

N. 0191

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXXI | Jul. 2020 | 4,20€

Astronomia e Matemática nos Novos Mundos para o Mundo

João Manuel Barros Fernandes

Conversa com...
Stephen Smale
Gonçalo Amaral

(Matemática+Medicina) \cap
Modelos Epidemiológicos
PT-MATHS-IN
Ruy Miguel Ribeiro e Paula Amaral

33.º
SEMINÁRIO NACIONAL
**HISTÓRIA
DA MATEMÁTICA**

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

30 E 31 OUTUBRO 2020
MUSEU DE LEIRIA
LEIRIA

**CONFERENCISTAS
CONVIDADOS**

UGO BALDINI
Università degli Studi di Padova

JOSÉ CHABAS
Universidade Pompeu Fabra de Barcelona

Encontro acreditado pelo Conselho Científico-Pedagógico
da Formação Contínua de Professores como 12 horas de
formação para os grupos 230 e 500



www.sites.ipleiria.pt/snhm33





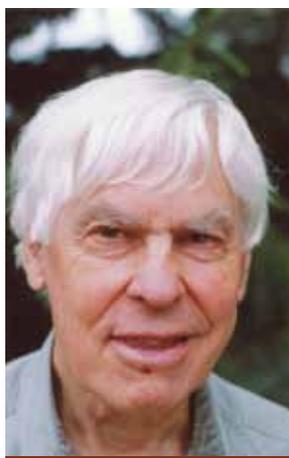
12 NÚMEROS DE MERSENNE E INVERSOS BINÁRIOS



18 APANHADOS NA REDE Katherine Johnson



03 ATRACTOR Dinâmica da Função Gama de Euler



42 CONVERSA COM... Stephen Smale

- 02 **EDITORIAL** | *Silvia Barbeiro*
- 03 **ATRATOR**
Dinâmica da Função Gama de Euler
- 07 **RECREIO** | *Jorge Nuno Silva*
Relógios
- 09 **NA LINHA DE FRENTE** | *Fabio Chalub*
Para Entender Este Ano Louco
- 12 **NÚMEROS DE MERSENNE E INVERSOS BINÁRIOS**
Guilherme A. Santos e Cristina Serpa
- 18 **APANHADOS NA REDE** | *José Carlos Santos*
Katherine Johnson
- 20 **PT-MATHS-IN** | *Ruy Miguel Ribeiro e Paula Amaral*
(Matemática+Medicina) \cap Modelos Epidemiológicos
- 26 **ASTRONOMIA E MATEMÁTICA NOS NOVOS MUNDOS PARA O MUNDO**
João Manuel de Morais Barros Fernandes
- 36 **CONVERSA COM...** | *Gonçalo Morais*
Stephen Smale
- 40 **BARTOON** | *Luis Afonso*
- 41 **HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA** | *Jorge Nuno Silva*
John Horton Conway 1937-2020
- 43 **MATEMÁTICA E LITERATURA** | *Nuno Camarneiro*
O Saber em Tempos de Cólera
- 44 **NOTÍCIAS**
- 51 **CARTAS DA DIREÇÃO** | *Paula Faria*
Quando a Matemática É Rainha!

UM MUNDO DIFERENTE

A matemática tem sido decisiva em muitos momentos difíceis da História. Estamos a viver um desses momentos.



SÍLVIA BARBEIRO
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

Entre o início da preparação deste número da *Gazeta de Matemática* e a hora em que vos escrevo, a nossa forma de estar no mundo alterou-se substancialmente, de tal modo que mais me parece ficção do que a vida real. Têm sido tempos muito conturbados, de adaptação e de resiliência.

Matemáticos de todo o mundo têm-se mobilizado ativamente no sentido de contribuírem, em colaboração com outros especialistas, para a compreensão da epidemia Covid-19 e para a mitigação dos seus efeitos, tendo em conta as especificidades de cada região ou país. Os exemplos são múltiplos e vão desde a formação de pequenas equipas nacionais à constituição de grandes consórcios internacionais. A matemática tem sido usada como ferramenta muito relevante no apoio à tomada de decisão informada por parte de muitos Governos no que diz respeito à alocação de recursos e à implementação de medidas de saúde, sociais e económicas.

Os autores da *Gazeta de Matemática* não perderam o alento e tornaram possível este número que é rico em matemática e não esquece o tema da pandemia. Sem revelar já tudo, levanto o véu sobre algumas páginas desta

edição. João Fernandes escreve de uma forma irresistível sobre a parceria feliz entre a astronomia e a matemática, levando-nos pela imensidão do Universo num tempo de confinamento. Na coluna Atrator também seguimos órbitas, só que estas são da função gama de Euler. O artigo termina com duas imagens lindíssimas e a promessa de mais explorações.

Os modelos epidemiológicos, muito comentados nos meios de comunicação social generalista, são desvendados em dois artigos: um com autoria de Fabio Chalub e o outro de Ruy Miguel Ribeiro e Paula Amaral. Os conceitos fundamentais surgem a par de equações diferenciais que são apresentadas com mestria e sem rodeios. O artigo da coluna PT-MATHS-IN contempla o resumo de um projeto financiado no âmbito de uma linha de apoio excecional à investigação sobre a Covid-19, onde a equipa de investigadores se propõe a usar modelos matemáticos para mitigar os efeitos da doença.

Já no final da revista, a espreitadela à secção Matemática e Literatura é demorada. Aí, Nuno Camarneiro traz-nos à memória bons livros e desafia-nos a refletir sobre o papel da ciência em tempos de pandemia.

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o *Atrator*, este é um espaço da responsabilidade do *Atrator*; relacionado com conteúdos interativos do seu site www.atrator.pt. Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para atrator@atrator.pt.

DINÂMICA DA FUNÇÃO GAMA DE EULER

A função gama, cuja origem está ligada à interpolação de funções e ao cálculo integral, tem sido essencial em inúmeros capítulos da História da Matemática. Esboçaremos aqui o seu perfil dinâmico.

Considere a seguinte tabela de valores da função fatorial:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
n!	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	...

Se inserirmos 1/2 na primeira linha entre 0 e 1, que valor devemos associar-lhe na segunda linha de modo a interpolar a função fatorial nesse valor intermédio? Há inúmeras maneiras de o fazer, por isso convém ser mais preciso na pergunta. No tempo de Euler, a quem a questão foi colocada, uma função era sinónimo de uma expressão analítica que deveria envolver as operações algébricas elementares, somas ou produtos infinitos, ou os operadores usuais de derivação ou integração. Procuramos, portanto, uma fórmula que, quando estimada nos números naturais, forneça por ordem os valores dos fatoriais, e que também atribua um valor a 1/2. Ainda assim, a resposta não é única, mas a de Euler, numa carta a Goldbach em 1729, foi inequívoca: $(1/2)! = \sqrt{\pi}/2$. O que significa e que importância tem esta resposta?

O problema prático de interpolação a partir da fórmula de recorrência dos fatoriais dos números naturais esteve na origem de uma função, hoje designada Γ , cuja definição Euler publicou num artigo de 1729 com o título (tradução a partir de [1]). "Sobre progressões transcenden-

tes cujo termo geral não pode ser expresso algebricamente." A função que Euler criou tem domínio \mathbb{R}^+ , vale 1 em 1 e satisfaz a equação

$$\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x) \quad \forall x > 0 \quad (1)$$

de onde se deduz a recorrência

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Não se trata, portanto, de um prolongamento da função fatorial mas de uma função cujo gráfico passa por todos os pontos $(n, (n - 1)!)$ com $n \in \mathbb{N}$. Para interpolarmos a função fatorial e juntarmos à tabela anterior o valor em 1/2, basta considerar a função

$$x \geq 0 \mapsto f(x) = \Gamma(x + 1)$$

que em 1/2 vale $f(1/2) = \Gamma(3/2)$. Note-se que, uma vez encontrada a função Γ , também $x \mapsto \Gamma(x) + 0,8 \sin(\pi x)$ e $x \mapsto \Gamma(x) (1 + 0,8 \sin(2\pi x))$ satisfazem a igualdade (2) - ver figura 6, no final do texto. A figura 7 mostra os gráficos dos logaritmos das três funções da figura 6. Sabe-se hoje, porém, que só pode existir uma função $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifique as três condições seguintes:

(a) $\varphi(x + 1) = x \varphi(x) \quad \forall x > 0$

(b) $\varphi(1) = 1$

(c) $\log \varphi$ é convexa.

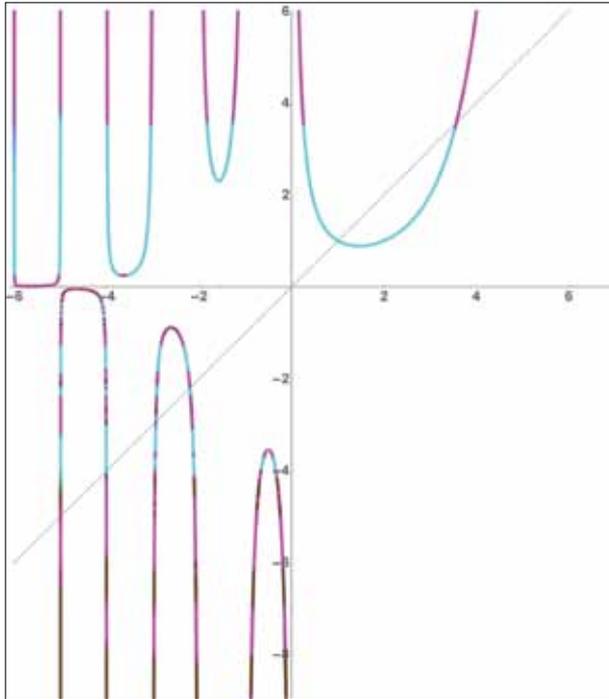


Figura 1.

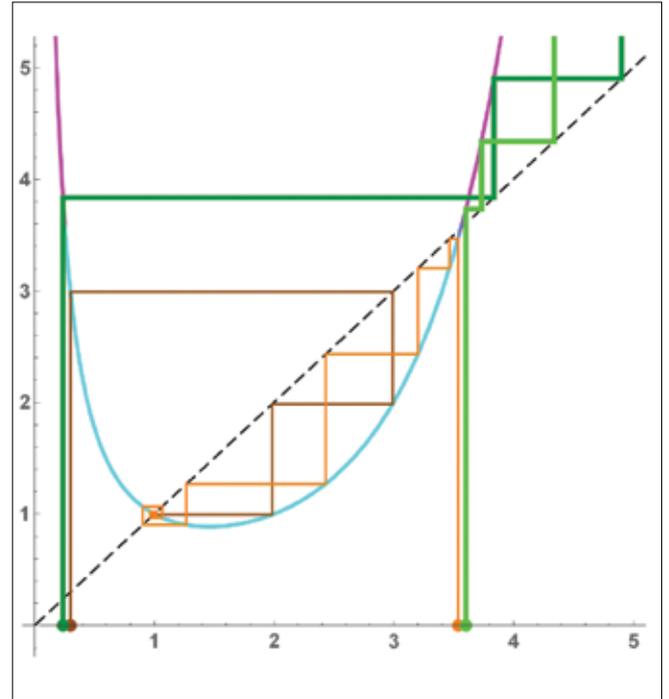


Figura 2.

Pode ler-se em [2] uma demonstração desta afirmação.

A propriedade (1) permite calcular a função Γ se se conhecerem os valores que toma em $]0, 1]$, uma vez que (1) implica que

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1) \cdots (x+1)x\Gamma(x) \quad \forall 0 < x \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Mas impede que possamos estendê-la de modo contínuo a 0, pois obteríamos $\Gamma(1) = 1 = 0 \times \Gamma(0) = 0$. Admite, todavia, um prolongamento a $\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^-$, e essa extensão, além de continuar a verificar (1), tem a seguinte relação com a função seno

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad \forall x \notin \mathbb{Z}$$

que é útil para o cálculo de imagens de Γ . Por exemplo, dela resulta que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ logo, usando (1), que $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$. A figura 1 mostra um esboço do gráfico de Γ e da sua interseção com a linha reta de equação $y = x$ (a tracejado).

No que se segue, analisaremos o comportamento assintótico das sucessões $(\Gamma^m(x))_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, onde $\Gamma^1 = \Gamma$ e $\Gamma^{m+1} = \Gamma \circ \Gamma^m$, para os valores de x em que estas sucessões (também chamadas *órbitas* de Γ) estejam bem definidas.

Comecemos pelas órbitas mais simples, os pontos fixos de Γ . A figura 1 sugere que existe um conjunto numerável de pontos fixos, dois em \mathbb{R}^+ e mais dois em cada intervalo $] -2k - 1, -2k[$, $k \in \mathbb{N}$. Observe-se, porém, que os pontos fixos 1 e $\beta \in]3, 4[$ têm uma natureza distinta. O ponto fixo 1 é atrator pois sabe-se que a derivada $\Gamma'(1) = -\gamma$, onde $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \log n) \sim 0,6$; pelo contrário, β é repulsor, com $\Gamma'(\beta) > 4$. A figura 2 mostra parte de quatro órbitas, duas delas atraídas para 1.

A dinâmica de Γ em \mathbb{R}^+ é fácil de descrever. Se x pertence ao intervalo $]\alpha, \beta[$, onde α é o único real positivo de $]0, 1[$ cuja imagem por Γ é β , então a órbita de x converge para 1. Pelo contrário, se $x > 0$ está no complementar do intervalo $[\alpha, \beta]$, então a sua órbita tende para $+\infty$. Uma aproximação da bacia de atração de 1 (definida como o conjunto de pontos cujas órbitas convergem para 1) é dada pelas abscissas dos pontos do gráfico de Γ coloridos a azul. Para as abscissas dos pontos neste gráfico coloridos a roxo ou a castanho, essas sucessões ou não estão definidas (é o caso de $x_0 \in]-3, -2[$ tal que $\Gamma(x_0) = -2$), ou convergem para o ponto fixo β (como a órbita de β e as das suas infinitas pré-imagens por Γ), ou tendem para $+\infty$ (como acontece com $x_1 = 4$), ou têm outro comportamento que ainda precisamos de descobrir.

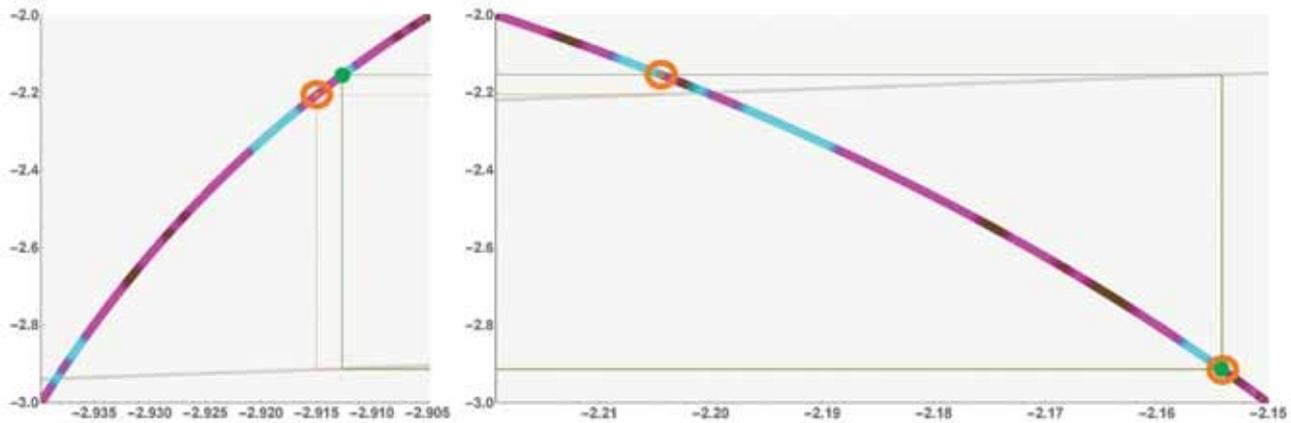


Figura 3.

A figura 1 parece indicar também que a dinâmica mais relevante da função Γ ocorre em $\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^-$. Interessam-nos os pontos de $\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^-$ cujas órbitas são limitadas e não passam por \mathbb{R}^+ . Terá Γ outros atratores além do ponto fixo? Analisemos, por exemplo, o que se passa no intervalo $] -3, -2[$. Aqui há dois pontos fixos (e só dois) que são repulsores, e dois intervalos disjuntos $I = [a_1, a_2]$ e $J = [b_1, b_2]$ tais que $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$, $\Gamma(a_1) = -3 = \Gamma(b_2)$, $\Gamma(a_2) = -2 = \Gamma(b_1)$, $\Gamma(I) = [-3, -2] = \Gamma(J)$ e as restrições de Γ a I e a J são homeomorfismos. Na figura 3 podem ver-se os intervalos I e J ampliados, os gráficos das restrições a $I \cup J$ de Γ e da função identidade, além de duas órbitas periódicas, uma de período 2 e outra de período 3.

O conjunto $\Lambda = \bigcap_{j=0}^{+\infty} \Gamma^{-j}(I \cup J)$, dos pontos de $I \cup J$ cujas órbitas não saem desta união, é não vazio (por ser interseção encaixada de compactos não vazios) e invariante pela dinâmica (isto é, $\Gamma(\Lambda) \subseteq \Lambda$). E nele há pontos periódicos (repulsores) de todos os períodos, que até formam um subconjunto denso. Vejamos porquê. Atribuíamos a cada ponto $x \in \Lambda$ uma sucessão $(\tau_n(x))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ que descreve o itinerário da órbita de x na partição $I \cup J$, definida por

$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mapsto \tau_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \Gamma^n(x) \in I \\ 1 & \text{se } \Gamma^n(x) \in J. \end{cases}$$

Seja Σ_2 o espaço das sucessões $(x_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tais que $x_n \in \{0, 1\}$ para todo o $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. A função $\mathcal{I}t : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$, que a cada $x \in \Lambda$ associa $(\tau_n(x))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, está bem definida porque $I \cap J = \emptyset$ e as órbitas de pon-

tos de Λ não saem de $I \cup J$. Além disso, o mínimo do valor absoluto da derivada de Γ em $I \cup J$ é maior do que 1, o que induz um afastamento por ação de Γ das condições iniciais em $I \cup J$ que estejam suficientemente perto, impedindo a existência de dois pontos distintos de Λ cujas órbitas tenham o mesmo itinerário na partição $I \cup J$. Com estas propriedades, pode provar-se que $\mathcal{I}t$ é uma bijeção e que, se em $I \cup J$ considerarmos a distância euclidiana e em Σ_2 a distância

$$d((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n},$$

então $\mathcal{I}t$ é um homeomorfismo. Note-se ainda que, para cada $x \in \Lambda$,

$$\tau_n(\Gamma|_{\Lambda}(x)) = \tau_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

isto é, $\mathcal{I}t \circ \Gamma|_{\Lambda} = \sigma \circ \mathcal{I}t$, onde $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ é a transformação $\sigma((x_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. Deste modo, a informação dinâmica que conhecemos sobre σ transfere-se para a restrição de Γ a Λ . Por exemplo, se z é um ponto periódico de período k de σ , então $\mathcal{I}t^{-1}(z)$ é periódico por $\Gamma|_{\Lambda}$ com igual período. Ora, é imediato construir pontos periódicos de período k por σ : basta considerar um bloco de k dígitos de $\{0, 1\}$ (e há 2^k escolhas de tais blocos) e repeti-lo indefinidamente para formar uma sucessão cuja órbita por σ é periódica de período k . E é fácil demonstrar que o conjunto de pontos periódicos de σ é denso em Σ_2 , propriedade que é levada pelo homeomorfismo $\mathcal{I}t^{-1}$ para os pontos periódicos de $\Gamma|_{\Lambda}$ em Λ .

Localizar com mais precisão essas órbitas periódicas de Λ não é, porém, tarefa elementar. O Atrator desenvolveu um módulo interativo (para a sua utilização,

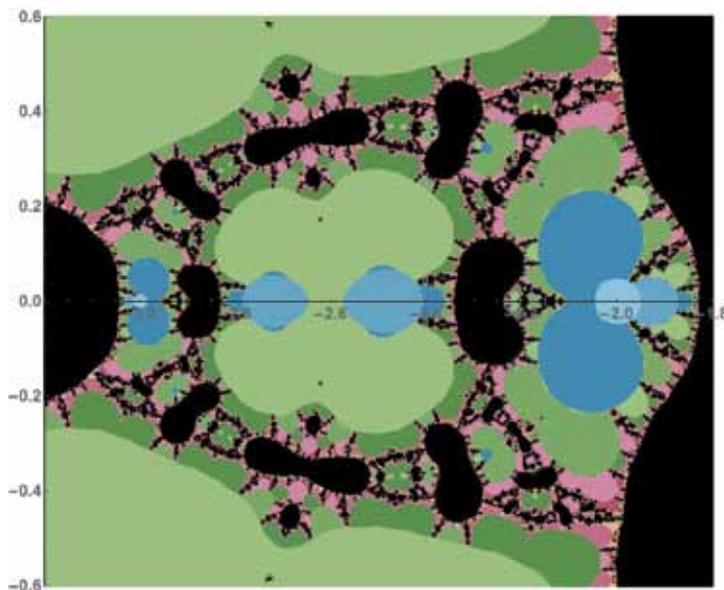


Figura 4.

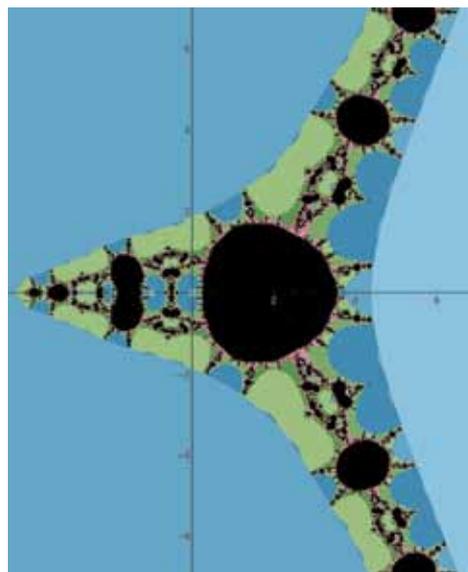


Figura 5.

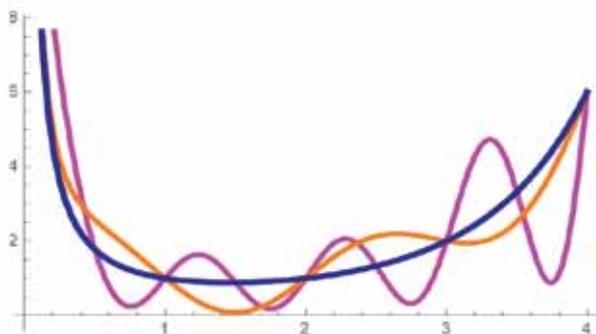


Figura 6.



Figura 7.

consulte-se [2]) com que obteve aproximações como as da figura 3. O recurso a uma extensão complexa da função Γ , que Gauss provou existir e que tem apenas polos em $\mathbb{Z}^- \times \{0\}$, permite ter uma ideia mais fiável da posição relativa de algumas órbitas. As figuras 4 e 5 mostram aproximações do conjunto de órbitas limitadas desta extensão complexa da função Γ em duas vizinhanças no plano de $]-3, -2[\times \{0\}$; a região escura corresponde aproximadamente a pontos na bacia de atração de $\{1\}$. Num próximo artigo voltaremos a estas imagens para explorarmos a informação que elas sugerem.

