

DE

## MATEMÁTICA

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

## APRESENTAÇÃO

*Gazeta de Matemática* inicia, com o presente número, a sua publicação.

Duas palavras sobre os seus objectivos e o seu programa.

Pretende ela ser um instrumento de trabalho e um guia para os estudantes de Matemática das Escolas Superiores portuguesas num campo onde elles encontram, porventura, as maiores dificuldades — o campo da preparação prática. O escasso tempo de que em geral dispõem as aulas práticas nas diferentes escolas, a falta de boas colecções de exercícios, adaptadas à orientação das várias cadeiras, são males que assoberbam o estudante e que a *Gazeta*, sem pretender anulá-los, procurará, no entanto, atenuar, na medida do possível.

Para isso, procederá à publicação de todos os pontos de exames de frequência e finais de todas as cadeiras de Matemática das Escolas Superiores, acompanhando-os dos resultados e, quando pareça conveniente, dos passos fundamentais da resolução ou, mesmo, da resolução completa. Assim, a colecção dos números da *Gazeta* constituirá um repositório de problemas e resoluções que orientará o estudante na sua preparação.

Outro problema que à *Gazeta* merecerá um cuidado especial é a situação dos centenares de candidatos à admissão das Escolas Superiores. Por motivos que não é oportuno analisar aqui, encontram-se elles quasi às cegas na escolha do caminho que hão-de imprimir à sua preparação para os exames de aptidão.

Mencionemos apenas que o critério dos seleccionadores, revelado na organização dos pontos dos exames

de aptidão, nem sempre está de acôrdo com o critério que preside à elaboração dos pontos dos exames de saída dos Liceus, critério este que, necessariamente, tem enorme influência na orientação do ensino liceal.

Pois bem, *Gazeta de Matemática* procederá à publicação dos pontos de matemática saídos nos exames de aptidão das várias Escolas, dará os esclarecimentos necessários para a sua resolução e assim contribuirá para orientar os candidatos.

Em cada número publicar-se-á também um artigo de carácter didáctico, sobre um assunto de matemáticas elementares ou superiores.

\*

\* \*

As pessoas que assumem o encargo duma publicação desta natureza sabem que ela vingará e terá condições de vida apenas na medida em que consiga interessar a massa dos estudantes a que se dirige; mas, para que esse interesse seja mais acentuado, ela necessita da colaboração dos seus leitores. Para isso, cada número conterá algumas *questões propostas* para os leitores resolverem. Nos números seguintes serão publicadas, com indicação dos nomes dos autores, as melhores soluções recebidas.

E assim, com a colaboração de todos, redactores e leitores, *Gazeta de Matemática* constituirá um organismo vivo, um instrumento eficiente de trabalho e, ao mesmo tempo, um Amigo, animado do desejo de *bem servir*. Este é, acima de todos, o seu objectivo fundamental.

## A NOÇÃO DE CONTINGENTE

Seja  $R^3$  o espaço euclideo a três dimensões reais. Recordemos a noção de *limite de uma sucessão de pontos* de  $R^3$ . Seja  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  uma tal sucessão; diz-se que ela tem por limite o ponto  $p$  quando a distância de  $p$  a  $p_n$  tende para zero quando  $n$  aumenta indefinidamente.

Seja  $A$  um conjunto de pontos de  $R^3$ . Como se sabe, diz-se que  $p$  é *ponto de acumulação* de  $A$ , se  $A$  contém, pelo menos, uma sucessão de pontos  $p_n \neq p$  que tem por limite o ponto  $p$ .

A noção de limite de uma sucessão pode definir-se para sucessões de rectas, curvas, funções, superfícies, etc. Consideremos uma sucessão de semi-rectas  $r_n$  que tenham por ori-

gem um ponto fixo  $p$  ( $r_n \equiv pp_n$ ). Diremos que esta sucessão tem por limite uma semi-recta  $r$  (de origem  $p$ ) se o ângulo das semi-rectas  $r$  e  $r_n$  tende para zero quando  $n$  aumenta indefinidamente. (Chamamos aqui ângulo de duas semi-rectas com a mesma origem, ao menor dos dois ângulos que essas duas semi-rectas determinam). De modo análogo ao anterior se podia agora definir a *semi-recta de acumulação* de um conjunto qualquer de semi-rectas (com a mesma origem).

Estas noções que acabamos de recordar são indispensáveis para definir a noção de semi-tangente a um conjunto  $A$  num dos seus pontos de acumulação. *Seja  $p$  um ponto de acumulação de  $A$ ; diremos que a semi-recta  $pq$  é uma*

semi-tangente a  $A$  no ponto  $p$  se existir uma sucessão  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  de pontos de  $A$  (sendo  $p_n \neq p$ ) tal que a sucessão de semi-rectas  $pp_1, pp_2, \dots, pp_n, \dots$  tenha por limite a semi-recta  $pq$ . Ao conjunto de tôdas as semi-tangentes a um conjunto  $A$  no mesmo ponto  $p$ , dá-se o nome de *contingente de  $A$  no ponto  $p$* . Esta designação é devida ao matemático francês Bouligand<sup>1</sup>. Se o contingente de  $A$  no ponto  $p$  se reduz a uma recta  $r$  diz-se que  $r$  é *tangente ao conjunto  $A$  no ponto  $p$* . Se o contingente de  $A$  no ponto  $p$  contém tôdas as semi-rectas de um plano que passa por  $p$ , e só essas, diz-se que esse plano é tangente a  $A$  no ponto  $p$ . A noção de contingente contém como casos particulares as noções de tangente a uma curva (plana ou torsa) e de plano tangente a uma superfície.

