em que se encontrava transcrito um dos problemas do Helder Pinto. Quando voltei, encontrei-o cercado por uma parafernália de gatafunhos, esquemas e pedaços de equações. “É pá, Filipe, tens de vir dar-me uma ajuda numa coisa que aqui estou a ler, acho que não tem solução...” foram as suas primeiras pa-

lavras, antes mesmo de um simples olá!”

[https://clube.spm.pt/analise\\_livro/](https://clube.spm.pt/analise_livro/)

Quanto ao meu interesse por comboios, não vou explicá-lo aqui, podendo o leitor obter alguns esclarecimentos na entrevista que dei na altura da publicação deste livro: [https://clube.spm.pt/aentrevista\\_com/](https://clube.spm.pt/aentrevista_com/).

Na sua maioria, estes desafios são bem conhecidos de todos, aos quais dei uma nova “roupagem ferroviária”. Deixo a seguir ao leitor dois desses desafios (o primeiro adaptado de um bem conhecido problema de Malba Tahan e o segundo de um problema de Perelman).

### Problema 31: O interposto de mercadorias

Num determinado interposto de mercadorias existem apenas 21 vagões (todos iguais), que estão carregados da seguinte maneira:

- 7 vagões estão carregados com dois contentores cada;
- 7 vagões estão carregados com um contentor cada;
- 7 vagões estão vazios.

Como a grua que colocava os contentores nos vagões se avariou, decidiu-se encerrar este interposto e transferir o seu conteúdo para três outros interpostos de mercadorias. Decidiu-se igualmente que os contentores (são todos iguais) e os vagões deviam ser distribuídos equitativamente pelos três interpostos, ou seja, cada um deles deverá receber o mesmo número de vagões e o mesmo número de

<sup>1</sup> Algumas das páginas que ajudei a construir podem ser consultadas aqui: [https://www.atractor.pt/mat/sem\\_palavras/index.html](https://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/index.html) e <https://www.atractor.pt/mat/conchas>.

contentores. Note-se que, como a grua está avariada, já não é possível transferir contentores de um vagão para outro.

Como distribuir os vagões de modo a obter-se o que se pretende?

### Problema 83: A ordem de serviço

Um maquinista foi destacado para levar um comboio de uma estação para outra. O comboio deverá viajar a uma velocidade constante (com aceleração desprezável) e não fazer nenhuma paragem entre as duas estações. Na sua ordem de serviço aparecem apenas as seguintes indicações:

Possíveis velocidades para o comboio	Hora de chegada à estação de destino
80 km/h	13.00
120 km/h	12.00

A que horas sairá este comboio da estação de partida? Qual é a distância entre as duas estações? Qual é a velocidade a que deverá seguir para chegar à estação de destino às 12.30?

Uma particularidade interessante deste último problema é o facto de se perguntarem tantas questões para um enunciado que, aparentemente, apresenta tão poucas informações iniciais.

Alguns anos mais tarde, igualmente com o apoio da SPM, virei-me, com a minha colega Cristina Silva, para uma temática muito mais entusiasmante e paixão nacional: o futebol! Assim, em 2018, a editora da Federação Portuguesa de Futebol publicou um livro com desafios matemáticos! (fig. 3)

Assim, quem for à loja online da FPF pode comprar camisolas da seleção, mas também um livro com pro-



Figura 3: Capa do livro *Contas de Cabeça*, FPF, 2018.

blemas de matemática... A ideia desta obra foi replicar o mesmo conceito: trazer problemas matematicamente interessantes para o contexto do futebol, que tanto entusiasmo costuma gerar no nosso país.

A apresentação decorreu na Cidade do Futebol da FPF, no dia do Pi (14 de março), contando com a presença do então presidente da SPM (Jorge Buescu) e do ministro da Educação da altura (Tiago Brandão Rodrigues) (fig. 4).

De seguida, deixo aos nossos leitores três exemplos de desafios deste livro:

### 28. CAN 2000

A Taça das Nações Africanas (CAN) de futebol de 2000 foi uma organização conjunta entre o Gana e a Nigéria. A classificação do Grupo A (GM – Golos marcados; GS



Figura 4: Apresentação do livro *Contas de Cabeça*. (Crédito: André Sanano/FPF)

– Golos sofridos) foi bastante peculiar e pode ser observada a seguir.

Grupo A	GM	GS	Pontos
1. Camarões	4	2	4
2. Gana	3	3	4
3. Costa do Marfim	3	4	4
4. Togo	2	3	4

Todas as seleções deste grupo acabaram com a mesma pontuação, tendo sido necessário recorrer à diferença de golos para o desempate.

Sabendo que houve golos em todos os jogos e que os dois primeiros classificados empataram entre si, qual o resultado dos seis jogos disputados neste grupo (recorde-se que jogaram todos contra todos uma única vez)?

#### 40. Os marcadores de golos

No final de um campeonato, os golos marcados por uma equipa de futebol estavam assim distribuídos:

-Arquimedes marcou metade dos golos da equipa mais meio golo!

-Euclides marcou um terço dos restantes golos, mais um terço de um golo!

-Tales marcou um quarto dos restantes golos, mais um quarto de um golo!

-Descartes marcou um quinto dos restantes golos, mais um quinto de um golo!

-Outros 11 jogadores marcaram os restantes golos da equipa (um golo cada um).

Quantos golos marcou esta equipa de futebol? Quantos golos marcou cada um dos seus quatro melhores marcadores?

(Como se pode marcar *meio golo*? E um *terço de golo*?)