[1] L. Euler. *Opera Omnia*, I_{14} , 1-24

[2] https://www.atractor.pt/mat/dinamica_gamma



JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa

jnsilva@cal.berkeley.edu

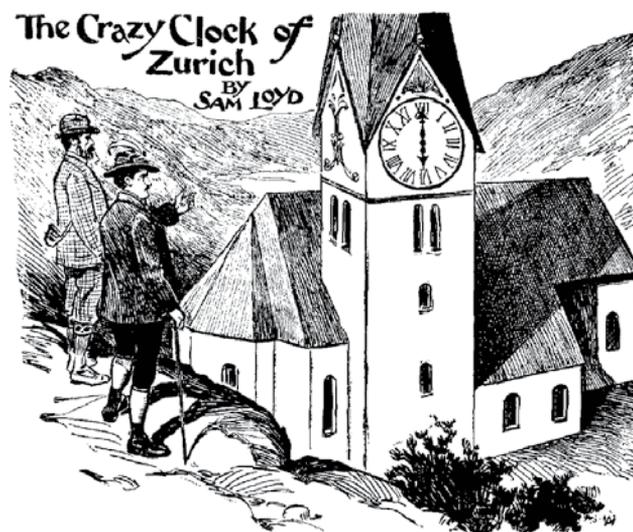
RELÓGIOS

Samuel Loyd (1841–1911) foi um grande divulgador de puzzles e problemas de matemática recreativa. Muito forte jogador de xadrez, criou também belíssimos e bem-humorados quebra-cabeças escaquísticos. A sua reputação está salpicada de acusações de apropriação de ideias de outros, mas as obras que nos deixou, nomeadamente a *Cyclopedia of 5000 Puzzles*, publicada em 1914 pelo seu filho, é uma fonte inesgotável de diversão.

Nesta altura, em que contemplamos a passagem do tempo de uma nova maneira, propomos algumas questões de Sam Loyd relativas a relógios...

1 É meio-dia, como marca este relógio de altíssima precisão. Os ponteiros, naturalmente, estão sobrepostos. A que horas estarão de novo sobrepostos?

2 São seis horas da manhã. Mas este relógio tem os ponteiros trocados: o mais longo aponta horas, o mais curto os minutos. Daqui a quanto tempo marcará a hora certa, como se os ponteiros estivessem montados corretamente?

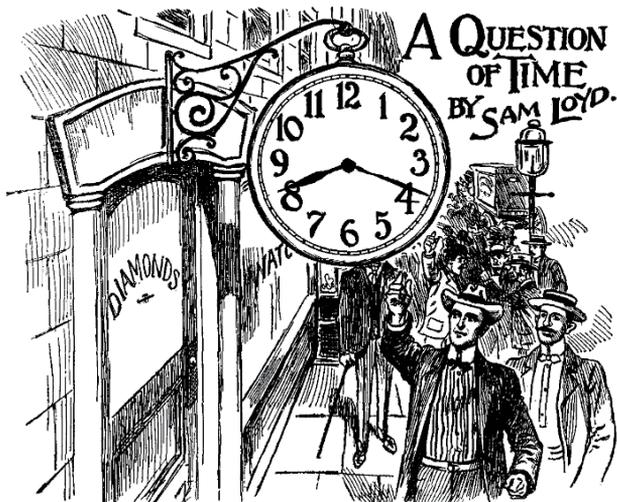


3. A bala disparada pelo assassino atingiu um relógio, mesmo no centro, parando o seu funcionamento. Os ponteiros das horas e dos minutos estavam alinhados, e assim ficaram para sempre, mas rodaram da sua posição. Como se vê, apontam para as 3 e as 9, o que não é uma posição válida para um relógio. Que horas eram quando a bala atingiu o relógio?

The Assassin's Bullet



4. Os ponteiros estão à mesma distância das 6 horas. Que horas são?



5. Este problema entra na sequência a pedido do nosso amigo e companheiro de muitas recreações (matemáticas, lúdicas e outras), Cesco Reale.

O relojoeiro cometeu o lapso de montar este relógio com os dois ponteiros iguais. Como se vê na figura, é fácil, muitas vezes, ler a hora certa. Neste caso, o relógio marca 5h, porque 12h25m não faz sentido, por o ponteiro vertical

estar a apontar diretamente para o 12 (às 12h 25m o ponteiro das horas não aponta diretamente para o 12). Se os ponteiros estiverem sobrepostos, também não há dificuldade em saber a hora certa, claro. A pergunta é: quantas posições ambíguas há, num espaço de 12 horas? Posições ambíguas dos ponteiros são configurações válidas em que não conseguimos deduzir a hora correta, por atribuições diferentes das horas e dos minutos aos ponteiros darem origem a leituras distintas.

Sobre a questão do número anterior (agradecemos as soluções submetidas pelos nossos fiéis leitores Luís Madureira e José Paulo Viana):

Escrevendo um natural n na forma $4k+i$, com $0 \leq i \leq 3$, o procedimento pedido ao voluntário gera sempre k . Portanto, o Mágico só tem de multiplicar k por 4 e somar i ,



sendo que este é completamente determinado pela sequência de eventuais arredondamentos, como a tabela resume

$i=0$	não há arredondamentos	Mágico soma 0
$i=1$	arredondamento na 1. ^a	Mágico soma 1
$i=2$	arredondamento na 2. ^a	Mágico soma 2
$i=3$	arredondamentos na 1. ^a e 2. ^a	Mágico soma 3



FABIO CHALUB
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

PARA ENTENDER ESTE ANO LOUCO

Muito já foi dito sobre epidemiologia matemática. Mesmo nesta coluna, diversas vezes escrevi sobre o modelo SIR. No entanto, o foco nunca foi na exploração dos detalhes matemáticos do modelo, mas sim na sua perspectiva histórica. Voltamos hoje ao assunto, mas desta vez vamos a isto: as equações, maestro!

Com o novo coronavírus, a epidemiologia entrou de cabeça na comunicação social. Temos todo o tipo de profissional, incluindo matemáticos, a analisar os números da pandemia e a tentar prever o futuro.

Eu, no entanto, prefiro adotar a máxima de "prognóstico só no fim do jogo". Para piorar a minha situação, este texto só será lido alguns meses depois de eu o escrever. Portanto, para quem quiser saber a evolução da Covid-19, uma leitura do jornal do dia será mais informativa do que as próximas linhas.

Este texto será, portanto, para dissecarmos um pouco o modelo SIR, estudarmos as suas limitações e generalizações e compreendermos alguns dos seus conceitos. Afinal, o distinto público da *Gazeta* pode ir mais além nas equações do que os leitores dos periódicos generalistas.

Começamos por deduzir o modelo. Consideramos que a população se divide em três grupos de pessoas: os Suscetíveis, os Infeciosos, e os Removidos. Esta última classe representa os indivíduos que foram removidos da dinâmica, seja porque após a cura gozam de imunidade, permanente ou temporária, ou porque morreram. A classe I indica quem está ativamente a transmitir a doença, independentemente do seu estado de saúde. Note que o que nos interessa ao modelar a epidemia é a influência na dinâmica de cada um, então podemos colocar no mesmo grupo quem já morreu e quem está plenamente

curado; por isto, a expressão *infetados* para a classe I não é correta. Se um infetado não mais transmitir, ele é removido; se ainda não transmitir, chamamos *exposto*, que não faz parte destes modelos mais simples. (No entanto, para a Covid-19, esta é uma classe importante, devido ao longo período de incubação do vírus.)

Finalmente, a primeira classe indica os indivíduos que podem transitar para a classe I caso sejam expostos ao patógeno. É neste grupo que estávamos todos nós em fins de 2019 para o SARS-Cov2.

Para construir o sistema de equações do modelo, vamos imaginar que a doença em questão produz imunidade permanente àqueles que se recuperam.

Pensem que todas as pessoas estão dispostas numa imensa superfície plana, andando ao calhas, por todo o lado. Quando chegam aos limites desta superfície, batem na parede, tal qual uma bola de ténis, e voltam para o interior do domínio. Depois de algum tempo, as pessoas estão *uniformemente distribuídas*. Isto significa que qualquer pequena região tem a mesma probabilidade de conter um indivíduo de um dado tipo que qualquer outra região da mesma área.

Num instante de tempo t , a população é caracterizada por três números: $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$, indicando a fração de indivíduos de cada tipo na população. O objetivo é perceber quantos indivíduos de cada tipo estarão presentes

na observação seguinte, no tempo $t + \Delta t$, onde Δt é um intervalo de tempo pequeno. Assim, $S(t + \Delta t)$ será dado pelo número de suscetíveis presentes no instante de tempo t , $S(t)$, menos o número de indivíduos suscetíveis que devido ao contacto com indivíduos da classe **I** passaram para esta nova classe (mais à frente consideraremos algumas variantes).

E quantos são estes? Considere um indivíduo **S** qualquer, chamado *focal*. Quando os indivíduos estão uniformemente distribuídos a probabilidade de que haja alguém da classe **I** a menos de, digamos, dois metros é proporcional à quantidade de indivíduos nesta classe e, em havendo tal pessoa, a probabilidade de esta vir a infectar o cidadão focal será proporcional ao tempo, pequeno, entre as duas observações. Assim

$$S(t + \Delta t) = S(t) [1 - \beta \Delta t I(t)] ,$$

onde $\beta > 0$ indica a taxa em que os contactos são convertidos em novas infeções.

Reorganizando os termos e fazendo $\Delta t \rightarrow 0$, encontramos a primeira de três equações do modelo **SIR**:

$$S' = -\beta SI. \quad (1)$$

O número de novos infeciosos entre os instantes de tempo t e $t + \Delta t$ será dado por $\beta S(t)I(t)$ menos aqueles que se curam ou morrem. Este último número é proporcional ao tempo entre as observações e a $I(t)$ (quanto mais doentes, mais se curam e mais morrem), permitindo, no limite $\Delta t \rightarrow 0$, encontrar a segunda equação:

$$I' = \beta SI - \gamma I, \quad \gamma > 0. \quad (2)$$

Finalmente, os removidos aumentam à medida que I diminui, e portanto

$$R' = \gamma I. \quad (3)$$

Somando as três equações, encontramos $S' + I' + R' = 0$, e portanto $S + I + R$ é constante e podemos esquecer a equação (3).

Podemos agora obter as soluções, considerando que no instante de tempo $t = 0$, a população era *quase toda S* com um pequeno número de **I**. São os "doentes zero", apesar de esta notação ser um bocado enganosa. Podemos resolver o sistema (1) – (2) utilizando mecanismos poderosos de resolução de equações diferenciais, ou podemos fazer algo muito mais simples: reescrever o processo acima, escrevendo explicitamente expressões para $S(t + \Delta t)$, $I(t + \Delta t)$ e $R(t + \Delta t)$ e calcular os seus valores numa folha de cálculo, apenas lembrando que Δt deve ser um número

pequeno (quanto menor, melhor o resultado, mas também é mais demorado obtê-lo).

Alguma análise pode ser feita sem o estudo explícito ou numérico das soluções. Veja, por exemplo, a equação (1): é claro que $S' < 0$ (sempre que S e I forem positivos, que é o caso de interesse). Assim, $S(t)$ é uma função decrescente e, portanto, a taxa de crescimento relativo do número de infeciosos I'/I também é; a questão é perceber se é sempre negativa ou se começa positiva.

Como a população é inicialmente quase toda suscetível, então $S(0) \approx 1$. Portanto, o número de infeciosos decresce continuamente ou inicialmente cresce para apenas depois decrescer, dependendo de $\beta S(0) - \gamma \approx \beta - \gamma$ ser positivo ou negativo, ou seja, dependendo de como β e γ se comparam. O caso limítrofe, que indica se uma epidemia se está a desenvolver ou não, é dado pelo conhecido *fator reprodutivo básico*, o tão falado $\mathcal{R}_0 := \beta/\gamma$.

Intuitivamente, este é dado pelo produto entre a taxa de transmissão β e o tempo que cada pessoa permanece na classe **I**, $1/\gamma$: este é o número de novos infetados que um único infecioso produz numa população totalmente suscetível.

Quando a população não é totalmente suscetível (devido a uma imunidade preexistente ou por estar parcialmente vacinada), então $\mathcal{R}_t = \beta S(t)/\gamma$ divide a evolução futura da doença em "número crescente de casos" e "número decrescente de casos", o que pode ser visto analisando novamente a equação (2).

Quando o número de novos casos gerado por cada indivíduo infecioso, em condições normais (ou seja, com valores de β e γ naturais), é inferior a um, dizemos que há "imunidade de grupo". Novas infeções não terão ambiente próprio para se desenvolverem.

Para uma visualização da solução do modelo **SIR** ($S(t), I(t)$) para diversos valores de \mathcal{R}_0 maiores do que 1, e também do número de novos infetados em função do tempo, veja a figura 1; para uma comparação destas soluções com dados reais da Covid-19 em diversos países, veja a figura 2.

A análise acima é o básico do modelo **SIR**. Agora podemos introduzir outros fatores como, por exemplo, considerar que a imunidade é temporária, incluindo um termo αR na equação (1) com a subtração do mesmo termo em (3), indicando que indivíduos da classe **R**, com o tempo, voltam a tornar-se suscetíveis. A vacinação ao nascer é introduzida colocando uma fração de indivíduos na classe **R** à partida; a vacinação de adultos é modelada pela transição de uma parte da população da classe **S** di-

retamente para **R**, sem o passo intermédio de **I**. Períodos de latência são modelados pela introdução da classe **Ex** postos entre **S** e **I**.

O modelo SIR também pode ser alterado para incluir aquilo a que se chama *estrutura* na população, isto é, para considerar que os indivíduos de cada classe são distintos entre si. Isto pode ser feito de várias formas: a primeira ideia é considerar a estrutura etária. Dividimos cada classe em grupos de mesma idade, onde, supostamente, a dinâmica da doença age de forma diferente. Se a escala de observação for longa, temos de considerar o envelhecimento, ou seja, que a população transita entre classes etárias. Isto permite identificar grupos focais para ação preventiva, seja vacinação seja testagem.

Podemos também incluir estrutura espacial, caso a região geográfica em análise seja suficientemente abrangente. Neste caso, temos de incluir a mobilidade humana, algo notoriamente difícil de modelar.

Outra possibilidade é considerar o próprio compor-

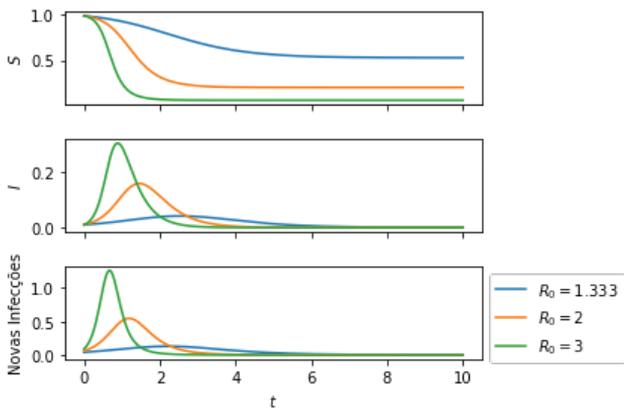
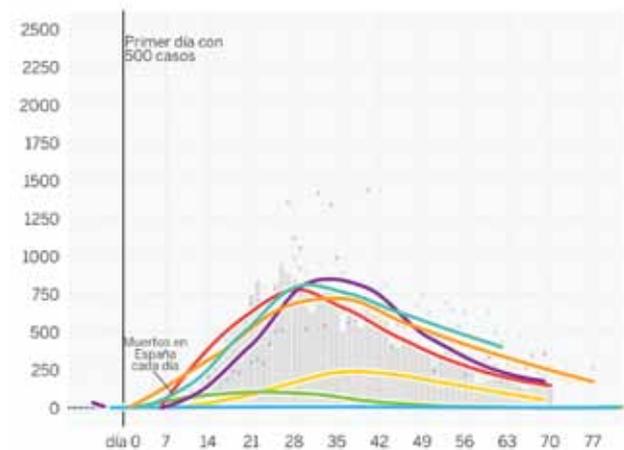


Figura 1. Em muitos textos podemos encontrar o gráfico de $S(t)$ e $I(t)$; apresentamos também o número de novos indivíduos na classe **I** em, função do tempo, ou seja $\beta S(t)I(t)$, para diferentes valores de R_0 . Este é um dos números que temos acompanhado com mais atenção no dia a dia; veja que ao diminuir β (que, dependendo da forma de transmissão de uma doença, pode ser alterado pelo nosso comportamento), a curva torna-se não apenas mais baixa, mas também mais longa (nos gráficos acima, consideramos $\gamma = 3$ e $\beta = 4, 6, 9$). É este o objetivo central do confinamento: um número de novos casos administrável pelos sistemas de saúde, que tem como consequência uma maior duração do surto. Para alterar γ , é preciso introduzir o tempo em que uma pessoa transmite a doença, seja por deteção precoce (testagens) ou pelo rápido e eficiente confinamento dos doentes.

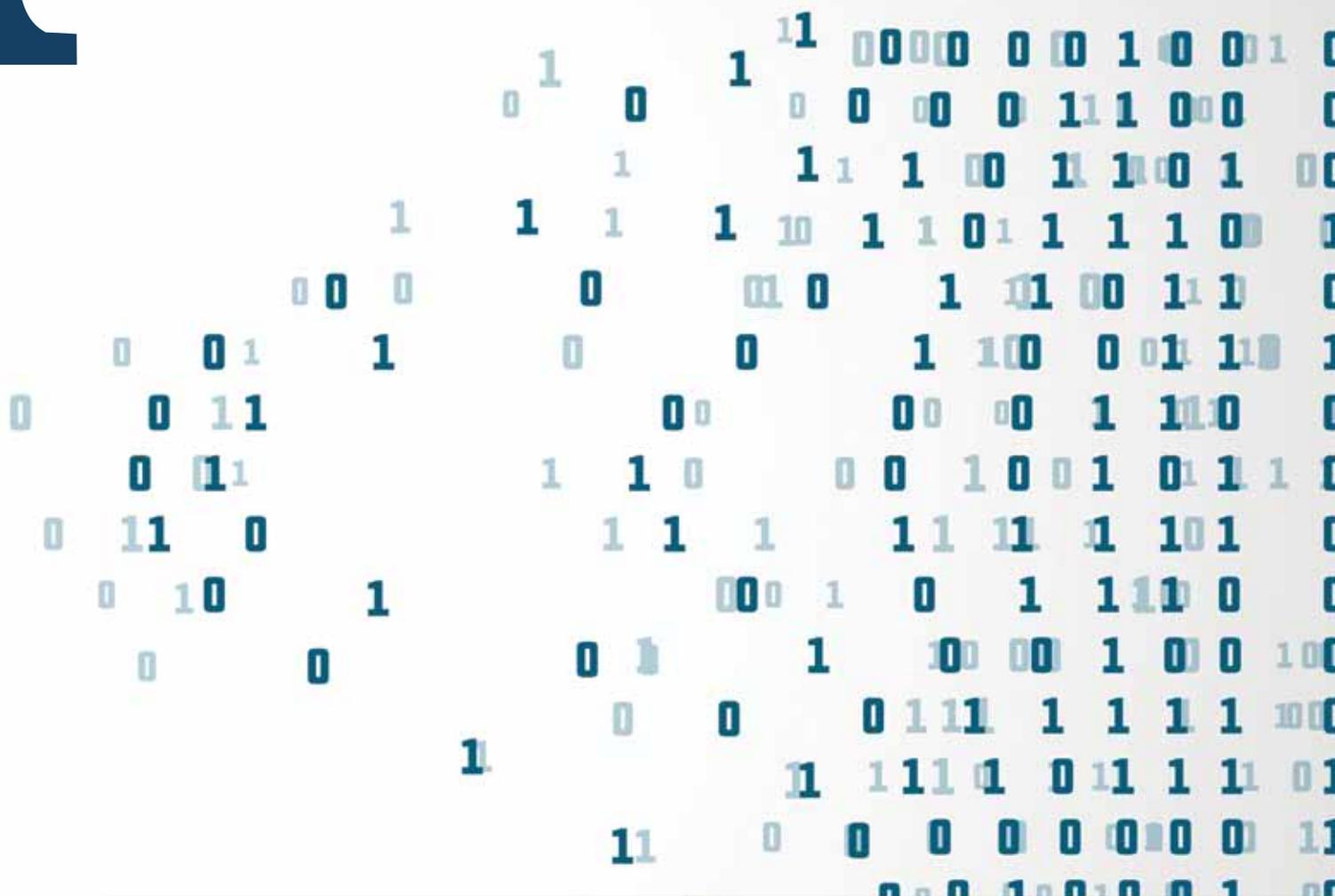
tamento humano, ou seja, a capacidade de a população manipular o valor de β como resultado da própria percepção da doença: quanto maior o número de infecciosos, mais ficamos em casa, diminuindo efetivamente o valor da transmissão.

Por fim, é importante notar que diferentes pessoas terão diferentes impactos na transmissão: um profissional que lide diretamente com doentes, como um médico ou enfermeiro, é em geral fulcral para a propagação da doença. Ficam mais doentes, transmitem mais; por outro lado, se houver imunidade, serão os primeiros a serem removidos da dinâmica e desta forma certos nodos muito conectados da *rede de contactos* individuais serão precocemente cortados, aumentando a chance de a epidemia perder força antes do que nos pareceria através de um modelo SIR simples (dito *não-estruturado*), fazendo com que a tão sonhada imunidade de grupo chegue um pouco mais rapidamente.



Mortes Diárias em Espanha, Itália, Coreia do Sul, China, França, Reino Unido e Alemanha.

Figura 2. O gráfico acima mostra a evolução do número de novos casos para a pandemia de Covid-19, dia a dia, em diversos países; não se afasta muito do visto na figura 1, pelo menos na "subida". Em relação à queda, esta parece ter algumas diferenças. Note que na figura 1 os valores de β e γ são constantes ao longo do tempo, o que não é realista para a Covid-19, já que as medidas governamentais têm como objetivo precisamente manipular estes números. **Fonte:** Adaptado de *El País* em 15/05/2020 – https://elpais.com/sociedad/2020/04/28/actualidad/1588071474_165592.html



NÚMEROS DE MERSENNE E INVERSOS BINÁRIOS

GUILHERME A. SANTOS^a E CRISTINA SERPA^b

ESTUDANTE FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA^a,
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA E MEMBRO DO CMAFCIO^b

gas.santos@campus.fct.unl.pt^a, mcserpa@fc.ul.pt^b

Decidimos abordar os números primos não na base decimal, mas sim na base binária. Questionamo-nos então sobre o que aconteceria se em vez de se usar os números como binários normais, tentássemos invertê-los, trocando todos os dígitos 1 por 0 e vice-versa. Assim nasce não só o conceito de inverso binário, mas também todo um conjunto de propriedades e de relações que merecem ser exploradas.

1. INTRODUÇÃO

A pesquisa de números primos é uma tarefa que ocupa uma parte dos interessados pela matemática. Estes números não são apenas uma curiosidade matemática atraente para muitos, mas têm grandes implicações em ciências aplicadas. Nos dias de hoje, esta tarefa está mais concentrada num conjunto muito especial de números primos, os números de Mersenne. Veja-se, por exemplo, o programa *GIMPS – Great Internet Mersenne Prime Search* [6], que obtém estes números com a ajuda de uma grande quantidade de computadores em rede. O último número primo de Mersenne a ser encontrado (em dezembro de 2018), até à data de escrita deste artigo, foi $2^{82589933} - 1$, que conta com quase 25 milhões de dígitos e é o 51.º primo de Mersenne. Repare-se que o número 2 é essencial na definição deste tipo de número. Este número em especial tem características únicas que mais nenhum outro tem: por um lado, é o único primo que é par e, por outro, representa a base binária, o sistema de numeração básico na computação. Apesar de os números de Mersenne serem os mais estudados na procura de números primos, o que acontece, de facto, é que a quantidade de números primos existente entre dois números de Mersenne aumenta quanto maiores forem esses números de Mersenne. Este facto pode ser

comprovado pela quantidade de números primos que são escritos na base binária sob a forma de n dígitos (veja-se na enciclopédia online de sucessões [7] com a referência A162145).