É possível definir para um conjunto de pontos de  $R^3$ , noções que generalizam as noções de plano osculador, círculo osculador, etc. Pode, portanto, estudar-se a geometria infinitesimal independentemente da teoria das funções.

A êste novo capítulo da matemática deu Bouligand o nome de Geometria Infinitesimal Directa, que pode considerar-se como uma ciência em plena formação. O seu aparecimento era indispensável. De há muito que se reconhecera a complicação que os métodos da Geometria Analítica traziam

<sup>1</sup> Bouligand — Introduction à la Géométrie Infinitésimale Directe.

para a resolução de certos problemas. Todos os estudantes conhecem as complicações que podem aparecer na resolução de certos problemas de geometria por métodos analíticos, quando não se escolhem *convenientemente* os eixos coordenados. Os eixos *mais convenientes* são aquêles que conduzem a cálculos mais simples, o que depende evidentemente do problema a resolver. E como não se conhecem regras gerais para a escolha dos eixos mais convenientes essa escolha constitue um dos *misteriosos quebra-cabeças* da Geometria Analítica. Para estudar, por exemplo, as propriedades de um triângulo, umas vezes convém escolher para eixos coordenados dois dos seus lados, outras vezes convém escolher a recta que contém um dos lados e a perpendicular no ponto médio, etc. No estudo das curvas torsas, o sistema de eixos mais *conveniente* pode mesmo variar de ponto para ponto (triedro de Frenet-Serret). Tôdas estas circunstâncias deixam perplexo o estudante desprevenido, perante os laboriosos cálculos que têm, às vezes, que fazer para demonstrar uma propriedade simples da Geometria Elemental, pelos métodos da Geometria Analítica. Compreende-se assim a importância da Geometria Infinitesimal Directa em que não existem eixos que compliquem a resolução dos problemas, nem hipóteses de continuidade sobre as funções (ou sobre as suas derivadas) que mascarem completamente a natureza geométrica das questões a estudar.

ANTÓNIO MONTEIRO

## COLABORAÇÃO

A *Gazeta de Matemática* pede aos Professores e Assistentes das cadeiras de Matemática das Escolas Superiores de Lisboa, Pôrto e Coimbra que colaborem com a *Gazeta* facultando-lhe os pontos de exames, das suas cadeiras, com a indicação dos respectivos resultados, sempre que fôr possível.

As respostas às questões propostas deverão ser enviadas a: *Gazeta de Matemática*, Faculdade de Ciências, Rua da Escola Politécnica — Lisboa.

A *Gazeta* será enviada gratuitamente aos colaboradores permanentes.

## “PRÊMIO NACIONAL DOUTOR FRANCISCO GOMES TEIXEIRA,,

Transcrevemos duma portaria do Ministério da Educação Nacional publicada no início do presente ano lectivo o seguinte:

«a) É criado o «Prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira», em homenagem ao insigne matemático contemporâneo, cuja obra didáctica e de investigação contribuiu poderosamente para o progresso das ciências exactas em Portugal, e cujas virtudes cívicas ficaram como modelo perene de bondade e amor pátrio, o qual se destina a galardoar, mediante concurso, o melhor trabalho de matemáticas puras elaborado em cada ano lectivo por um aluno de qualquer

estabelecimento de ensino universitário em que sejam professadas;

b) O prémio da importância de 2.500\$00, será anualmente concedido por proposta de um júri constituído pelo presidente da Junta Nacional da Educação e por dois professores de cada Faculdade de Ciências, sob a presidência do primeiro:

c) Os directores das três Faculdades, ouvidos os respectivos Conselhos, elaborarão, no prazo de noventa dias, para serem superiormente aprovadas, as normas técnicas e regulamentares a que hão-de obedecer o trabalho e o concurso a realizar já no corrente ano lectivo».

## EXAMES DE ADMISSÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Pontos modelos publicados no «Diário do Governo» (n.º 114) —  
1 série de 18 de Maio de 1939

### Cursos da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

1 — Um pai tem 27 anos e o seu filho 3. Quantos anos serão precisos para que o filho tenha  $\frac{1}{4}$  da idade do pai? Haverá lugar para a discussão a formar? Justifique a res-

posta. R: Representando por  $x$  o número de anos que são precisos, vem  $\frac{1}{4}(27 + x) = 3 + x$  donde  $x = 5$ .

2 — Ache a expressão do desenvolvimento de  $(1 + a)^m + (1 - a)^m$ .

3 — Determine  $m$  de maneira que a soma dos quadrados