#### 43. A venda de jogadores

Um clube colocou à venda seis jogadores pelos valores indicados na tabela seguinte.

Jogador	Valor (milhões de euros)
Antonic	15
Brunic	31
Carlovic	19
Dinic	20
Eugenic	16
Fabic	18

Contudo, o clube apenas conseguiu vender cinco desses jogadores a dois clubes. De um desses clubes recebeu o dobro do dinheiro que recebeu do outro.

Qual o jogador que não foi vendido pelo clube?

Mais tarde, em 2020, publicámos um outro livro similar, mas agora utilizando outros desportos que não apenas o futebol: *Atletas das Contas*. (fig. 5)

De seguida, deixo um problema deste livro, baseado num problema do conhecido autor Henry Dudeney:

#### Problema 39: Os jogadores de rãguebi

O Henrique é um fervoroso adepto de rãguebi, conhecendo pessoalmente alguns jogadores. No fim da última temporada, o Henrique comentava com um amigo:

- Todos os jogadores que eu conheço estão lesionados! Quatro têm o braço esquerdo partido e cinco têm o braço direito partido. E mais... apenas dois têm o braço direito são e apenas três têm o braço esquerdo são. Foi uma verdadeira hecatombe...

Quantos jogadores conhece o Henrique?

No final do ano passado, durante o Campeonato Mundial de Futebol, no Catar, eu e três colegas do Instituto Piaget apresentámos na FNAC um outro livro de futebol, novamente com o apoio da FPF, mas com um conceito diferente: *Vamos Marcar um Golo na Matemática?* (fig. 6) Desta vez, seguimos as novas aprendizagens essenciais de matemática do 5.º ano, e apresentámos exercícios com contexto de futebol, cobrindo todos os temas deste ano de escolaridade. A ideia é que esta obra possa ser utilizada em plena sala de aula sem exigir adaptações por parte dos professores, facilitando a sua implementação no terreno.

Um exemplo de um exercício apresentado neste livro, do capítulo “Frações, decimais e percentagens”:

10. Na Loja Oficial da FPF podes comprar várias peças de roupa da seleção portuguesa. Na tabela abaixo encontra o preço de alguns desses itens

Item	Preço Normal (€)	Preço Promocional (€)
Camisola	80,00	58,50
Camisola Júnior	70,00	46,90
Camisola Mulher	80,00	50,40

10.1. Ordena por ordem decrescente os valores dos preços promocionais.

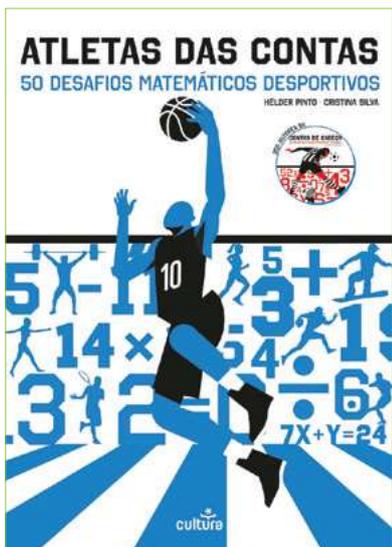


Figura 5: Capa do livro *Atletas das Contas*, Cultura Editora, 2020.



Figura 6: Apresentação do livro *Vamos Marcar um Golo na Matemática?*, FPF, 2022. (A apresentação desta obra decorreu conjuntamente com a apresentação do livro *101 Coisas que Deve Saber sobre Futebol* do jornalista Rui Miguel Tovar, à direita na foto.)

10.2. Arredonda às unidades cada um dos preços promocionais.

10.3. Comenta, sem efetuares cálculos, a veracidade da seguinte afirmação: “Todos os produtos estão com a mesma percentagem de desconto.”

10.4. Um adepto comprou dois destes produtos na loja da FPF gastando menos de €100. Quais os produtos que comprou?

Como pode observar, este problema não pretende ser desafiante (pelos menos, não no sentido usual nesta secção), mas sim servir como mais um apoio ao estudo da temática em causa.

Em jeito de conclusão, com todos estes trabalhos de Matemática noutros contextos, tentamos sempre entusiasmar, de algum modo, os estudantes e o público em geral, para a Matemática, disciplina tantas vezes, infelizmente, considerada difícil e aborrecida. Se, de facto, há conceitos e temas em Matemática que podemos concordar que são mais difíceis e trabalhosos em comparação com outras disciplinas, devemos sempre tentar mostrar uma outra face da Matemática que seja mais apelativa e entusiasmante.

Uma última observação para o facto de a matemática recreativa não necessitar de ser complicada para ser interessante, e o gosto por este tipo de atividades pode ser incutido desde os primeiros anos do primeiro ciclo. Deixovos a seguir um problema muito simples que me foi tra-

zido pelos meus filhos e que pode ser colocado a qualquer criança de tenra idade.

1. Como colocar seis cruces no jogo do galo sem ganhar o jogo?

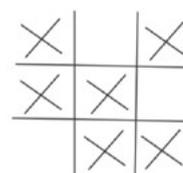


Figura 7: Uma não solução do problema anterior.

Mais três desafios simples. (O último é mais engraçado do que matemático...)

2. Efetua uma adição usando oito vezes o algarismo 8 de modo a que o resultado seja o número 1000.

3. Quanto pesa uma criança, se ela pesa mais dez quilos do que a metade do seu peso?

4. Com apenas um traço, transforma os quatro algarismos abaixo num número de apenas um algarismo!

0 1 1 0

Até ao próximo número do nosso Recreio!