2. BASES E NÚMEROS DE MERSENNE

Lembremos a representação de números na base binária tal como em [2].

Definição 1. Seja $n \in \mathbb{N}$. Qualquer número inteiro positivo menor ou igual a $2^n - 1$ pode ser escrito de forma única como representação na base binária por

$$\sum_{s=0}^{n-1} a_s 2^s, \quad a_s \in \{0, 1\}.$$

Analogamente, podemos escrever qualquer número natural sob a forma decimal.

Definição 2. Seja $n \in \mathbb{N}$. Qualquer número natural menor ou igual a $10^n - 1$ pode ser escrito de forma única como representação de base 10 (decimal) por

$$\sum_{s=0}^{n-1} d_s 10^s, \quad d_s \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}. \quad (2.1)$$

Definição 3. Seja $n \in \mathbb{N}$. Chamamos número de Mersenne ao número $M_n = 2^n - 1$ e n -ésimo quadrante ao conjunto $Q_n = \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$. Q_n é o conjunto dos números naturais p tais que $M_n < p \leq M_{n+1}$.

Repare-se que, para cada número natural $p \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $p \in Q_n$.

Definição 4. Seja $p \in \mathbb{N}$. Considere-se a sucessão u_n definida por $u_1 = p/2$ e

$$u_{k+1} = \begin{cases} \lfloor u_k \rfloor, & k \text{ é ímpar} \\ \lfloor \frac{u_k}{2} \rfloor, & k \text{ é par.} \end{cases}$$

Um número natural $p \in \mathbb{N}$, do n -ésimo quadrante, escreve-se, na base binária, sob a forma

$$p = \sum_{k=1}^{n+1} b_k 2^{k-1}, \quad (2.2)$$

onde $b_k = 2(u_{2k-1} - u_{2k}) \in \{0, 1\}$.

Na definição dos números de Mersenne está bem presente o número 2. Neste contexto, em paralelo com a definição 3, é possível caracterizar os números de Mersenne através de operações binárias, como adiante se mostra na

proposição 2. Estas operações são aplicadas também a todos os números naturais.

Definição 5. O inverso binário $S(p)$ de um número natural p é obtido pelo algoritmo

- i) representar o número p na base binária;
- ii) na representação i) substituir o dígito 0 pelo dígito 1 e o dígito 1 pelo dígito 0;
- iii) representar o número obtido em ii) na base decimal.

Observação 1. Em computação, o inverso binário corresponde a uma operação chamada complemento um, cujo propósito é representar números com sinal em sistemas binários (veja-se, por exemplo [5, capítulo 4.1]). No entanto, neste texto não o usaremos neste sentido.

Recorrendo à definição 4 da sucessão u_n , é possível representar o inverso binário da seguinte forma.

Proposição 1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p \in Q_n$. Se p tem a representação binária (2.2), então o seu inverso binário é a função $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por*

$$S(p) = \sum_{k=1}^{n+1} (1 - b_k) 2^{k-1},$$

onde $b_k = 2(u_{2k-1} - u_{2k}) \in \{0, 1\}$.

Agora caracterizamos os números de Mersenne através da sua representação em inverso binário.

Proposição 2. *Um número natural p é de Mersenne se e só se $S(p) = 0$.*

Demonstração. Um número de Mersenne é da forma

$$M_n = 2^n - 1 = \sum_{k=1}^n 2^{k-1},$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = \sum_{k=1}^n b_k 2^{k-1}$ se e só se

$$b_k = 1, \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Como $b_k = 1 \Leftrightarrow (1 - b_k) = 0, \forall k \in \{1, \dots, n\}$, isto é equivalente a $S(x) = 0$. \square

A operação inverso binário S pode ser facilmente obtida se, à partida, se souber em que quadrante o número se encontra.

Proposição 3. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p \in Q_n$. Então $S(p) = 2^{n+1} - p - 1$.*

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p \in Q_n$. Pela forma como p e $S(p)$ se escrevem em base binária, tem-se

$$\begin{aligned} p + S(p) &= \sum_{k=1}^{n+1} b_k 2^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} (1 - b_k) 2^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} ((1 - b_k) + b_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} \\ &= 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Os corolários que se seguem são imediatos. \square

Corolário 1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $M_{n+1} = p + S(p), \forall p \in Q_n$.*

Corolário 2. *Seja p um número natural. Então p é par se o seu inverso binário é ímpar e é ímpar se o seu inverso binário é par.*

Corolário 3. *Dentro de um mesmo quadrante Q_n , $S(p)$ é uma função decrescente.*

Corolário 4. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, q \in Q_n$. Então $p - q = S(q) - S(p)$.*

Isto significa que, em particular, dentro de um mesmo quadrante n , o último algarismo do inverso binário de p , $S(p)$, depende apenas do último algarismo de p .

Exemplo 1. Considere-se o quadrante Q_5 . Tem-se que 47 (com inverso binário 16) e 57 (com inverso binário 6) pertencem a Q_5 . Isto é equivalente a afirmar que sempre que um número natural $p \in Q_5$ tiver como último algarismo o número 7, então o seu inverso binário, $S(p)$, tem como último algarismo o número 6.

Proposição 4. *Sejam $p_1 \in Q_b$ e $p_2 \in Q_a$, com $a, b \in \mathbb{N}$ e $b > a$, tem-se que:*

$$(p_1 - p_2) + (S(p_1) - S(p_2)) = M_{(b-a)} 2^{a+1}.$$

Demonstração.

$(p_1 - p_2) + (S(p_1) - S(p_2)) = (p_1 + S(p_1)) - (p_2 + S(p_2))$.
Pela proposição 3 tem-se que, para $p \in Q_n$,

$p + S(p) = 2^{n+1} - 1$. Assim

$$\begin{aligned} (p_1 + S(p_1)) - (p_2 + S(p_2)) &= (2^{b+1} - 1) - (2^{a+1} - 1) \\ &= 2^{b+1} - 2^{a+1} = 2^{a+1} (2^{b-a} - 1) \\ &= 2^{a+1} M_{(b-a)} = M_{(b-a)} 2^{a+1}. \end{aligned}$$

Este resultado permite-nos concluir que a soma das diferenças entre dois números naturais e a dos seus inversos binários são iguais ao produto de um determinado número de Mersenne por uma potência de 2. \square

Corolário 5. *Seja $a \in \mathbb{N}$. Considerem-se os números naturais $p_1 \in Q_{a+1}$ e $p_2 \in Q_a$. Então $(p_1 - p_2) + (S(p_1) - S(p_2)) = 2^{a+1}$.*

Demonstração. O resultado obtém-se com $b = a + 1$ na proposição 4. \square

Corolário 6. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ e considerando, sem perda de generalidade, que $b > a$. Então*

$$M_{(b-a)} 2^{a+1} = \sum_{k=a+1}^b 2^k.$$

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ e $b > a$. Tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{k=a+1}^b 2^k &= 2^{b+1} - 2^{a+1} = 2^{a+1} (2^{b-a} - 1) \\ &= 2^{a+1} M_{(b-a)} = M_{(b-a)} 2^{a+1}. \end{aligned} \quad \square$$

Proposição 5. *Sejam $a \in \mathbb{N}$, $p_1 \in Q_{a+1}$ e $p_2 \in Q_a$, tais que $p_1 = p_2 + 10c$, com $c \in \mathbb{N}$. Então o último algarismo de $S(p_1)$ é o último algarismo da soma do último algarismo de $S(p_2)$ com o último algarismo de 2^{a+1} .*

Demonstração. Considerem-se $a \in \mathbb{N}$, $p_1 \in Q_{a+1}$ e $p_2 \in Q_a$. Pelo corolário 16,

$$(p_1 - p_2) + (S(p_1) - S(p_2)) = 2^{a+1}.$$

Considerem-se os números escritos na base decimal

$$2^{a+1} = \sum_{s=1}^{n-1} d_s 10^s + d_0, \quad d_s \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

e

$$S(p_2) = \sum_{s=1}^{n-1} q_s 10^s + q_0, \quad q_s \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

onde d_0 , e q_0 representam o algarismo das unidades. Suponha-se que $p_1 = p_2 + 10c$, com $c \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2) + (S(p_1) - S(p_2)) &= 2^{a+1} \\ \Leftrightarrow 10c + (S(p_1) - S(p_2)) &= 2^{a+1} \\ \Leftrightarrow S(p_1) - S(p_2) &= 2^{a+1} - 10c \\ \Leftrightarrow S(p_1) &= \left(\sum_{s=1}^{n-1} d_s 10^s + \sum_{s=1}^{n-1} q_s 10^s - 10c \right) + (q_0 + d_0). \end{aligned}$$

Desta última igualdade e sabendo que q_0 e d_0 são os únicos parâmetros que influenciam as unidades, fica provado o pretendido. \square

3. PICOS E SUCESSÃO DE LICHTENBERG

Definição 6. Considere-se o sistema (\mathbb{N}, S) . Seja $p \in \mathbb{N}$ à sucessão

$$p, S(p), \dots, S^m(p), \dots$$

chamamos S -órbita de p , onde $S^0(p) = p$ e $S^{n+1}(p) = S(S^n(p))$.

Observação 2. O sistema (\mathbb{N}, S) pode ser considerado um sistema dinâmico discreto. No entanto, para o propósito deste trabalho, não se afigura necessário associar uma σ -álgebra nem uma medida de probabilidade (veja-se, por exemplo [1]).

Corolário 7. A função $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ não é invertível.

Demonstração. Pela proposição 2, todos os números de Mersenne têm imagem 0 pela função S .

Proposição 6. *Sejam $p, a, n \in \mathbb{N}$ tais que p não é um número de Mersenne e $S^{2n-1}(p) \in Q_a$. Então*

$$S^{2n-1}(p) + S^{2n}(p) = 2^{a+1} - 1 = M_{a+1}.$$

Demonstração. Este resultado obtém-se da proposição 3, substituindo p por $S^{2n-1}(p)$ e n por a . \square

Proposição 7. *Seja $p \in \mathbb{N}$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^n(p) = 0$.*

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{N}$. Se p é um número de Mersenne então $S(p) = 0$.

Suponhamos que $p \in Q_m$ não é um número de Mersenne, para certo $m \in \mathbb{N}$. Sabemos, pelo corolário 3, que $S(p)$ é decrescente dentro de cada quadrante e que $1 \leq S(p) \leq 2^m - 1$. Logo $p > S(p)$. Analogamente, $S(p) > S^2(p)$ e $S^n(p) > S^{n+1}(p)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $S^n(p)$

é inteiro, $\forall n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$p > S(p) > S^2(p) > \dots > S^k(p) = 0. \quad (3.1)$$

□

Definição 7. Chamamos índice de $p \in Q_n$ ao valor k da equação (3.1). Chamamos pico P_n ao número natural $p \in Q_{n-1}$ tal que, qualquer que seja $q \in Q_{n-1}$, se tem $k(q) \leq k(p)$.

Na prática, chamamos pico ao número natural que, dentro de um mesmo quadrante n , necessita de ser invertido o maior número de vezes de modo a chegar a 0. O pico P_n , por definição, situa-se entre M_{n-1} e M_n . A existência de apenas um pico por quadrante deve-se ao facto de apenas existir um único número com todos os n dígitos alternados (que é P_n)¹ em cada quadrante.

Pensemos agora na sucessão dos picos P_n e que propriedades poderão ter estes números em especial. Numa pesquisa nas sequências já conhecidas (veja-se [7], A000975), encontra-se esta mesma sucessão chamada de sucessão de Lichtenberg (veja-se [3]), associada ao jogo chinês Baguenaudier², indicando o número mínimo de movimentos necessários para resolver um jogo com n anéis. Verifica-se que esta sucessão representa também todos os números cuja representação binária não tem dígitos repetidos consecutivos, por outras palavras, os picos. Uma forma recursiva de obter estes números é $P_{2n} = 2P_{2n-1}$, $P_{2n+1} = 2P_{2n} + 1$ (veja-se [7], A000975). A sua forma explícita é dada por (conforme [8], página 16)

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{3}(2^{n+1} - 2), & n \text{ é par.} \\ \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1), & n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Ou (ver [3])

$$P_n = \frac{1}{3}(M_{n+1} - 1 + n_0),$$

onde $n_0 = n \bmod 2$. A notação para P_n também pode ser l_n (ver [3]).

É também interessante mencionar que esta solução está relacionada com o código de Gray (ver [8]).³

Proposição 8. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$P_{n-1} + P_n = M_n.$$

Este resultado é já conhecido na literatura sobre a sucessão de Lichtenberg (ver [4]).

Das proposições 3 e 8, conclui-se que o inverso binário do pico P_n é o pico P_{n-1} . Como consequência, pelo corolário 2, tem-se que se P_n é par, então P_{n-1} é ímpar e vice-versa.

Mais uma propriedade obtida por Lichtenberg (veja-se [3]), que obtém um pico através de um pico anterior e um número de Mersenne. Esta pode ser obtida como consequência da proposição 8.

Proposição 9. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que*

$$P_n = P_{n-2} + M_{n-1} + 1.$$

A propriedade seguinte foi também já demonstrada por Lichtenberg (veja-se [3]).

Proposição 10. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$P_n = 2P_{n-1} + n_0 = \begin{cases} 2P_{n-1} + 1, & n \text{ é par.} \\ 2P_{n-1}, & n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

onde $n_0 = n \bmod 2$.

Neste artigo foram trabalhadas relações entre números de Mersenne e binários. Foi introduzida a noção de pico. Como verificámos, existe um pico entre cada dois números de Mersenne. Várias propriedades foram deduzidas e relacionadas com estes números. Aqui surge-nos a curiosidade de identificar picos que são primos. Pela descrição da sucessão de Lichtenberg ([7], A000975) só o 2 e o 5 são picos primos, isto é, todos os outros picos são compostos. Ou seja, na procura de primos podem descartar-se todos os picos que não sejam 2 e 5. Existem outras relações interessantes sobre estes números ([7], A000975), como sejam jogos: *The brain puzzler*, *Strikketoy*, ou *Knitwear*; construções matemáticas: Hadamard matrix, permutações, coloração de polígonos planares, Hamming distance, estando ainda muito por explorar. Estas últimas relações referidas não são aqui explicadas para não alongar o artigo e aconselha-se o leitor interessado a pesquisar o que significam.

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece ao professor Carlos Silva, da Escola Secundária José Afonso, pela inspiração e pela motivação numa fase inicial deste estudo.

A segunda autora agradece o apoio parcial da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia com a referência UID/MAT/04561/2019.

REFERÊNCIAS

[1] Dajani, K., Kraaikamp, C., *Ergodic Theory of Numbers, The Carus Mathematical Monographs*, No. 29, The Mathematical Association of America, Washington (2002).

[2] Hardy, G.H., Wright, E.M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth Edition, Oxford Science Publications (1979).

[3] Hinz, A. M., *The Lichtenberg Sequence*, *Fibonacci Quart.*, 55 (1) (2017), 2-12.

[4] Hinz, A. M., Klavžar, S., U. Milutinović, Petr, C., *The Tower of Hanoi – Myths and Maths*, Springer, Basel, (2013).

[5] Knuth, D. E., *The Art of Computer Programming, Vol. 2. Seminumerical algorithms*, Addison-Wesley, USA (1997).

[6] Mersenne Research Inc., *www.mersenne.org*, acedido em 18/05/2019.

[7] Sloane, N. J. A., *The on-line encyclopedia of integer sequences*, disponível em <https://oeis.org/>, acedido em 18/05/2019.

[8] Gardner, M., *The Binary Gray Code. In Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments*, New York: W. H. Freeman, pp. 15-17, 1986.

SOBRE OS AUTORES

Guilherme A. Santos Aluno de licenciatura em Matemática da FCT – UNL – Faculdade de Ciência e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa.

Cristina Serpa Professora Adjunta Convidada no ISEL – Instituto Superior de Engenharia de Lisboa e membro integrado no CMAF-cIO – Centro de Matemática, Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional.

¹Veja-se o exemplo dado em [8], página 16.

² O jogo consiste numa barra fixa com vários anéis entrelaçados e numa outra barra que está presa a esses anéis. O jogo tem início com uma determinada configuração e termina quando se soltar a barra presa aos anéis da barra fixa. Um movimento faz-se alterando a posição da barra presa aos anéis.

³ O código de Gray é um sistema de código binário, inventado por Frank Gray, que contém a propriedade de apenas se alterar um único dígito entre dois números sucessivos.



9th European Congress of Mathematics

SEVILLA
15-19 July 2024



JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

KATHERINE JOHNSON

Breve introdução à vida extraordinária de Katherine Johnson, a matemática que ajudou a NASA a ganhar a corrida à Lua.

No passado dia 24 de fevereiro, foi anunciada a morte de Katherine Johnson, uma matemática que trabalhou para a NASA.¹ É daquelas pessoas de quem se pode dizer que a sua vida dava um filme (e deu!). Este texto é uma breve introdução àquela vida fora do comum. Para mais detalhes, veja-se [2]; um resumo das informações biográficas contidas neste livro pode ser consultado na página da NASA.²

Katherine Johnson nasceu a 26 de agosto de 1918, em White Sulphur Springs, na Virgínia Ocidental. Era filha de um trabalhador rural e de uma professora e era a mais nova de quatro irmãos. Revelou desde muito jovem uma grande queda para a Matemática, mas não foi fácil para os pais dela encontrarem uma escola adequada para desenvolver o seu talento, por questões raciais: eles eram negros. (Imagino que bastantes leitores deste texto tenham dificuldade em encarar a fotografia junto a este parágrafo como sendo de uma pessoa negra, mas, na época, estava em vigor a *one-drop rule*, segundo a qual bastava uma pessoa ter um único antepassado da África subsaariana para ser considerada negra.) Licenciou-se (em Matemática e em Francês) em 1937, aos 18 anos, tendo-se tornado professora na Virgínia.

Em 1939, já casada, inscreveu-se num programa doutoral, tendo sido uma das três primeiras pessoas negras e, das três, a única mulher a inscrever-se na Universidade da Virgínia Ocidental (que só passara a permitir a inscrição de estudantes negros em 1938). Mas entretanto engravidou e



acabou por desistir. Durante muitos anos trabalhou como professora.

No início dos anos cinquenta, Katherine Johnson mudou de emprego, tendo ido trabalhar para a NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) onde trabalhou como computador de 1953 a 1958. A expressão “trabalhou como computador” soa bastante estranha, mas era um trabalho com uma longa tradição, que já vem do século XVIII (veja-se [1]).³ Os “computadores”, antes de serem dispositivos eletrônicos, eram pessoas que faziam cálculos. E uma grande quantidade dessas pessoas eram mulheres.⁴

Em 1958, a NACA foi dissolvida e o seu pessoal foi transferido para a recém-criada NASA. Nessa altura, Katherine Johnson estava a criar três filhas adolescentes sozinha (o marido, James Goble, morreu de um tumor cerebral em 1956), mas voltaria a casar-se em 1959, com um oficial da Força Aérea, Jim Johnson.

À medida que o tempo passava, mais os superiores hierárquicos de Katherine Johnson se apercebiam do valor do seu trabalho e a encarregavam de trabalhos mais complexos e de maior responsabilidade. Foi ela quem calculou a trajetória seguida por Alan Shepard, o primeiro norte-americano no Espaço, a 5 de maio de 1961. Quando John Glenn se preparou para ser o primeiro norte-americano a orbitar em torno da Terra (o voo de Shepard foi suborbital), ele recebeu o plano de voo, que incluía a trajetória que iria seguir, a qual tinha sido obtida por cálculos feitos num computador. Ele disse então que confiaria nesses cálculos se Katherine Johnson os confirmasse, coisa que ela fez.

O seu papel também foi determinante no projeto Apollo. Aliás, ela achava que a maior contribuição da sua carreira consistiu nos cálculos que fez para determinar a trajetória a seguir pelo módulo lunar, desde o momento em que partisse da superfície lunar até acoplar com o módulo de comando e o módulo de serviço. Quando, em abril de 1970, a missão Apollo 13 ia correndo catastroficamente mal, ela fez parte do grupo de matemáticos encarregados de encontrar uma trajetória de regresso à Terra. Um quarto de século mais tarde, foi feito um filme sobre este acontecimento (*Apollo 13*, de Ron Howard), no qual o seu nome nem sequer é mencionado. Katherine Johnson ainda trabalhou para o Space Shuttle e fez planos para uma missão a Marte, entre outras coisas. Reformou-se em 1986.

Katherine Johnson só se tornou uma figura pública no século XXI. Em 2015, recebeu a Medalha da Liberdade. Na cerimónia de atribuição, Barack Obama afirmou “Katherine G. Johnson recusou-se a ficar limitada pelas expectativas que a sociedade tinha relativamente ao seu género e à sua

raça, ao mesmo tempo que expandia aquilo que a Humanidade consegue alcançar.” No ano seguinte, saiu o livro [2] e, nesse mesmo ano, ela aparece num episódio da série televisiva *Timeless* (uma série centrada em viagens no tempo; no episódio em questão, viaja-se até 1969). Em 2017 estreou o filme baseado no livro anterior, no qual Katherine Johnson foi interpretada por Taraji P. Henson. Este filme foi um sucesso, tendo Katherine Johnson estado presente na cerimónia de entrega dos Óscares, onde foi ovacionada de pé.⁵

Katherine Johnson morreu num lar, menos de um ano após ter enviuvado pela segunda vez. Tinha 101 anos.

REFERÊNCIAS

[1] David Alan Grier, *When Computers were Human*, Princeton University Press, 200.

[2] Margot Lee Shetterly, *Hidden Figures: The American Dream and the untold story of the black women who helped win the Space Race*, William Morrow and Company, 2016.

¹ Morreu Katherine Johnson, a matemática da NASA que ajudou a levar os humanos à Lua, Público, <https://www.publico.pt/2020/02/24/ciencia/noticia/morreu-katherine-johnson-matematica-nasa-ajudou-levar-humanos-lua-1905393>

² Katherine Johnson Biography, <https://www.nasa.gov/content/katherine-johnson-biography>

³ Uma versão resumida deste livro pode ser vista na internet sob o título *The Human Computer and the Birth of the Information Age*, <https://web.archive.org/web/20160308075109/http://www.philsoc.org/2001Spring/2132transcript.html>.

⁴ *The Age of Female Computers*, <https://www.thenewatlantis.com/publications/the-age-of-female-computers>.

⁵ Katherine Johnson, real-life subject of “Hidden Figures” receives standing ovation at Oscars, <https://abcnews.go.com/Entertainment/real-life-subject-hidden-figures-receives-standing-ovation/story?id=45755913>.

(MATEMÁTICA+MEDICINA) \cap MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS

Curvas epidémicas, escalas logarítmicas, picos, achatamento da curva, crescimento exponencial. Estes são alguns dos conceitos epidemiológicos que ouvimos todos os dias nos meios de comunicação social quando se fala do vírus SARS-CoV-2, que provoca a doença Covid-19. A epidemiologia é uma das áreas da biomedicina com maior tradição de quantificação e modelação de dados. Neste texto, tentamos discutir estes conceitos na perspetiva da epidemiologia.

Os modelos epidemiológicos estão a ser utilizados na pandemia causada pelo SARS-CoV-2 para tentar descrever a evolução do número de pessoas infetadas, estimar picos de afluência a hospitais e número de mortes, perceber o impacto de possíveis medidas de contenção e mitigação, entre outras [2-4]. Neste contexto, os modelos são ferramentas fundamentais, sem as quais todas estas questões teriam de ser discutidas sem uma base quantitativa [5].

Se fizermos uma pesquisa de artigos científicos sob o tema “Modelos Matemáticos em Epidemiologia”, vamos encontrar um aumento exponencial no número dos mesmos nos últimos anos com um pico de 18 100 em 2016, o que de certa forma traduz a relevância dos modelos matemáticos no estudo de epidemias.

QUAIS SÃO OS ANTECEDENTES DESTA ÁREA CIENTÍFICA?

Um dos primeiros relatos históricos com observações e considerações sobre um surto epidémico surge no livro de Tucídides, *História da Guerra do Peloponeso*, que discute a peste, que teve lugar em Atenas cerca de 430 a.C. Tendo ocorrido durante o cerco das tropas espartanas, vitimou durante três anos cerca de um terço dos soldados e entre

um e dois terços dos habitantes. Não existe um consenso sobre se teria sido peste negra, bubónica, ébola ou febre tifoide, mas é de salientar nesse registo uma análise da propagação da doença em que são identificadas algumas características que hoje fazem parte da terminologia associada a epidemias, mas que na altura ainda eram ignoradas. Tucídides fez, no volume que escreveu, cinco observações importantes que traduzem características que hoje se sabe serem determinantes no estudo de epidemias. Foram elas:

- ▶ Maior prevalência da doença em zonas com mais gente (densidade).
- ▶ Incidência maior nos “médicos” que tratavam os doentes (contágio).
- ▶ Deslocação da doença de um sítio para o outro (transporte).
- ▶ Resistência dos recuperados à doença (imunidade).
- ▶ Não resistência dos recuperados a outras doenças (imunidade específica).

O livro é dedicado à guerra sendo abordado este surto numa pequena passagem em que o próprio Tucídides afirma que deixa essa informação para que outros mais

RUY MIGUEL RIBEIRO
Laboratório de
Biomatemática,
Instituto de Saúde
Ambiental, Facul-
dade de Medicina,
Universidade
de Lisboa.
ruyribeiro@medicina.ulisboa.pt

PAULA AMARAL
Univ. Nova
de Lisboa
pt-maths-in@spm.pt

habilitados possam estudar e reconhecer doenças semelhantes. Infelizmente a ideia de que um indivíduo afetado podia transmitir a outro a doença, esboçando a noção de contágio foi depois esquecida durante muitos séculos, tendo sido recuperada apenas no século XVIII e depois no século XIX com os trabalhos de Robert Koch e Louis Pasteur. Mais atenção tivesse sido dada às observações de Tucídides e quem sabe como teríamos antecipado o conhecimento científico sobre epidemias.

ONDE COMEÇOU ENTÃO A EPIDEMIOLOGIA MATEMÁTICA (EM)?

Uma das primeiras pessoas a pensarem em modelos epidemiológicos foi Sir Ronald Ross, médico de saúde pública, Prémio Nobel de Fisiologia ou Medicina em 1902, por ter descoberto que a malária era transmitida por mosquitos. Na segunda edição do seu livro *A Prevenção da Malária*, publicado em 1911, ele tenta construir modelos matemáticos de transmissão da malária, a fim de apoiar a sua alegação de que a malária poderia ser erradicada pela redução do número de mosquitos. Ross propõe-se examinar este assunto através de “uma análise cuidadosamente fundamentada das relações entre a doença e os vários fatores que a influenciam”. Esta frase pode, sem dúvida, ser adotada como uma descrição geral do que é a EM, com a contribuição única da linguagem matemática. De início Ross não adotou o termo EM, mas sim “patometria a priori”, ou “epidemiologia construtiva”, em oposição a “epidemiologia dedutiva” (figura 1).

A colaboração de Ronald Ross com matemáticos teve lugar essencialmente com Hilda Phoebe Hudson (1881 - 1965) (figura 2), matemática inglesa com quem trabalhou em epidemiologia e medição da propagação de doenças. Um dos trabalhos de referência de Ronald Ross, *An Application of the Theory of Probabilities to the Study of a Priori Pathometry. Parts I, II e III* (1917) [9] é escrito em coautoria com Hilda Hudson.

O passo seguinte, de destaque no desenvolvimento da EM, é dado por William Kermack, bioquímico, e Anderson McKendrick, médico. Com base nas pesquisas de Ronald Ross e Hilda Hudson, McKendrick e Kermack publicaram, entre outros, um conjunto de três artigos fundamentais em 1927, 1932 e 1933 onde apresen-



Figura 2. Hilda Hudson; William Kermack e Anderson McKendrick

Figura 1. “São necessários os serviços de médicos, patologistas e parasitologistas para investigar a natureza de qualquer doença, quer a mesma ocorra em casos isolados quer como epidemia; mas os matemáticos são necessários para examinar a causa e o progresso no caso de epidemias – tal como para traçar a trajetória de um planeta pode ser suficiente um observador treinado, mas para deduzir as forças envolvidas nesse movimento são necessários cuidadosos cálculos matemáticos. Esses cálculos podem ser dedutivos (*a posteriori*) ou construtivos (*a priori*). No primeiro caso, procura-se deduzir as leis a partir dos factos observados, no segundo caso, assume-se o que se supõe serem as leis e então procura-se verificar as mesmas a partir da sua capacidade de explicar os factos.” [8]

APRIL 13, 1929] CONSTRUCTIVE EPIDEMIOLOGY. [The Journal of the Royal Society of Medicine, 1929, 22, 678]

before those surgeons who have access to, and experience with, radium will cease to amputate the breast. I hope to see the time when the same can be said of excision of the rectum.

When passing in review the results of my work with radium during the last four years I do not doubt that, with increasing experience, we shall be able to cure year by year a higher percentage of inoperable cases, and I am satisfied that with judicious selection of cases we can assist those who have passed beyond the hope of cure by alleviating their symptoms and prolonging their lives.

CONSTRUCTIVE EPIDEMIOLOGY.

BY
SIR RONALD ROSS, K.C.B., K.C.M.G., F.R.S.,
DIRECTOR-IN-CHIEF, ROYAL INSTITUTE AND HOSPITAL FOR TROPICAL
DISEASES, PUTNEY HEATH, S.W.

THE services of medical men, pathologists, and parasitologists are required for investigating the nature of any disease, whether it occurs in isolated cases or in epidemics; but mathematicians are needed to examine the cause and progress of the latter—just as any skilled observers may trace the path of a planet, but careful mathematical computations must be made into the forces concerned in its movement. Such computations may be either deductive (*a posteriori*), or constructive (*a priori*). By the former we seek to deduce the laws from the observed facts; in the latter we assume what we suppose are the laws, and then try to verify them by inquiring whether they explain all the facts.

Twelve years ago the Royal Society published a paper by me on the *a priori* analysis of “happenings” including epidemics, and gave me a grant to enable me to acquire the valuable help of Miss Hilda P. Hudson, with whom

By assuming certain constants (which have never been properly investigated) I calculated that the proportion of infected persons to the whole population of a locality should remain fixed if the proportion of carrying *Anopheles* to each person is about $\frac{40}{1-m}$ during one month, where m is the proportion of infected persons to the whole population at the beginning of the inquiry. Thus if m is very small to begin with, the number of *Anopheles* may still be up to about 40 per head of the human population during one month without any change taking place. That is, a locality should probably remain almost free of malaria, although there are as many as 40 mosquitoes of a suitable malaria-carrying kind during one month to each human individual in the locality. If the number of *Anopheles* rises over about 40 to each human being in the area under consideration, and if there are by chance any suitable cases of malaria at all in the area, introduced by immigration or in transit, then the number of local cases is likely to begin to increase until it reaches a fixed limit depending on the average number of mosquitoes per human being. We can form a rough estimate of that fixed limit (if my assumed constants are nearly right) by obtaining the value of m from the equation above—namely,

$$a = \frac{40}{1-m}$$

that is, from

$$m = 1 - \frac{40}{a}$$

where a denotes the number of *Anopheles* to each person in the locality during one month. Thus if $a=40$, $m=0$, as already stated; but if $a=60$, m will probably rise to a limit of $1/3$ —meaning that one-third of the whole population will ultimately become infected with malaria if the

tam um formalismo que é ainda hoje utilizado, baseado na partição da população em compartimentos e que serve de base a posteriores modelos mais complexos (figura 3). Os modelos matemáticos tornaram-se, sem dúvida, uma mais-valia no estudo de epidemias, no entanto convém alertar que os mesmos só conseguem prever a evolução da doença se estiverem alicerçados em dados fiáveis e em informações básicas da fisiologia da infeção [6].

COMO FUNCIONAM OS MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS

A grande maioria dos modelos de epidemia é baseada numa ideia mecanística de como o vírus se propaga na população. Essencialmente, (quase) todos estes modelos dividem a população em subgrupos. No caso mais simples temos o grupo das pessoas suscetíveis à infeção (S); as pessoas que foram expostas (E) e por isso estão infetadas, mas ainda não conseguem transmitir o vírus; as pessoas infetadas e infecciosas (I), isto é que podem transmitir o vírus; e as pessoas removidas (R), isto é que já tiveram o vírus e estão curadas, assumindo que essas pessoas não podem voltar a ser infetadas (o que depende da duração da imunidade), ou que morreram. No caso do SARS-CoV-2, algumas pessoas não recuperam e morrem. Uma versão esquemática é apresentada na figura 3. A este modelo chama-se um modelo de compartimentos, porque dividimos as pessoas em compartimentos e estudamos os fluxos entre os vários grupos (as setas na figura 3). É importante notar que estes modelos podem ficar mais complexos se, por exemplo, quisermos seguir separadamente pessoas de diferentes faixas etárias, sexo ou localizações geográficas, com diferentes características demográficas. Mas o princípio de utilizar compartimentos para cada um desses grupos mantém-se.

Numa situação, como a do SARS-CoV-2, em que toda a população é suscetível, porque este vírus nunca circulou entre nós, os contactos entre pessoas infecciosas (I) e pessoas suscetíveis (S) vão gerando mais infetados muito rapidamente. No início da epidemia, o número de pessoas infetadas por cada infeccioso é denominado R_0 , o nú-

mero reprodutivo básico da epidemia. Se este valor, por exemplo, for $R_0=2$, então começamos com um infetado, que infeta duas pessoas, depois estas três, infetam seis, e o total de nove infetados depois infetam 18, e depois 54, 162, 486, num crescimento exponencial. Este crescimento é multiplicativo (em vez de aditivo) e é por isso que é melhor analisar o número de casos numa escala logarítmica (o crescimento exponencial é representado por reta), que transforma (para visualização) a escala multiplicativa numa escala aditiva.

Na figura 4, apresentam-se as curvas do número de pessoas em cada um dos compartimentos (S, I, R) ao longo do tempo. Para criar estas curvas, os epidemiologistas podem implementar o modelo de maneiras diferentes. Por exemplo, podem seguir cada indivíduo da população numa simulação de computador (modelos baseados em indivíduos ou agentes) ou podem utilizar equações diferenciais (como no caso da figura 4) [7]. Na primeira abordagem, pode-se simular em mais detalhe o comportamento de cada pessoa, e temos uma ideia da variabilidade dos resultados; mas rapidamente se transforma em simulações muito complexas e pesadas do ponto de vista computacional.

A utilização de equações diferenciais (caixa 1) é mais simples, mas trata os indivíduos por agregado com comportamento semelhante entre si. Para qualquer das abordagens, é necessário conhecer ou estimar parâmetros do modelo, por exemplo, qual a probabilidade de um suscetível ficar infetado quando contacta com um infeccioso ou durante quanto tempo uma pessoa exposta não fica infecciosa ou uma pessoa infecciosa não recupera.

Outra abordagem para estimar o número de casos e óbitos futuros é utilizar um modelo estatístico, em vez do modelo mecanístico. Neste tipo de análise faz-se uma projeção dos casos futuros baseada nas taxas de crescimento observadas atualmente, e podendo utilizar curvas de outros países para fazer ajustamentos. Isto é, utilizamos outros países que já podem estar numa fase mais adiantada da epidemia para calibrar as nossas projeções.



Figura 3. Esquema SEIR.

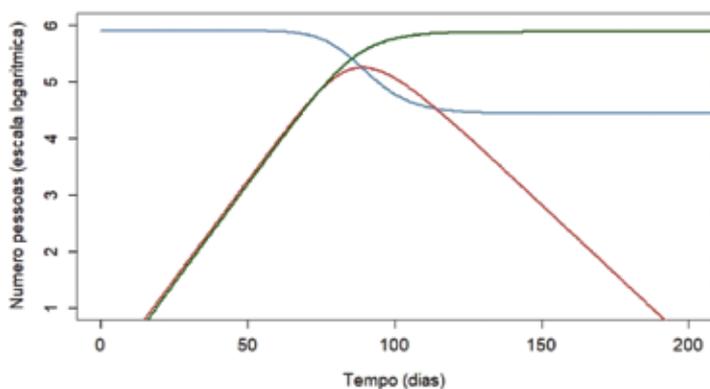


Figura 4. Curvas representando o número de pessoas em cada grupo ao longo dos dias.

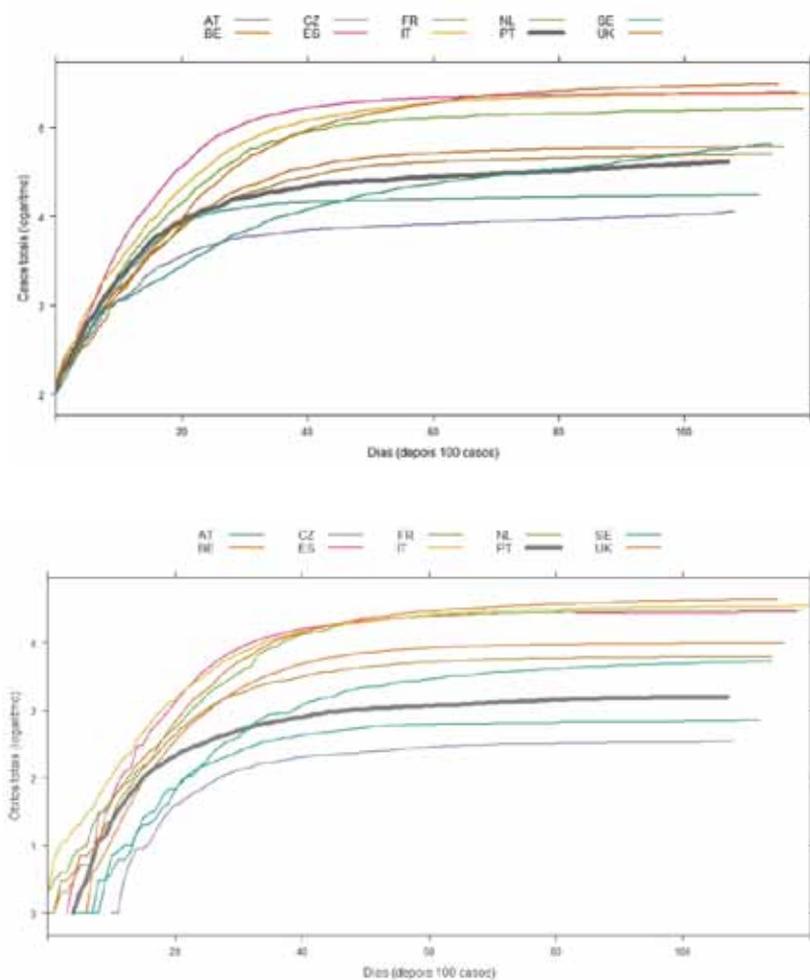


Figura 5. Casos totais e óbitos totais em Portugal comparados com alguns outros países europeus.

$$\frac{dS}{dt} = -\beta I \frac{S}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta I \frac{S}{N} - \kappa E$$

$$\frac{dI}{dt} = \kappa E - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \phi \gamma I$$

O modelo apresentado na figura 3 pode ser expresso em linguagem matemática através de equações diferenciais como estas. As equações regem os fluxos entre os diferentes compartimentos. Na verdade, os termos à esquerda do sinal de igual leem-se, por exemplo, "variação do número de S no tempo". O número de pessoas suscetíveis, S , diminui devido ao contacto com infecciosos, I , com uma taxa de infeção, β . Inicialmente, neste modelo, as pessoas expostas, E , já estão infetadas, mas não infetam ainda outros porque, por exemplo, ainda estão na fase de latência da doença. Os expostos transitam para o compartimento dos infecciosos, I , a uma taxa κ . São estes infecciosos que propagam a epidemia, infetando novas pessoas. Com o passar do tempo, a maioria dos infecciosos recupera, a uma taxa $\phi\gamma$, mas alguns $(1 - \phi)\gamma$ podem morrer (não representado). Estas equações podem ser resolvidas numericamente e o resultado é a evolução no tempo do número de pessoas em cada um dos compartimentos (S, E, I, R), como apresentado na figura 4. É importante realçar que sempre que se desenvolve um modelo, há premissas que são utilizadas, e que poderão ser verdadeiras ou não, por exemplo neste caso assumimos que as pessoas expostas, E , não são infecciosas; e assumimos que as pessoas recuperadas, R , não podem ser infetadas outra vez (se não, deveriam passar para o compartimento dos suscetíveis, S). Claro que podemos fazer modelos com outras premissas, alterando as equações de forma adequada.

Na figura 5, mostramos as curvas de casos e óbitos em Portugal em comparação com outras curvas de países europeus. Podemos projetar (isto é extrapolar) a nossa curva com ou sem ajuste pelas outras observadas.

Contudo, estimar estes parâmetros é difícil e há, por vezes, grande variabilidade nas estimativas de investigadores diferentes, porque usam modelos ou dados diferentes [ver, por exemplo, <https://covid-19.bsvgateway.org/>, <https://epiforecasts.io/covid/posts/national/portugal/>, <https://covid19-projections.com/portugal/>].

A INCERTEZA DOS PARÂMETROS-BASE

A fiabilidade dos dados é um dos problemas durante a progressão de uma pandemia. Como é que sabemos que todos os casos são detetados, especialmente quando muitos são assintomáticos? Ou que todos os óbitos são registados? Este é um problema global e é reconhecido que, no caso da Covid-19, devem existir muitos mais casos do que os detetados oficialmente através de testes. Além disso, a própria estratégia de testes e o número de testes feitos variam no tempo e, por isso, é possível um aumento de casos ser devido a um aumento de testes e à consequente deteção de casos, mais do que um verdadeiro aumento da ocorrência de casos. E também é reconhecido que países diferentes têm metodologias diferentes de definir casos, especialmente quando se trata de óbitos. Alguns países definem todos os óbitos suspeitos como devido à infeção, outros só registam óbitos com infeção nos hospitais, outros ainda só definem os óbitos como sendo devido à infeção se a causa de morte for diretamente a infeção e não, por exemplo, outras doenças subjacentes. Tudo isto torna a interpretação e a comparação de dados mais complicadas e, claro, também não facilita a utilização dos dados nos modelos.

COMO “ALTERAR” A CURVA

Voltando aos modelos matemáticos e de simulação, todos eles indicam que uma epidemia como esta se propaga até chegar a um pico de infetados. Quando já muitos dos suscetíveis foram infetados, é cada vez mais difícil um infetado contactar com um suscetível (porque existem muito menos) e o número de infetados começa a decrescer – na prática, deixa de haver infetados suficientes para propagar a infeção. No entanto, há outras maneiras de reduzir os suscetíveis, e assim chegar a um pico artificial e mais baixo, por exemplo, através da vacinação dessas pessoas ou através de medidas de contenção, como seja reduzir os contactos (as pessoas ficam em casa) ou reduzir a probabi-

lidade de infeção (as pessoas quando se encontram usam máscaras ou ficam a uma distância de segurança). É o que o estado de confinamento em Portugal ajudou a concretizar – diminuir o contacto entre infeciosos e suscetíveis, de modo a achatar a curva. O reverso deste fenómeno é que o número de pessoas suscetíveis na população é ainda elevado e há o risco de, relaxando as medidas que reduzem os contactos, reiniciar um processo exponencial de novos infetados. O aumento de casos observado em muitos países após as medidas de confinamento é, provavelmente, um reflexo desta previsão.

Por outro lado, uma das características da modelização epidemiológica é que a implementação de medidas de mitigação, como as em vigor em Portugal, altera o curso da epidemia. Assim, as previsões dos modelos dependem da efetividade dessas medidas e têm de ser atualizadas constantemente.

Ruy Miguel Ribeiro licenciou-se em Engenharia Física Tecnológica no IST e depois fez o seu doutoramento na Universidade de Oxford, Reino Unido, em *Mathematical Biology*. A partir de 2000, trabalhou durante 17 anos como *staff scientist* no Los Alamos National Laboratory, Novo México, EUA, onde desenvolveu modelos estatísticos e matemáticos para analisar a dinâmica de vírus, a resposta imunitária, vacinas e protocolos de tratamento. Tem uma experiência de mais de 20 anos no estudo de infeções humanas como o VIH, as hepatites B e C e a gripe, tendo publicado mais de 120 artigos em revistas internacionais com mais de 7000 citações. Ruy M. Ribeiro é docente e diretor do Laboratório de Biomatemática na FMUL.

REFERÊNCIAS

- [1] Anderson, R. M. e May, R. M. *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*. Oxford University Press, (1992).
- [2] Mizumoto, K. e Chowell, G. *Transmission potential of the novel coronavirus (COVID-19) onboard the diamond Princess Cruises Ship*, 2020. *Infect Dis Model* 5, 264-270, doi:10.1016/j.idm.2020.02.003 (2020).
- [3] Sanche, S. et al. "High Contagiousness and Rapid Spread of Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2". *Emerg Infect Dis* 26, doi:10.3201/eid2607.200282 (2020).
- [4] Verity, R. et al. "Estimates of the Severity of Coronavirus Disease 2019: A Model-based Analysis". *Lancet Infect*

Dis, doi:10.1016/S1473-3099(20)30243-7 (2020).

[5] Adam, D. "Special Report: The Simulations Driving the World's Response to COVID-19". *Nature* 580, 316-318, doi:10.1038/d41586-020-01003-6 (2020).

[6] Jewell, N. P., Lewnard, J. A. e Jewell, B. L. *Predictive Mathematical Models of the COVID-19 Pandemic: Underlying Principles and Value of Projections*. *JAMA*, doi:10.1001/jama.2020.6585 (2020).

[7] Eubank, S. et al. "Commentary on Ferguson, et al., Impact of Non-pharmaceutical Interventions (NPIs) to Reduce COVID-19 Mortality and Healthcare Demand". *Bull Math Biol* 82, 52, doi:10.1007/s11538-020-00726-x (2020).

[8] Ross, R., "Constructive Epidemiology," *Br Med J. Apr* 13; 1(3562), 673-674, doi: 10.1136/bmj.1.3562.673, (1929).

[9] Ross, R. e Hudson, H. P., *An Application of the Theory of Probabilities to the Study of a Priori Pathometry, Part II* Proc. R. Soc. Lond. A93,212-225, doi.org/10.1098/rspa.1917.0014 (1997).

Coordenação do espaço PT-MATHS-IN:

Paula Amaral, Universidade Nova de Lisboa, pt-maths-in@spm.pt.

MODELAÇÃO MATEMÁTICA E CONTROLO ÓTIMO DA COVID-19 EM PORTUGAL

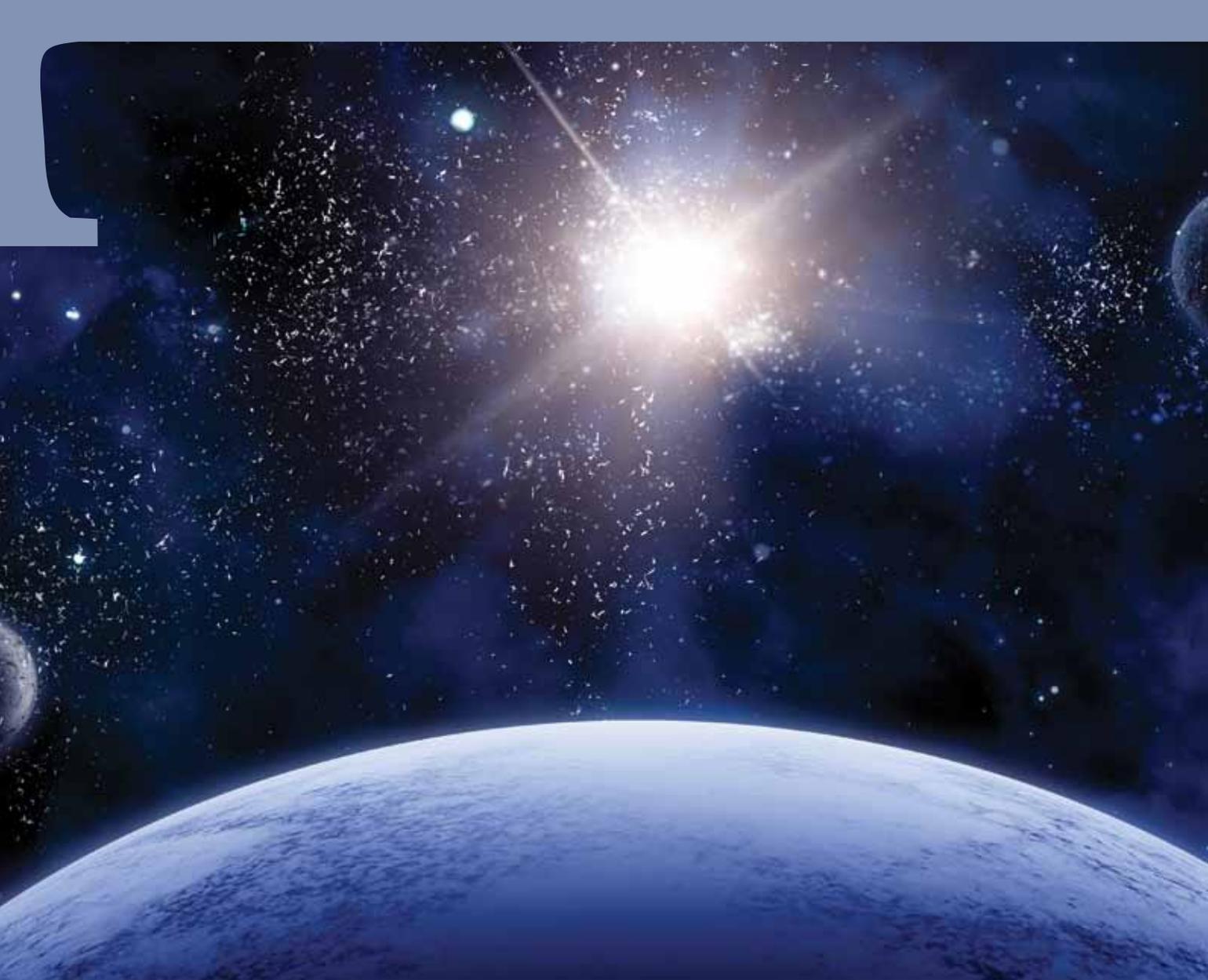
O projeto "Controlo Ótimo e Modelação Matemática da Pandemia Covid-19: contributos para uma estratégia sistémica de intervenção em saúde na comunidade" foi um dos projetos que obtiveram financiamento no âmbito da linha de apoio excecional RESEARCH 4 COVID-19 (Edição 1), criada pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) em colaboração com a Agência de Investigação Clínica e Inovação Biomédica (AICIB), na resposta à pandemia de Covid-19. O projeto, liderado por Cristiana J. Silva, da Universidade de Aveiro, tem a duração de três meses, com início a 15 de junho de 2020, e resulta de uma parceria entre a unidade de investigação CIDMA (Universidade de Aveiro) e a Unidade de Saúde Pública do Agrupamento de Centros de Saúde Pinhal Litoral, a Escola Superior de Saúde do Politécnico de Leiria, a Escola Superior de Enfermagem do Porto, a Universidade de Vigo e a Universidade de Santiago de Compostela.

Tendo por base a construção de modelos matemáticos adequados, descritos por sistemas de equações diferenciais ordinárias e/ou fracionárias, um dos objetivos do projeto é prevenir e estimar a disseminação do vírus SARS-CoV-2 para desenvolver estratégias de controlo e erradicação da Covid-19. Os modelos matemáticos serão construídos tendo por base dados epidemiológicos, socioeconómicos, cul-

turais e educacionais, nacionais e locais.

A esses modelos será aplicada a teoria do controlo ótimo, com o objetivo de definir estratégias para o controlo do surto epidémico com o menor custo possível, em colaboração com as organizações da comunidade (ACES, ARS, ULS, faculdades de Medicina, escolas de Saúde, ordens profissionais/secções regionais) e respeitando as orientações do Ministério da Saúde e da DGS.

Esta aproximação entre a matemática e as ciências da saúde é hoje claramente destacada como positiva, proporcionando um novo alcance aos estudos epidemiológicos, com mais-valias para a tomada de decisão clínica, a definição de medidas preventivas e a saúde das populações. O projeto tem por base a partilha de conhecimento e experiência das equipas que o integram. A articulação com serviços de saúde pública será fulcral para que os modelos matemáticos e as soluções de controlo ótimas encontradas possam prever os recursos necessários (por exemplo, UCIs) a curto e médio prazo. Para tal serão usadas e desenvolvidas ferramentas computacionais para a documentação dos problemas de controlo ótimo, monitorização ao longo do processo de resolução e identificação precoce de novos ciclos de infeção.



ASTRONOMIA E MATEMÁTICA NOS NOVOS MUNDOS PARA O MUNDO

JOÃO MANUEL DE MORAIS BARROS FERNANDES
UNIVERSIDADE DE COIMBRA, CITEUC, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
jmfern@mat.uc.pt

A ligação entre a Astronomia e a Matemática perde-se no tempo. Durante longos séculos, os astrónomos foram matemáticos com a celeste missão de "salvar as aparências". E de que aparências estamos a falar? Não mais do que reproduzir as observadas posições planetárias através de cálculos que confirmavam a (aparente) certeza de bem compreender sobre o que anda lá por cima. Com o passar dos séculos, o olhar foi repousando para lá do Sistema Solar, e a Astronomia manteve sempre a Matemática ao seu lado no perscrutar da imensidão do espaço sideral. Neste texto, invocaremos esta ligação secular detendo-nos, particularmente, sobre um exemplo recente desta parceria: a descoberta do primeiro planeta orbitando uma estrela que não o Sol, que foi "laureada" com o Prémio Nobel da Física de 2019.

1. INTRODUÇÃO

A Astronomia é uma área do saber profundamente interdisciplinar tendo, em especial, na Física e na Matemática as suas companheiras de caminhada na nobre missão de aprofundar o conhecimento do Universo. As pontes com a Física são permanentes, em particular desde do séc. XIX com o advento da Astrofísica. Por outro lado, a Astronomia e a Matemática têm mantido uma relação secular de frutuosa parceria, decisiva para o que hoje sabemos do Universo. É dessa relação que vamos falar neste texto. Parece quase um exercício sem sentido tentar expor exemplos que provem esta parceria, tal é a umbilical relação. O que seria da Astronomia sem a linguagem e o raciocínio matemáticos que lhe permitem teorizar, medir e prever os fenómenos celestes? Não há descoberta recente, ou passada, do Universo em que não se encontre a contribuição da Matemática. Em todo o caso, há exemplos in-

contornáveis em que esta parceria é mais evidente e que são muitas vezes usados para ilustrar tal relação. Pelos finais do séc. III a.C., Eratóstenes, observando a altura do Sol e usando semelhança de triângulos, fez a primeira estimativa do raio da Terra; as leis estabelecidas por Johannes Kepler, em 1609 e em 1619, são relações empíricas simples que permitem pôr em evidência propriedades fundamentais do movimento dos planetas; em meados do século XIX, Urbain Jean Joseph Le Verrier, a partir das perturbações observadas na órbita de Urano, estimou a posição onde deveria estar o corpo perturbador (usando um método de inversão, diríamos hoje), e em 1846 Johann Gottfried Galle, apontando o telescópio para o local previsto, descobriu o oitavo planeta do Sistema Solar, Neptuno. As teorias da gravitação, tanto a "construída" por Isaac Newton (nos finais do séc. XVII) como a sua generalização por Albert Einstein, já no séc. XX, têm incontáveis contribuições da geometria das variedades, do cálculo tensorial e da topologia.

Mas os exemplos da parceria "astromatemática" não ficam só no passado e continuam até aos dias de hoje. Tomemos como referência, por exemplo, as descobertas do Universo cujos investigadores venceram o Prémio Nobel da Física. Entre outros, podemos referir que, em 1967, Hans Albrecht Bethe foi distinguido pela sua contribuição para o estudo da produção de energia nas estrelas; em 1978, Arno Allan Penzias e Robert Woodrow Wilson foram premiados pela descoberta da radiação cósmica de fundo, cerca de uma década antes; já em 2017, Rainer Weiss, Barry Barish e Kip Thorne venceram o prémio pela primeira observação das ondas gravitacionais (algo há muito previsto pela Teoria da Relatividade Geral), que terão resultado de um evento cataclísmico como a colisão de dois buracos negros. Em todos estes casos encontraremos, sem dificuldade, as contribuições da Matemática. Mas não nos é fácil imaginar um tão bom o exemplo ilustrativo como o da descoberta do primeiro planeta extrassolar - um planeta que orbita uma estrela que não o Sol, razão de um dos prémios do ano passado. A 8 de outubro de 2019, a Academia Real das Ciências da Suécia anunciou o Prémio Nobel da Física justificando a escolha *for contributions to our understanding of the evolution of the universe and Earth's place in the cosmos*. Os laureados foram três: James Peebles, da Universidade de Princeton, e Michel Mayor e Didier Queloz, ambos da Universidade de Genebra. A Academia evidenciou os trabalhos de cosmologia teórica do professor norte-americano e a descoberta do primeiro planeta extrassolar, em torno de uma estrela

parecida com o Sol, pelos astrónomos suíços. Na nota de imprensa, divulgada nesse dia, a Academia sustenta que os trabalhos dos três investigadores mudaram, para sempre, a nossa conceção do mundo. Sem que isso seja uma qualquer desconsideração sobre o seminal trabalho de James Peebles, neste texto vamos deter-nos sobre os planetas extrassolares e como a sua descoberta nos conduz a uma moderna ilustração da parceria entre a Astronomia e a Matemática.

2. EM BUSCA DE OUTROS MUNDOS

2.1. A teoria: do Efeito Doppler à Mecânica Celeste

A descoberta do primeiro planeta extrassolar que a academia sueca refere remonta a 1995 e a história é contada por Mayor e Queloz numa publicação na prestigiada revista *Nature*¹. Neste artigo, de apenas cinco páginas, os autores apresentam o seu mais importante resultado decorrente de uma década de paciente observação de mais de uma centena de estrelas: um planeta a orbitar uma estrela que não o Sol. A estrela em causa chama-se 51 Pegasi e situa-se na constelação de Pegasus (daí o seu nome), estando a cerca de 50 anos-luz² da Terra, algo que à escala cósmica deve ser considerado nas "nossas" vizinhanças. O que tornou 51 Pegasi particularmente interessante é o facto de ser uma estrela com características globais (tais como a massa, o diâmetro e a temperatura de superfície) muito parecidas com as do Sol.

Há séculos que a Humanidade esperava esta confirmação. E a certeza de que ela viria reside num raciocínio quase pueril: se a nossa galáxia – a Via Láctea – tem 100 mil milhões de estrelas, não seria expectável que só o Sol fosse contemplado com essas riquezas chamadas "planeta". Tal como defendeu o malogrado Giordano Bruno (1548-1600), o Universo deveria ter incontáveis mundos como o nosso. Mas as surpresas desta descoberta não se ficaram pelo simples anúncio (já de si muito, diga-se). O próprio planeta, que levou o nome de 51 Pegasi-b, parecido com Júpiter – e por isso, gasoso – trazia consigo mais perguntas do que respostas (tal como veremos neste texto).

Vamos agora tentar perceber como foi possível esta deteção planetária e o método usado. A ideia óbvia seria procurar um pequeno ponto brilhante – o planeta – em torno da estrela. Ocorre que a luminosidade de um planeta como Júpiter é cerca de mil milhões de vezes inferior à luminosidade de uma estrela como o Sol, na zona visível do espectro eletromagnético³. Ou seja, algo indetectável, para planetas fora do Sistema Solar, nos idos de 1995.

Na impossibilidade de observar diretamente o planeta, Mayor e Queloz olharam para a estrela, procurando nesta manifestações da presença de tal planeta. Que manifestações? Por exemplo, se a estrela apresenta algum tipo de movimento periódico. Este movimento pode ser procurado, olhando para a velocidade radial da estrela, V_r , ou seja, a componente da velocidade segundo a direção de observação Terra-Estrela. Esta velocidade é determinada por observação através do Efeito de Doppler para radiação eletromagnética que relaciona V_r de uma fonte em movimento, em relação ao observador, com a diferença entre o comprimento de onda observado (de uma dada riscas no espectro da estrela), λ_o , e o correspondente valor medido em laboratório, λ , tal que,

$$\frac{\lambda_o - \lambda}{\lambda} = \frac{V_r}{c}$$

onde c é a velocidade da radiação eletromagnética ($c \simeq 300\,000$ km/s). Sabemos que a fonte em movimento se afasta do observador se $V_r > 0$ e aproxima-se no caso contrário. Na prática, nesta técnica de espectroscopia, são usadas várias riscas, o que permite estimar V_r com maior precisão. A contínua observação do espectro da estrela, durante um período de tempo, permite detetar se há variação periódica de V_r , algo que poderá ser uma indicação da presença de um objeto companheiro. Para melhor compreender a referida variação periódica, vamos valer-nos da Mecânica Celeste, que assenta na Teoria da Gravitação Universal de Newton.

Abaixo, resumimos o denominado problema dos dois corpos, que permite descrever os movimentos de corpos de massa m e M , ambos em órbita em torno de centro de massa comum, CM, que ocupa um foco de ambas as elipses (figura 1). As dimensões das respetivas órbitas, estrela e planeta, estão relacionadas por:

$$a_E = (a_E + a_P) \times \frac{m}{M + m}$$

onde a_P e a_E são os semieixos maiores das órbitas do planeta e da estrela, respetivamente.

Como $M \gg m$, a elipse da órbita da estrela é claramente interior à órbita do planeta. Reside, talvez, aqui o sentido da expressão (que também usaremos neste texto) "o planeta em movimento em torno da estrela".

Em abono da verdade, num sistema de referência centrado em CM, ambos têm um movimento de translação, descrevendo o planeta uma órbita de maior dimensão. Ou seja, se a estrela tem, ela própria, um movimento de translação (que tem como consequência a variação periódica da sua V_r), é porque tem algo, que tal como ela, roda

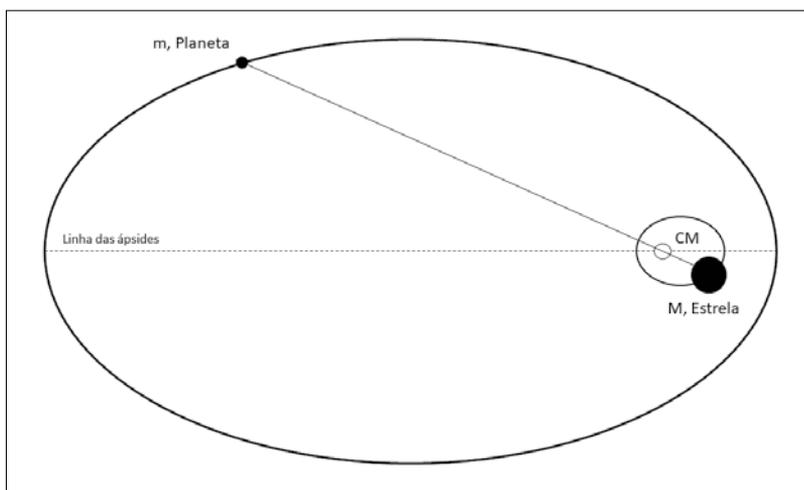


Figura 1. Os dois corpos: órbitas de uma estrela e de um planeta, em torno do centro de massa comum, CM. A figura está construída para destacar o caso particular que aqui queremos tratar (M diz respeito à estrela e m diz respeito ao planeta), embora possa ser generalizada para qualquer sistema binário em que os astros são "reduzidos" a pontos materiais. Adaptado de "ExoFit" (ver referência abaixo).

em torno de CM.

A Mecânica Celeste permite chegar a uma expressão para a velocidade radial (em função do tempo, t), e para cada um dos objetos, a saber

$$V_r(t)_k = V_0 + K_k \times [\cos(v(t)_k + \omega_k) + e_k \cos \omega_k]$$

$$K_k = \frac{[M \text{ ou } m] \times \sin i_k}{(M+m)^{1/2}} \times \frac{G^{1/2}}{(a_E + a_P)^{1/2} \sqrt{1-e_k^2}}$$

em que o índice k pode tomar as letras P (planeta) ou E (estrela), V_0 é a velocidade do CM em relação ao observador (e por isso, comum a ambos), K_k é a amplitude da velocidade radial do astro, G é a constante de Gravitação Universal e $v(t)_k$ é a anomalia verdadeira, que se define como o ângulo (no sentido anti-horário), no instante t , entre a direção CM-astro e o eixo de simetria principal das elipses (denominado "linha das ápsides", igualmente comum aos dois astros). As restantes letras, além da já abordada a_k , representam elementos que definem órbita do astro (ver figura 2). Por razões de simplificação da figura, representa-se apenas um dos corpos, a saber,

► e – excentricidade da órbita = $\sqrt{(a^2 - b^2)/a^2}$, em que b é o semieixo menor da órbita. Tratando-se de uma elipse, temos $e < 1$;

► i – inclinação. Ângulo entre o plano orbital e o plano de referência, a saber o plano perpendicular à direção de observação, $i \in [0, 180]$;

► ω – argumento do periastro. Ângulo entre a reta de interseção dos planos orbital e de referência - linha dos nodos – e a linha das ápsides, $\omega \in [0, 360]$. O periastro é o ponto da órbita em que o astro está mais próximo de CM.

A demonstração de $V_r(t)_k$ está fora do âmbito de um texto com um número reduzido de páginas como este¹. Em todo o caso, podemos resumir dizendo que se determinam as equações do movimento do astro e se escreve o vetor velocidade correspondente em função dos elementos orbitais projetando-se, posteriormente, o referido vetor segundo a direção de observação (envolvendo para isso a inclinação i).

Tal como foi referido, não é possível aceder aos valores da velocidade radial do planeta. Desta forma, no processo de deteção de planetas extrassolares é resolvido um problema inverso, ou seja, conhecendo V_r da

¹ "A Jupiter-mass companion to a solar-type star", 1995, M. Mayor e D. Queloz, *Nature* 378, p.355.

² Um ano-luz corresponde à distância percorrida pela luz durante um ano, ou seja 9.46×10^{12} km.

³ Na zona do infravermelho, a diferença é "apenas" de 100 000 vezes, algo que veio a ser muito importante na recente observação direta de planetas extrassolares.

⁴ Para mais informações, consultar por exemplo *Détection des exoplanètes par mesures de vitesses radiales*, 2005, François Bouchy, Ecole CNRS de Goutelas XXVIII, Edité par J.L. Halbwachs, D. Egret et J.M. Hameury, p. 27, bem como as referências.

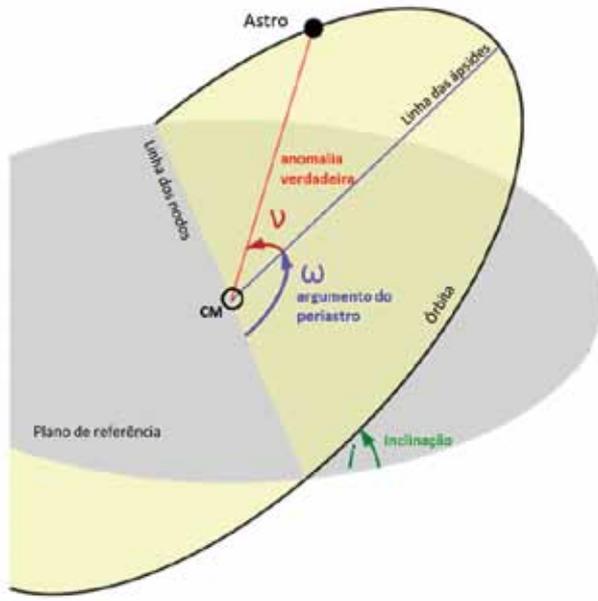


Figura 2. Órbita de um astro em torno do centro de massa. Adaptado de Wikipedia (https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_elements).

estrela por observação e num certo intervalo de tempo, a equação $V_r(t)_E$ é ajustada ao conjunto das observações, permitindo assim estimar elementos orbitais do movimento da estrela e do planeta em torno do CM. Temos, assim, um problema clássico de otimização matemática que visa conhecer V_0, K, a, e e ω . Importa ainda saber o valor de t num instante inicial – necessário para o cálculo de $v(t)$ – que se arbitra ser o tempo de passagem no periastro, designado por τ . Assim, o tempo de passagem no apoastro (por analogia, ponto da órbita em que o astro está mais afastado de CM) é igual a $\tau + \frac{P}{2}$, onde P é o respetivo período orbital.

Podemos intuir que há uma relação de dependência entre os elementos orbitais da estrela e do planeta. Em cima já mostramos a relação entre os respetivos semieixos maiores. Note-se que P é o mesmo para ambos os astros. Por outro lado, o binómio $\{a_p, a_E\}$ e P não são independentes, estando relacionados pela bem conhecida 3.ª Lei de Kepler,

$$\frac{P^2}{(a_E + a_p)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}.$$

A título de exemplo, refira-se que, no Sistema Solar, Júpiter tem uma órbita, em torno de CM, de semieixo maior de

5.2 U.A e com um período de cerca de 12 anos. Em contrapartida, neste mesmo período de tempo, o Sol faz uma órbita em torno do mesmo CM de semieixo maior 0.005 U.A. (aproximadamente o valor do raio do Sol ou um pouco menos do que duas vezes a distância Terra-Lua). Por outro lado, é expectável que a inclinação seja a mesma para as duas órbitas ($i_p = i_E$) pois há um único plano orbital, que é o mesmo da órbita do planeta em torno da estrela, se considerarmos um sistema de referência centrado nesta. É menos óbvio, mas pode demonstrar-se, que as excentricidades das órbitas sejam iguais ($e_p = e_E$). De facto, pela relação dos semieixos maiores (em cima), mostra-se que $a_p \propto a_E$. Ou seja, a órbita do planeta é (em primeira aproximação) uma expansão homogênea da órbita da estrela, preservando assim o valor da excentricidade. Por outro lado, a estrela atinge o seu periastro no mesmo instante em que o planeta passa no seu periastro (e vice-versa), ou seja, $\tau_p = \tau_E$. Daqui resulta também a relação entre os respetivos argumentos do periastro, que se encontram desfasados de "meia-órbita", ou seja, $|\omega_p - \omega_E| = 180^\circ$.

O que acabámos de referir resume os fundamentos teóricos do movimento dos dois corpos que consideramos mais relevantes para o objetivo deste texto. Destacamos em especial a velocidade radial, pois é exatamente essa quantidade que é medida pelas observações e faz, deste modo, a ligação da teoria com as observações.

É de salientar que o problema dos dois corpos não é exclusivo de um sistema estrela-planeta. Poderia ser planeta-planeta/satélite ou mesmo estrela-estrela, como é o caso dos sistemas binários estelares. Porém, no caso de um sistema binário de estrelas, a amplitude K , de ambas as estrelas, atinge valores da ordem de dezenas de km/s. No caso de um sistema estrela-planeta, este valor é da ordem dos poucos m/s para a estrela. Por exemplo, no Sistema Solar, o Sol na sua órbita em torno de CM tem uma velocidade da ordem de 12 m/s. Estes reduzidos valores justificam por que razão a descoberta do primeiro planeta extrassolar aconteceu só no final do séc. XX: foi necessário tempo para que os espectrógrafos fossem suficientemente sensíveis para uma medição de valores tão pequenos. Podemos, por abuso de linguagem, considerar que o valor da V_r da estrela é uma espécie de "perturbação" provocada pelo planeta. Voltando ao Sistema Solar, o movimento do Sol em torno do CM é condicionado, principalmente, por Júpiter. A Terra, por exemplo, contribui com um valor na ordem de 10 cm/s para a velocidade do Sol em torno de CM. A busca de planetas extrassolares tem, assim, uma analogia com a, já referida, descoberta

de Neptuno, que também envolveu o estudo das perturbações deste na órbita de Urano.

2.2 A descoberta de 1995 e as seguintes...

Retomamos, agora, o trabalho de Mayor e Queloz. Após uma monitorização, ao longo de dez anos, da V_r de 142 estrelas com características parecidas com o Sol, em busca da variabilidade periódica da velocidade, a equipa concentrou a atenção sobre o pequeno grupo de estrelas que mostrou tais variações, do qual fazia parte 51 Pegasi. Assim, foram refeitas observações para esta estrela, entre abril de 1994 e dezembro de 1995⁵. A figura 3 mostra o conjunto das observações da velocidade radial da estrela, no referido período, e organizadas em função da fração do período orbital, neste caso 4.2293 dias: o intervalo para a fase ϕ de $[0, 1] = [0, 4.2293]$ dias⁶. Nestas observações é retirada a componente de V_r relativa à velocidade de translação da Terra em torno do Sol. A linha a cheio, que acompanha os pontos, é o melhor ajuste, no sentido dos mínimos quadrados, da equação da V_{rEr} ao conjunto de todas as observações. Note-se que, tal como dissemos, temos seis incógnitas (V_0, K, a, e, ω e τ) e um número maior de observações, no caso algumas dezenas. Assim, foi possível à equipa estimar outros elementos da órbita da estrela 51 Pegasi e, portanto, igualmente do seu planeta. No caso, foram estimados os valores para o semieixo maior do planeta e para a sua massa

$$a_p \times \text{sen } i \approx 3400000 (\pm 200000) \text{ km}$$

$$m \times \text{sen } i = 0.47 (\pm 0.02) M_J,$$

onde M_J é a massa de Júpiter.

Este processo de detecção de planetas extrassolares ficou conhecido como o "método das velocidades radiais". De referir que o método não permite estimar $\text{sen } i$. Em todo o caso, estes valores foram suficientes para espantar a comunidade científica já de si boquiaberta com a descoberta do primeiro planeta: como é possível conceber que um planeta gasoso orbite a sua estrela a uma distância desta mais pequena do que Mercúrio se encontra do Sol (com um período orbital de pouco mais de quatro dias)? E como compatibilizar estes resultados com os modelos da formação do Sistema Solar? Estava assim colocado em causa o velho paradigma que defendia que os sistemas planetários seriam como o nosso: os planetas gasosos deveriam estar longe da estrela e os telúricos no interior. Logo no primeiro caso extra Sistema Solar, as teorias sobre o assunto arriscavam cair como castelos de cartas. E a

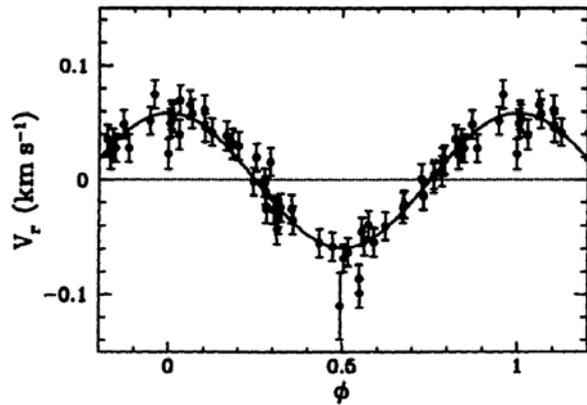


Figura 3. Velocidade radial de 51 Pegasi: observações e curva teórica. Reprodução autorizada da figura 5 de Mayor e Queloz (1996).

ciência só fica a ganhar com isso, pois houve que repensar muito do que se conhecia!

Evidentemente, a grandes resultados exigem-se grandes provas. A este propósito, gostaríamos de introduzir uma nota pessoal. Tal como é referido, a publicação do artigo da revista *Nature*, em novembro de 1995, de Mayor e Queloz, marca o anúncio da descoberta ao mundo. Porém, o anúncio à comunidade científica aconteceu um mês antes em Florença durante o congresso internacional *Cool Stars, Stellar Systems, and the Sun: Ninth Cambridge Workshop*. A participar nesse congresso, estávamos na sala quando Michel Mayor, numa comunicação de poucas dezenas de minutos, apresentou a descoberta e a metodologia seguida. A lembrança dessa comunicação está ainda bem presente. No final da intervenção, a sala dividiu-se em dois: de um lado, os que reagiram com genuína alegria (no qual, confesso, nos incluímos) e, do outro, um entusiasmo contido e algo cético. Umas e outras (reações) são perfeitamente expectáveis e até desejáveis: não se pode ficar indiferente a tamanha descoberta, mas há que guardar a frieza para confirmar se a descoberta o

⁵ No artigo da *Nature* os autores apenas usaram observações entre setembro de 1994 e setembro de 1995.

⁶ "A search for substellar companions to solar-type stars via precise Doppler measurements: a first Jupiter mass companion detected", 1996, M. Mayor e D. Queloz, em *Cool Stars, Stellar Systems, and the Sun 9*, Astronomical Society of the Pacific Conference Series 109, p.35.

⁷ Para quem desejar aprofundar a temática de como o Sistema Solar se "posiciona" perante a família de novos sistemas planetários, recomenda-se a recente revisão "Solar System Physics for Exoplanet Research", Horner et al., 2020 (<https://arxiv.org/abs/2004.13209>).

é de facto. Assim, finda a comunicação, foram colocadas várias questões a Michel Mayor, quase todas na mesma linha: "Será que a variabilidade de V_r observada não pode ter outra causa?" E a resposta é, em tese, sim. Há outros fenómenos estelares (que se observam, por exemplo, na superfície do Sol) que podem provocar efeitos que simulam essa variabilidade. São disto exemplo as oscilações sísmicas do gás ou a presença de manchas escuras. Porém, as respostas de Mayor foram sempre no mesmo sentido: ele e Queloz tinham estudado essas possíveis causas e tinham-nas descartado. Para eles não restavam dúvidas: era mesmo um planeta!

Mas as dúvidas mantiveram-se na cabeça de muitos. No já referido artigo da *Nature* está incluída uma "Note added in revision", ou seja, um comentário da responsabilidade dos autores que é colocado quando o artigo está já numa fase final da revisão por pares (e às portas da publicação). O comentário diz *After the announcement of this discovery at a meeting held in Florence, independent confirmations of the 4.2-day period radial-velocity variation were obtained in mid-October by a team at Lick Observatory, as well as by a joint team from the High Altitude Observatory and the Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics. We are deeply grateful to G. Marcy, P. Butler, R. Noyes, T. Kennelly and T. Brown for having immediately communicated their results to us.* Esta deteção independente teve uma importância de primeira grandeza para a credibilização da descoberta. Mesmo assim as dúvidas não foram, ainda, dissipadas. A título de curiosidade podemos referir que o próprio número da revista *Nature*, onde o artigo foi publicado, trouxe para a capa a descoberta com o título "A Planet in Pegasus?". Este ponto de interrogação confirma as reservas que havia. De facto, dois anos após esta descoberta, David Gray (da Universidade Western Ontario, no Canadá) publicou na *Nature* um artigo com o sugestivo título "Absence of a planetary signature in the spectra of the star 51 Pegasi" no qual punha claramente em causa a descoberta de Mayor e Queloz. Hoje a existência de 51 Pegasi-b está perfeitamente estabelecida e aceite pela comunidade. Porém, é relevante salientar que fundamentadas dúvidas perante os resultados novos são muito importantes para a ciência, pois obrigam à solidificação das provas de quem defende a descoberta e este processo pode ser longo. Quando o Nobel foi atribuído a Mayor e Queloz foi voz corrente, na comunicação social, a pergunta sobre as razões que terão levado a academia sueca a esperar quase 25 anos para premiar tão importante descoberta. Uma das razões pode passar pelo que atrás dissemos: a

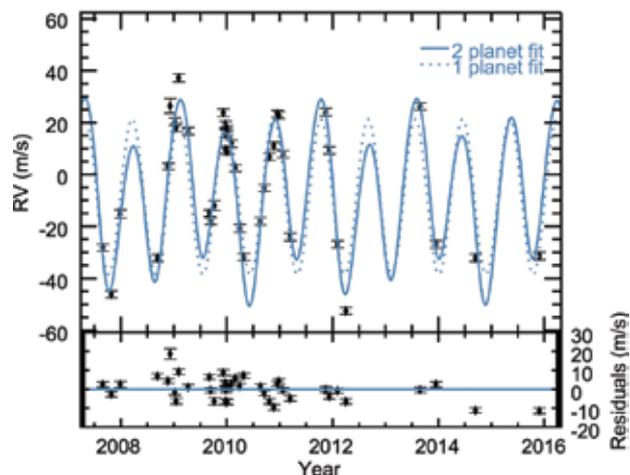
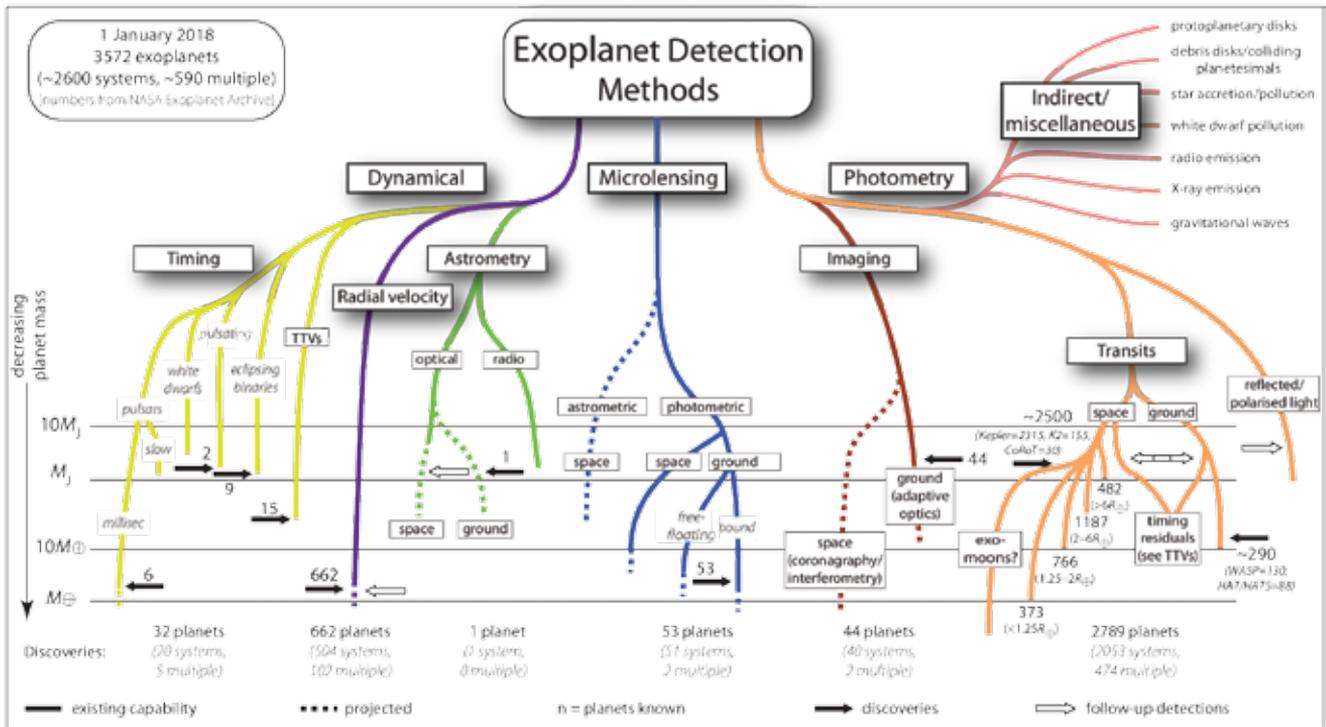


Figura 4. Velocidade radial da estrela HD 33142: observações e curvas teóricas para um ajuste com um planeta (linha a tracejado) e com dois planetas (linha a cheio). O painel inferior apresenta as diferenças (resíduos) entre a curva teórica com dois planetas e as observações. Reprodução autorizada da figura 23 de Luhm et al. (2019).

ciência necessita do seu tempo.

Que mais se pode ainda dizer sobre este sistema planetário? Por exemplo, a estrela 51 Pegasi, tem mais planetas ou 51 Pegasi-b é único? Não se sabe. Até agora, neste sistema planetário, apenas foi descoberto um. Pode intuir-se que se a estrela 51 Pegasi tiver mais planetas, a contribuição destes para a velocidade radial deverá ser pequena (ou porque estão muito longe da estrela ou porque são muito pequenos) pois, como vimos, as observações reproduzem bem uma única função $V_r(t)_E$. O método das velocidades radiais é, particularmente, sensível a planetas que se encontrem perto da estrela e tenham massa elevada. Tal como podemos constatar, pela fórmula da amplitude da velocidade radial, K_E é tanto maior quanto maior for a massa do planeta e quanto menor for o semieixo maior da órbita da estrela. É por isso natural que 51 Pegasi-b tenha exatamente estas características.

Desde 1995 até aos nossos dias, as deteções de outros mundos não mais pararam. Hoje são conhecidos perto de 4300 planetas, sendo que há mais de 700 sistemas planetários, ou seja, sistemas onde foram detetados dois ou mais planetas. Eis um exemplo: na figura 4 apresentam-se as observações da velocidade radial da estrela HD 33142. Os autores apresentam as tentativas de ajustar as observações de V_r com um ou com dois planetas e neste



caso a presença de um único planeta não parece ser a melhor solução matemática, pois os dois planetas ajustam melhor as observações⁸.

No caso dos dois planetas, o ajuste é feito usando uma função semelhante à que, em cima, definimos para $V_r(t)$ da estrela:

$$V_r(t) = V_0 + K_{E1}[\cos(v(t)_{E1} + w_{E1}) + e_{E1} \cos w_{E1}] + K_{E2}[\cos(v(t)_{E2} + w_{E2}) + e_{E2} \cos w_{E2}]$$

onde os índices $E1$ e $E2$ se referem à contribuição dos planetas 1 e 2 para a V_r da estrela. Por outro lado, a comparação das figuras 3 e 4 permite uma constatação particularmente interessante: a amplitude de V_r é muito parecida com a de 51 Pegasi, mas as barras de erro das observações diminuíram quase dez vezes. Pode, assim, ilustrar-se também a evolução da sensibilidade instrumental em 25 anos. Em 2008, Sreekumar Thaithara Balan e Ofer Lahav construíram um software de nome ExoFit para determinar os elementos orbitais de um sistema estelar que comporte um ou dois planetas, usando o método de Markov Chain Monte Carlo para o ajuste da curva teórica de V_r às observações. O código e a respetiva informação são de livre acesso⁹. Portanto, no caso de as observações de velocidade radial de uma dada estrela não poderem ser

Figura 5. "Cartografia" dos métodos de deteção de planetas exatrasolares: os números das deteções estão atualizados até 1 de janeiro de 2018. Reprodução autorizada por Michael Perryman. A versão atualizada encontra-se em *The Exoplanet Handbook*, 2020, M. Perryman, Cambridge University Press.

bem reproduzidas por ajustes com um planeta, importa procurar se o acordo pode ser obtido com um número de planetas superior, utilizando, em primeira aproximação, uma metodologia semelhante: somando tantas funções quantas as necessárias para melhor reproduzir as observações. Foi assim que, em 2011, uma equipa de 14 astrónomos, liderada por Christophe Lovis (Universidade de Genebra), anunciou a descoberta de um sistema planetário com sete planetas a orbitarem a estrela HD 10180¹⁰. Esta estrela tem aproximadamente a mesma massa e a

⁸ "Retired A Stars and Their Companions.VIII. 15 New Planetary Signals around Subgiants and Transit Parameters for California Planet Search Planets with Subgiant Hosts", 2019, Luhn et al., *The Astronomical Journal* 157, 149.

⁹ "ExoFit: Orbital Parameters of Extra-solar Planets from Radial Velocities", <http://luserver2.star.ucl.ac.uk/~lahav/exofit.html>.

¹⁰ "The HARPS search for southern extra-solar planets XXVIII. Up to seven planets orbiting HD 10180: probing the architecture of low-mass planetary systems", 2011, Lovis et al., *Astronomy and Astrophysics* 528, A112.

mesma idade do Sol. Trata-se de um dos sistemas com mais planetas descobertos até à data. Desta equipa fizeram parte M. Mayor e D. Queloz, mas também dois astrónomos portugueses, Alexandre Correia (Universidade de Coimbra¹¹) e Nuno Santos (Universidade do Porto). Aproveitamos a oportunidade para salientar o papel que a astronomia portuguesa tem tido nesta área, a nível internacional, muito por força do trabalho destes astrónomos e seus colaboradores. Um destaque particular para Nuno Santos que, em Portugal e desde há vários anos, lidera um reconhecido grupo no estudo de planetas extrassolares. Tratam-se de excelentes exemplos da qualidade da ciência nacional. Esta área dos planetas extrassolares tem ainda sido uma oportunidade de colaboração entre astrónomos profissionais e astrónomos amadores (vulgarmente denominada por colaboração PRO-AM). E Portugal não foge à regra. Referimos aqui o exemplo de João Gregório (Grupo Atalaia), que tem integrado equipas internacionais (nomeadamente no âmbito do consórcio KELT, Kilodegree Extremely Little Telescope¹²), contribuindo, com as suas observações, para encontrar novos planetas.

Dos mais de quatro milhares de planetas extrassolares descobertos até à data, cerca de 800 foram detetados pelo método das velocidades radiais. As restantes deteções usaram outros métodos, tais como o método dos trânsitos (em que são procuradas pequenas diminuições periódicas do brilho da estrela, causadas pela passagem do planeta à sua frente) ou a deteção direta (onde se procura a radiação eletromagnética vinda diretamente do planeta, algo impossível em 1995). Hoje conhecem-se umas dezenas de planetas descobertos por imagem direta. Na figura 5 mostramos a panóplia de métodos que têm dado novos mundos ao mundo. Não podemos, neste texto, detalhar todos estes métodos. Em contrapartida, remetemos os interessados para a *Enciclopédia dos Planetas Extrassolares*¹³ que, além de informação genérica sobre o tema, é atualizada diariamente com as novas descobertas, incluindo detalhes das características dos planetas e das respetivas estrelas.

A terminar, pode perguntar-se para onde caminha esta busca contínua de planetas extrassolares. Além de outras vertentes, há algo que é incontornável ter em conta: encontrar sinais de vida noutros locais do Universo. Os planetas extrassolares são, como se compreenderá, locais particularmente interessantes para esta busca. Hoje sabemos já da existência de planetas parecidos com a Terra em torno de estrelas parecidas com o Sol, como é

o caso do planeta Kepler-452 b. Os mais otimistas dirão que é uma questão de tempo (pouco) até se detetar vida nesses longínquos mundos. Os mais realistas dirão que esse tempo ainda não é para já. Em todo caso, temos razões para esperar com ansiedade e entusiasmo o que o futuro nos trará.

3. COMENTÁRIOS FINAIS

Apresentamos neste texto um exemplo de parceria, que cremos ser feliz, entre a Astronomia e a Matemática. Habitualmente este tipo de exercício põe em evidência como a Matemática auxiliou a Astronomia na resolução dos seus problemas. Este texto é escrito, na substância, nesta linha de pensamento. A Astronomia, de facto, cresceu graças ao apoio que a Matemática lhe tem dado e para isso conseguimos encontrar vários exemplos ilustrativos. Mas há uma outra perspetiva. Será que a Matemática vai buscar à Astronomia aspetos para o seu próprio desenvolvimento? Como é que a Astronomia tem ajudado no progresso da Matemática, além de servir como terreno de aplicação? A resposta é menos óbvia. Mas podemos deixar algumas linhas de reflexão. A Astronomia tem (em particular, hoje em dia) características muito especiais. Por um lado, lida com quantidades enormes de informação que necessitam de técnicas de arquivo e de processamento realmente potentes. Existem dezenas de telescópios, no Espaço e em Terra, a monitorizar o firmamento 24 horas por dia. Assim, chegam-nos diariamente "gigas-e-gigas" de dados que terão de ser guardados esperando o tratamento. A título de exemplo, pode referir-se o projeto SKA (*Square Kilometre Array*), do qual Portugal é membro, que prevê, para os próximos anos, a construção de dezenas de antenas de rádio-telescópios na África do Sul e na Austrália, e que produzirá, por ano, um conjunto de dados que preencheria a capacidade de um milhão de computadores portáteis com 500 GB de memória cada. Além disso, para extrair a informação de tão grande quantidade de dados, exigem-se avançados processos de otimização e de estatística. Assim, áreas como o "data mining", o "big data" ou as redes neuronais poderão encontrar nos casos astronómicos inspiração para testar os seus próprios limites. Por outro lado, a Astronomia lida, muitas vezes, com fluxos muito reduzidos de radiação eletromagnética que exigem um tempo de observação longo (para "juntar" luz suficiente) e por isso métodos de tratamento e processamento de imagem suficientemente avançados para "encontrar" informação onde quase só há ruído. E não é esta a missão da Astronomia, da Matemática e da ciência em geral?

A saber, trazer luz onde há penumbra ou escuridão.

Quero exprimir a minha gratidão à Doutora Margarida Camarinha (Professora do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra) pelos pertinentes e muito úteis comentários e sugestões que teve a amabilidade de me transmitir. O CITEUC é financiado pela FCT através do acordo UID/Multi/00611/2019.

Dedico este texto à Joana, ao João Tiago e à Joana Marta.

¹¹ À data da descoberta, A. Correia encontrava-se na Universidade de Aveiro.

¹² "Kilodegree Extremely Little Telescope", <https://keltsurvey.org/>.

¹³ "The Extrasolar Planets Encyclopaedia", <http://exoplanet.eu/>.

SOBRE O AUTOR

João Manuel de Morais Barros Fernandes é Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra desde 1999. Licenciou-se em Física/Matemática Aplicada, ramo Astronomia, pela Universidade do Porto (1991) e é doutorado em Astrofísica e Técnicas Espaciais pela Universidade de Paris VII (1996). Obteve a agregação em Física, ramo Astrofísica, pela Universidade de Coimbra em 2014. As suas áreas de investigação são a formação e evolução das estrelas, física solar e a história da Astronomia em Portugal. Publicou cerca de 80 trabalhos de investigação em revistas internacionais, atas de congressos científicos e capítulos de livros. Tem desenvolvido atividade de divulgação científica (nomeadamente com palestras em escolas) e foi o single point of contact nacional para o Ano Internacional da Astronomia 2009, por nomeação da União Astronómica Internacional. Recebeu a distinção "Caras de Futuro" da revista Visão em 2013. Foi subdiretor da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra com o pelouro do Observatório Geofísico e Astronómico da Universidade de Coimbra (2013-2018) e foi coordenador do Centro de Investigação da Terra e do Espaço da mesma universidade (2015-2018).



Exposições (ma)temáticas da SPM.

Disponíveis para exibição nas escolas,
bibliotecas ou instituições similares*.

Mais Informações em
www.spm.pt/exposicoes

*A requisição das exposições tem custos de manutenção.



GONÇALO MORAIS CONVERSA COM STEPHEN SMALE



GONÇALO MORAIS
Instituto Superior de
Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

Stephen Smale é um daqueles matemáticos que todos, ou quase todos, conhecem e, todos os que o conhecem, sabem um ou dois aspetos peculiares da sua biografia: a sua luta contra a guerra do Vietname e o facto de ter uma posição de destaque nos movimentos contra a guerra em geral, ou quase ter sido expulso do programa de doutoramento, por razões que transcrevo abaixo. Pelo seu trabalho em Topologia Diferencial ganhou a Medalha Fields em 1966. Paralelamente, o seu trabalho na área dos Sistemas Dinâmicos teve repercussões muito particulares para lá do Muro de Berlim. Durante grande parte da sua carreira, foi professor em Berkeley. Senhor de muitos interesses, por causa do confinamento em vigor na altura da entrevista, tivemos oportunidade de falar acerca de alguns deles via Skype.

GONÇALO Gostava de começar por dizer que desde o momento em que eu estudei o seu trabalho em Dinâmica, primeiro no mestrado e depois no doutoramento, e ainda mais depois de ter conhecido alguns dos seus aspetos biográficos, fiquei com imensa vontade de falar consigo. Tenho de lhe confessar que nunca li o seu trabalho em topologia, aquele pelo qual ganhou a Medalha Fields. Uma das histórias acerca de si que mais me deixaram intrigado foi o facto de o seu doutoramento não ter começado muito bem, pois não?

SMALE Certamente que nos primeiros anos as coisas não correram muito bem...

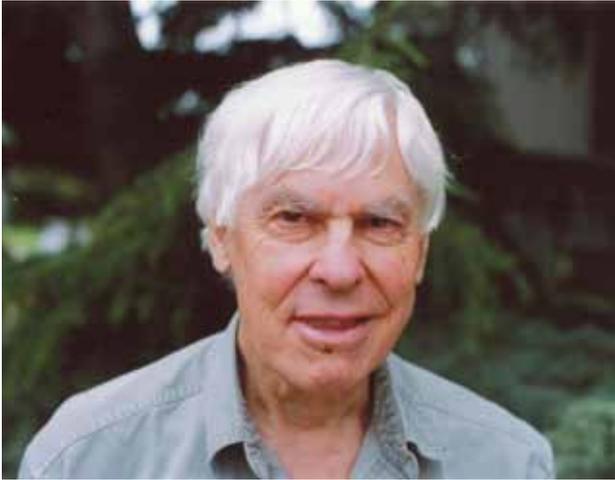
GONÇALO Faltava-lhe motivação?

SMALE Não sei bem, mas achava que tinha coisas mais importantes para fazer naquele momento. [Risos] Depois fui

avisado pelo diretor do meu departamento de que, se não mudasse de rumo, seria expulso...

GONÇALO Outro momento que faz parte da cultura popular, pelo menos entre os matemáticos, é que teve problemas políticos aquando do seu deslocamento a Moscovo em 1966 para o ICM, no qual ganhou a Medalha Fields...

SMALE [Risos] Isso foi há muito tempo e certamente terá uma ideia mais correta dos acontecimentos se ler o que na altura foi escrito na imprensa acerca do assunto. A revista *Science* tem quatro artigos sobre esse assunto em concreto... Eu fui intimado para comparecer na Comissão dos Assuntos Antiamericanos do Congresso antes de me ter deslocado para fora dos Estados Unidos da América (EUA), em grande medida pela minha participação bastante ativa contra a guerra do Vietname.



GONÇALO Julgo que, na sequência disso, cortaram-lhe os fundos...

SMALE Mais tarde, sim. Julgo que um ano ou dois depois de ter regressado aos EUA.

GONÇALO E deram-lhe alguma explicação para isso?

SMALE [Risos] Os artigos da *Science* que mencionei são precisamente acerca disso. Basicamente, o Congresso cortou os fundos à National Science Foundation (NSF). O corte do meu financiamento ocorre devido a isso. Claro que eles não podiam afirmar qual era a verdadeira razão para isso acontecer. Como tal, disseram simplesmente que eu era um mau administrador dos fundos que me tinham sido atribuídos.

GONÇALO É depois destes acontecimentos que decide virar a sua atenção para os Sistemas Dinâmicos. Foi algo que apareceu por acaso?

SMALE Na realidade, eu interessava-me por Sistemas Dinâmicos antes de ter começado a trabalhar em Topologia. Isso ajudou-me a resolver problemas em Topologia recorrendo a uma perspetiva que tinha da Dinâmica. Os Sistemas Dinâmicos sempre me pareceram uma área interessante porque podiam ser encarados como um assunto topológico global, algo que na literatura nunca tinha sido explorado. Tirando em problemas de dimensão 2, eram sempre tratados de um ponto de vista local. Pareceu-me ser um assunto muito interessante para ser estudado do ponto de vista da Topologia.

GONÇALO Tinha conhecimento do que estava a ser feito nesse mesmo momento na União Soviética na área dos Sistemas Dinâmicos?

SMALE Eu aprendi rapidamente o que eles estavam a fazer. Em 1961, fui convidado para uma conferência internacional na área de equações diferenciais ordinárias que teve lugar em Kiev. Estava lá um representante da escola russa que vinha de Gorki, pois na altura Moscovo não tinha uma escola de Sistemas Dinâmicos. O matemático de que estou a falar é o Dmitri Anosov¹. Andámos juntos durante toda a conferência e falámos muito sobre estes assuntos. Anosov era um excelente conversador. Em setembro desse ano, na sequência dessa conferência, fui a Moscovo, e Anosov apresentou-me a todos os nomes importantes da escola de Moscovo, entre eles Arnold e Sinai, e dei uma série de seminários sobre o meu ponto de vista para o estudo dos Sistemas Dinâmicos. Nessa altura, a escola de Gorki tinha conhecimentos sobre este tipo de problemas, mas apenas em dimensão 2. Eles tinham um trabalho que vinha dos anos 30, desenvolvido especialmente por Andronov. O Anosov era discípulo da escola do Andronov.

GONÇALO Qual foi o impacto em si de conhecer nomes tão fortes como Arnol e Sinai, conforme referiu?

SMALE Eles eram fortes mas, naquela altura, não eram fortes em problemas dinâmicos...

GONÇALO Talvez o forte deles nesses tempos fossem os trabalhos em Geometria...

SMALE Sim, mas eles rapidamente se tornaram nomes muito importantes também em Sistemas Dinâmicos.

GONÇALO Desconhecia esse facto. Sempre pensei que o interesse deles em problemas dinâmicos tinha partido dos trabalhos do Kolmogorov...

¹ Para uma perspetiva da influência do trabalho (e da personalidade) de Smale no trabalho futuro de Anosov, ver a descrição pelo próprio Anosov em D.V. Anosov. "Dynamical Systems in the 1960s: The Hyperbolic Revolution". In: *Mathematical Events of the Twentieth Century*. 2006. doi: 10.1007/3-540-29462-7_1. Nas palavras do próprio Anosov, "I began to examine the stacks of these brochures. I read the title of one of them: S. Smale. 'A structurally stable differentiable homeomorphism with an infinite number of periodic points.' At that moment the world turned upside down for me, and a new life began."

SMALE Esses trabalhos não são aquilo a que eu chamaria Sistemas Dinâmicos na verdadeira aceção da palavra. Estavam muito mais ligados aos conceitos de entropia e de Teoria da Medida. Não é o que eu diria que sejam Sistemas Dinâmicos *mainstream*. Estava mais relacionado com Estatística...

GONÇALO Teoria Ergódica...

SMALE Precisamente. Eventualmente acabaram por se envolver em problemas topológicos, ou seja, mais ligados ao que eu estava a fazer na altura. Mas na época de que estamos a falar era uma área diferente, quase que sem sobreposições.

GONÇALO Ou seja, havia uma diferença clara entre dinâmica topológica e o resto...

SMALE Sim, porque estávamos a tentar perceber a estrutura topológica global das soluções de uma equação diferencial ordinária.

GONÇALO Quando estava a fazer o doutoramento li o seu livro, em coautoria com o Hirsh, sobre equações diferenciais ordinárias, um dos melhores livros de Matemática que eu já li. Depois, li a segunda edição desse livro...

SMALE A edição com o Devaney?

GONÇALO Exatamente. E elas são completamente diferentes...

SMALE Essa edição foi escrita pelo Devaney e, posteriormente, revista por nós. Na primeira edição, eu e o Hirsh fizemo-la a tempo inteiro, durante quase um ano. A iniciativa da segunda edição partiu da editora, visto que a primeira edição não tinha nada sobre a ferradura. O Devaney foi meu aluno e estava dentro do espírito. Quando revimos, eu e o Hirsh ficámos agradados com o resultado e decidimos ir para a frente com a publicação.

GONÇALO Curiosamente, teve um outro aluno, o Rufus Bowen, que desenvolveu o seu trabalho, entre outros assuntos, precisamente nos difeomorfismos de Anosov².

SMALE Ele era um matemático brilhante e aprendeu muito comigo sobre problemas de dinâmica. Ele foi *Full Professor* pouquíssimo tempo depois de ter acabado o

doutoramento. Ele era, de facto, brilhante e morreu de aneurisma cerebral muito novo.

GONÇALO Entretanto, o que é que o ocupa nestes dias?

SMALE Eu não diria nestes dias... [Risos]

GONÇALO Eu pergunto-lhe isto porque me cruzei com um artigo seu sobre *Learning Theory*...

SMALE Sim, durante uns tempos interessei-me por esses assuntos, sobre encontrar uma teoria matemática de como aprender com exemplos.

GONÇALO Pergunto-lhe isto porque sempre me pareceu que o professor é uma espécie de *outlier* dentro da comunidade matemática. Considera-se como tal?

SMALE [Risos] Provavelmente em certos aspetos, talvez seja...

GONÇALO Apesar dos seus variados interesses, acaba sempre por regressar e acrescentar algo à Matemática...

SMALE Bem, eu era professor de Matemática... Também fui durante algum tempo professor de Economia. Talvez seja essa a minha ligação.

GONÇALO Não sabia que tinha sido professor de Economia... Sobre teoria neoclássica e afins?

SMALE Sim, relacionado com aspetos económicos da Teoria do Equilíbrio.

GONÇALO E acredita que essa teoria funciona na prática?

SMALE Julgo que essa teoria recebe alguma informação da realidade, sim. Mas depois faz o seu caminho. Sobre tudo, entra em linha de conta com a oferta e a procura...

GONÇALO Mas não lhe parece que os economistas pensam sobre a Economia da mesma maneira que os matemáticos pensam acerca da Matemática?

SMALE Bem, acho que não sei responder a essa pergunta. Existem muitas formas de se olhar para a Economia. Podemos olhar também de um ponto de vista mais mate-

mático, um pouco ao estilo de Arrow e Debreu. Conhece o trabalho deles?

GONÇALO Conheço, claro.

SMALE Era essa a minha perspetiva ao estudar Economia.

GONÇALO Mas esse é precisamente o meu ponto. Debreu afirmava que uma das maiores, senão a maior, influência no seu trabalho tinha sido o movimento do Bourbaki...

SMALE [Risos] Consigo imaginar o Debreu a dizer uma coisa dessas... Bem, eu não sou um bourbakista.

GONÇALO Não acha isso um pouco bizarro, construir modelos económicos como se fossem entidades formais?

SMALE Sim, é verdade. Mas o que eles fizeram essencialmente foi pegar na teoria de equilíbrio desenvolvida por Walras e torná-la mais sistemática, clarificando alguns dos problemas que a teoria original tinha. Isto levou ao desenvolvimento da teoria de que na base estavam os pressupostos estabelecidos por Walras. Isto vale o que vale, mas ambos ganharam o Prémio Nobel com este trabalho. O meu trabalho em Economia eram problemas teóricos relacionados com a forma de como os preços se ajustavam em equilíbrio. Passei anos a estudar isto e nunca consegui resolver este problema. Este é um problema em Economia que podemos suspeitar de que a Matemática consegue ajudar, mas que nunca me conseguiu ajudar a mim.

GONÇALO É um problema ainda em aberto...

SMALE Sim, é verdade.

GONÇALO Parece-me, sempre que leio um economista do século XIX, que ele está de alguma maneira mais ligado à realidade.

SMALE Ele conseguiu, de uma maneira muito interessante, relacionar a procura e a oferta e conseguiu encontrar um modelo de equilíbrio entre as duas. O problema é que esse modelo é estático e eu estava à procura da solução para um problema dinâmico. Passei anos a pensar nisto e escrevi alguns artigos sobre este assunto, mas nunca

consegui resolver o problema.

GONÇALO Tenho uma última questão, algo que sempre me intrigou. Por que razão é que foi para Hong Kong?

SMALE [Risos] Eu tive a hipótese de me reformar da minha posição em Berkeley e ficar com o salário completo para o resto da vida. Passado pouco tempo, comecei a dar aulas em Hong Kong e tinha assim a possibilidade de acumular os dois salários. Nunca tive tanto dinheiro na minha vida. [Risos]

GONÇALO Na realidade, tenho uma outra questão. Ambos partilhamos um interesse pela fotografia. Podia explicar-nos que prazer retira dessa experiência?

SMALE Eu comecei a fotografar os cristais da minha coleção. Entretanto, fui desenvolvendo a minha técnica e hoje existem exposições de fotografias minhas³. Depois, à medida que a fotografia se tornou mais digital, eu fui deixando de fotografar...

GONÇALO Ou seja, foi deixando de fotografar quando toda a gente estava a tornar-se fotógrafo...

SMALE [Risos]

GONÇALO Professor, foi um prazer imenso ter tido esta conversa consigo. Era uma coisa que eu procurava a oportunidade de fazer há muito tempo e, agora que estamos confinados e impedidos de viajar, pareceu-me o momento ótimo para podermos finalmente conversar. Professor, o meu muito obrigado.

SMALE Obrigado, foi um prazer.

²Rufus Bowen. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. 2nd ed. Springer, 2008.

³Ver, por exemplo, www.msri.org/general_events24526.

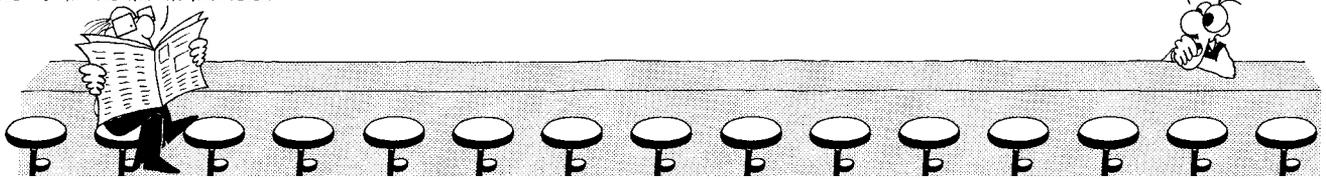


BARTOON

LUIS AFONSO

HÁ MODELOS MATEMÁTICOS QUE INDICAM QUE O PICO DA EPIDEMIA JÁ FOI ATINGIDO EM PORTUGAL E HÁ MODELOS MATEMÁTICOS QUE INDICAM QUE TAL NÃO ACONTECEU.

OH, A MATEMÁTICA, ESSA CIÊNCIA TÃO SUBJECTIVA...



Cuis

Publicado originalmente no jornal Público, em 12/04/2020. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:

Daniel Pinto Universidade de Coimbra

Hugo Tavares Instituto Superior Técnico

CONSELHO EDITORIAL:

Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Juvenal Espírito Santo** Instituto Nacional de Segurança Social de S. Tomé e Príncipe e Universidade de S. Tomé e Príncipe • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Nisa Figueiredo** Thomas More Hogeschool Roterdão • **Paolo Piccione** Universidade de São Paulo • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

Fid'algo – Print Graphic Design

Rua da Nau Catrineta n 14 2^o Dtr 1990-186 Lisboa

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB:

Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO

Sociedade Portuguesa de Matemática

SEDE: Av. República 45, 3^o Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: <http://gazeta.spm.pt/politica>

TIRAGEM **1250 Exemplares**

ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**



JOHN HORTON CONWAY 1937-2020

Morreu John H. Conway. Neste pequeno texto, quis trazer algumas impressões pessoais sobre a maneira como a sua vida tocou a minha. Para uma resenha da sua obra matemática não sou a pessoa indicada. O legado científico de Conway é profundo e diversificado, vai da Lógica à Teoria das Funções, da Combinatória à Álgebra, da Geometria à Computação... Além dos seus contributos, há a sua personalidade bipolar. Depressão e euforia não lhe eram estranhas. Há matemáticos cujas vidas bizarras são vistas com simpatia e curiosidade, devido, no fundo, à respetiva relevância matemática. Não é o caso de Conway, que teve uma vida plena, com os altos e baixos próprios de um homem que viveu relações subjetivamente complexas com o seu semelhante. Mas isso são contas de outro rosário...

O primeiro contacto pessoal que tive com Conway sucedeu nos anos 90 do século passado. Era eu aluno em Berkeley, quando dei com um problema fascinante no *Mathematical Intelligencer*, John Conway o seu autor. Vim a publicar este problema no *Boletim* da SPM 42, em 2000. Aqui o repito.

UM PROBLEMA PARA AMBIDEXTROS

Com a mão direita escreva no papel o número 2.

Use as 14 frações seguintes para gerar duas sucessões de números naturais de acordo com as instruções.

$$\frac{17}{91} \frac{78}{85} \frac{19}{51} \frac{23}{38} \frac{29}{33} \frac{77}{29} \frac{95}{23} \frac{77}{19} \frac{1}{17} \frac{11}{13} \frac{13}{11} \frac{15}{14} \frac{15}{2} \frac{55}{1}$$

Se r é o último número escrito com a mão direita, procure a primeira fração cujo produto com r produz um número inteiro. Escreva esse número no papel com a mão direita. Se esse número é uma potência de 2, digamos 2^s , escreva s com a mão esquerda.

Que sucessão está assim associada à mão esquerda?¹

Esta questão mexeu comigo o suficiente para, encontrado o email de Conway, lhe enviar uma mensagem. Esperava, no máximo, uma resposta com uma referência nas semanas seguintes. Pois Conway respondeu no mesmo dia, trocámos várias mensagens, e uma versão da sua explicação apareceu no *Boletim* da SPM 43, em 2000. Claro que fiquei muito impressionado! Como pode um matemático da sua envergadura perder tempo com um estudante como eu? Bem, ao longo dos anos estivemos juntos mais vezes, e acabei por perceber que Conway nunca desistiu da maravilhosa tarefa de promover o prazer de pensar. Para tal, nada melhor do que a matemática!

Conway teve colaboração regular com o programa Novos Talentos, da Fundação Calouste Gulbenkian. Numa sua visita, na Curia, tive oportunidade de o entrevistar.² A minha primeira pergunta teve a ver com um evento que

¹A resposta é a sucessão dos números primos, na sua ordem natural!

²"Entrevista com John Horton Conway", *Boletim* da SPM 51, outubro de 2004, pp. 49-53; "Breakfast with John Horton Conway", *Newsletter of the European Mathematical Society* 57, September 2005, pp. 32-34.

eu presenciara uns anos antes, no Mathematical Sciences Research Institute, em Berkeley. Conway, ao explicar como conseguira provar uma dada fórmula, sentiu necessidade de transmitir à assistência a alegria avassaladora associada ao sucesso nessa empreitada. Deitou-se repentinamente no chão, de barriga para o ar, agitando os quatro membros enquanto gritava de alegria. Já agora, aqui está a fórmula em questão:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Se o problema acima evidencia um entendimento profundo e agudo da matemática elementar, esta expressão inocente está prenhe de sentido novo, à luz da Teoria dos Jogos Combinatórios, que criou com Richard Guy e Elwyn Berlekamp, também recentemente desaparecidos. Conway criou um mundo novo, o dos jogos (também conhecidos por “jogos à Conway”), no seu livro *On Numbers and Games*.³ Trata-se de jogos em que dois jogadores alternam, sem intervenção da sorte nem informação escondida, que se conseguem codificar usando um novo sistema generalizado de números, criado por Conway, os números surreais. Nasceu aqui uma nova área académica, mas também todo um universo, suficientemente vasto para conter números, infinitésimos, infinitos, jogos...

Conway desenvolveu esta teoria a partir do jogo oriental Go, de que era um dos poucos praticantes em Cambridge. Esta característica de criar em áreas não previamente familiares é talvez típica das grandes mentes. Nos anos 60, descontente com o seu progresso científico, reservou algum tempo semanal para se dedicar ao problema de encontrar grupos simples finitos. Na primeira noite encontrou a ordem de um novo grupo (19 dígitos) e, mais tarde, foi um dos mais relevantes autores do *Atlas* dos grupos finitos.

O *Atlas* surgiu em 1985 e contém informações várias sobre uma lista de cerca de 90 grupos finitos. A sua elaboração constituiu um dos grandes esforços coletivos dos matemáticos do século XX.

Contra a sua vontade, John Conway é mais conhecido universalmente como o criador do Jogo da Vida. Este jogo para zero jogadores depende somente da configuração inicial e das regras que definem as sucessivas gerações. A literatura académica associada a este autómato celular é imensa!

Martin Gardner, o príncipe dos divulgadores, dedicou-lhe um livro, porque a colaboração de Conway com o autor da coluna “Mathematical Games” do *Scientific American* foi muito frutuosa. Não deixa de me maravilhar contemplar este diálogo entre um dos maiores matemáticos do seu

tempo e um escritor apaixonado pelos temas, mas sem qualquer preparação formal. A qualidade dos textos de Gardner atesta a bondade deste binómio: o prazer no raciocínio rigoroso e criativo serviu de terreno comum a uma interação exemplarmente fértil.

Nos encontros em homenagem a Martin Gardner –

Gathering for Gardner – em que Conway participava regularmente, tive oportunidade de testemunhar muitas manifestações da sua personalidade exuberante. Nestes eventos, muitos assuntos são abordados, da matemática pura à magia, passando pelos jogos. Conway, apaixonado por todos eles, intervinha à sua maneira, o mais das vezes gritando do fundo da sala. Contudo, eu ouvi-o sempre com atenção, porque para lá da forma, o conteúdo das suas tiradas era sempre enriquecedor. O que John sabia, sabia-o com uma profundidade essencial que escapa ao comum dos mortais. É que todos conhecemos os sólidos platónicos, mas, acreditem, o dodecaedro e os seus pares nunca tiveram outro amigo íntimo como John Horton Conway.

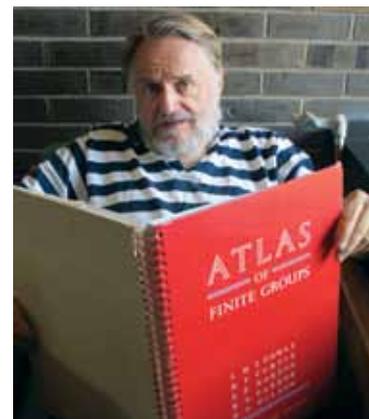


Figura 1. J. H. Conway com o Atlas, da sua autoria em colaboração com S. Norton, R. Curtis, R. Parker e R. Wilson. (Foto: Siobhan Roberts).

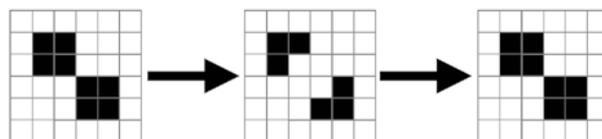


Figura 2. Três gerações no Jogo da Vida.

Coordenação do espaço HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:
Pedro Freitas, Universidade de Lisboa, pjfreitas@fc.ul.pt

³ *Os Números e os Jogos*, Gradiva 2010. Também em português, de Conway e Guy: *O Livro dos Números*, Gradiva 1999. De Donald Knuth, *Números Surreais*, Gradiva 2002. Este último, sobre a teoria de John Conway.



NUNO CAMARINHO
Universidade
de Aveiro
nfc@ua.pt

O SABER EM TEMPOS DE CÓLERA

O público exige dos cientistas que sejam oráculos ou milagreiros, coisas que não são nem querem ser. A ciência precisa de errar e de aprender com os erros, estará a sociedade disposta a esperar?

Quem, de entre os leitores mais ou menos militantes ou compulsivos, não imaginou algum dia a circunstância? Talvez uma pequena pena de prisão, um ameaço de apocalipse, um qualquer confinamento que, de um dia para o outro, nos desse o tempo desejado ou idealizado para lermos, livremente, os livros que esperam por nós?

A ilusão durou pouco, o tempo menos livre do que imaginara, entre reuniões, aulas para preparar, refeições, limpezas, e as muitas tarefas que a vida exige e vai cobrando. Os noticiários não ajudavam, cheios de sobressaltos, alertas, especulações e outras artimanhas experimentadas para chamar a atenção. Durante o primeiro mês quase não peguei num livro, embora os transportasse de divisão para divisão e me deitasse com dois ou três empilhados na mesinha de cabeceira.

Graças a alguns compromissos profissionais e também à má consciência que vinha acumulando, arreepei caminho e adentrei-me em alguns volumes que iam ganhando pó sobre as capas e ressentimentos mais do que justificados. Soube, entretanto, que diferentes sociedades estabeleceram diferentes relações com a leitura durante a pandemia. Aqui, em Portugal, as vendas baixaram a níveis inauditos, sem livrarias, sem muitas alternativas nem hábitos digitais consolidados. Já em Inglaterra, os livros competiram com as conservas e o papel higiénico. E levanta-se a questão, o que podem ensinar-nos os livros em momentos como estes?

Muito ou nada. Vejamos... Há um certo conforto na conformidade, mas também alguma surpresa. Nada do

que vivemos é inaudito, basta ler *A Peste* de Camus, ou *o Diário da Peste de Londres* de Daniel Defoe, havemos de encontrar o mesmo medo dos estrangeiros, a desconfiança, a minorização da ameaça logo suprida pela paranoia, o pânico e a euforia, tudo o que é humano se repete, sempre diferente, sempre igual.

E a ciência, qual o papel da ciência? Justamente os media vão questionando: O que sabemos, o que podemos saber? Como resolver este problema? A ciência foi avançando com algumas ideias, hipóteses e sugestões, mas o seu tempo, por mais que se tenha acelerado nas últimas décadas, não é o do telejornal diário. O vírus é novo, há que perceber como atua, como se transmite e de que forma interage com os nossos organismos. As estratégias de combate são variadas: fármacos, comportamentos, vacinas, equipamentos de proteção. O público exige dos cientistas que sejam oráculos ou milagreiros, coisas que não são nem querem ser. A ciência precisa de errar e de aprender com os erros, estará a sociedade disposta a esperar? Entretanto abundam os vendedores de banha da cobra, oferecendo sumos de frutos exóticos, soluções mágicas e medicamentos que se mostraram eficazes noutras patologias.

No século XXI as epidemias são vistas como anomalias, uma disrupção das nossas vidas intensas e focadas que deve ser resolvida o mais rapidamente possível. Também eu desejo que o problema se resolva, mas, enquanto não o fizermos, vou aproveitando para ler, de manhã literatura e à tarde artigos científicos.

JOÃO ARAÚJO ELEITO PRESIDENTE DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

A nova direção da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) foi eleita no passado dia 14 de julho para o biénio 2020/2022, com João Araújo a assumir a presidência depois de exercer a vice-presidência no último mandato. Tendo Patrícia Gonçalves (Instituto Superior Técnico) e Jorge Milhazes de Freitas (Universidade do Porto) como vice-presidentes, a nova direção propõe-se dar mais visibilidade à matemática, mostrando como esta pode contribuir para melhorar a vida das pessoas. Pretende também mostrar os rostos da matemática portuguesa, criando prémios para professores, investigadores e alunos que estimulem o ensino e a excelência da matemática em Portugal. João Araújo substituiu Filipe Oliveira, que esteve à frente da sociedade entre 2018 e 2020. A tomada de posse terá lugar em setembro.

Nas prioridades de ação, a nova direção aposta na consolidação dos grandes progressos nos ensinamentos Básico e Secundário conseguidos nos últimos 15 anos, procurando ser um parceiro ativo na melhoria do ensino da matemática.

► **João Araújo** é professor catedrático do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova. Estudou na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e doutorou-se em York, Inglaterra, tendo a sua tese recebido o KM Stott Memorial Prize, que distingue a melhor tese do ano.

► **Patrícia Gonçalves** é professora catedrática do Instituto Superior Técnico. Estudou na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e fez doutoramento no IMPA, Rio de Janeiro. Foi investigadora na Universidade do Minho e professora na PUC do Rio de Janeiro. Recebeu o Prémio Professor Abílio Aires, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e o Prémio de Estímulo à Investigação da Fundação Calouste Gulbenkian, e foi distinguida com uma ERC Starting Grant.

► **Jorge Milhazes de Freitas** é professor associado com agregação da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. É diretor do Centro de Matemática da Universidade do Porto e foi vice-presidente do Centro Internacional de Matemática (CIM). Ganhou a 3.ª Edição do Prémio José Anastácio

da Cunha, que distinguiu a melhor tese de doutoramento em matemática em Portugal no período de 2001 a 2006.

A nova direção é composta ainda por Alexandra Moura, ISEG – Universidade de Lisboa, Ana Jacinta Soares, Universidade do Minho, Gabriela Gomes, Liverpool School of Tropical Medicine, Isabel Hormigo, Escola Secundária D. Filipa de Lencastre, Mário Bessa, Universidade da Beira Interior, Joana Teles, Universidade de Coimbra, Luís Malheiro, Escola Secundária da Ramada, e Pedro Antunes, Universidade Aberta.



João Araújo



Jorge Milhazes de Freitas



Patrícia Gonçalves

PRÉMIO ABEL 2020 ATRIBUÍDO A HILLEL FURSTENBERG E GREGORY MARGULIS

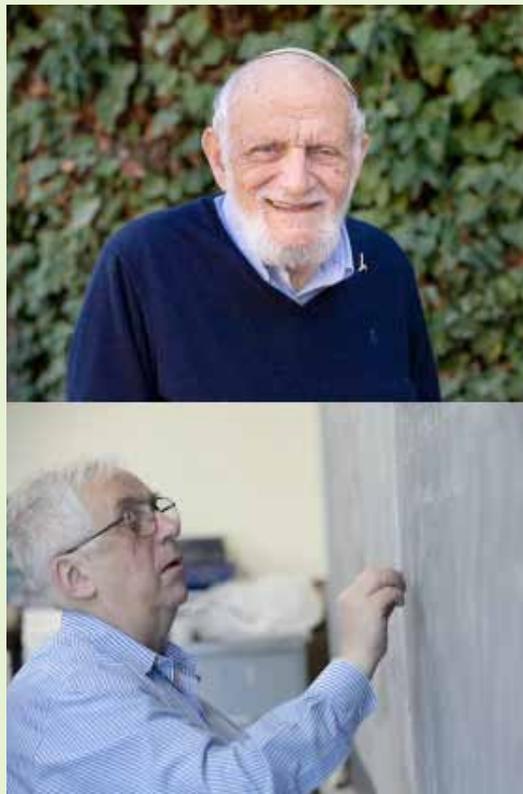
Embora nunca tenham trabalhado juntos, Hillel Furstenberg e Gregory Margulis influenciaram-se mutuamente ao longo do tempo. Por isso mesmo, a Academia das Ciências e Letras Norueguesa decidiu, a 18 de março, atribuir-lhes em conjunto o Prémio Abel 2020 “pelo uso de métodos pioneiros de probabilidade e dinâmica em teoria de grupos, teoria dos números e combinatória”.

Hillel Furstenberg, da Universidade Hebraica de Jerusalém, em Israel, e Gregory Margulis, da Universidade de Yale, nos Estados Unidos da América (EUA), inventaram técnicas de passeio aleatório para investigar objetos matemáticos, como grupos e grafos e, ao fazerem-no, introduziram métodos probabilísticos para resolver muitos problemas abertos em teoria de grupos, teoria dos números, combinatória e teoria dos grafos.

De acordo com Hans Munthe-Kaas, presidente do Comité Abel, o trabalho desenvolvido por Furstenberg e Margulis “derrubou o muro tradicional entre a matemática pura e a aplicada”.

Hillel Furstenberg nasceu em Berlim em 1935, no seio de uma família judia. Em 1939, deixou a Alemanha nazi e partiu para os Estados Unidos da América com a família. Quando publicou os primeiros trabalhos, surgiu o rumor de que não seriam trabalhos individuais mas de um grupo de matemáticos. Como o trabalho continha ideias de tantas áreas diferentes, alguns julgaram impossível ser de uma única pessoa. Desenvolveu a sua carreira em diversas universidades na América, mas em 1965 foi para a Universidade Hebraica de Jerusalém, onde ficou até à sua reforma, em 2003. O matemático ganhou o Prémio Israel e o Prémio Wolf, tendo ainda ajudado Israel a tornar-se uma referência mundial na matemática.

Gregory Margulis nasceu em Moscovo, em 1946, e desde cedo demonstrou um talento inato para a matemática. Conquistou a Medalha Fields em 1978, com apenas 32 anos, mas viu-se impedido de receber a distinção porque as autoridades soviéticas recusaram-lhe o visto para viajar para Helsínquia.



Margulis foi um dos jovens matemáticos de topo na União Soviética, mas a sua origem judaica fechou-lhe muitas portas e impossibilitou-o de conseguir trabalho na Universidade de Moscovo. Em 1979, quando a União Soviética deu maior liberdade aos académicos, Margulis foi para a Europa, mas acabou por se fixar na Universidade de Yale, nos EUA, onde está até hoje. Margulis conquistou também o Prémio Lobachevsky e o Prémio Wolf. Os dois laureados nunca trabalharam juntos, contudo influenciaram muito o trabalho um do outro. Este que é o maior galardão matemático, considerado equivalente ao Prémio Nobel, é atribuído anualmente, desde 2003, e confere um prémio monetário de cerca de 640 mil euros. A cerimónia de entrega do prémio, inicialmente agendada para 19 de maio, decorrerá em conjunto com a cerimónia de 2021 devido às limitações impostas pela Covid-19.

BLOCO DE NOTAS NA ANTENA 1

A Sociedade Portuguesa de Matemática, em parceria com a Antena 1, desenvolveu alguns conteúdos sobre matemática do 11.º e do 12.º anos para o programa *Bloco de Notas*.

O que são e para que servem os números complexos ou números imaginários?, com Filipe Oliveira, presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática.

As funções e o cálculo para que servem? A aplicação dos conceitos, por exemplo, à pandemia da Covid-19 ou aos juros no banco, com Jorge Buescu.

A importância da álgebra para perceber as funções. A importância da estatística e das probabilidades, com Nuno Crato, matemático, ex-ministro da Educação.

Veja tudo aqui: https://www.rtp.pt/antena1/bloco-de-notas/matematica_11226.



O programa Bloco de Notas disponibiliza ainda conteúdos sobre Matemática aplicada às ciências sociais de 11.º ano, da autoria do sociólogo Luís Filipe Valente Rosa.

CANDIDATURAS AO PRÉMIO HANSJÖRG WACKER ALARGADAS ATÉ 2021

As candidaturas ao Prémio Hansjörg Wacker estão abertas até 15 de abril de 2021, adiando o prazo inicialmente previsto por um ano. O prémio, instituído pelo European Consortium for Mathematics in Industry (ECMI) e por um consórcio de instituições de Ensino Superior em

Linz, na Áustria, distingue uma dissertação de mestrado num tema de matemática aplicada. A edição de 2020 respeita as dissertações concluídas no período de 2018 a 2021. Consulte o processo de candidatura em: <https://ecmiindmath.org/ecmi-prizes>.



8TH EUROPEAN CONGRESS OF MATHEMATICS

Os organizadores do 8th European Congress of Mathematics e a European Mathematical Society (EMS) anunciam uma nova data para o congresso, que irá realizar-se 20 a 26 de junho de 2021 em Portorož, na Eslovénia. Este encontro, inicialmente previsto para 2020, foi adiado por razões de segurança dos participantes devido à pandemia COVID-19. Informações em: <https://www.8ecm.si/>

PRIMEIRA EDIÇÃO DA CYBERSPACE MATHEMATICAL COMPETITION

Portugal participou, nos dias 13 e 14 de julho, na primeira edição da Cyberspace Mathematical Competition (CMC), promovida pela American Mathematics em parceria com a Art of Solving Problems (AoPS), que decorreu exclusivamente online. A equipa portuguesa contou com seis concorrentes: Eduardo Guerreiro, Leonardo Tavares, Marta Gonçalves, Pedro Antunes, Tiago Marques e Tiago Mourão. A missão do CMC é proporcionar uma oportunidade divertida para os melhores jovens estudantes de matemática do mundo se envolverem com problemas desafiantes e conhecerem – pelo menos, virtualmente – colegas de outros países. O AoPS concebeu uma plataforma específica para o concurso, bem como fóruns de socialização e outras atividades matemáticas. Veja todas as informações em <https://artofproblemsolving.com/contests/cmc>.

8TH IBERIAN MATHEMATICAL MEETING

October 2021, Institute of Mathematics of the University of Seville (IMUS)





3.º CAMPEONATO NACIONAL MULTIPLI DECORREU EXCLUSIVAMENTE ONLINE

A Covid-19 não permitiu que o Campeonato Multipli prosseguisse nos moldes previstos, mas isso não foi impedimento à realização da competição. Foi criada a app Multipli Minute e todas as provas foram realizadas online.

A 3.ª edição do Campeonato de Multipli decorreu durante o mês de julho e foi composta por sete provas semifinais regionais (Algarve, Alen-

tejo, Área Metropolitana de Lisboa, Centro, Norte, Região Autónoma da Madeira e Região Autónoma dos Açores) e uma grande final.

O campeonato é organizado pela Alfiii e pelo Politécnico de Leiria, com o apoio de vários parceiros, e tem como objetivo estimular o interesse dos alunos pela matemática.

EXPLICA-ME COMO SE TIVESSE CINCO ANOS

O Instituto Superior Técnico está a promover o ciclo de palestras “Explica-me como se tivesse cinco anos”, conversas sobre ciência para crianças e adultos.

As conversas decorrem aos sábados às 11h, com periodicidade quinzenal, e são transmitidas em direto no Facebook, ficando também disponíveis em diferido.

Podem ser enviadas perguntas previamente por e-mail ou feitas em direto na caixa de comentários da emissão ao vivo no Facebook.

Consulte mais informações em <https://explicame.tecnico.ulisboa.pt/~explicame.daemon>.



PORTUGUESES NA EMS

O matemático português Jorge Buescu foi eleito vice-presidente do Comité Executivo da European Mathematical Society (EMS), no encontro que decorreu, exclusivamente online, no passado dia 4 de julho. O mandato terá início a 1 de janeiro de 2021.

Também Fernando Pestana da Costa, professor catedrático da Universidade Aberta, é agora o diretor do periódico Newsletter da EMS. Editado quatro vezes por ano, é um dos maiores veículos de notícias junto da comunidade matemática na Europa.

Os dois matemáticos, que já foram presidentes da Sociedade Portuguesa de Matemática, assumem assim cargos de relevo na maior sociedade matemática europeia.



Jorge Buescu



Fernando Pestana da Costa

TABELA DE PUBLICIDADE 2020

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1900

N.º de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

CONTACTOS

Tel.: 21 793 97 85

imprensa@spm.pt

ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)

Margem de corte: 4 mm

LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

	 PÁGINA INTEIRA	 2/3 PÁGINA	 1/3 PÁGINA	 1/2 PÁGINA	 BORDA
EMPA	590€	390€	220€	120€	220€
FRK	490€	290€	170€	120€	170€

PREMI

PRIZE



Il·lustració: Manuel del Arco

15.000 €

Publicació de la monografia guanyadora a la sèrie Progress in Mathematics de Birkhäuser.

Publication of the winning monograph in Birkhäuser series Progress in Mathematics.

FERRAN SUNYER I BALAGUER

2021

PREMI INTERNACIONAL D'INVESTIGACIÓ MATEMÀTICA

BASES

Premi ofert a una monografia matemàtica de caràcter expositiu que presenti els darrers desenvolupaments d'una àrea activa en recerca. El nom del guanyador serà anunciat a Barcelona l'abril de 2021.

TERMINI

27 de novembre de 2020 a les 13 hores (GMT+1).

INTERNATIONAL MATHEMATICAL RESEARCH PRIZE

CONDITIONS

Prize awarded for a mathematical monograph in an expository nature presenting the latest developments in an active area of research. The name of the prize-winner will be announced in Barcelona in April, 2021.

DEADLINE

November 27, 2020 at 1pm (GMT+1).

<http://www.ffsb.cat>

f FSB
fundació FERRAN SUNYER I BALAGUER



QUANDO A MATEMÁTICA É RAINHA!

Da atipicidade dos últimos tempos à transformação digital da economia

Nos últimos meses todos nós temos vivido tempos de incerteza e de receios contra um vírus mais de 100 vezes mais pequeno do que o diâmetro de um fio de cabelo. Tem sido um período em que temos ouvido falar muito de matemática, desde número de reprodução a crescimento exponencial, achatamento e ponto de inflexão da curva, sendo que muitos querem oferecer projeções, opiniões e orientações. Foi interessante acompanhar fóruns de discussão, reportagens e entrevistas, artigos de divulgação e artigos científicos onde, num dia, se defendiam determinadas teorias para, no dia seguinte, se comprovar o contrário. Foi fascinante observar como a matemática possibilitou o desenvolvimento de modelos epidemiológicos que foram fundamentais para guiar estratégias de intervenção e salvar as vidas de tantas pessoas à nossa volta. Vivemos num mundo global e é incrível ver também como a informação gerada nos hospitais é partilhada em tempo real com comunidades de cientistas em todo o mundo, que trabalham incansavelmente para encontrar soluções para esta pandemia. Embora seja expectável que o número de artigos científicos publicados num contexto de pandemia aumente consideravelmente, não deixa de ser inquietante saber que parte desta elevada produção científica resulta de artigos submetidos e publicados em menos de 12 horas. Por um lado, por razões éticas, do que deve ser o papel de um editor/revisor de artigos científicos e, por outro, por serem aceites em revistas do primeiro quartil com maior fator de impacto, que são utilizadas para definir algumas

das orientações das diferentes entidades gestoras desta pandemia... Foram e estão a ser tempos difíceis, em que cada indivíduo tenta libertar o matemático que tem dentro de si e em que mais do que nunca cada um quis saber fazer projeções, aprender e conhecer a matemática que lhe permitia compreender quando poderia voltar à sua vida anterior, aquela de que tantas vezes nos queixávamos mas à qual agora, mais do que nunca, atribuímos um especial sabor.

Nestes últimos meses, todos os professores foram confrontados com o enorme desafio de, de um dia para o outro, deixarem de lecionar numa sala cheia de alunos para passarem a ser professores à distância. Foi necessário garantir que todos os estudantes tivessem acesso aos dispositivos tecnológicos necessários de forma a poderem acompanhar este novo estilo de ensino. Foi necessária uma enorme aprendizagem de docentes e estudantes, realizada em tempo recorde, para conseguir escolher a melhor plataforma online, a mais eficaz na exposição de conteúdos de forma síncrona e assíncrona que permitisse manter a motivação dos estudantes, que muitas vezes pareciam não estar nas aulas síncronas tal era o silêncio que imperava quando era colocada uma questão. Foi necessário reinventar todo o processo de avaliação de modo a tentar que fosse mais justo e sem fraude. Foi necessário reinventar as aulas práticas e os estágios profissionais de modo a consolidar a aprendizagem e a manter a relação com as empresas dos diferentes setores, fundamentais

para os estudantes. Os professores revelaram-se incríveis e com uma enorme capacidade de resiliência e de trabalho. Conseguiram dar resposta a todos estes desafios, criar estratégias que ajudaram a garantir que nestes últimos meses os conteúdos continuassem a ser lecionados e que os estudantes continuassem a trabalhar. Foi perfeito? Não foi, o esforço foi desmedido, o possível e o impossível foram feitos de forma a permitir que o ano letivo corresse dentro da normalidade no contexto atípico em que vivemos. Deixo aqui um forte aplauso a todos os professores pelo trabalho desenvolvido que permitiu que fosse “entregue a carta a Garcia”.

Nestes últimos tempos, a aceleração no processo de transformação digital foi visível. As empresas tiveram de se adaptar. Foi imperativa uma aposta no digital que permitisse estarem próximas dos clientes e de todos os *players* deste mercado global. Soluções tecnológicas disruptivas que permitam integrar todos os processos são necessárias para garantir a eficiência e a produtividade da empresa, reduzir custos e torná-la mais competitiva. Nesta transformação a matemática tem um papel fundamental. O desenvolvimento e a utilização de modelos *digital twin*

que possam mimetizar a dinâmica de um dado processo ou de vários processos dentro de uma empresa torna-se impactante na sua sustentabilidade. O tratamento dos dados gerados nesta transformação digital permitirá um conhecimento a uma escala nunca vista com um enorme potencial. A modelação, a simulação e a otimização dos processos industriais neste contexto são ingredientes extremamente importantes na atual sociedade de inovação. Exige cooperação entre diferentes disciplinas para produzir modelos precisos, algoritmos de simulação eficientes e técnicas de otimização confiáveis. Os matemáticos têm de estar envolvidos em cada uma das etapas desta transformação, tendo um papel decisivo na introdução de novos métodos e conceitos que facilitem esta mudança. A matemática é o veículo que permitirá concretizar esta transformação digital. Timo Hallantie (diretor do Programa de Investigação Europeu *Future and Emerging Technologies FET*) disse que a matemática é muitas vezes a componente esquecida nas candidaturas dos projetos europeus. Cabe a cada um de nós, matemáticos, não deixar que isso aconteça evidenciando em trabalhos, teses ou projetos de investigação o seu papel diferenciador.

QUER SER SÓCIO DA SPM?

CONSTRUA UMA
BANDA DE MÖBIUS
COM ESTA PÁGINA

COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos. Contacte-nos!

VALOR DE QUOTAS 2019:

Sócio Efetivo: 40 euros

Sócio Estudante: 20 euros
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais

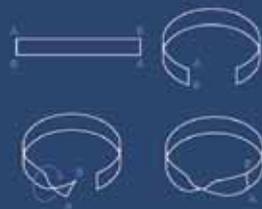
Escolar: 80 euros
Académico: 400 euros
Corporativo: 600 euros

CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.



spm
ASSOCIADA PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

INFORMAÇÕES

Av. da República, 45 3.º esq
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785
E-mail: spm@spm.pt

www.spm.pt



M Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: gazeta@spm.pt.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2020

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17,5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para imprensa@spm.pt

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

